

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO  
BACHARELADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

**Florestas geradoras maximais de custo  
mínimo em grafos dinâmicos**

Chung Jin Shian

MONOGRAFIA FINAL

MAC 499 — TRABALHO DE  
FORMATURA SUPERVISIONADO

Supervisora: Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Cristina Gomes Fernandes

São Paulo  
2025

*O conteúdo deste trabalho é publicado sob a licença CC BY 4.0  
(Creative Commons Attribution 4.0 International License)*

# Agradecimentos

*"Nada é impossível para aquele que persiste."*

— Alexandre, o Grande

Primeiramente gostaria de agradecer aos meus amigos do IME durante toda essa jornada. O contato com cada um e a troca de experiências contribuiu significativamente para o meu desenvolvimento técnico e profissional durante o curso.

Gostaria de agradecer à minha orientadora Cristina Gomes Fernandes por ter me apresentado ao tema desse trabalho, e ter sempre sido muito atenciosa e dedicada para garantir que eu estava de fato aprendendo os conceitos do trabalho. Foi ela quem fez crescer o meu interesse por Teoria da Computação, principalmente em algoritmos e estrutura de dados.

Além da Cristina, gostaria de agradecer aos professores Carlos Eduardo Ferreira e Marcel Kenji de Carli Silva, que fomentaram o meu interesse por algoritmos em grafos, e cujos ensinamentos contribuíram para a produção deste trabalho.

Por fim, quero agradecer à minha família, que me deu bastante suporte para eu me dedicar aos estudos nos primeiros anos da graduação.



# Resumo

Chung Jin Shian. **Florestas geradoras maximais de custo mínimo em grafos dinâmicos**. Monografia (Bacharelado). Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2025.

Grafos dinâmicos permitem modelar problemas em que o grafo sofre alterações ao longo do tempo. Um dos problemas fundamentais nesse contexto é a manutenção de uma árvore geradora de custo mínimo no decorrer de várias alterações no grafo. Neste trabalho, estudamos e implementamos vários algoritmos propostos por Holm, de Lichtenberg e Thorup para variantes desse problema. O foco foi no algoritmo para manter uma floresta geradora maximal de custo mínimo (MSF) decremental, em que se dá suporte eficiente à remoção de arestas do grafo. Além disso, estudamos as ideias usadas num algoritmo que mantém uma floresta geradora maximal de custo mínimo (MSF) em um grafo dinâmico, em que se dá suporte eficiente à adição e remoção de arestas.

**Palavras-chave:** Grafo dinâmico. Floresta geradora maximal de custo mínimo. Splay trees.



# Abstract

Chung Jin Shian. **Minimum spanning forests in dynamic graphs**. Capstone Project Report (Bachelor). Institute of Mathematics and Statistics, University of São Paulo, São Paulo, 2025.

Dynamic graphs allow us to model problems in which the graph changes over time. One of the fundamental problems in this context is maintaining a minimum spanning tree of the dynamic graph as it undergoes multiple updates. In this work, we study and implement several algorithms proposed by Holm, de Lichtenberg, and Thorup for variants of this problem. Our main focus is the algorithm for maintaining a decremental minimum spanning forest, which efficiently supports edge deletions in the graph. In addition, we also study the approach for maintaining a fully dynamic minimum spanning forest, which efficiently supports both edge insertions and deletions in the graph.

**Keywords:** Dynamic graph. Minimum spanning forest. Splay trees.





# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Conexidade em grafos dinâmicos</b>	<b>5</b>
2.1	Conexidade em florestas dinâmicas . . . . .	5
2.2	Biblioteca do grafo dinâmico . . . . .	6
2.2.1	Fatiamento do grafo em níveis . . . . .	6
2.2.2	Tipos de arestas do grafo . . . . .	7
2.3	Rotinas da biblioteca do grafo dinâmico . . . . .	7
2.3.1	Criação do grafo . . . . .	7
2.3.2	Consultas de conexidade . . . . .	8
2.3.3	Inserções de arestas . . . . .	9
2.3.4	Remoção de arestas . . . . .	10
2.4	Estrutura interna do grafo dinâmico . . . . .	15
2.4.1	Euler tour trees . . . . .	15
2.4.2	Nós das florestas . . . . .	17
2.4.3	Nó de aresta . . . . .	17
2.4.4	Nó de vértice . . . . .	19
2.4.5	Versão completa da rotina de adição de arestas . . . . .	21
2.4.6	Versão completa da rotina de remoção de arestas . . . . .	22
2.4.7	Rotina de substituição de aresta . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Algoritmo para MSF decremental</b>	<b>27</b>
3.1	Biblioteca da MSF decremental . . . . .	27
3.1.1	Listas de adjacências . . . . .	28
3.2	Ajustes nas invariantes . . . . .	29
3.3	Rotinas da biblioteca da MSF decremental . . . . .	30
3.3.1	Criação do grafo . . . . .	30
3.3.2	Consulta de peso da MSF . . . . .	31

3.3.3	Remoção de arestas . . . . .	31
3.3.4	Ajustes em nós das florestas . . . . .	35
3.3.5	Versão completa da rotina de adição de arestas . . . . .	37
3.3.6	Versão completa da rotina de remoção de arestas . . . . .	37
3.3.7	Busca por uma aresta substituta . . . . .	38
3.3.8	Rotina de substituição de aresta . . . . .	40
<b>4</b>	<b>Testes experimentais</b>	<b>43</b>
4.1	Algoritmo de Kruskal . . . . .	44
4.2	Grafo $G_0$ . . . . .	44
4.2.1	Primeira lista de arestas . . . . .	45
4.2.2	Segunda lista de arestas . . . . .	45
4.2.3	Tempo médio de execução das cinco listas de arestas . . . . .	46
4.3	Grafos $G_1, G_2, G_3, G_4$ e $G_5$ . . . . .	47
4.3.1	Grafo $G_1$ . . . . .	47
4.3.2	Grafo $G_2$ . . . . .	48
4.3.3	Grafo $G_3$ . . . . .	48
4.3.4	Grafo $G_4$ . . . . .	49
4.3.5	Grafo $G_5$ . . . . .	50
4.3.6	Tempo médio de execução dos cinco grafos . . . . .	50
4.4	Conclusão . . . . .	51
<b>5</b>	<b>Conclusões</b>	<b>53</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>57</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Grafos são estruturas de dados que nos permitem modelar vários problemas existentes da vida real, sejam eles estáticos ou dinâmicos. Em problemas estáticos, o grafo não sofre alterações com o passar do tempo. Podemos citar, como exemplo, o planejamento de rotas de entrega, análise de moléculas químicas e de dependências em software utilizando ordenação topológica. Entretanto, ainda existem muitas situações em que ocorre dinamicidade, como nas interações de usuários em redes sociais, monitoramento de epidemias (contatos e isolamentos) e sistemas de navegação *GPS*, onde há necessidade de recalcular rotas dependendo de condições como congestionamentos e acidentes. Para modelar tais problemas, podemos usar grafos dinâmicos.

Dessa forma, são considerados problemas em grafos completamente dinâmicos aqueles em que o grafo sofre, com o tempo, alterações como inserções e remoções de arestas. As variantes em que se permite apenas inserção ou apenas remoção de arestas são chamadas de parcialmente dinâmicas, conforme Holm, de Lichtenberg e Thorup [4]. Note que as operações de atualização e consulta são apresentadas de forma online, e as ações devem ser tomadas sem conhecimento algum das operações futuras.

Aqui serão tratados problemas em que o grafo dinâmico possui um conjunto fixo de vértices  $V$ , e estabelecemos  $n = |V|$ . Além disso, pode-se definir  $m$  como o número de arestas existentes. Na maior parte das vezes, a complexidade de tempo das operações será amortizada, o que implica que a complexidade é calculada como a média sobre todas as operações realizadas.

Um grafo dinâmico de ordem  $n$  é uma sequência de grafos  $(G_0, G_1, \dots, G_T)$ , onde  $G_0$  é o grafo inicial com  $n$  vértices e cada  $G_t$  para  $1 \leq t \leq T$  é obtido a partir de  $G_{t-1}$  pela adição ou remoção de alguma aresta. Chamamos de **alteração**, **modificação** ou **atualização** o resultado de alguma operação de adição e/ou remoção de arestas no grafo dinâmico.

Um problema em grafos dinâmicos consiste em verificar se o grafo atual  $G$  satisfaz alguma propriedade, e cada operação que realiza essa verificação é denominada **consulta**. A solução do problema depende da criação de um algoritmo que utiliza estruturas de dados capazes de realizar estas consultas e as alterações de forma eficiente.

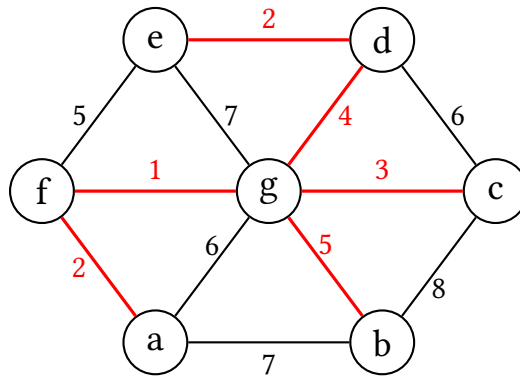
Iremos tratar inicialmente do **problema de conexidade em grafos dinâmicos**, que

consiste em manter um grafo dinâmico que sofre uma sequência de inserções e remoções de arestas, dando suporte a eventuais consultas para verificar se dois vértices  $u$  e  $v$  estão conectados por algum caminho no grafo dinâmico corrente. Porém, antes de entrarmos em detalhes, iremos apresentar alguns conceitos importantes que constituirão a base do nosso problema.

Uma **floresta** em um grafo  $G$  é um subgrafo acíclico de  $G$ . Uma **árvore** é uma floresta conexa, ou seja, uma floresta pode consistir de várias árvores. Um subgrafo  $F$  de  $G$  é **gerador** se contém todos os vértices de  $G$ . Com isso, podemos enunciar um problema clássico em grafos chamado o **problema da árvore geradora de custo mínimo** (MST, de *Minimum Spanning Tree*). Seja  $G = (V, E)$  um grafo conexo, onde  $V$  é o conjunto de vértices e  $E$  o conjunto de arestas de  $G$ . Para cada aresta  $uv \in E$ , temos um peso  $w(uv)$  associado. Assim, o objetivo do problema é encontrar uma árvore geradora cujo peso total

$$w(T) = \sum_{e \in E(T)} w(e)$$

seja mínimo. A Figura 1.1 mostra um exemplo de grafo conexo com pesos nas arestas e uma árvore geradora mínima.



**Figura 1.1:** Um grafo com sete vértices. As arestas em vermelho formam uma árvore geradora mínima (MST) com peso total 17.

Para encontrar uma árvore geradora mínima, podemos utilizar uma abordagem gulosa para o problema. Existem dois algoritmos gulosos clássicos que resolvem este problema eficientemente, quando o grafo não é dinâmico: o algoritmo de Kruskal e o de Prim. Cada um deles estabelece uma regra específica para escolher a próxima aresta a ser incluída na solução.

Se um grafo  $G$  tem  $n$  vértices e  $m$  arestas, o algoritmo de Kruskal consome  $O(m \lg n)$ , que é a complexidade de tempo para ordenar as arestas em ordem crescente de peso. Já o algoritmo de Prim pode ser implementado de modo a consumir  $O(m + n \lg n)$ , usando Fibonacci heaps. Tais algoritmos e suas implementações estão bem descritos no Capítulo 23.2 do livro de Cormen, Leiserson, Rivest e Stein [2] e, como não são o foco do nosso estudo, não iremos descrevê-los nesse estudo.

No nosso estudo, estamos interessados em grafos dinâmicos, que podem sofrer inserções e remoções de arestas, e por isso abrimos mão de exigir que o grafo seja conexo. Queremos

manter uma floresta geradora maximal de custo mínimo (MSF) do grafo. Já existe uma solução para esse problema proposta por Holm, de Lichtenberg e Thorup [4] na Seção 5 do seu artigo. Essa solução se baseia num algoritmo para a restrição decremental da MSF, descrita na Seção 4 de seu artigo, que por sua vez depende do algoritmo para o problema de conexidade em grafos dinâmicos descrito na Seção 3 de seu artigo.

No decorrer do nosso estudo, destrincharemos a solução dos autores em vários capítulos do texto. No Capítulo 2 descreveremos em detalhes o problema da conexidade em grafos dinâmicos, onde mostramos os pseudocódigos e a complexidade de tempo de cada um, e como certas invariantes são mantidas no decorrer de sua execução.

No Capítulo 3, descreveremos a nossa implementação do algoritmo para o problema decremental da floresta geradora maximal de custo mínimo, que chamamos de **MSF decremental**. Como este algoritmo é baseado em vários métodos do problema de conexidade em grafos dinâmicos, realizamos alguns ajustes nos métodos deste último para adaptarmos ao contexto decremental.

No Capítulo 4, descreveremos um estudo experimental em grafos aleatórios, comparando a performance entre um algoritmo derivado de Kruskal e o algoritmo para MSF decremental. Os resultados foram exibidos em forma de tabelas e gráficos gerados por programas escritos em *Python 3*.

Finalmente, no Capítulo 5 apresentaremos algumas conclusões, incluindo uma discussão dos ingredientes usados na solução de Holm, de Lichtenberg e Thorup [4] para o problema dinâmico da floresta geradora maximal de custo mínimo, que dá suporte a adições e remoções de arestas e utiliza várias estruturas decrementais em sua implementação.

As nossas implementações dos algoritmos de Holm, de Lichtenberg e Thorup [4] foram feitas utilizando a linguagem *C++*, e disponibilizamos o código no repositório do *GitHub* [7].



## Capítulo 2

# Conexidade em grafos dinâmicos

Como citado no Capítulo 1, o problema da conexidade em grafos dinâmicos visa construir um algoritmo eficiente que dê suporte a inserções e remoções de arestas e consultas de conexidade entre dois vértices. O algoritmo de Holm, de Lichtenberg e Thorup [4] para este problema de conexidade mantém  $\lceil \lg n \rceil$  florestas dinâmicas do grafo  $G$  de ordem  $n$ , e utiliza uma biblioteca que será descrita na próxima seção.

## 2.1 Conexidade em florestas dinâmicas

Rodrigues [6], em sua dissertação do mestrado, estudou, entre outros assuntos, o problema da conexidade em florestas dinâmicas e implementou o algoritmo que foi proposto na Seção 2 do artigo de Holm, de Lichtenberg e Thorup [4]. No Capítulo 2 da sua dissertação, Rodrigues descreveu as rotinas principais de sua implementação, que se baseia em Euler tour trees, e realizou uma análise minuciosa da complexidade de tempo de cada rotina de sua implementação. Levando isso em conta, optamos por não apresentar uma descrição detalhada desse mesmo algoritmo, e apenas explicar brevemente o que as rotinas principais fazem, ressaltando algumas diferenças da nossa implementação em código em relação à de Rodrigues.

O problema da conexidade em florestas dinâmicas pode ser considerado uma simplificação do problema de conexidade em grafos dinâmicos, quando o grafo em questão é uma floresta. A biblioteca que usaremos contém os seguintes métodos:

- **florestaDinâmica( $n$ )**: constrói e devolve uma floresta dinâmica  $F$  com  $n$  vértices e sem arestas;
- **conectadosFD( $F, u, v$ )**: devolve verdadeiro se  $u$  e  $v$  estão na mesma componente da floresta  $F$  e falso caso contrário;
- **adicioneFD( $F, u, v$ )**: insere uma aresta  $uv$  na floresta  $F$ ;
- **removaFD( $F, u, v$ )**: remove a aresta  $uv$  da floresta  $F$ .

A estrutura de dados principal usada neste algoritmo de Holm, de Lichtenberg e Thorup para dar suporte eficiente às rotinas acima é uma árvore binária de busca balanceada (ABBB). Uma floresta dinâmica é constituída de várias ABBBs. Rodrigues utiliza *treaps*

em sua implementação, que são de natureza aleatória. Em nosso caso, utilizamos árvores splay, que foram desenvolvidas por Sleator e Tarjan [8]. Árvores splay são árvores binárias de busca (ABBs) que possuem uma rotina extra (além das usuais de busca, inserção e remoção) chamada splay, que é acionada ao final de cada operação feita na árvore, de modo que é sempre aplicada ao nó mais profundo visitado. O nó em que a operação splay é aplicada é trazido, por meio das tradicionais rotações usadas no balanceamento de árvores binárias de busca, para cima até chegar na raiz da árvore. Isso faz com que o custo de uma sequência de  $m$  operações (inserção, remoção ou busca) em uma árvore splay com  $n$  nós seja  $O(m \lg n)$ , ou seja, o custo amortizado por operação é  $O(\lg n)$ . Como também já existe bastante literatura sobre árvores splay [5, Lecture 12], e seu funcionamento interno afeta muito pouco a descrição dos algoritmos que descreveremos, não entraremos em detalhes de sua implementação.

O resultado é uma implementação em que `florestaDinâmica(n)` tem custo  $\Theta(n)$  e os demais métodos da biblioteca têm custo amortizado  $O(\lg n)$ .

## 2.2 Biblioteca do grafo dinâmico

Implementar o grafo dinâmico resume-se à construção da seguinte biblioteca de forma eficiente:

- **grafoDinâmico( $n$ )**: contrói e devolve um grafo dinâmico com  $n$  vértices e sem arestas;
- **conectadosGD( $G, u, v$ )**: devolve verdadeiro se os vértices  $u$  e  $v$  estão na mesma componente de  $G$  e falso caso contrário;
- **adicioneGD( $G, u, v$ )**: adiciona a aresta  $uv$  ao grafo  $G$ ;
- **removeGD( $G, u, v$ )**: remove a aresta  $uv$  do grafo  $G$ .

Para entender como cada uma dessas rotinas funcionam, será necessário apresentar a estrutura interna da implementação do grafo para explicar como manter essas estruturas e como elas deixam essas rotinas mais eficientes.

### 2.2.1 Fatiamento do grafo em níveis

Na Seção 3.1 do artigo de Holm, de Lichtenberg e Thorup [4], é apresentada a técnica de fatiar o grafo  $G$  em níveis. Cada aresta do grafo possui um nível entre 1 e  $\lceil \lg n \rceil$ , onde  $n$  é o número de vértices do grafo  $G$ . Toda vez que inserimos uma aresta em  $G$ , ela possuirá o nível  $\lceil \lg n \rceil$ , e ele nunca será aumentado.

Seja  $G$  um grafo com  $n$  vértices, com conjunto  $V(G)$  de vértices e conjunto  $E(G)$  de arestas. Se  $X$  é um conjunto não-vazio de arestas, dizemos que o subgrafo de  $G$  **induzido** por  $X$  é o subgrafo gerador  $H$  de  $G$  tal que  $E(H) = X$ . Denotamos  $H$  por  $G[X]$ .

Sendo assim, seja  $G_i = G[X]$  o grafo onde  $X$  é o conjunto das arestas do grafo  $G$  de nível menor ou igual a  $i$ . Para cada nível  $i$ , manteremos uma floresta maximal  $F_i$  de  $G_i$ . Além disso, vamos manter também, para cada nível  $i$ , um grafo  $R_i$  em forma de listas de adjacências, que guardam apenas arestas de nível  $i$  que não estejam em  $F_i$ .



Consequentemente, temos que  $G_1 \subseteq G_2 \subseteq \dots \subseteq G_{\lceil \lg n \rceil}$  e deduzimos que  $G = G_{\lceil \lg n \rceil}$  e que  $F_{\lceil \lg n \rceil}$  é uma floresta maximal de  $G$ . Dessa maneira, sempre que estivermos realizando alguma operação de consulta de conexidade em nosso grafo  $G$ , podemos realizá-la na floresta  $F_{\lceil \lg n \rceil}$  de  $G$ .

Com isso, podemos enunciar algumas invariantes, que são mantidas ao longo das modificações no grafo  $G$ :

- (I)  $F_i$  é uma floresta maximal de  $G_i$  para todo  $1 \leq i \leq \lceil \lg n \rceil$ ;
- (II)  $F_i \subseteq F_{i+1}$  para todo  $1 \leq i \leq \lceil \lg n \rceil - 1$ ;
- (III) Cada componente da floresta  $F_i$  possui no máximo  $2^i$  vértices.

Na Seção 2.3, descreveremos com mais detalhes como as rotinas da biblioteca funcionam e como cada uma preserva as invariantes acima, de modo a manter a corretude do algoritmo durante toda a sua execução. Por fim, para simplificar um pouco a notação, escreveremos  $L = \lceil \lg n \rceil$ , isto é,  $F_{\lceil \lg n \rceil}$  passa a ser escrita como  $F_L$ , da mesma forma que  $G_L = G_{\lceil \lg n \rceil}$  e  $R_L = R_{\lceil \lg n \rceil}$ .

### 2.2.2 Tipos de arestas do grafo

Quando realizamos uma chamada à função  $\text{adicioneGD}(G, u, v)$ , é feita uma chamada à rotina  $\text{conectadosGD}(G, u, v)$  para verificar a conexidade de  $u$  com  $v$  em  $G$ . Se estes vértices não estiverem na mesma componente de  $G$ , então a aresta  $uv$  é inserida na floresta maximal  $F_L$  que estamos mantendo, assim ligando a árvore que contém  $u$  com a que contém  $v$  em  $F_L$ . Chamamos esse tipo de aresta de **aresta da floresta**.

Caso  $u$  e  $v$  já estejam conectados em  $G$ , então essa aresta  $uv$  é chamada de **aresta reserva** e ela será armazenada no grafo  $R_L$  representado por listas de adjacências, mantido pela seguinte biblioteca:

- **listasDeAdjacências( $n$ )**: constrói e devolve um grafo com  $n$  vértices e sem arestas, representado por listas de adjacências;
- **adiconeLA( $R, u, v$ )**: adiciona  $u$  na lista de adjacências de  $v$  em  $R$  e vice-versa;
- **removeLA( $R, u, v$ )**: remove  $u$  da lista de adjacências de  $v$  em  $R$  e vice-versa.

A nossa implementação [7] de listas de adjacências possui um custo  $O(n)$  ao acionar o construtor `listasDeAdjacências`, e para as rotinas `adiconeLA` e `removeLA` é garantido tempo esperado  $O(1)$ , visto que estamos utilizando um mapa hash da linguagem C++ para realizar adição de um vizinho  $v$  na lista de  $u$  e remoção de  $v$  da lista de adjacências de  $u$ .

## 2.3 Rotinas da biblioteca do grafo dinâmico

### 2.3.1 Criação do grafo

Para criar um grafo dinâmico  $G$  com  $n$  vértices e inicialmente sem arestas, acionamos a rotina `grafoDinâmico( $n$ )`. Nesta chamada, armazenamos o nível máximo do

grafo, no caso o valor de  $\lceil \lg n \rceil$ , numa variável do grafo chamada *nívelMax*, onde podemos extrair e usar o valor do nível máximo chamando  $G.\text{nívelMax}$ . Em seguida, chamamos  $\text{florestaDinâmica}(n)$  para criar  $\lceil \lg n \rceil$  florestas dinâmicas com  $n$  vértices, e  $\text{listasDeAdjacências}(n)$  para criar  $\lceil \lg n \rceil$  grafos com  $n$  vértices representados por listas de adjacências.

Além disso, usamos um mapa hash para guardar e obter o nível de uma aresta  $uv$  em tempo esperado  $O(1)$ . Assim, este mapa usa como chave as pontas da aresta ( $u$  e  $v$ ) e armazena o valor do nível da aresta  $uv$ . Assim, podemos definir um outro método  $\text{novoMapaHash}(n)$  que devolve um mapa hash vazio em tempo  $O(1)$  para um grafo de  $n$  vértices. Dessa forma, se chamarmos esse método e atribuirmos o objeto devolvido a uma variável chamada *nível*, podemos realizar as seguintes operações com *nível*:

- $\text{nível}[u, v] \leftarrow i$ : armazena  $i$  como o nível da aresta  $uv$ .
- $\text{nível}[u, v] \leftarrow \text{NIL}$ : remove a aresta  $uv$  do mapa hash.
- $x \leftarrow \text{nível}[u, v]$ : atribui o valor do nível da aresta  $uv$  à variável  $x$ .

Dessa forma, podemos apresentar o construtor do grafo no Programa 2.1.

---

**Programa 2.1**  $\text{grafoDinâmico}(n)$ 


---

**Entrada:** Recebe o número  $n$  de vértices do grafo.

**Saída:** Devolve um grafo dinâmico  $G$  com  $n$  vértices e sem arestas.

```

1   $L \leftarrow \lceil \lg n \rceil$ 
2   $G.\text{nívelMax} \leftarrow L$ 
3  para  $i \leftarrow 1$  até  $L$  faça
4       $G.F_i \leftarrow \text{florestaDinâmica}(n)$ 
5       $G.R_i \leftarrow \text{listasDeAdjacências}(n)$ 
6   $G.\text{nível} \leftarrow \text{novoMapaHash}(n)$ 
7  retorne  $G$ 
```

---

Como ambos  $\text{florestaDinâmica}(n)$  e  $\text{listasDeAdjacências}(n)$  consomem tempo  $O(n)$ , então  $\text{grafoDinâmico}(n)$  consome tempo  $O(n \lg n)$ , pois estamos criando  $\lceil \lg n \rceil$  florestas dinâmicas e listas de adjacências. Além disso, é fácil de ver que, ao final, as três invariantes valem.

### 2.3.2 Consultas de conexidade

Para testar a conexidade entre dois vértices  $u$  e  $v$  no grafo  $G$ , basta chamarmos  $\text{conectadosGD}(G, u, v)$ , que por sua vez aciona  $\text{conectadosFD}(F_L, u, v)$ , pois  $F_L$  é uma floresta maximal de  $G$  pelo invariante (I). O Programa 2.2 mostra essa rotina.

---

**Programa 2.2**  $\text{conectadosGD}(G, u, v)$ 


---

**Entrada:** Recebe dois vértices  $u$  e  $v$  do grafo  $G$ .

**Saída:** Devolve um booleano indicando se  $u$  e  $v$  estão conectados em  $G$ .

```

1   $L \leftarrow G.\text{nívelMax}$ 
2  retorne  $\text{conectadosFD}(G.F_L, u, v)$ 
```

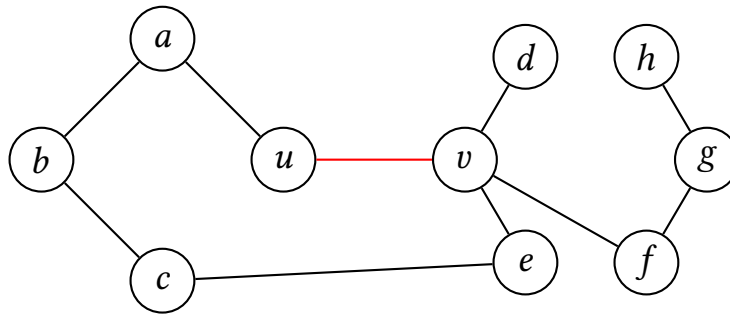
---

A rotina `conectadosFD( $F_L$ ,  $u$ ,  $v$ )` em nossa implementação consome tempo amortizado  $O(\lg n)$ , e, portanto, `conectadosGD( $F_L$ ,  $u$ ,  $v$ )` também terá o mesmo consumo de tempo amortizado. Além disso, a rotina de consulta não altera o nosso grafo, incluindo florestas e listas de adjacências, já que não há nenhuma modificação neles. Isso implica que as invariantes são mantidas.

### 2.3.3 Inserções de arestas

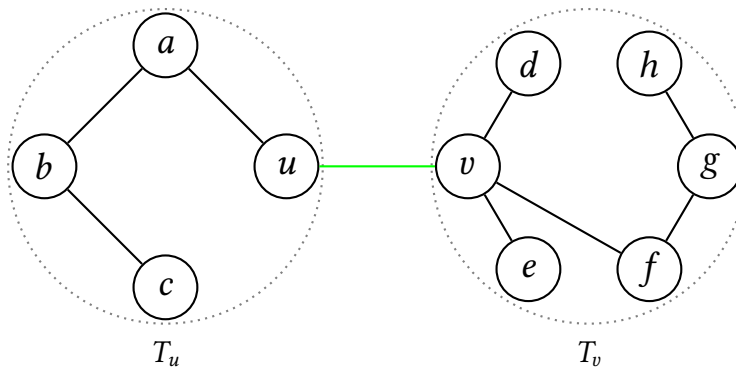
Como explicado na Seção 2.2.2, inserimos uma aresta  $uv$  no grafo  $G$  chamando a rotina `adiconeGD( $G$ ,  $u$ ,  $v$ )` e, em seguida, testamos a conexidade de  $u$  e  $v$  chamando a rotina `conectadosGD( $G$ ,  $u$ ,  $v$ )`, e, dependendo do resultado,  $uv$  pode ser inserida como aresta reserva ou como aresta da floresta. Assumindo que a aresta  $uv$  não exista em  $G$  no momento de sua inserção, temos dois cenários:

- Se os vértices  $u$  e  $v$  já estão conectados em  $G$ , então chamaremos a função `adiconeLA( $R_L$ ,  $u$ ,  $v$ )`, que armazenará  $uv$  como aresta reserva de nível  $L$  de  $G$  em  $R_L$ . A Figura 2.1 ilustra esse cenário.



**Figura 2.1:** As arestas pretas são da floresta maximal  $F_L$  do grafo. Como queremos inserir a aresta  $uv$  e os vértices  $u$  e  $v$  já estão conectados pelo caminho  $u \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow e \rightarrow v$ , então armazenamos  $uv$  como aresta reserva (em vermelho).

- Se  $u$  e  $v$  não estão conectados em  $G$ , então inserimos  $uv$  como aresta da floresta  $F_L$  de nível  $L$ , chamando a função `adiconeFD( $F_L$ ,  $u$ ,  $v$ )`. A Figura 2.2 ilustra esse cenário.



**Figura 2.2:** As arestas pretas são da floresta maximal  $F_L$  do grafo. Como os vértices  $u$  e  $v$  não estão conectados em  $F_L$ , então inserimos  $uv$  como aresta da floresta (em verde), nesse caso conectando as componentes  $T_u$  e  $T_v$  de  $F_L$ .

O Programa 2.3 ilustra uma primeira versão da rotina `adiconeGD`. Posteriormente, faremos alguns ajustes nessa rotina por causa da rotina de remoção de arestas explicada na Seção 2.3.4.

---

**Programa 2.3** `adiconeGD( $G, u, v$ )`


---

**Entrada:** Recebe dois vértices  $u$  e  $v$  do grafo  $G$ .

**Efeito:** Adiciona a aresta  $uv$  no grafo  $G$ .

```

1   $L \leftarrow G.\text{nívelMax}$ 
2   $G.\text{nível}[u, v] \leftarrow L$ 
3  se conectadosFD( $G.F_L, u, v$ ) então
4      adiconeLA( $G.R_L, u, v$ )
5  senão
6      adiconeFD( $G.F_L, u, v$ )

```

---

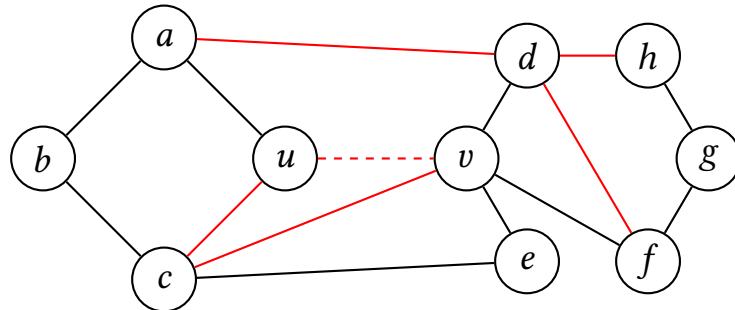
Em nossa implementação, `conectadosFD` consome tempo amortizado  $O(\lg n)$ . A rotina `adiconeLA`, quando acionada, consome tempo esperado constante  $O(1)$  em nossa implementação por conta do mapa hash. Já inserir uma aresta da floresta chamando `adiconeFD` consome tempo  $O(\lg n)$  (amortizado, em nossa implementação). Portanto, a rotina `adiconeGD` tem custo de tempo amortizado  $O(\lg n)$ .

A invariante (I) se mantém para o nível  $i = \lceil \lg n \rceil$ . Como sempre adicionamos arestas com nível  $\lceil \lg n \rceil$  em  $F_{\lceil \lg n \rceil}$  (se não forem reservas), então as outras florestas de níveis inferiores não são afetadas, mantendo-se, assim, os invariantes (II) e (III) também.

### 2.3.4 Remoção de arestas

A remoção de arestas se divide em dois casos: remoção de uma aresta reserva ou remoção de uma aresta da floresta.

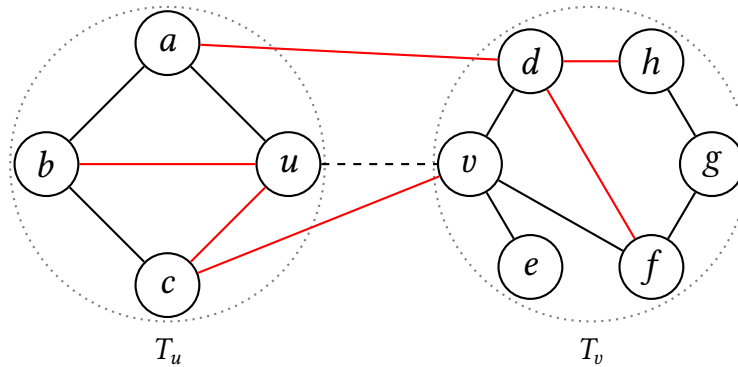
Quando queremos remover uma aresta  $uv$  e ela é reserva, podemos simplesmente acionar a rotina `removeLA( $R_i, u, v$ )` onde  $i$ , obtido do mapa hash, é o nível da aresta  $uv$  e  $R_i$  é a lista de adjacências na qual  $uv$  está armazenada. Por conta disso, nenhuma das florestas maximais  $F_j$  do grafo será afetada, e as três invariantes serão mantidas. A Figura 2.3 mostra esse cenário.



**Figura 2.3:** As arestas pretas são da floresta maximal  $F_L$  do grafo, enquanto as vermelhas são arestas reserva. A aresta vermelha  $uv$  tracejada é reserva e está prestes a ser removida.

O caso da remoção de uma aresta  $uv$  da floresta é mais complexo. Se a aresta  $uv$  tem nível  $i$ , remover  $uv$  sempre quebra uma componente de  $F_i$  em duas árvores  $T_u$  e  $T_v$ , de modo

que a primeira contém o vértice  $u$  e a segunda contém o vértice  $v$ . Neste caso, precisamos verificar se existe alguma aresta reserva que ligue  $T_u$  a  $T_v$ , para que possamos garantir que a floresta  $F_i$  continue maximal em  $G_i$ . Chamamos uma tal aresta de **aresta substituta**.



**Figura 2.4:** As arestas pretas são da floresta maximal  $F_i$  do grafo  $G_i$ , enquanto as vermelhas são reservas de nível  $i$ . A aresta  $uv$  tracejada de nível  $i$  está prestes a ser removida, assim ela pode ser substituída por  $ad$  ou  $cv$ , pois qualquer uma destas liga  $T_u$  a  $T_v$ .

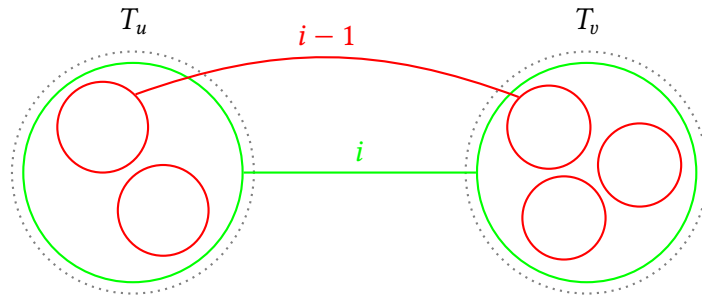
Para buscar uma aresta reserva de maneira o mais eficiente possível, o algoritmo percorre cada vértice  $x$  de  $T_u$  e verifica se existe algum vértice  $y$  na lista de adjacências de  $x$  de  $R_i$  que esteja em  $T_v$ . Se  $y \in V(T_v)$ , então a aresta  $xy$  é uma aresta substituta de nível  $i$ , bastando apenas acionar `adiconeFD( $F_i$ ,  $x$ ,  $y$ )` para reconectar  $T_u$  e  $T_v$ , que virariam uma única componente da floresta  $F_i$ , e acionar `removeLA( $R_i$ ,  $x$ ,  $y$ )` já que  $xy$  se tornará uma aresta da floresta.

É para tornar essa busca mais eficiente que introduzimos o fatiamento em níveis na Seção 2.2.1. A intuição por trás deste fatiamento é que, quando uma aresta de nível  $i$  da floresta é removida, não é necessário buscar por substitutas nos níveis menores que  $i$ . Isso quer dizer que começamos a busca no nível em questão, ou seja, em  $R_i$ , e caso não haja nenhuma substituta em  $R_i$ , passamos a procurar em  $R_{i+1}, R_{i+2}, \dots, R_L$ . Quando não encontramos uma substituta em um certo  $R_i$ , aproveitamos para rebaixar o nível de todas as arestas percorridas em  $R_i$  para  $i - 1$ , de modo que não precisaremos mais percorrer essas arestas quando removermos uma outra aresta de nível  $i$ , visto que elas já estariam em  $R_{i-1}$ .

Na verdade, antes de fazer esse rebaixamento, rebaixamos o nível de toda aresta de nível  $i$  de  $T_u$  para  $i - 1$ , de modo que  $T_u \subseteq F_{i-1}$ . Rebaixar o nível dessas arestas significa inseri-las em  $F_{i-1}$ , pois elas passam a ser de nível  $i - 1$ . Esse rebaixamento e as inserções em  $F_{i-1}$  se tornam necessários para preservar a invariante (I). Ao mesmo tempo, para manter também a invariante (III), esse processo deverá ser feito na menor das árvores  $T_u$  e  $T_v$ . Seja  $T = T_u \cup T_v + uv$ . Denotando o número de vértices de uma árvore  $T$  por  $|T|$ , o algoritmo garantirá que  $|T_u| \leq |T_v|$ . Pela invariante (III), temos que  $|T| \leq 2^i$ , e como  $|T_u| + |T_v| = |T|$ , então  $|T_u| \leq 2^{i-1}$ . Por isso, ao rebaixarmos todas as arestas de nível  $i$  de  $T_u$  para o nível  $i - 1$ , preservamos a invariante (III).

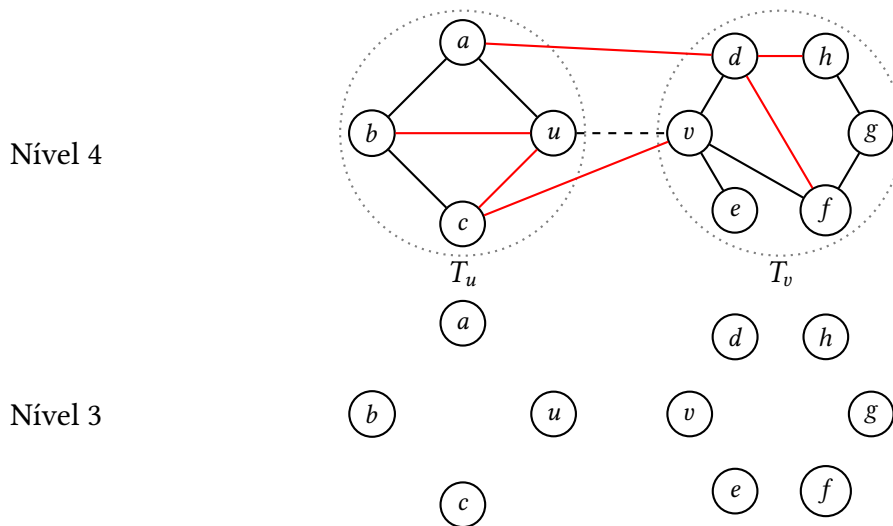
Ao remover uma aresta de nível  $i$  da floresta, na verdade temos que removê-la não só de  $F_i$ , mas também de  $F_{i+1}, \dots, F_L$  pela invariante (II). Similarmente, quando encontramos uma aresta substituta de nível  $i$ , temos que acrescentá-la não só a  $F_i$ , mas também a  $F_{i+1}, \dots, F_L$  para manter as invariantes (I) e (II). A invariante (III) neste caso é mantida trivialmente.

Agora, veremos em detalhes o motivo de não precisarmos procurar uma substituta em níveis menores que  $i$  quando removemos uma aresta  $uv$  de nível  $i$ . Veja que, como a aresta  $uv$  tem nível  $i$ , ela não pertence a  $F_{i-1}$ . Logo, pela invariante (II),  $u$  e  $v$  estão em componentes distintas de  $F_{i-1}$ . Como  $F_{i-1}$  é maximal em  $G_{i-1}$ , não existe aresta reserva de nível  $\leq i-1$  que conecte as componentes  $T_u$  e  $T_v$ . Portanto, só procuramos uma substituta em níveis  $\geq i$ . A Figura 2.5 torna a explicação mais intuitiva.



**Figura 2.5:** Os círculos verdes representam as componentes  $T_u$  e  $T_v$  da floresta  $F_i$  do grafo  $G_i$ , enquanto os círculos vermelhos representam as componentes da floresta  $F_{i-1}$  do grafo  $G_{i-1}$ . Note que a aresta reserva de nível  $i-1$  mostrada não deveria existir, porque senão ela violaria a invariante (I). Portanto, tais arestas de nível  $i-1$  ligando componentes de  $F_i$  (como a aresta vermelha) não existem e só é necessário procurar arestas substitutas a partir de nível  $i$  (como a aresta verde) para conectar  $T_u$  e  $T_v$ .

A seguir, demonstraremos a remoção de uma aresta  $uv$  da floresta em uma série de imagens. Na Figura 2.6, temos um grafo  $G$  de  $n = 10$  vértices. Para facilitar, assumiremos que, até o momento, só houve inserções de arestas.



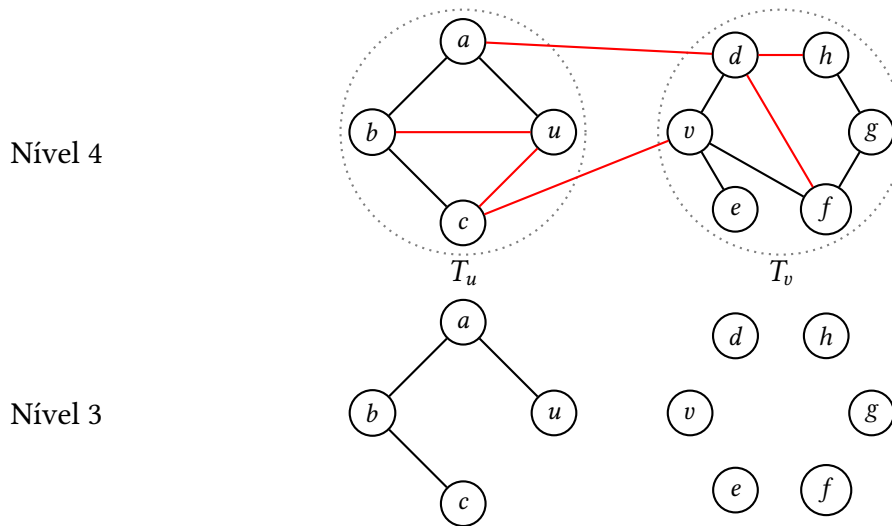
**Figura 2.6:** Um grafo  $G$  de 10 vértices, onde as arestas pretas são da floresta  $F_4$ , enquanto as vermelhas são reservas. A aresta  $uv$  está prestes a ser removida. A floresta  $F_4$  de  $G$  de cima contém todas as arestas pretas recém-inseridas e as arestas vermelhas estão em  $R_4$ . A floresta de baixo é a  $F_3$ , com os vértices isolados, e  $R_3$  também não tem nenhuma aresta.

Temos também que  $n = 10$  e  $\lceil \lg 10 \rceil = 4$ , logo o nível máximo  $L$  é 4 e, consequentemente,  $G = G_4$ . Como todas as inserções só acontecem no nível  $L$ , no momento, em  $F_4$ , só temos arestas da floresta de nível 4, enquanto  $F_3$  contém apenas vértices isolados. Neste cenário,

note que a remoção da aresta  $uv$  da floresta, representada por uma linha tracejada na figura, acaba quebrando a única componente da floresta  $F_4$  em duas,  $T_u$  e  $T_v$ . Como  $F_4$  é a floresta maximal de nível máximo de  $G$ , então removemos somente a  $uv$  de  $F_4$ .

O próximo passo é rebaixar todas as arestas de nível 4 em  $T_u$  para o nível 3. Dessa forma, as arestas de  $T_u$  passam a estar em  $F_3$ , como se pode ver na Figura 2.7, pois agora elas passam a ser de nível 3.

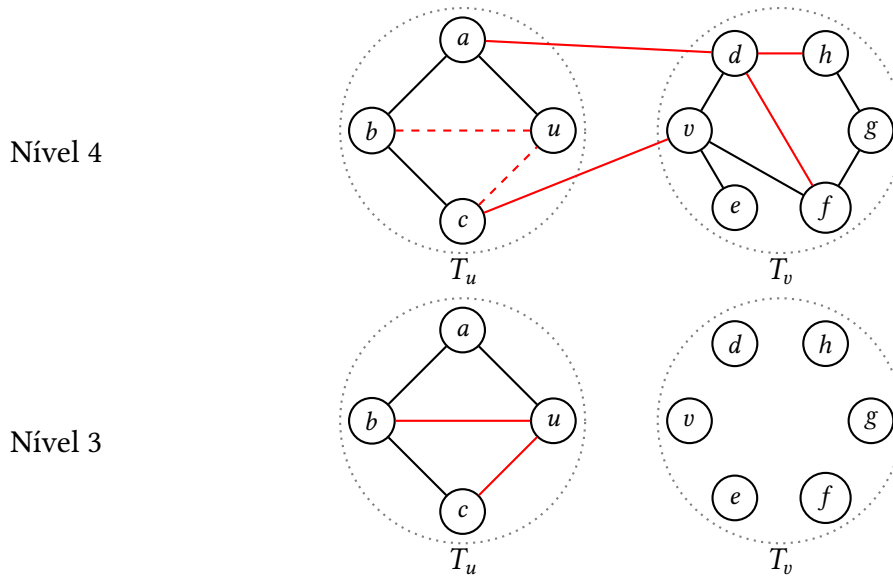
Perceba que, devido à invariante (II), podemos ter arestas de diferentes níveis em uma mesma floresta. Assim, percorrer todas as arestas de  $T_u$  e selecionar apenas as de nível  $i$  para rebaixar pode se tornar demorado quando o grafo possui uma grande quantidade de vértices. A forma como o algoritmo procura as arestas de nível  $i$  de  $T_u$  será descrita de maneira detalhada na Seção 2.4.3. No momento, só precisamos entender como este rebaixamento funciona.



**Figura 2.7:** Representação da remoção da aresta  $uv$  em  $G$ . As arestas de nível 4 de  $T_u$  foram rebaixadas para o nível 3, o que pode ser visto na floresta  $F_3$ .

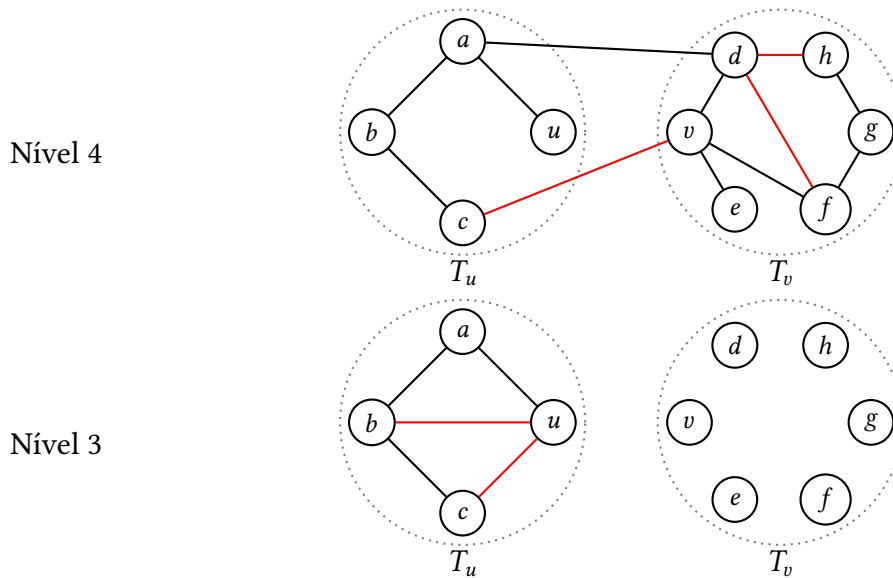
Como  $T_u$  e  $T_v$  em  $F_4$  ficaram separadas após a remoção de  $uv$ , precisamos encontrar, se existir, uma aresta reserva que possa reconectá-las. Note que percorrer todas as arestas reserva para achar uma substituta que ligue  $T_u$  a  $T_v$  pode ser ineficiente quando temos muitas arestas reserva. Por isso, explicaremos como implementar essa busca por uma substituta de forma eficiente na Seção 2.4.4.

Na Figura 2.8, percorremos as arestas reserva em  $R_4$  que tenham uma das pontas em  $T_u$ . Para cada aresta percorrida, verificamos se a outra ponta dela incide em algum vértice de  $T_v$ . Caso não incida, a aresta tem duas pontas em  $T_u$ , pois  $F_4$  era maximal antes da remoção de  $uv$ , e logo a aresta não é uma substituta. Então a rebaixamos para o nível 3, ou seja, movemos de  $R_4$  para  $R_3$  as arestas percorridas que não são substitutas.



**Figura 2.8:** Representação da busca por uma aresta substituta em  $R_4$ . As arestas reserva de nível 4 que estão tracejadas foram percorridas e estão prestes a ser removidas de  $R_4$ , pois foram rebaixadas para o nível 3, como se pode ver em  $R_3$ .

Supondo que achamos a aresta  $ad$  como substituta de nível 4 antes de  $cv$ , conectamos  $T_u$  e  $T_v$  chamando  $\text{adicionaFD}(F_4, a, d)$  e  $ad$  passa a ser uma aresta da floresta, ou seja, é removida de  $R_4$ . Como  $i = 4$  é o nível máximo do grafo nesse exemplo, não precisamos chamar esta rotina para níveis superiores e então terminamos a execução do algoritmo. A Figura 2.9 ilustra essa etapa do algoritmo.



**Figura 2.9:** Representação do grafo com a aresta substituta  $ad$  escolhida para conectar  $T_u$  a  $T_v$ , tornando-se uma aresta da floresta  $F_4$ .

Quando removemos uma aresta da floresta de nível  $i$  que quebra uma componente da floresta  $F_i$  em duas,  $T_u$  e  $T_v$ , com  $|T_u| \leq |T_v|$ , note que ao procurar por uma aresta substituta não necessariamente percorreremos todas as arestas reserva em  $R_i$  incidentes a  $T_u$ . Então



nem sempre todas as arestas reserva de  $R_i$  incidentes a  $T_u$  são rebaixadas, visto que o algoritmo será finalizado no momento em que encontrarmos uma substituta.

O Programa 2.4 apresenta uma primeira versão da rotina `removeaGD`. Ela contém uma chamada à rotina `substituaAresta` que será explicada Seção 2.4.7. Alguns ajustes em `removeaGD` serão necessários devido à implementação da rotina `substituaAresta`. Em particular, essa rotina deve percorrer as arestas da floresta e as arestas reserva de maneira eficiente. Apresentaremos a estratégia usada para isso nas Seções 2.4.3 e 2.4.4.

---

**Programa 2.4** `removeaGD( $G, u, v$ )`


---

**Entrada:** Recebe dois vértices  $u$  e  $v$  adjacentes do grafo  $G$ .

**Efeito:** Remove a aresta  $uv$  do grafo  $G$ .

```

1   $i \leftarrow G.nível[u, v]$ 
2   $nível[u, v] \leftarrow NIL$                                 ▷ marcamos  $uv$  como removida
3   $L \leftarrow G.nívelMax$ 
4  se  $uv \in G.F_L$  então                                    ▷  $uv$  é aresta da floresta
5      para  $j \leftarrow i$  até  $L$  faça
6          removeaFD( $G.F_j, u, v$ )                            ▷ remove  $uv$  da floresta  $F_j$ 
7          substituaAresta( $G, i, u, v$ )
8  senão                                                    ▷  $uv$  é aresta reserva
9      removeaLA( $G.R_i, u, v$ )                                ▷ remove  $uv$  do grafo  $R_i$ 

```

---

Note que `removeaGD` consome  $O(\lg^2 n)$  mais o tempo do `substituaAresta`, que será descrito mais adiante.

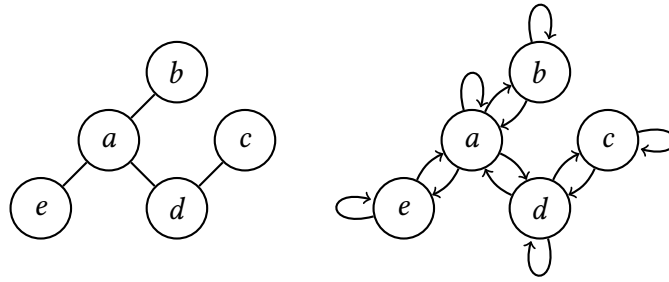
## 2.4 Estrutura interna do grafo dinâmico

Para explicar a rotina `substituaAresta`, precisamos saber mais detalhes sobre como as árvores de cada floresta  $F_i$  são armazenadas. Apresentaremos esses detalhes a seguir.

### 2.4.1 Euler tour trees

A Seção 2.1 do artigo de Holm, de Lichtenberg e Thorup [4] propõe o uso de Euler tour trees, que é uma técnica utilizada para representar uma árvore. Essa representação é obtida de uma árvore  $T$  substituindo-se cada aresta por dois arcos em sentidos opostos e adicionando-se um laço a cada vértice, como pode ser visto na Figura 2.10.

O digrafo resultante de  $T$  é Euleriano, ou seja, é conexo e o grau de entrada de cada vértice é igual ao grau de saída. Consequentemente, há uma trilha que começa e termina num mesmo vértice, passando por todos os arcos do digrafo somente uma vez. Tal trilha é chamada de **ciclo Euleriano**.



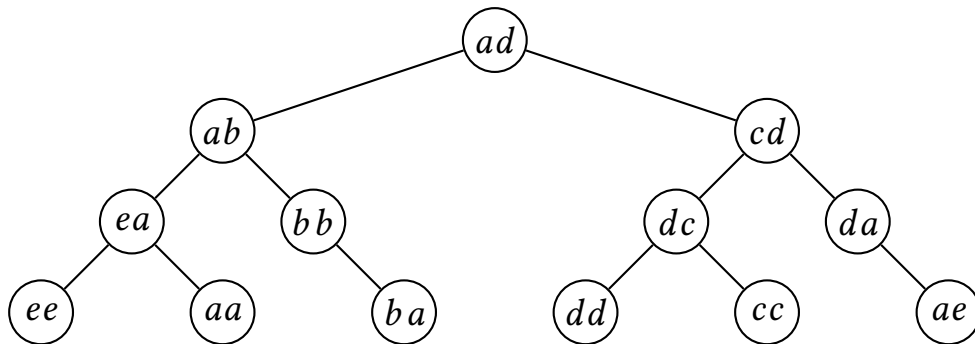
**Figura 2.10:** À esquerda, temos uma árvore  $T$  e, à direita, temos o digrafo Euleriano de  $T$ .

A representação da árvore  $T$  é basicamente a sequência de arcos que forma um ciclo Euleriano do digrafo correspondente a  $T$ . Denotamos cada arco pelo par de vértices que o compõe. Dessa forma, se o arco parte de  $u$  para  $v$ , ele será denotado como  $uv$ . Para o caso do laço em um vértice  $u$ , o arco será escrito como  $uu$ . Assim, no exemplo da Figura 2.10, um possível ciclo Euleriano poderia ser o seguinte:

$$ee\ ea\ aa\ ab\ bb\ ba\ ad\ dd\ dc\ cc\ cd\ da\ ae. \quad (2.1)$$

A sequência dos arcos obtida de  $T$  depende do vértice inicial e da ordem em que os vizinhos de cada vértice são visitados. Uma tal sequência é chamada **sequência Euleriana** de  $T$ .

Henzinger e King [3] propuseram armazenar uma sequência Euleriana em uma árvore binária de busca balanceada, usando como chave a posição de cada elemento na sequência. Tomando como base o nosso exemplo da árvore da Figura 2.10 e sua sequência Euleriana dada em (2.1), podemos ilustrar uma possível árvore binária de busca balanceada para ela na Figura 2.11.



**Figura 2.11:** Uma árvore binária de busca balanceada para um ciclo Euleriano da árvore da Figura 2.10. Note que se percorrermos os nós da árvore acima em *inorder*, obtemos a sequência Euleriana de (2.1).

Além disso, Henzinger e King [3] propuseram representar uma floresta pela coleção de sequências Eulerianas de cada componente da floresta. Assim, é possível implementar as operações de consulta de conectividade e de alteração na floresta com consumo esperado de tempo  $O(\lg n)$  (amortizado em nossa implementação), onde  $n$  é o número de nós da floresta. O algoritmo de Holm, de Lichtenberg e Thorup [4] para conectividade dinâmica armazena cada floresta  $F_i$  em uma estrutura dessas.

### 2.4.2 Nós das florestas

Os nós das árvores binárias de busca que representam as sequências Eulerianas que são mantidas pelo algoritmo serão chamados de **nós das florestas**. Cada tal nó pode representar um vértice  $u$  do grafo, se o elemento armazenado no nó for  $uu$ , ou pode representar uma aresta  $uv$  do grafo, se o elemento armazenado no nó for  $uv$  ou  $vu$ , com  $u \neq v$ . O primeiro tipo de nó é chamado de **nó de vértice** e o segundo, de **nó de aresta**. Em nossa implementação, para cada floresta  $F_i$ , usaremos um mapa hash  $nó$  que armazena, para cada par de vértices  $(u, v)$ , um apontador para o nó do elemento  $uv$  na floresta  $F_i$ , se tal nó existe (ou NIL caso não exista).

Como representamos uma Euler tour tree por uma árvore binária de busca, cada nó  $p$  possui apontadores para o filho esquerdo, filho direito e seu pai. Na descrição de nossa implementação, denotamos tais apontadores por  $p.esq$ ,  $p.dir$  e  $p.pai$ , respectivamente. O motivo de usar o apontador para o pai é por conta da operação `splay`.

Além disso, para extrairmos as pontas de um nó de aresta  $p$  que representa  $xy$ , chamamos  $(x, y) := p.vértices$ . Em um nó de vértice  $q$  que representa  $xx$ , podemos extrair as pontas do nó  $q$  chamando  $(x, x) := q.vértices$ . Extrair as pontas dos nós será importante como veremos em vários métodos posteriormente.

A seguir, descreveremos a funcionalidade de cada tipo de nó, bem como outros atributos relevantes que lhe pertencem.

### 2.4.3 Nó de aresta

Como já observamos, na floresta  $F_i$ , há arestas de nível  $\leq i$ . Para percorrermos as arestas de nível  $i$  de uma componente de  $F_i$  eficientemente, os nós da floresta  $F_i$  têm um atributo extra booleano chamado  $éNível$ , que, em caso de um nó de aresta, indica se tal aresta da floresta  $F_i$  é de nível  $i$ .

Além disso, todos os nós da floresta armazenam um contador chamado  $arestasDeNível$ , com a quantidade de nós em sua subárvore que têm o atributo  $éNível$  verdadeiro. Sempre que modificarmos alguma das árvores binárias da floresta  $F_i$ , devemos manter este contador com o valor correto. Na nossa implementação, a atualização deste contador é feita na operação `splay` sempre que essa executa alguma rotação.

A rotina abaixo do Programa 2.5 é usada para alterar para  $b$  o valor do atributo  $éNível$  para uma aresta  $uv$ . Ela é acionada sempre que adicionamos uma aresta ao grafo, e também quando uma aresta é rebaixada. Tal rotina utiliza um método auxiliar chamado  $atualizeArestasDeNível$ , descrito no Programa 2.6.

---

**Programa 2.5**  $atualizeÉNível(F, u, v, b)$

---

**Entrada:** Recebe uma floresta  $F$ , pontas  $u$  e  $v$  de uma aresta de  $F$ , e um booleano  $b$ .

**Efeito:** Atualiza o atributo  $éNível$  do nó  $uv$  da floresta  $F$  e o contador  $arestasDeNível$ .

```

1   $arestaUV \leftarrow F.nó[u, v]$ 
2   $splay(arestaUV)$ 
3   $arestaUV.éNível \leftarrow b$ 
4   $atualizeArestasDeNível(arestaUV)$ 
```

---

**Programa 2.6** `atualizeArestasDeNível( $p$ )`**Entrada:** Recebe um nó  $p$ .**Efeito:** Atualiza o contador `arestasDeNível` de  $p$ .

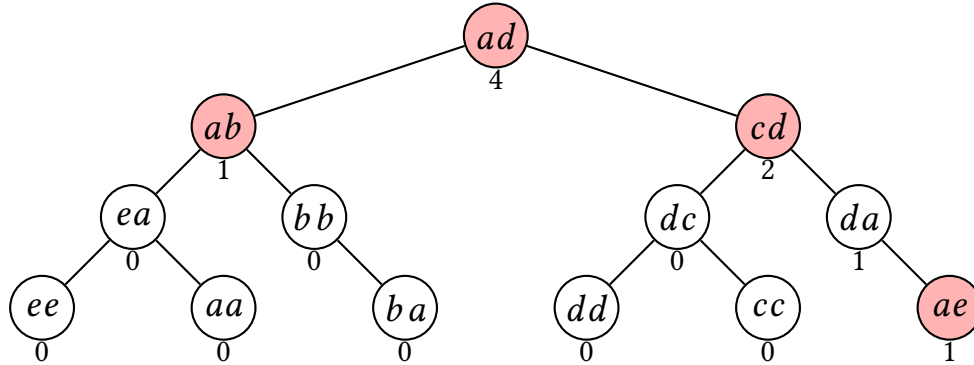
```

1   $c \leftarrow 0$ 
2  se  $p.esq \neq \text{NIL}$  então
3       $c \leftarrow c + p.esq.arestasDeNível$ 
4  se  $p.dir \neq \text{NIL}$  então
5       $c \leftarrow c + p.dir.arestasDeNível$ 
6  se  $p.éNível$  então
7       $c \leftarrow c + 1$ 
8   $p.arestasDeNível \leftarrow c$ 

```

Como se pode ver, o Programa 2.6 consome tempo  $O(1)$ . Já o Programa 2.5 consome tempo amortizado  $O(\lg n)$  por conta da operação `splay`. Veja que ambos os métodos não alteram a floresta  $F_i$ , alteram apenas a forma de uma das árvores binárias que a representam. Portanto, todas as três invariantes são preservadas.

Usando o mesmo exemplo da Figura 2.11 na Seção 2.4.1, podemos ilustrar como estaria o atributo `arestasDeNível` de cada nó na árvore. Na nossa implementação, os vértices são identificados por inteiros de 1 a  $n$  e, para uma aresta  $uv$ , usamos o atributo `éNível` apenas para o nó de  $uv$  com  $u < v$ .



**Figura 2.12:** Árvore de uma das componentes da floresta  $F_i$ , onde nós pintados em vermelho indicam arestas de nível  $i$ , e logo possuem o atributo `éNível` verdadeiro. Embaixo de cada nó temos o valor do contador `arestasDeNível`.

Na Figura 2.12, note que os nós  $ab$  e  $ba$  representam a mesma aresta. Assim, para evitar a duplicação do atributo `éNível`, optamos por colocar este atributo como verdadeiro somente nos nós de aresta cujos vértices estão em ordem lexicográfica. Então, no nosso exemplo, nós do tipo  $ba$ ,  $da$ ,  $dc$  e  $ea$  vão ter este atributo falso.

Lembre-se que a remoção de uma aresta  $uv$  de nível  $i$  da floresta  $F_i$  quebra uma componente de  $F_i$  em duas,  $T_u$  e  $T_v$ . Sendo  $T_u$  a menor das duas, a rotina `substituaAresta` realiza o rebaixamento das arestas de nível  $i$  de  $T_u$  para  $i - 1$ . Para fazer isso de forma eficiente, introduzimos um método auxiliar chamado `procureArestaDeNível`. Esse método utiliza o atributo `arestasDeNível` para encontrar um a um, numa árvore da floresta  $F_i$ , os nós de arestas de nível  $i$ .

**Programa 2.7** *procureArestaDeNível( $p$ )***Entrada:** Recebe um nó  $p$  de uma floresta com o contador *arestasDeNível*  $> 0$ .**Saída:** Devolve um nó de aresta da subárvore do nó com *éNível* verdadeiro.

```

1  se  $p.\text{éNível}$  então
2      retorne  $p$ 
3  se  $p.\text{esq} \neq \text{NIL}$  e  $p.\text{esq}.\text{arestasDeNível} > 0$  então
4      retorne procureArestaDeNível( $p.\text{esq}$ )
5  senão
6      retorne procureArestaDeNível( $p.\text{dir}$ )

```

Veja que o Programa 2.7 não altera o grafo, e, portanto, as invariantes são preservadas. Como a Euler tour tree é balanceada, então o consumo de tempo de cada percurso é  $O(\lg n)$  (amortizado em nossa implementação, onde sempre realizamos um splay no nó devolvido). Assim, se temos  $k$  arestas de nível  $i$  da árvore a serem rebaixadas, então a busca por essas  $k$  arestas custará tempo  $O(k \lg n)$ .

A rotina *procureArestaDeNível* será usada na rotina *substituaAresta*, que será descrita na Seção 2.4.7.

#### 2.4.4 Nó de vértice

Na rotina *substituaAresta*, para percorrermos as arestas reserva de nível  $i$  incidentes a vértices da árvore  $T_u$  em busca de uma aresta substituta, cada nó da floresta  $F_i$  possui um booleano chamado *incideArestaReservaDeNível*, que é verdadeiro somente se o nó é um nó de vértice, e o vértice em questão é ponta de alguma aresta reserva de nível  $i$ . Dessa forma, se  $uv$  é aresta reserva de nível 2, então os nós de vértice de  $u$  e de  $v$  em  $F_2$  terão o atributo *incideArestaReservaDeNível* como verdadeiro.

Cada nó das florestas também guardará um contador *arestasReservasDeNível*, que armazena a quantidade de nós em sua subárvore com o atributo *incideArestaReservaDeNível* verdadeiro. Esse contador deve ser mantido atualizado quando é feita qualquer alteração em uma das árvores binárias que representam as florestas. Na nossa implementação, a atualização é feita na operação splay, sempre que essa executa uma rotação.

O campo *incideArestaReservaDeNível* de um nó de vértice  $u$  pode mudar de valor quando houver inserções e remoções de arestas reserva que possuem como uma das suas pontas o vértice  $u$ . Portanto, mostraremos dois métodos, *incrementeArestasReservasDeNível* e *decrementeArestasReservasDeNível*, que modificam este campo e atualizam o contador *arestasReservasDeNível* chamando *atualizeArestasReservasDeNível*, descrito no Programa 2.10 abaixo.

O método *decrementeArestasReservasDeNível* do Programa 2.8 atualiza o campo *incideArestaReservaDeNível* de um nó de vértice  $u$  para falso quando ele não tem mais elementos em sua lista de adjacências das arestas reserva, isto é, quando não há mais nenhuma aresta reserva do nível da floresta incidente nele. A assinatura  $R[u]$  retorna o conjunto de vizinhos da lista de adjacências de  $u$ .

---

**Programa 2.8**  $\text{decrementeArestasReservasDeNível}(F, R, u)$ 


---

**Entrada:** Recebe um vértice  $u$  da floresta  $F$  e uma lista de adjacências  $R$ .

**Efeito:** Atualiza o campo  $\text{incideArestaReservaDeNível}$  para falso se necessário.

```

1   $\text{vértice}U \leftarrow F.\text{nó}[u, u]$ 
2  se  $R[u] = \emptyset$  então
3       $\text{splay}(\text{vértice}U)$ 
4       $\text{vértice}U.\text{incideArestaReservaDeNível} \leftarrow \text{falso}$ 
5       $\text{atualizeArestasReservasDeNível}(\text{vértice}U)$ 

```

---

Já o método  $\text{incrementeArestasReservasDeNível}$  do Programa 2.9 atualiza o atributo  $\text{incideArestaReservaDeNível}$  de um nó de vértice  $u$  para verdadeiro quando adicionamos um vértice  $v$  na lista de adjacências de  $u$  e  $v$  é o primeiro elemento de sua lista de adjacências, pois isso indica que  $u$  passa a ser incidente à aresta reserva  $uv$ .

---

**Programa 2.9**  $\text{incrementeArestasReservasDeNível}(F, R, u)$ 


---

**Entrada:** Recebe um vértice  $u$  da floresta  $F$  e uma lista de adjacências  $R$ .

**Efeito:** Atualiza o campo  $\text{incideArestaReservaDeNível}$  para verdadeiro se necessário.

```

1   $\text{vértice}U \leftarrow F.\text{nó}[u, u]$ 
2  se  $|R[u]| = 1$  então
3       $\text{splay}(\text{vértice}U)$ 
4       $\text{vértice}U.\text{incideArestaReservaDeNível} \leftarrow \text{verdadeiro}$ 
5       $\text{atualizeArestasReservasDeNível}(\text{vértice}U)$ 

```

---



---

**Programa 2.10**  $\text{atualizeArestasReservasDeNível}(p)$ 


---

**Entrada:** Recebe um nó  $p$ .

**Efeito:** Atualiza o contador  $\text{arestasReservasDeNível}$  de  $p$ .

```

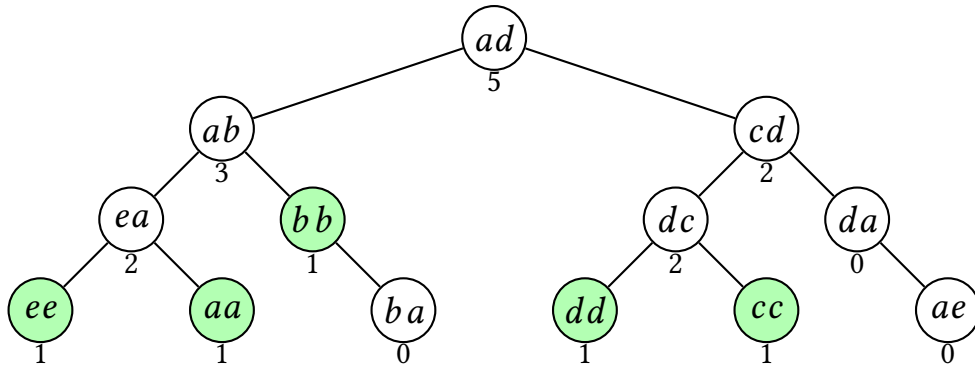
1   $c \leftarrow 0$ 
2  se  $p.\text{esq} \neq \text{NIL}$  então
3       $c \leftarrow c + p.\text{esq}.\text{arestasReservasDeNível}$ 
4  se  $p.\text{dir} \neq \text{NIL}$  então
5       $c \leftarrow c + p.\text{dir}.\text{arestasReservasDeNível}$ 
6  se  $p.\text{incideArestaReservaDeNível}$  então
7       $c \leftarrow c + 1$ 
8   $p.\text{arestasReservasDeNível} \leftarrow c$ 

```

---

O Programa 2.10 consome tempo  $O(1)$ . Já os Programas 2.8 e 2.9 consomem tempo  $O(\lg n)$ , amortizado em nossa implementação por conta das operações  $\text{splay}$ . Como estes três métodos não alteram a floresta  $F_i$ , alteram apenas a forma de uma das árvores binárias que a representam, então as três invariantes são preservadas.

Usando o mesmo exemplo da Figura 2.11 na Seção 2.4.1, podemos ilustrar como estaria o atributo  $\text{arestasReservasDeNível}$  de cada nó na árvore.



**Figura 2.13:** Árvore de uma das componentes da floresta  $F_i$ , onde nós pintados em verde indicam nós de vértices com o atributo `incideArestaReservaDeNível` verdadeiro. No nosso exemplo, todos os vértices são ponta de alguma aresta reserva de nível  $i$ . Embaixo de cada nó temos o contador `arestasReservasDeNível`.

No `substituaAresta` acionado na floresta  $F_i$ , após rebaixarmos as arestas de nível  $i$  de  $T_u$ , precisamos procurar por uma aresta substituta. Para isso, precisamos buscar por uma aresta reserva de nível  $i$ , com uma ponta em  $T_u$  e outra em  $T_v$ , para que consigamos reconectar as duas componentes de  $F_i$  separadas pela remoção de  $uv$ .

Para resolver este problema de maneira eficiente, usa-se uma estratégia semelhante à que usamos para buscar arestas de nível  $i$  em  $T_u$ . Introduzimos um método auxiliar chamado `procureNóIncideArestaReservaDeNível`, que devolve um vértice de  $T_u$  que incide em alguma aresta reserva de nível  $i$ . Assim, podemos percorrer cada vizinho desse vértice em  $R_i$  para verificar se a aresta entre eles liga  $T_u$  a  $T_v$ .

---

**Programa 2.11** `procureNóIncideArestaReservaDeNível(p)`

---

**Entrada:** Recebe um nó da floresta  $p$  com o contador `arestasReservasDeNível`  $> 0$ .

**Saída:** Devolve um nó de vértice da subárvore de  $p$  com `incideArestaReservaDeNível` verdadeiro.

```

1  se  $p.\text{incideArestaReservaDeNível}$  então
2      retorne  $p$ 
3  se  $p.\text{esq} \neq \text{NIL}$  e  $p.\text{esq}.\text{arestasReservasDeNível} > 0$  então
4      retorne procureNóIncideArestaReservaDeNível( $p.\text{esq}$ )
5  senão
6      retorne procureNóIncideArestaReservaDeNível( $p.\text{dir}$ )

```

---

Veja que o Programa 2.11 não altera o grafo, e, portanto, as invariantes são preservadas. Como a Euler tour tree é balanceada, o consumo de tempo do Programa 2.11 é  $O(\lg n)$  (amortizado em nossa implementação, que sempre aciona a rotina `splay` no nó devolvido).

A rotina `procureNóIncideArestaReservaDeNível` será usada na rotina `substituaAresta`, que será descrita na Seção 2.4.7.

### 2.4.5 Versão completa da rotina de adição de arestas

Nesta seção, apresentamos uma versão completa da rotina `adicioneGD` mostrada na Seção 2.3, para incorporar os atributos descritos nas seções anteriores.



**Programa 2.12**  $\text{adiconeGD}(G, u, v)$ **Entrada:** Recebe dois vértices  $u$  e  $v$  do grafo  $G$ , com  $u < v$ .**Efeito:** Adiciona a aresta  $uv$  no grafo  $G$ .

```

1   $L \leftarrow G.\text{nívelMax}$ 
2   $G.\text{nível}[u, v] \leftarrow L$ 
3  se conectadosFD( $G.F_L, u, v$ ) então                                 $\triangleright uv$  é aresta reserva
4       $\text{adiconeLA}(G.R_L, u, v)$ 
5       $\text{incrementeArestasReservasDeNível}(G.F_L, G.R_L, u)$ 
6       $\text{incrementeArestasReservasDeNível}(G.F_L, G.R_L, v)$ 
7  senão
8       $\text{adiconeFD}(G.F_L, u, v)$ 
9       $\text{atualizeENível}(G.F_L, u, v, \text{verdadeiro})$ 

```

Nesta versão final, veja que as linhas 5 e 6 são necessárias para que os campos *incideArestaReservaDeNível* e *arestasReservasDeNível* dos nós de vértice  $u$  e  $v$  estejam corretos. Já a linha 9 define o atributo *éNível* do nó de aresta  $uv$  como verdadeiro em  $F_L$ , quando ela é aresta da floresta, e atualiza o campo *arestasDeNível* de todos os nós da floresta.

Atualizamos os atributos desses nós que descrevemos para fazermos a remoção eficiente de arestas, cuja rotina será descrita também com ajustes na Seção 2.4.6. Note que o método *adiconeGD* do Programa 2.12 continua tendo o mesmo consumo de tempo do Programa 2.3 após esses ajustes, ou seja,  $O(\lg n)$  amortizado.

**2.4.6 Versão completa da rotina de remoção de arestas**

Nessa seção, apresentamos uma versão completa da rotina *removeGD* apresentada no Programa 2.4, incorporando os atributos descritos na Seção 2.4.4.

**Programa 2.13**  $\text{removeGD}(G, u, v)$ **Entrada:** Recebe dois vértices adjacentes  $u$  e  $v$  do grafo  $G$ .**Efeito:** Remove a aresta  $uv$  do grafo  $G$ .

```

1   $L \leftarrow G.\text{nívelMax}$ 
2   $i \leftarrow G.\text{nível}[u, v]$ 
3   $G.\text{nível}[u, v] \leftarrow \text{NIL}$                                  $\triangleright$  marcamos  $uv$  como removida
4  se  $uv \in G.F_L$  então                                         $\triangleright uv$  é aresta da floresta
5      para  $j \leftarrow i$  até  $L$  faça
6           $\text{removeFD}(G.F_j, u, v)$ 
7           $\text{substituaAresta}(G, i, u, v)$ 
8  senão                                                         $\triangleright uv$  é aresta reserva
9       $\text{removeLA}(G.R_i, u, v)$ 
10      $\text{decrementeArestasReservasDeNível}(G.F_i, G.R_i, u)$ 
11      $\text{decrementeArestasReservasDeNível}(G.F_i, G.R_i, v)$ 

```

A diferença entre as duas versões de *removeGD* é que a segunda tem as linhas 10 e 11 a mais. Tais linhas são necessárias para que o campo *incideArestaReservaDeNível* e o contador *arestasReservasDeNível* dos nós estejam corretos, visto que, ao remover uma



aresta reserva, precisamos verificar se os vértices incidentes a ela ainda são incidentes a alguma outra aresta reserva de  $R$ .

Agora falta descrever a rotina `substituaAresta`. Da mesma forma que a primeira versão, nesta segunda versão `removeGD` também consumirá tempo amortizado  $O(\lg^2 n)$  mais o custo do `substituaAresta`.

### 2.4.7 Rotina de substituição de aresta

A rotina de substituição da aresta `substituaAresta` está descrita no Programa 2.14 abaixo, onde usaremos vários dos métodos auxiliares apresentados nas Seções 2.4.3 e 2.4.4. Além disso, usaremos dois métodos auxiliares chamados `rebaixeNívelDaAresta` e `testeSubstituta`, que serão explicados de maneira detalhada no momento em que estivermos explicando cada trecho do código de `substituaAresta`. O atributo *tam*, que existe em todos os nós da floresta, guarda o número de nós na subárvore de cada nó.

---

#### Programa 2.14 `substituaAresta( $G, i, u, v$ )`

---

**Entrada:** Recebe dois vértices  $u$  e  $v$  do grafo  $G$ , e o nível  $i$  da aresta removida  $uv$ .

**Efeito:** Adiciona uma aresta substituta no grafo, se ela existir.

```

1   $L \leftarrow G.\text{nívelMax}$ 
2  para  $j \leftarrow i$  até  $L$  faça
3       $T_u \leftarrow \text{splay}(G.F_j.\text{nó}[u, u])$  ▷ torna o nó  $uu$  raiz de  $T_u$ 
4       $T_v \leftarrow \text{splay}(G.F_j.\text{nó}[v, v])$  ▷ torna o nó  $vv$  raiz de  $T_v$ 
5      se  $T_u.\text{tam} > T_v.\text{tam}$  então
6           $T_u \leftrightarrow T_v$ 
7      enquanto  $T_u.\text{arestasDeNível} > 0$  faça
8           $\text{nóXY} \leftarrow \text{procureArestaDeNível}(T_u)$ 
9           $T_u \leftarrow \text{splay}(\text{nóXY})$ 
10          $\text{rebaixeNívelDaAresta}(G, \text{nóXY}, j)$ 
11     enquanto  $T_u.\text{arestasReservasDeNível} > 0$  faça
12          $\text{nóXX} \leftarrow \text{procureNóIncideArestaReservaDeNível}(T_u)$ 
13          $T_u \leftarrow \text{splay}(\text{nóXX})$ 
14          $(x, x) \leftarrow \text{nóXX}.\text{vértices}$ 
15         para  $y \in G.R_j[x]$  faça
16             se  $\text{testeSubstituta}(G, x, y, j)$  então
17                 retorne
```

---

Para explicar o `substituaAresta` do Programa 2.14, descreveremos a função de cada trecho do código. Vamos assumir de início que estamos aplicando as operações de remoção em um grafo  $G$  de  $n$  vértices. Lembre-se que, ao removermos uma aresta  $uv$  da floresta de nível  $i$ , precisamos procurar uma substituta partindo de  $R_i$ , e se não encontrarmos, passamos a buscar em  $R_{i+1}, \dots, R_L$ . A linha 2 faz exatamente essa iteração sobre os níveis  $i$  até  $L$ . Suponha que estamos na iteração  $j$  da linha 2, ou seja, já removemos  $uv$  de  $F_i, \dots, F_{j-1}$  e não encontramos aresta substituta em  $R_i, \dots, R_{j-1}$ .

Nas linhas 3 e 4, obtemos as árvores  $T_u$  e  $T_v$ , que foram derivadas da floresta  $F_j$ , já que uma componente desta foi quebrada em duas após a remoção de  $uv$ . As operações `splay` puxam os nós  $u$  e  $v$  para raiz de  $T_u$  e  $T_v$ , respectivamente. As linhas 5 e 6 garantem que

$|T_u| \leq |T_v|$  como já discutido na Seção 2.3.4.

Nas linhas 7 a 10, realizamos o processo de rebaixar as arestas de  $T_u$  de nível  $j$ . Na linha 7, temos um laço que terminará quando todas as arestas de nível  $j$  tiverem sido rebaixadas, isto é, quando o contador *arestasDeNível* do nó raiz de  $T_u$  estiver nulo. Na linha 8, utilizamos o método auxiliar *procureArestaDeNível*, que retornará um nó de aresta de nível  $j$ , ou seja, que possui o *éNível* verdadeiro. Para cada nó de aresta retornado, acionamos *splay* nele. Em seguida, o rebaixamos chamando o método *rebaixeNívelDaAresta*, descrito abaixo.

---

**Programa 2.15** *rebaixeNívelDaAresta*( $G, p, j$ )

---

**Entrada:** Recebe o grafo  $G$ , um nó de aresta  $p$  da floresta  $F_j$  que é raiz de uma árvore e tem nível  $j$ .

**Efeito:** Rebaixa o nível do nó de aresta  $p$ .

```

1   $(x, y) \leftarrow p.vértices$ 
2   $G.nível[x, y] \leftarrow j - 1$ 
3  atualizeÉNível( $G.F_j, x, y, \text{falso}$ )
4  adicioneFD( $G.F_{j-1}, x, y$ )
5  atualizeÉNível( $G.F_{j-1}, x, y, \text{verdadeiro}$ )
```

---

No Programa 2.15, atualizamos o nível do nó de aresta  $xy$  de  $j$  para  $j - 1$ . Note que o nó  $p$  é raiz de sua árvore pois foi feito um *splay* neste nó antes da chamada a *rebaixeNívelDaAresta*, na linha 9 do Programa 2.14. Ademais, como rebaixamos  $xy$  de  $F_j$  para  $F_{j-1}$ , então em  $F_j$  atualizamos o seu atributo *éNível* para falso, e em  $F_{j-1}$  atualizamos este atributo para verdadeiro. Veja que *rebaixeNívelDaAresta* consome tempo amortizado  $O(\lg n)$ .

Voltando ao Programa 2.14, nas linhas 11 a 17, procuramos por uma aresta substituta de nível  $j$ . Similarmente à linha 7, a linha 11 é um laço que terminará quando não existirem mais arestas reserva de nível  $j$  incidentes a  $T_u$  (ou seja, quando o contador *arestasReservasDeNível* do nó raiz de  $T_u$  estiver nulo) ou quando achamos uma aresta substituta.

Na linha 12, acionamos *procureNóIncideArestaReservaDeNível*, que retornará um nó de vértice  $xx$  que incide em alguma aresta reserva de nível  $j$ . Depois, acionamos *splay* em  $xx$ . Na linha 14, obtemos o vértice  $x$  do nó  $xx$  e percorremos todos os vizinhos  $y$  na lista de adjacências de  $x$  na linha 15, pois queremos testar se  $xy$  é uma aresta substituta.

Para isso, chamamos o método auxiliar *testeSubstituta* na linha 16, descrito no Programa 2.16. Como o nome sugere, o método testa se  $xy$  é uma aresta substituta, devolvendo verdadeiro se  $xy$  for e falso caso contrário. Quando o método devolve verdadeiro, chegamos à linha 17 do Programa 2.14, terminando o algoritmo. Caso contrário, continuamos percorrendo os vizinhos  $y$  da lista de adjacências de  $x$  e chamando o mesmo método várias vezes.

**Programa 2.16** testeSubstituta( $G, x, y, j$ )**Entrada:** Recebe o grafo  $G$ , as pontas  $x$  e  $y$  do nó  $xy$  e o nível  $j$ .**Saída:** Devolve verdadeiro se a aresta  $xy$  é substituta e falso caso contrário.

---

```

1  removaLA( $G.R_j, x, y$ )
2  decrementeArestasReservasDeNível( $G.F_j, G.R_j, x$ )
3  decrementeArestasReservasDeNível( $G.F_j, G.R_j, y$ )
4  se conectadosGD( $G, x, y$ ) então                                ▷ a aresta  $xy$  não é substituta
5       $G.nível[x, y] \leftarrow j - 1$ 
6      adicioneLA( $G.R_{j-1}, x, y$ )
7      incrementeArestasReservasDeNível( $G.F_{j-1}, G.R_{j-1}, x$ )
8      incrementeArestasReservasDeNível( $G.F_{j-1}, G.R_{j-1}, y$ )
9      retorne falso
10 senão                                                            ▷ a aresta  $xy$  é substituta
11      $L \leftarrow G.nívelMax$ 
12     para  $k \leftarrow j$  até  $L$  faça
13         adicioneFD( $G.F_k, x, y$ )
14     se  $x > y$  então
15          $x \leftrightarrow y$ 
16     atualizeÉNível( $G.F_j, x, y, \text{verdadeiro}$ )
17     retorne verdadeiro

```

---

No Programa 2.16, a linha 1 remove a aresta reserva  $xy$  de  $R_j$ , independentemente se tal aresta é substituta ou não, pois ou ela será rebaixada, ou será uma aresta substituta, que será incluída em  $F_j$ . Se  $xy$  não é substituta, então ela é rebaixada para  $R_{j-1}$ , como visto na Seção 2.3.4. Se ela é substituta, então se tornará uma aresta da floresta de nível  $j$  conectando  $T_u$  a  $T_v$ .

As linhas 2 e 3 atualizam os atributos dos nós de vértice  $x$  e  $y$ , visto que removemos  $xy$  de  $R_j$ . As linhas 4 a 9 englobam o caso em que os vértices  $x$  e  $y$  estão em  $T_u$ , isto é, quando conectadosGD( $G, x, y$ ) retorna verdadeiro. Isso quer dizer que  $xy$  não é uma aresta substituta, e por isso precisamos rebaixá-la de  $R_j$  para  $R_{j-1}$ , além de atualizar os atributos dos nós de vértice  $x$  e  $y$  em  $F_{j-1}$  ao acionar incrementeArestasReservasDeNível. Devolvemos falso porque, neste caso,  $xy$  não é aresta substituta.

Veja que conectadosGD( $G, x, y$ ) só devolverá falso quando  $x$  está em  $T_u$  e  $y$  está em  $T_v$ , pois assim os dois vértices estariam em componentes separadas da floresta  $F_j$ . Este caso, abordado nas linhas 10 a 17 do Programa 2.16, mostra que encontramos  $xy$  como uma aresta substituta, e finalizamos o algoritmo incluindo  $xy$  em todas as florestas  $F_k$ , para  $k = j, \dots, L$ , para manter a invariante (II). Além disso, se a aresta substituta encontrada é de nível  $j$ , precisamos atualizar o atributo *éNível* do nó desta aresta em  $F_j$  para verdadeiro quando a adicionamos na floresta  $F_j$ , como acontece na linha 16. Por fim, devolvemos verdadeiro pois, neste caso, achamos uma aresta substituta.

Veja que, no Programa 2.16, o trecho que compreende as linhas 4 a 9 possui custo amortizado  $O(\lg n)$ . Isso quer dizer que, enquanto as arestas que estamos testando não forem substitutas, o método testeSubstituta será acionado várias vezes com esse custo de tempo. No momento em que encontrarmos uma substituta, testeSubstituta será acionado uma única vez e consumirá tempo amortizado  $O(\lg^2 n)$  por causa das linhas 12

e 13, e assim o algoritmo será finalizado.

Agora, explicaremos o custo da rotina `substituaAresta`. No pior caso, uma execução desta rotina pode consumir muito tempo. Por exemplo, se o grafo já está com  $m = \Theta(n^2)$  arestas inseridas, todas de nível  $L$ , pode ocorrer uma remoção que aciona o `substituaAresta` e que acarreta o rebaixamento de  $\Theta(n^2)$  arestas, a um custo  $\Omega(n^2 \lg n)$ .

No entanto, para chegar a essa situação, teriam ocorrido  $\Theta(n^2)$  inserções, cada uma com um custo bem mais barato, de  $O(\lg n)$ . Isso sugere que possivelmente uma análise amortizada do custo das operações leve a um custo por operação mais baixo.

Agora mostraremos que, se ocorreram  $t$  operações de inserção e remoção de arestas desde a criação do grafo, então o custo total de tal sequência de operações é  $O(t \lg^2 n)$ , o que resulta em um custo amortizado por operação de  $O(\lg^2 n)$ .

Para tanto, cada inserção será responsável não apenas pelo custo da inserção de uma aresta  $e$ , mas também pelo custo de todos os rebaixamentos sofridos por  $e$  no decorrer de todas as remoções que ocorrerem após a inserção de  $e$ . Isso quer dizer que a inserção da aresta  $e$  vai pagar por cada execução das linhas 7 a 10 do Programa 2.14 e das linhas 4 a 9 do Programa 2.16 que processa a aresta  $e$ . Como a inserção custa  $O(\lg n)$  e essas linhas custam  $O(\lg n)$  e são executadas  $O(\lg n)$  vezes, pois  $e$  pode ser rebaixada no máximo  $\lceil \lg n \rceil$  vezes, o custo pago por uma inserção é  $O(\lg^2 n)$ .

Já uma remoção de aresta, executada pelo Programa 2.13, custa  $O(\lg^2 n)$  mais o custo do `substituaAresta`. O custo do `substituaAresta` é  $O(\lg^2 n)$  excluindo-se as execuções das linhas 7 a 10 do Programa 2.14, assim como as linhas 4 a 9 do Programa 2.16. Desconsiderando estas linhas onde ocorrem rebaixamentos de arestas, cada iteração do para da linha 2 do Programa 2.14 possui custo  $O(\lg n)$  enquanto uma aresta substituta não for encontrada, ou seja, excetuando as linhas 10 a 17 do Programa 2.16.

No momento em que encontrarmos uma substituta, as linhas 10 a 17 do Programa 2.16 serão executadas uma única vez e consumirão tempo  $O(\lg^2 n)$  devido às linhas 12 e 13, terminando o algoritmo logo em seguida. Assim, como a linha 2 do Programa 2.14 pode ser executada no máximo  $O(\lg n)$  vezes, temos que `substituaAresta` consome tempo amortizado  $O(\lg^2 n)$  por operação de remoção.

Com isso, concluímos que o custo total de uma sequência de  $t$  inserções e remoções é  $O(t \lg^2 n)$ , e assim cada inserção e remoção consome tempo amortizado  $O(\lg^2 n)$ .

## Capítulo 3

# Algoritmo para MSF decremental

Neste capítulo, estudaremos o problema da árvore geradora mínima em grafos dinâmicos. Dado um grafo conexo  $G$  com um custo associado a cada uma de suas arestas, o problema da árvore geradora mínima consiste em determinar uma árvore geradora de  $G$  com custo mínimo, onde o custo de uma árvore é a soma dos custos de suas arestas. Como estamos interessados em grafos dinâmicos, é natural remover a restrição de que o grafo seja conexo, e neste caso considerar florestas geradoras maximais de custo mínimo (MSF, do inglês, *minimum spanning forest*). Chamamos um grafo com um custo associado a cada aresta de **grafo ponderado**.

O problema da árvore geradora mínima em grafos ponderados (conexos) estáticos pode ser resolvido eficientemente, por exemplo, pelos algoritmos de Kruskal e de Prim. O algoritmo de Kruskal utiliza uma estrutura de dados clássica conhecida como union-find, enquanto que o algoritmo de Prim utiliza uma fila de prioridades. Não há na literatura uma versão destes algoritmos para grafos dinâmicos. Isso talvez se deva à característica essencialmente sequencial destes algoritmos, que modificam suas estruturas internas conduzidos por uma ordem de eventos. Uma alteração no grafo poderia levar a uma alteração em toda a sequência de eventos nesses algoritmos a partir de um certo ponto, e com isso não há uma versão eficiente deles que acomode alterações no grafo.

Por outro lado, Holm, de Lichtenberg e Thorup [4] propuseram uma adaptação do seu algoritmo para conectividade em grafos dinâmicos, apresentado no Capítulo 2, para que este mantenha, de maneira eficiente, uma floresta geradora maximal de custo mínimo em um grafo ponderado que pode sofrer remoções de arestas. Ou seja, eles propuseram um algoritmo que resolve de maneira eficiente o problema que chamamos de **MSF decremental**. Neste capítulo, descreveremos esse algoritmo, que é uma adaptação do algoritmo descrito no Capítulo 2 para que este passe a resolver o problema da MSF decremental.

### 3.1 Biblioteca da MSF decremental

Implementar o algoritmo decremental para florestas geradoras maximais de custo mínimo resume-se à construção da seguinte biblioteca de forma eficiente:

- **MSFDecremental**( $n$ ,  $E$ ): contrói e devolve um grafo ponderado  $G$  com  $n$  vértices

e as arestas ponderadas dadas no conjunto  $E$ ;

- **consultePesoMSF**( $G$ ): devolve o peso de uma MSF do grafo ponderado  $G$ ;
- **removeMSF**( $G, u, v$ ): remove a aresta  $uv$  do grafo ponderado  $G$ .

Note que, diferente da biblioteca do algoritmo de conexidade em grafos dinâmicos, apresentada na Seção 2.3, na MSF decremental não temos um método equivalente a `adiconeGD` disponível para o usuário. Em nossa implementação [7], para criarmos um grafo  $G$  de  $n$  vértices e  $m$  arestas ponderadas dadas em  $E$ , acionamos `MSFDecremental( $n, E$ )`, onde criamos, como no problema da conexidade em grafos dinâmicos,  $\lceil \lg n \rceil$  florestas dinâmicas e  $\lceil \lg n \rceil$  listas de adjacências, com  $n$  vértices isolados. Em seguida, ordenamos e inserimos as  $m$  arestas de  $E$  em ordem crescente de peso, usando uma biblioteca pronta do C++ para ordená-las, que consome tempo esperado  $O(m \lg n)$ . Estas  $m$  arestas são inseridas uma a uma acionando uma rotina que chamamos de `adiconeMSF( $u, v, w$ )`, onde  $u$  e  $v$  são pontas da aresta e  $w$  é o peso dela.

A rotina `adiconeMSF` é acionada somente dentro do construtor e tem custo amortizado  $O(\lg n)$ . Ela é uma versão da `adiconeGD` que acomoda os pesos das arestas como veremos adiante. Por ser uma rotina privada, ou seja, não está disponível para o usuário, após a inserção destas arestas, não são permitidas mais operações de inserção, somente de remoção de arestas. Para o usuário, então, só estarão disponíveis as rotinas `consultePesoMSF` e `removeMSF`. Discutiremos brevemente a versão totalmente dinâmica no Capítulo 5, que inclui a rotina de adição de arestas para o usuário.

O construtor `MSFDecremental`, devido à ordenação de arestas e à chamada ao método `adiconeMSF`, possui consumo de tempo  $O(m \lg n)$ . Já a rotina `consultePesoMSF` possui consumo de tempo  $O(1)$ . Como estes dois métodos são mais simples, passaremos brevemente sobre eles, e detalharemos mais a rotina `removeMSF`, que possui a rotina auxiliar `substituaArestaMSF` implementada de maneira diferente do `substituaAresta` do algoritmo de conexidade em grafos dinâmicos.

Usaremos várias definições já apresentadas no algoritmo de conexidade em grafos dinâmicos, incluindo as mesmas invariantes apresentadas na Seção 2.2.1, os mesmos tipos de arestas da Seção 2.2.2 e nós das florestas apresentados na Seção 2.4.2. A seguir, apresentaremos as rotinas da MSF decremental e alguns ajustes a serem feitos.

### 3.1.1 Listas de adjacências

Na Seção 2.2.2, apresentamos a biblioteca de `listasDeAdjacências`, onde usamos um mapa hash para inserir ou remover um vértice  $v$  da lista de  $u$ , além de percorrer os vizinhos da lista de  $u$ . No algoritmo da MSF decremental, quando removemos uma aresta de nível  $i$  da floresta  $F_i$ , uma componente desta será quebrada em duas,  $T_u$  e  $T_v$ , da mesma forma que no algoritmo de conexidade em grafos dinâmicos. A diferença é que, no caso da MSF decremental, precisamos buscar por uma aresta substituta que tenha o menor peso e que ligue  $T_u$  a  $T_v$ . Não podemos simplesmente percorrer todos os vizinhos  $y$  de cada vértice  $x$  em  $T_u$ , verificar se  $xy$  reconecta as componentes separadas e se é de menor peso dentre todas as substitutas, já que isso seria ineficiente.

Assim, fica claro que seria bom percorrer as arestas reserva em ordem crescente de peso

e testar se alguma é substituta nesta ordem. Por isso, em vez de usar um mapa hash para armazenar os vizinhos de cada vértice, usa-se um min-heap. Na verdade, como estamos trabalhando com nós de vértice e de aresta, cada nó de vértice  $u$  guardará um min-heap com os vizinhos de  $u$  em  $R_i$ , onde a chave dessa estrutura de dados para um vizinho  $v$  será o peso da aresta  $uv$ . Nós de aresta também guardarão um min-heap, porém vazio.

Os métodos principais (remoção, inserção e extração do vértice de chave mínima) que usamos no min-heap consomem tempo  $O(\lg n)$  usando uma implementação tradicional de heap, como a descrita no Capítulo 6 de Thomas H. Cormen et al. [2]. O resto dos métodos (consulta de um vértice de chave mínima, da quantidade de elementos na min-heap e se a min-heap está vazia) consomem tempo constante, e eles serão necessários para buscar uma aresta substituta de peso mínimo, como descreveremos mais à frente.

Como o min-heap é uma estrutura de dados bastante conhecida, não iremos descrever a sua implementação em detalhes. O objetivo é ressaltar as diferenças entre as listas de adjacências utilizadas no algoritmo de conexidade em grafos dinâmicos e na MSF decremental, e como essa mudança afetará o comportamento do método `substituaArestaMSF` da MSF decremental.

Assim, com base na implementação clássica do min-heap, podemos definir a biblioteca das listas de adjacências da MSF decremental.

- **listasDeAdjacênciasMSF( $n$ )**: constrói e devolve um grafo com  $n$  vértices e sem arestas, representado por listas de adjacências armazenadas em min-heaps;
- **adicioneLAMSF( $R, u, v, w$ )**: adiciona o vértice  $u$  na lista de adjacências de  $v$  em  $R$  e vice-versa, considerando que o peso de  $uv$  é  $w$ ;
- **removeLAMSF( $R, u, v$ )**: remove o vértice  $u$  da lista de adjacências de  $v$  em  $R$  e vice-versa;
- **consulteMinLAMSF( $R, u$ )**: retorna um par  $(v, w)$ , onde  $v$  é um vértice do min-heap de  $u$  em  $R$  com chave mínima  $w$ ;

Uma chamada à rotina `adicioneLAMSF( $R, u, v, w$ )` adiciona o par  $(u, w)$  no min-heap de  $v$  e também adiciona o par  $(v, w)$  no min-heap de  $u$ , consumindo tempo  $O(\lg n)$ . Similarmente, uma chamada à rotina `removeLAMSF( $R, u, v$ )` remove o par  $(u, w)$  do min-heap de  $v$  e também remove o par  $(v, w)$  do min-heap de  $u$ , consumindo também tempo  $O(\lg n)$ . Já o método `consulteMinLAMSF` consome tempo  $O(1)$ , já que estamos apenas consultando a chave mínima do min-heap de um vértice.

## 3.2 Ajustes nas invariantes

Como agora estamos tratando de florestas geradoras maximais de custo mínimo (MSFs), ajustaremos somente a primeira invariante, onde substituimos o termo *floresta maximal* por MSF, como se pode ver abaixo.

- (I)  $F_i$  é uma MSF de  $G_i$  para todo  $1 \leq i \leq \lceil \lg n \rceil$ ;
- (II)  $F_i \subseteq F_{i+1}$  para todo  $1 \leq i \leq \lceil \lg n \rceil - 1$ ;



(III) Cada componente da floresta  $F_i$  possui no máximo  $2^i$  vértices.

Além disso, uma invariante extra, que envolve o peso das arestas reserva, será usada para garantir a correção do novo algoritmo:

(IV) Toda aresta reserva de nível  $i$  incidente a um vértice  $u$  tem peso menor ou igual ao peso das arestas reserva de nível maior que  $i$  incidentes a  $u$ , para todo  $1 \leq i \leq \lceil \lg n \rceil - 1$ .

A partir deste momento, usaremos estas quatro invariantes e mostraremos como elas são preservadas no decorrer das modificações no grafo e como garantem o funcionamento do algoritmo.

### 3.3 Rotinas da biblioteca da MSF decremental

#### 3.3.1 Criação do grafo

O construtor `MSFDecremental` é bem parecido com o do grafo dinâmico, descrito na Seção 2.3.1. Além das variáveis de classe existentes que criamos para o grafo  $G$  no algoritmo de conexidade em grafos dinâmicos, armazenaremos o peso da MSF numa variável chamada *pesoMSF*, que será simplesmente retornada quando consultarmos o peso da MSF decremental corrente, chamando `consultePesoMSF`.

Também incluiremos um atributo do grafo chamado *peso*, que é um mapa hash que armazena o peso das arestas. Para armazenar o peso  $w$  de uma aresta  $uv$ , basta chamarmos  $G.peso[u, v] \leftarrow w$ . O atributo *peso* será fundamental para recalculer a variável *pesoMSF* no decorrer das remoções de arestas do grafo.

Dessa forma, podemos apresentar o construtor da MSF decremental no Programa 3.1, que usa a rotina `adicioneMSF` apresentada no Programa 3.2.

---

#### Programa 3.1 `MSFDecremental(n, E)`

---

**Entrada:** Recebe o número  $n$  de vértices do grafo e um conjunto  $E$  de arestas.

**Saída:** Devolve um grafo  $G$  com  $n$  vértices e  $m$  arestas ponderadas.

```

1   $L \leftarrow \lceil \lg n \rceil$ 
2   $G.nívelMax \leftarrow L$ 
3   $G.pesoMSF \leftarrow 0$ 
4  para  $i \leftarrow 1$  até  $L$  faça
5       $G.F_i \leftarrow florestaDinâmica(n)$ 
6       $G.R_i \leftarrow listasDeAdjacênciasMSF(n)$ 
7   $G.nível \leftarrow novoMapaHash(n)$ 
8   $G.peso \leftarrow novoMapaHash(n)$ 
9   $ordene(E)$  ▷ ordena as arestas do conjunto  $E$  em ordem crescente de peso
10 para cada aresta  $(u, v, w)$  em  $E$  faça
11     adicioneMSF( $G, u, v, w$ )
12 retorne  $G$ 
```

---

Podemos notar algumas diferenças quando comparamos o construtor `MSFDecremental` com o construtor `grafoDinâmico`. Na MSF decremental, além de inicializarmos  $\lceil \lg n \rceil$  listas



de adjacências e  $\lceil \lg n \rceil$  florestas dinâmicas, ordenamos as arestas do conjunto  $E$  em ordem crescente de peso e inserimos uma a uma chamando `adiconeMSF`, que está descrita abaixo. Note que esta é a primeira versão do método `adiconeMSF`. A versão completa dele será descrita na Seção 3.3.5.

---

**Programa 3.2** `adiconeMSF( $G, u, v, w$ )`


---

**Entrada:** Recebe dois vértices  $u$  e  $v$  do grafo  $G$ , com  $u < v$ , e o peso  $w$  da aresta  $uv$ .

**Efeito:** Adiciona a aresta  $uv$  de peso  $w$  no grafo  $G$ .

```

1   $L \leftarrow G.\text{nívelMax}$ 
2   $G.\text{nível}[u, v] \leftarrow L$ 
3   $G.\text{peso}[u, v] \leftarrow w$ 
4  se conectadosFD( $G.F_L, u, v$ ) então                                 $\triangleright uv$  é aresta reserva
5      adiconeLMSF( $G.R_L, u, v, w$ )
6      incrementeArestasReservasDeNível( $G.F_L, G.R_L, u$ )
7      incrementeArestasReservasDeNível( $G.F_L, G.R_L, v$ )
8  senão
9       $G.\text{pesoMSF} \leftarrow G.\text{pesoMSF} + w$ 
10     adiconeFD( $G.F_L, u, v$ )
11     atualizeÉNível( $G.F_L, u, v, \text{verdadeiro}$ )

```

---

Como citado antes, a rotina `adiconeMSF` é acionada apenas em `MSFDecremental`. Ademais, a única diferença entre a `adiconeMSF` e a `adiconeGD` que vimos na Seção 2.4.5 é que, na primeira, estamos guardando o peso das arestas quando as inserimos no grafo. Portanto, `adiconeMSF` também consome tempo amortizado  $O(\lg n)$ .

Para `adiconeMSF`, a invariante (I) é preservada para o nível  $i = \lceil \lg n \rceil$ , já que estamos inserindo as arestas do grafo em ordem crescente de peso. Essa construção basicamente simula o algoritmo de Kruskal. Como estamos inserindo arestas de nível  $\lceil \lg n \rceil$  em  $F_{\lceil \lg n \rceil}$ , então as florestas de níveis inferiores não são afetadas, mantendo-se, assim, as invariantes (II), (III) e (IV) também.

### 3.3.2 Consulta de peso da MSF

A rotina `consultePesoMSF`, que devolve o peso de uma MSF do grafo  $G$ , está descrita abaixo.

---

**Programa 3.3** `consultePesoMSF( $G$ )`


---

**Entrada:** Recebe o grafo dinâmico  $G$ .

**Saída:** Devolve o peso de uma MSF de  $G$ .

```

1  retorne  $G.\text{pesoMSF}$ 

```

---

É fácil ver que `consultePesoMSF` consome tempo  $O(1)$ . Ademais, como não estamos alterando nem o grafo  $G$  nem as florestas de  $G$ , então as quatro invariantes são preservadas.

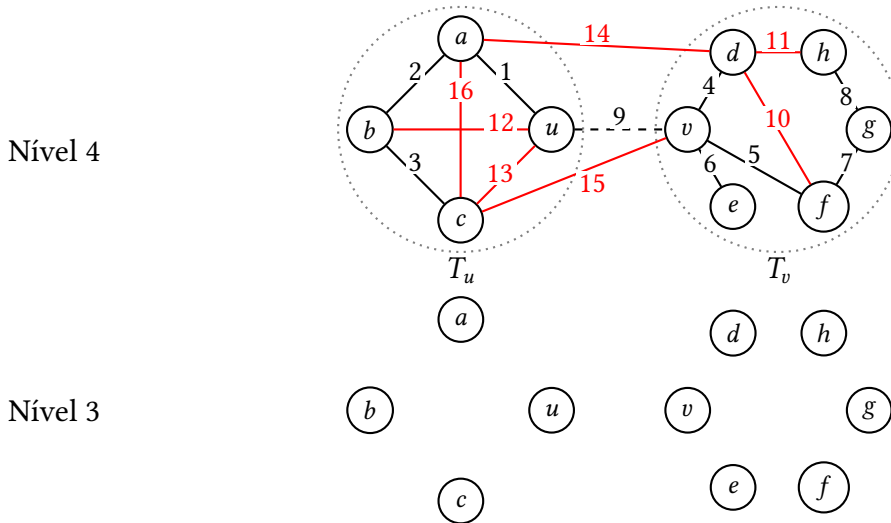
### 3.3.3 Remoção de arestas

A remoção de arestas também é semelhante à do algoritmo de conexidade em grafos dinâmicos. A diferença é que a busca por alguma aresta substituta, feita na `substituaA-`

restaMSF agora, é dada por ordem crescente de peso das arestas reserva.

Quando removemos de  $F_i$  uma aresta  $uv$  de nível  $i$ , quebramos uma componente desta floresta em  $T_u$  e  $T_v$ , com  $|T_u| \leq |T_v|$ , e rebaixamos todas as arestas de  $T_u$ , da mesma forma que fazíamos antes em `substituaAresta`. Porém, agora buscamos alguma aresta reserva de peso mínimo dentre todas as arestas reserva em  $R_i$  incidente a  $T_u$ , e testamos se ela é uma substituta. Se não é, a rebaixamos para  $R_{i-1}$  e buscamos a próxima de peso mínimo em  $R_i$  incidente a  $T_u$ . Por causa da invariante (IV), quando achamos uma substituta, essa é a substituta de menor peso e conseguimos manter o peso da MSF do grafo, reconectando as duas componentes separadas devido à remoção de  $uv$ .

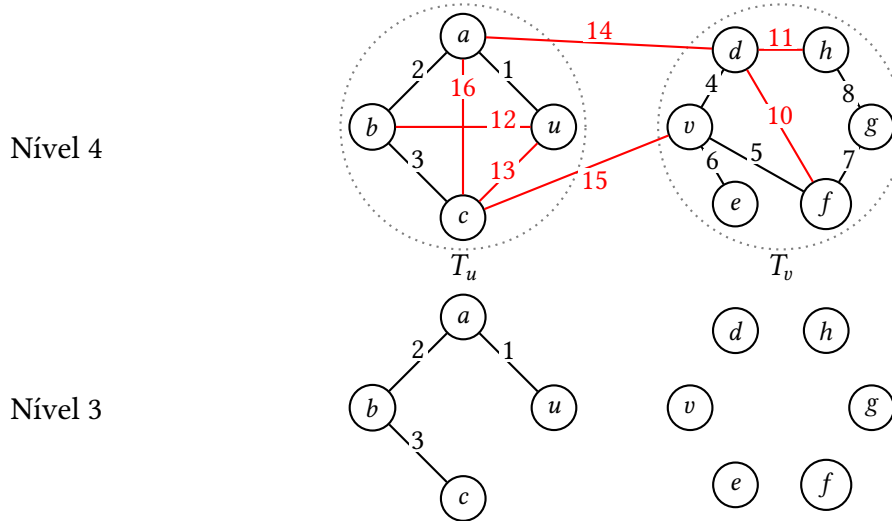
Para facilitar o entendimento da substituição de aresta na MSF decremental, demonstraremos a remoção de uma aresta  $uv$  da floresta em uma série de imagens. Na Figura 3.1, temos um grafo ponderado  $G$  e assumiremos que essa é a primeira remoção depois da criação do grafo. No nosso exemplo,  $G$  tem  $n = 10$  vértices. Sabemos que  $\lceil \lg 10 \rceil = 4$ , logo o nível máximo  $L$  da floresta é 4 e, conseqüentemente,  $G = G_4$ . Como, na construção, todas as inserções ocorrem no nível  $L$  em  $F_4$ , só temos arestas da floresta de nível 4, enquanto  $F_3$  contém apenas vértices isolados. Neste cenário, note que a remoção da aresta  $uv$  da floresta, representada por uma linha tracejada na figura, acaba quebrando a única componente da floresta  $F_4$  em duas,  $T_u$  e  $T_v$ . Como  $F_4$  é a floresta maximal de nível máximo de  $G$ , então removemos a  $uv$  somente de  $F_4$ .



**Figura 3.1:** Um grafo ponderado  $G$  de 10 vértices, onde as arestas pretas são da floresta  $F_4$ , enquanto as vermelhas são reservas. A aresta  $uv$  está prestes a ser removida. A floresta  $F_4$  de  $G$  de cima contém todas as arestas pretas recém-inseridas e as arestas vermelhas estão em  $R_4$ . A floresta de baixo é a  $F_3$ , com os vértices isolados, e  $R_3$  também não tem nenhuma aresta.

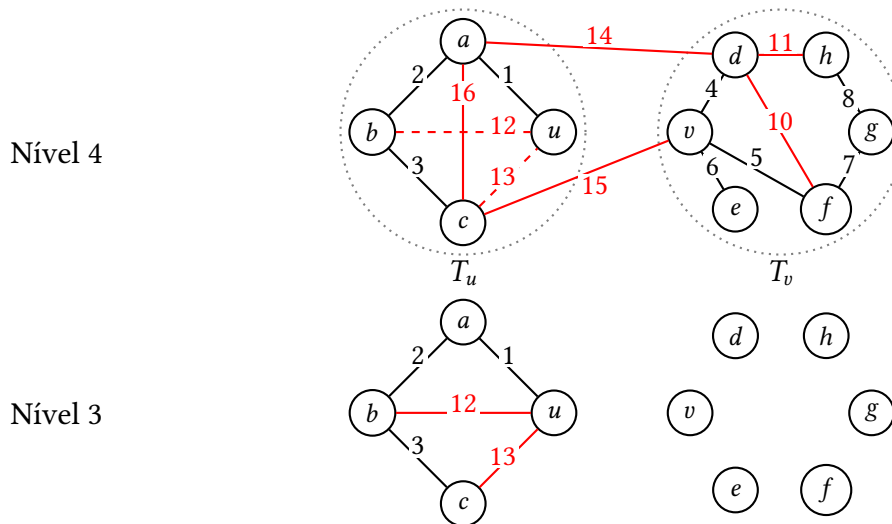
O próximo passo é rebaixar todas as arestas de nível 4 em  $T_u$  para o nível 3. Dessa forma, as arestas de  $T_u$  passam a estar em  $F_3$ , como se pode ver na Figura 3.2, pois agora elas passam a ser de nível 3. Como  $T_u$  e  $T_v$  em  $F_4$  ficaram separadas após a remoção de  $uv$ , precisamos encontrar, se existir, uma aresta reserva que possa reconectá-las. Note que agora precisamos percorrer as arestas reserva em ordem de peso. Entretanto, percorrer todas as arestas reserva de  $R_4$  incidentes a  $T_u$  e selecionar a de menor peso é ineficiente. Isso porque, se a aresta de peso mínimo não é uma substituta, teremos que buscar a próxima de

menor peso e fazer esse processo novamente, o que acaba comprometendo a performance do algoritmo. Por isso, explicaremos como implementar essa busca eficiente por uma aresta substituta de menor peso na Seção 3.3.4.



**Figura 3.2:** Representação da remoção da aresta  $uv$  em  $G$ . As arestas de nível 4 de  $T_u$  foram rebaixadas para o nível 3, o que pode ser visto na floresta  $F_3$ .

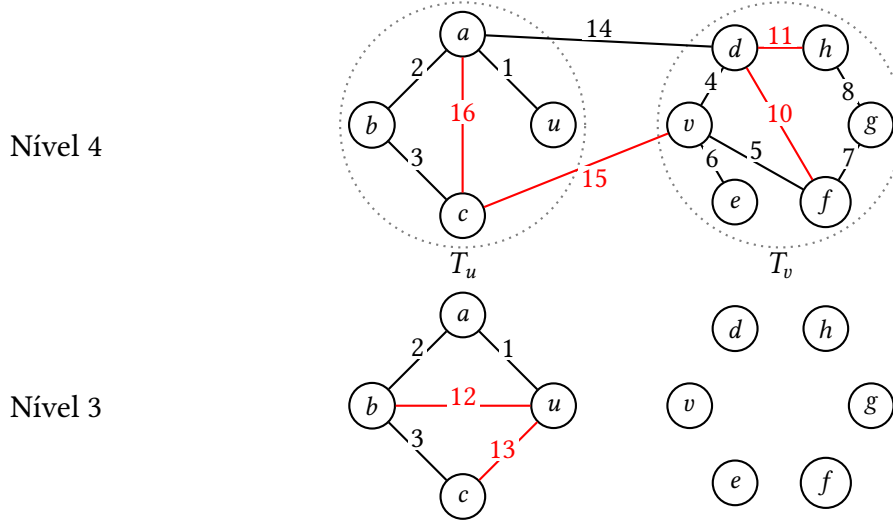
Na Figura 3.3, percorremos as arestas reserva em ordem de peso em  $R_4$  que tenham uma das pontas em  $T_u$ . Para cada aresta percorrida, verificamos se a outra ponta dela incide em algum vértice de  $T_v$ . No nosso exemplo, olhamos para as arestas reserva em  $R_4$ , antes de encontrarmos a substituta, nesta ordem:  $bu$  (peso 12) e  $uc$  (peso 13). Veja que as rebaixamos para  $R_3$  por não serem substitutas.



**Figura 3.3:** Representação da busca por uma aresta substituta em  $R_4$ . As arestas reserva de nível 4 que estão tracejadas foram percorridas em ordem crescente de peso e estão prestes a serem removidas de  $R_4$ , pois foram rebaixadas para o nível 3, como se pode ver em  $R_3$ .

Assim, a próxima aresta reserva de menor peso em  $R_4$  que olharemos é a  $ad$ , de peso 14. Como ela conecta  $T_u$  a  $T_v$ , chamamos  $\text{adicionaFD}(F_4, a, d)$  e  $ad$  passa a ser uma

aresta da floresta, ou seja, é removida de  $R_4$ . Como  $i = 4$  é o nível máximo do grafo nesse exemplo, não precisamos chamar esta rotina para níveis superiores e então terminamos a execução do algoritmo. A Figura 3.4 ilustra essa etapa do algoritmo.



**Figura 3.4:** Representação do grafo com a aresta substituída  $ad$  por ser a de menor peso em  $R_4$  que conecta  $T_u$  a  $T_v$ , tornando-se uma aresta da floresta  $F_4$ .

A partir dessas imagens, percebe-se que o método `removeMSF`, descrito abaixo, é bem semelhante ao método `removeGD`, exceto que no primeiro precisamos recalculamos o peso da MSF de  $G$  quando removemos uma aresta da floresta. Note que o `removeMSF` descrito abaixo é a primeira versão deste método. Descreveremos a sua versão completa na Seção 3.3.6

---

**Programa 3.4** `removeMSF( $G, u, v$ )`

---

**Entrada:** Recebe dois vértices adjacentes  $u$  e  $v$  do grafo  $G$ .

**Efeito:** Remove a aresta  $uv$  do grafo  $G$ .

```

1   $L \leftarrow G.\text{nívelMax}$ 
2   $i \leftarrow G.\text{nível}[u, v]$ 
3   $G.\text{nível}[u, v] \leftarrow \text{NIL}$                                 ▷ marcamos  $uv$  como removida
4  se  $uv \in G.F_L$  então                                    ▷  $uv$  é aresta da floresta
5       $w \leftarrow G.\text{peso}[u, v]$ 
6       $G.\text{pesoMSF} \leftarrow G.\text{pesoMSF} - w$ 
7      para  $j \leftarrow i$  até  $L$  faça
8          removeFD( $G.F_j, u, v$ )
9          substituaArestaMSF( $G, i, u, v$ )
10 senão                                                       ▷  $uv$  é aresta reserva
11     removeLAMSF( $G.R_i, u, v$ )
12     decrementeArestasReservasDeNível( $G.F_i, G.R_i, u$ )
13     decrementeArestasReservasDeNível( $G.F_i, G.R_i, v$ )

```

---

O método `substituaArestaMSF`, que é uma versão ajustada de `substituaAresta`, será descrito mais adiante. Por enquanto, sabemos que `removeMSF` consome tempo  $O(\lg^2 n)$  mais o custo de `substituaArestaMSF`.

### 3.3.4 Ajustes em nós das florestas

No algoritmo de conexidade em grafos dinâmicos, vimos que os nós da floresta guardam dois campos, *incideArestaReservaDeNível* e *éNível*, além de dois contadores, *arestasDeNível* e *arestasReservasDeNível*. Mostramos também alguns métodos que atualizam e utilizam estes campos para realizar a busca eficiente de uma aresta substituta.

Para o algoritmo da MSF decremental, além destes campos apresentados, precisaremos de dois campos extras para cada nó da floresta: *peso* e *pesoMínimo*. O primeiro campo armazena o peso de um nó de aresta (nós de vértice guardam  $\infty$  neste campo). Na floresta  $F_i$ , cada nó de vértice sabe facilmente o peso mínimo de uma aresta reserva de  $R_i$  incidente nele. Assim, o campo *pesoMínimo* de cada nó  $p$  de floresta guarda o peso mínimo de uma aresta reserva de  $R_i$  incidente a algum vértice cujo nó está na subárvore de  $p$ .

Como o peso de cada aresta ponderada nunca muda, então não precisamos atualizar o seu peso. Entretanto, à medida que vamos removendo arestas da floresta  $F_i$ , quebramos alguma componente dela em duas e precisamos buscar alguma aresta substituta para reconectar as duas componentes separadas. Assim, quando procuramos por alguma aresta substituta em  $R_i$ , podemos neste processo rebaixar algumas arestas de  $R_i$  para  $R_{i-1}$  e o *pesoMínimo* dos nós em  $F_i$  e em  $F_{i-1}$  precisa ser atualizado. Se em  $R_i$  acharmos uma substituta, ela se tornará uma aresta da floresta  $F_i$  e precisamos também atualizar o *pesoMínimo* de alguns nós em  $F_i$ , que agora será o peso mínimo dentre as arestas reserva restantes em  $R_i$ .

Por isso, fica claro que precisamos de um método que atualize o campo *pesoMínimo* dos nós. Para isso, criamos o método *atualizePesoMínimo*, que está descrito abaixo. Na nossa implementação, ele é usado em métodos quando estamos fazendo alguma alteração em  $R_i$ , e também é usado ao acionarmos as operações *splay*, sempre que essa executa uma rotação.

---

**Programa 3.5** *atualizePesoMínimo*( $F, R, u$ )

---

**Entrada:** Recebe um vértice  $u$ , as listas de adjacências  $R$  e a floresta  $F$ .

**Efeito:** Atualiza o atributo *pesoMínimo* do nó de vértice  $u$ .

```

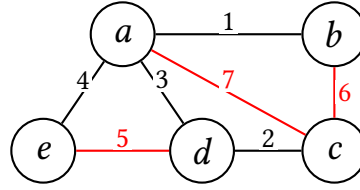
1   $nóUU \leftarrow F.nó[u, u]$ 
2  splay( $nóUU$ )
3   $c \leftarrow \infty$ 
4  se  $nóUU.esq \neq NIL$  e  $nóUU.esq.pesoMínimo < c$  então
5       $c \leftarrow nóUU.esq.pesoMínimo$ 
6  se  $nóUU.dir \neq NIL$  e  $nóUU.dir.pesoMínimo < c$  então
7       $c \leftarrow nóUU.dir.pesoMínimo$ 
8  se  $R[u] \neq \emptyset$  então
9       $(v, w) \leftarrow consulteMinLMSF(R, u)$ 
10     se  $w < c$  então
11          $c \leftarrow w$ 
12   $nóUU.pesoMínimo \leftarrow c$ 
```

---

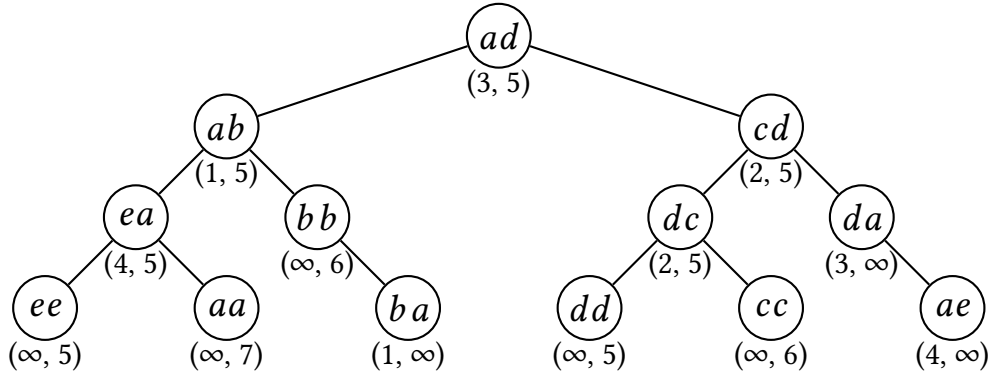
Como se pode ver, o Programa 3.5 consome tempo amortizado  $O(\lg n)$  por conta da operação *splay*. Além disso, ele não altera a floresta  $F$ , altera somente a forma de uma das árvores binárias que a representam. Portanto, todas as quatro invariantes são preservadas.

Para entendermos como estes dois campos extras aparecem em cada nó da floresta,

usaremos um exemplo de um grafo ponderado  $G$  de 5 vértices e 7 arestas ponderadas, como se pode ver na Figura 3.5. A Figura 3.6 mostra estes campos nos nós da floresta  $F_L$  de  $G$ .



**Figura 3.5:** Grafo ponderado  $G$  de 5 vértices e 7 arestas ponderadas. Arestas pretas são da floresta e formam a MSF de  $G$ , enquanto as vermelhas são arestas reserva.



**Figura 3.6:** Árvore da única componente da floresta  $F_L$  do grafo  $G$  da Figura 3.5, onde embaixo de cada nó há um par de números. O primeiro número indica o atributo peso do nó, enquanto o segundo número indica o atributo pesoMínimo, calculado através dos nós em sua subárvore.

A seguir, o Programa 3.6 apresenta o método `procureNóIncideArestaDePesoMínimo`, que procura e retorna o nó de vértice que incide em uma aresta reserva de peso mínimo. Ele será usado no método `substituaArestaMSF`, que descreveremos na Seção 3.3.8.

---

**Programa 3.6** `procureNóIncideArestaDePesoMínimo( $R, p$ )`

---

**Entrada:** Recebe um nó  $p$  de uma floresta com o atributo `arestasReservasDeNível`  $> 0$  e as listas de adjacências  $R$ .

**Saída:** Devolve um nó de vértice incidente a uma aresta reserva de peso mínimo.

```

1   $c \leftarrow \infty$ 
2   $(x, y) \leftarrow p.\text{vértices}$ 
3  se  $x = y$  e  $R[x] \neq \emptyset$  então                                 $\triangleright$  verificamos se  $p$  é um nó de vértice
4       $(v, w) \leftarrow \text{consulteMinLAMSF}(R, p)$ 
5       $c \leftarrow w$ 
6  se  $c \neq \infty$  e  $p.\text{pesoMínimo} = c$  então
7      retorne  $p$ 
8  se  $p.\text{esq} \neq \text{NIL}$  e  $p.\text{esq}.\text{pesoMínimo} = p.\text{pesoMínimo}$  então
9      retorne procureNóIncideArestaDePesoMínimo( $R, p.\text{esq}$ )
10 senão
11     retorne procureNóIncideArestaDePesoMínimo( $R, p.\text{dir}$ )

```

---

Veja que o Programa 3.6 não altera o grafo, e, portanto, as invariantes são preservadas. Como a Euler tour tree é balanceada, o consumo de tempo de cada percurso é  $O(\lg n)$  (amortizado em nossa implementação, onde sempre realizamos um `splice` no nó devolvido).

### 3.3.5 Versão completa da rotina de adição de arestas

A versão completa do método `adicioneMSF` está descrita abaixo. Ao inserirmos uma aresta reserva  $uv$  em  $R_L$ , precisamos atualizar o atributo *pesoMínimo* dos nós de vértice  $u$  e  $v$  de  $F_L$ , como se pode ver nas linhas 6 e 7. Isso porque se o peso de  $uv$  é o menor dentre todas as arestas reserva inseridas em  $R_L$  até o momento, o campo *pesoMínimo* de  $u$  e de  $v$  então passa a ser o peso de  $uv$ . Assim, a complexidade de tempo da versão final de `adicioneMSF` continua sendo  $O(\lg n)$ .

---

**Programa 3.7** `adicioneMSF( $G, u, v, w$ )`


---

**Entrada:** Recebe dois vértices  $u$  e  $v$  do grafo  $G$ , com  $u < v$ , e o peso  $w$  da aresta  $uv$ .

**Efeito:** Adiciona a aresta  $uv$  de peso  $w$  no grafo  $G$ .

```

1   $L \leftarrow G.nívelMax$ 
2   $G.nível[u, v] \leftarrow L$ 
3   $G.peso[u, v] \leftarrow w$ 
4  se conectadosFD( $G.F_L, u, v$ ) então                                ▷  $uv$  é aresta reserva
5      adicioneLAMSF( $G.R_L, u, v, w$ )
6      atualizePesoMínimo( $G.F_L, G.R_L, u$ )
7      atualizePesoMínimo( $G.F_L, G.R_L, v$ )
8      incrementeArestasReservasDeNível( $G.F_L, G.R_L, u$ )
9      incrementeArestasReservasDeNível( $G.F_L, G.R_L, v$ )
10 senão
11      $G.pesoMSF \leftarrow G.pesoMSF + w$ 
12     adicioneFD( $G.F_L, u, v$ )
13     atualizeÉNível( $G.F_L, u, v, verdadeiro$ )

```

---

### 3.3.6 Versão completa da rotina de remoção de arestas

A versão completa do método `removeMSF` está descrita abaixo.

---

**Programa 3.8** `removeMSF( $G, u, v$ )`


---

**Entrada:** Recebe dois vértices adjacentes  $u$  e  $v$  do grafo  $G$ .

**Efeito:** Remove a aresta  $uv$  do grafo  $G$ .

```

1   $L \leftarrow G.nívelMax$ 
2   $i \leftarrow G.nível[u, v]$ 
3   $G.nível[u, v] \leftarrow NIL$                                 ▷ marcamos  $uv$  como removida
4  se  $uv \in G.F_L$  então                                        ▷  $uv$  é aresta da floresta
5       $w \leftarrow G.peso[u, v]$ 
6       $G.pesoMSF \leftarrow G.pesoMSF - w$ 
7      para  $j \leftarrow i$  até  $L$  faça
8          removeFD( $G.F_j, u, v$ )
9          substituaArestaMSF( $G, i, u, v$ )
10 senão                                                        ▷  $uv$  é aresta reserva
11     removeLAMSF( $G.R_i, u, v$ )
12     atualizePesoMínimo( $G.F_i, G.R_i, u$ )
13     atualizePesoMínimo( $G.F_i, G.R_i, v$ )
14     decrementeArestasReservasDeNível( $G.F_i, G.R_i, u$ )
15     decrementeArestasReservasDeNível( $G.F_i, G.R_i, v$ )

```

---

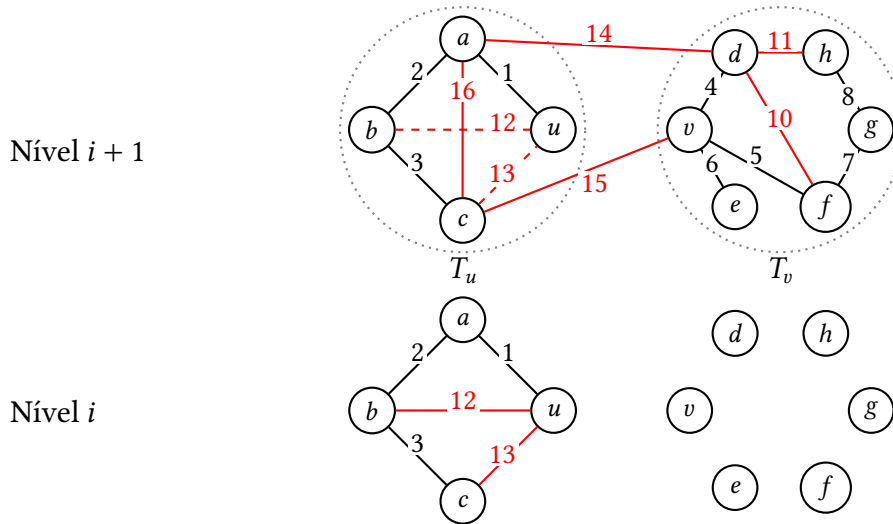
Ao removermos uma aresta reserva  $uv$  de  $R_i$ , precisamos atualizar o atributo *pesoMínimo* dos nós de vértice  $u$  e  $v$  de  $F_i$ , como se pode ver nas linhas 12 e 13. Isso porque se o peso de  $uv$  era o menor dentre todas as arestas reserva restantes, então o atributo *pesoMínimo* de  $u$  e de  $v$  passa a ser o peso da aresta reserva de segundo menor peso em  $R_i$  incidente a  $u$  ou  $v$ . Assim, a complexidade de tempo da versão final de `removeMSF` continua sendo  $O(\lg^2 n)$  mais o custo da rotina `substituaArestaMSF`, que será descrita na Seção 3.3.8.

### 3.3.7 Busca por uma aresta substituta

Agora, veremos em detalhes porque, ao removermos uma aresta  $uv$  de nível  $i$ , uma aresta substituta de menor peso está em um  $R_j$  com  $j \geq i$  menor possível. Será que não há uma aresta substituta no nível  $j + 1$  que seja mais leve que uma substituta do nível  $j$ ?

Primeiramente, é fácil perceber que, se removermos uma aresta de nível  $i$  de  $F_i$  e  $i \neq L$ , sabemos que alguma aresta de nível  $i + 1$  da floresta  $F_{i+1}$  já tinha sido removida antes, o que causou o rebaixamento de algumas arestas de nível  $i + 1$  para o nível  $i$ . Lembre-se que não há inserção de arestas depois que as remoções (e rebaixamentos) começam a ocorrer.

Sabemos, então, que algumas arestas de  $F_{i+1}$  foram rebaixadas para  $F_i$ . Para facilitar o entendimento deste cenário, ilustraremos um grafo com as florestas  $F_i$  e  $F_{i+1}$ , além de  $R_i$  e  $R_{i+1}$ , como se pode ver na Figura 3.7. Nela, podemos supor que a aresta  $uv$  já foi removida, quebrando a componente de  $F_{i+1}$  em  $T_u$  e  $T_v$ . Além disso, todas as arestas de  $T_u$  foram rebaixadas para  $F_i$ . As arestas reserva  $ub$  e  $uc$  foram rebaixadas de  $R_{i+1}$  para  $R_i$ , já que estamos percorrendo em ordem crescente de peso das arestas reserva de  $R_{i+1}$  para buscar uma aresta substituta.



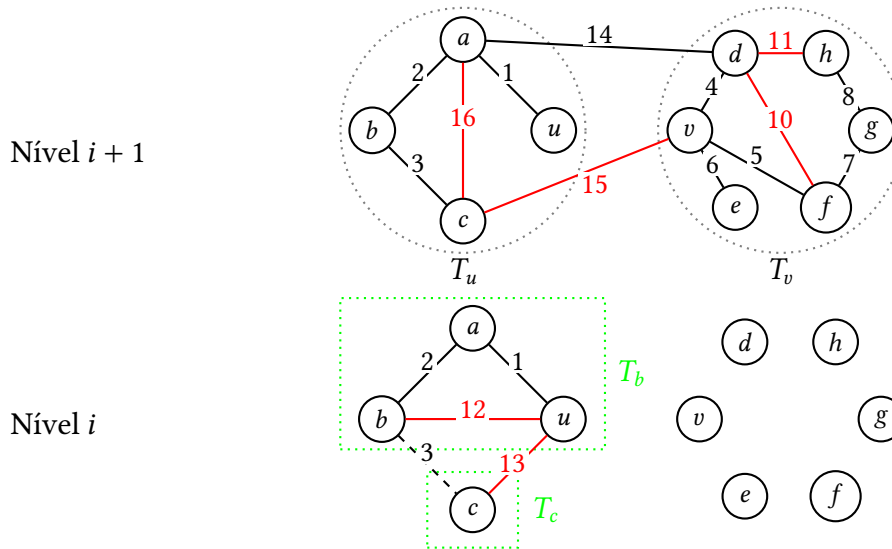
**Figura 3.7:** Representação da busca por uma aresta substituta em  $R_{i+1}$ . As arestas reserva de nível  $i + 1$  que estão tracejadas foram percorridas em ordem crescente de peso e estão prestes a serem removidas de  $R_{i+1}$ , pois foram rebaixadas para o nível  $i$ , como se pode ver em  $R_i$ .

Logo na Figura 3.8, temos a aresta  $ad$  escolhida para ser uma substituta de menor peso que reconecta  $T_u$  e  $T_v$ , tornando-se uma aresta da floresta. Note que, em  $R_i$ , as arestas reserva com as duas pontas em  $T_u$  de  $F_i$  (neste caso,  $ub$  e  $uc$ ) possuem peso menor que as arestas reserva com duas pontas em  $T_u$  de  $F_{i+1}$  (neste caso,  $ac$ ). Isso acontece porque,

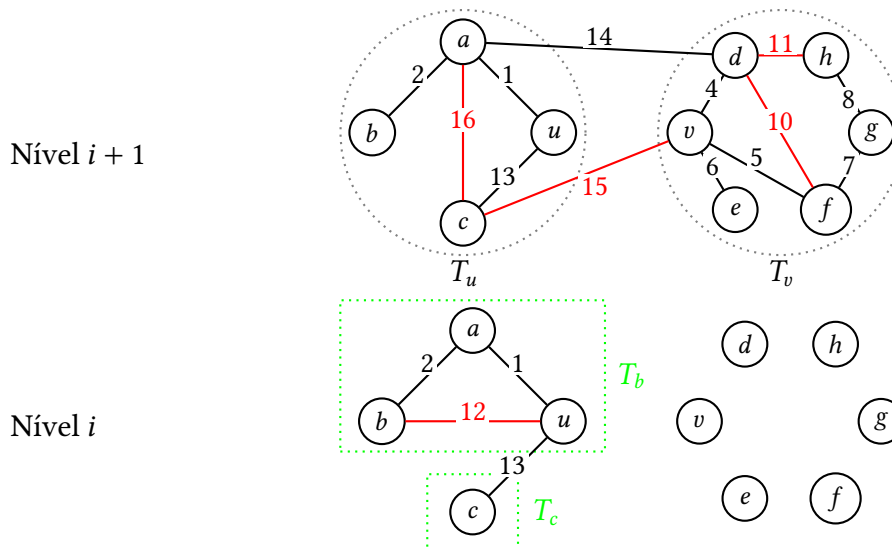


quando percorremos as arestas reserva em ordem crescente de peso, aproveitamos para rebaixar aquelas com as duas pontas em  $T_u$  até encontrarmos uma que conecte  $T_u$  e  $T_v$ .

Ainda na Figura 3.8, a aresta  $bc$ , de nível  $i$ , está prestes a ser removida, o que acabaria quebrando uma componente da floresta  $F_i$  em  $T_b$  e  $T_c$ . Para reconectar  $T_b$  e  $T_c$ , observe que apenas  $uc$  seria percorrida e já é substituta, como se pode ver na Figura 3.9. Embora  $ac$  e  $cv$  também sejam substitutas incidentes a  $T_c$ , pelo fato de elas estarem em  $R_{i+1}$  e pela invariante (IV), elas são mais pesadas que  $uc$ , que está em  $R_i$ .



**Figura 3.8:** Representação do grafo com a aresta substituta  $ad$  por ser a de menor peso em  $R_{i+1}$  que conecta  $T_u$  a  $T_v$ , tornando-se uma aresta da floresta  $F_{i+1}$ . A próxima aresta a ser removida é  $bc$ , que está tracejada, e quebra uma componente de  $F_i$  em  $T_b$  e  $T_c$ .



**Figura 3.9:** Representação do grafo com a aresta da floresta  $bc$  removida de  $F_i$  e de  $F_{i+1}$ , e a aresta reserva  $uc$  é escolhida como a substituta por ser a de menor peso que reconecta  $T_b$  e  $T_c$ .

### 3.3.8 Rotina de substituição de aresta

Para descrever a rotina `substituaArestaMSF` do Programa 3.9, usaremos vários dos métodos auxiliares já apresentados, além de alguns métodos e campos novos adicionados aos nós das florestas, que vimos na Seção 3.3.4. Mostraremos também a rotina `testeSubstitutaMSF`, que é uma versão ajustada da rotina `testeSubstituta` que vimos antes.

---

**Programa 3.9** `substituaArestaMSF( $G, i, u, v$ )`


---

**Entrada:** Recebe dois vértices  $u$  e  $v$  do grafo  $G$ , e o nível  $i$  da aresta removida  $uv$ .

**Efeito:** Adiciona uma aresta substituta de peso mínimo em  $G$ , se ela existir.

```

1   $L \leftarrow G.nívelMax$ 
2  para  $j \leftarrow i$  até  $L$  faça
3       $T_u \leftarrow \text{splay}(G.F_j.nó[u, u])$  ▷ torna o nó  $uu$  raiz de  $T_u$ 
4       $T_v \leftarrow \text{splay}(G.F_j.nó[v, v])$  ▷ torna o nó  $vv$  raiz de  $T_v$ 
5      se  $T_u.tam > T_v.tam$  então
6           $T_u \leftrightarrow T_v$ 
7      enquanto  $T_u.arestasDeNível > 0$  faça
8           $nóXY \leftarrow \text{procureArestaDeNível}(T_u)$ 
9           $T_u \leftarrow \text{splay}(nóXY)$ 
10          $\text{rebaixeNívelDaAresta}(G, nóXY, j)$ 
11     enquanto  $T_u.arestasReservasDeNível > 0$  faça
12          $nóXX \leftarrow \text{procureNóIncideArestaDePesoMínimo}(R_j, T_u)$ 
13          $T_u \leftarrow \text{splay}(nóXX)$ 
14          $(x, x) \leftarrow nóXX.vértices$ 
15          $(y, w) \leftarrow \text{consulteMinLAMSf}(R_j, x)$ 
16         se testeSubstitutaMSF( $G, x, y, j$ ) então
17             retorne

```

---

Veja que já vimos as linhas 1 a 10 do Programa 3.9, pois elas são exatamente iguais a esse mesmo trecho do código do Programa 2.14. Isso quer dizer que o rebaixamento de arestas da floresta acontece da mesma forma que no algoritmo de conexidade em grafos dinâmicos. O que muda é somente a forma como procuramos por alguma aresta substituta.

Sendo assim, explicaremos o código da linha 11 em diante. A linha 11, como também já visto, é um laço que terminará quando não existirem mais arestas reserva de nível  $j$  incidentes a  $T_u$  (ou seja, quando o contador `arestasReservasDeNível` do nó raiz de  $T_u$  estiver nulo) ou quando achamos uma aresta substituta.

A linha 12 é onde acionamos o método `procureNóIncideArestaDePesoMínimo`, para obtermos um nó de vértice incidente a uma aresta reserva de peso mínimo. Assim, obtemos esta aresta chamando `consulteMinLAMSf` na linha 15, onde obtemos um par  $(y, w)$ .

Em seguida, basta testarmos se a aresta  $xy$  de peso mínimo  $w$  é uma aresta substituta que reconecta  $T_u$  a  $T_v$ . Para isso, na linha 16 chamamos `testeSubstitutaMSF`, descrita no Programa 3.10.

**Programa 3.10** testeSubstitutaMSF( $G, x, y, j$ )**Entrada:** Recebe o grafo  $G$ , as pontas  $x$  e  $y$  da aresta  $xy$  e o nível  $j$ .**Saída:** Remove  $xy$  de  $R_j$  e, caso  $xy$  seja substituta, adiciona  $xy$  a  $R_j$  e devolve verdadeiro. Caso contrário, adiciona  $xy$  a  $R_{j-1}$  e devolve falso.

```

1  removaLAMSF( $G.R_j, x, y$ )
2  decumenteArestasReservasDeNível( $G.F_j, G.R_j, x$ )
3  decumenteArestasReservasDeNível( $G.F_j, G.R_j, y$ )
4  atualizePesoMínimo( $G.F_j, G.R_j, x$ )
5  atualizePesoMínimo( $G.F_j, G.R_j, y$ )
6   $w \leftarrow G.peso[x, y]$ 
7  se conectadosFD( $G.F_j, x, y$ ) então                                ▷ a aresta  $xy$  não é substituta
8       $G.nível[x, y] \leftarrow j - 1$ 
9      adicioneLAMSF( $G.R_{j-1}, x, y, w$ )
10     atualizePesoMínimo( $G.F_{j-1}, G.R_{j-1}, x$ )
11     atualizePesoMínimo( $G.F_{j-1}, G.R_{j-1}, y$ )
12     incrementeArestasReservasDeNível( $G.F_{j-1}, G.R_{j-1}, x$ )
13     incrementeArestasReservasDeNível( $G.F_{j-1}, G.R_{j-1}, y$ )
14     retorne falso
15 senão                                                                ▷ a aresta  $xy$  é substituta
16      $L \leftarrow G.nívelMax$ 
17      $G.pesoMSF \leftarrow G.pesoMSF + w$ 
18     para  $k \leftarrow j$  até  $L$  faça
19         adicioneFD( $G.F_k, x, y$ )
20     se  $x > y$  então
21          $x \leftrightarrow y$ 
22     atualizeÉNível( $G.F_j, x, y, verdadeiro$ )
23     retorne verdadeiro

```

Na rotina testeSubstitutaMSF, precisamos atualizar a variável *pesoMSF* de  $G$  quando encontramos uma aresta substituta, além de chamar os devidos métodos auxiliares (acionamos removaLAMSF e adicioneLAMSF em vez de removaLA e adicioneLA). Além disso, como estamos rebaixando arestas reserva, precisamos atualizar o atributo *pesoMínimo* dos nós de vértice afetados, acionando a rotina atualizePesoMínimo nas linhas 4, 5, 10 e 11 do Programa 3.10.

Veja que o trecho que compreende as linhas 7 a 14 do Programa 3.10 possui custo amortizado  $O(\lg n)$ . Isso quer dizer que, enquanto as arestas que estamos testando não forem substitutas, o método testeSubstitutaMSF será acionado várias vezes com esse custo de tempo. No momento em que encontrarmos uma substituta, testeSubstitutaMSF será acionado uma única vez e consumirá tempo amortizado  $O(\lg^2 n)$  por causa das linhas 18 e 19, e assim o algoritmo será finalizado.

Agora, explicaremos o custo da rotina substituaArestaMSF. Usaremos o mesmo argumento da amortização da rotina substituaAresta, apresentado na Seção 2.4.7.

No pior caso, uma execução da rotina substituaArestaMSF pode consumir muito tempo. Por exemplo, se o grafo já está com  $m = \Theta(n^2)$  arestas inseridas, todas de nível  $L$ , pode ocorrer uma remoção que aciona o substituaArestaMSF e que acarreta o rebaixamento de  $\Theta(n^2)$  arestas, a um custo  $\Omega(n^2 \lg n)$ .

No entanto, para chegar a essa situação, teriam ocorrido  $\Theta(n^2)$  inserções, cada uma com um custo bem mais barato, de  $O(\lg n)$ . Isso sugere que possivelmente uma análise amortizada do custo das operações leve a um custo por operação mais baixo.

Agora mostraremos que, se ocorrerem  $t$  operações de inserção e remoção de arestas desde a criação do grafo, então o custo total de tal sequência de operações é  $O(t \lg^2 n)$ , o que resulta em um custo amortizado por operação de  $O(\lg^2 n)$ .

Para tanto, cada inserção será responsável não apenas pelo custo da inserção de uma aresta  $e$ , mas também pelo custo de todos os rebaixamentos sofridos por  $e$  no decorrer de todas as remoções que ocorrerem após a inserção de  $e$ . Isso quer dizer que a inserção da aresta  $e$  vai pagar por cada execução das linhas 7 a 10 do Programa 3.9 e das linhas 7 a 14 do Programa 3.10 que processa a aresta  $e$ . Como a inserção custa  $O(\lg n)$  e essas linhas custam  $O(\lg n)$  e são executadas  $O(\lg n)$  vezes, pois  $e$  pode ser rebaixada no máximo  $\lceil \lg n \rceil$  vezes, o custo pago por uma inserção é  $O(\lg^2 n)$ .

Já uma remoção de aresta, executada pelo Programa 3.8, custa  $O(\lg^2 n)$  mais o custo do `substituaArestaMSF`. O custo do `substituaArestaMSF` é  $O(\lg^2 n)$  excluindo-se as execuções das linhas 7 a 10 do Programa 3.9, assim como as linhas 7 a 14 do Programa 3.10. Desconsiderando estas linhas onde ocorrem rebaixamentos de arestas, cada iteração do para da linha 2 do Programa 3.9 possui custo  $O(\lg n)$  enquanto uma aresta substituta não for encontrada, ou seja, excetuando as linhas 15 a 23 do Programa 3.10.

No momento em que encontrarmos uma substituta, as linhas 15 a 23 do Programa 3.10 serão executadas uma única vez e consumirão tempo  $O(\lg^2 n)$  devido às linhas 18 e 19, terminando o algoritmo logo em seguida. Assim, como a linha 2 do Programa 3.9 pode ser executada no máximo  $O(\lg n)$  vezes, temos que `substituaAresta` consome tempo amortizado  $O(\lg^2 n)$  por operação de remoção.

Com isso, concluímos que o custo total de uma sequência de  $t$  inserções e remoções é  $O(t \lg^2 n)$ , e assim cada inserção e remoção consome tempo amortizado  $O(\lg^2 n)$ .

## Capítulo 4

### Testes experimentais

Neste capítulo, apresentaremos alguns testes de comparação de performance entre o algoritmo descrito no Capítulo 3 e uma versão do algoritmo de Kruskal adaptado para o problema da MSF decremental. Os experimentos foram realizados em um computador pessoal com as seguintes configurações:

- Sistema operacional Ubuntu 24.04.3 LTS (kernel 6.8.0-49-generic);
- Processador Intel Core i5-8265U (4 núcleos, 8 threads), arquitetura x86\_64;
- Memória RAM de 7,6 GB;
- GPU Intel UHD Graphics 620.

Para calcular a duração de tempo de uma operação em milissegundos, utilizamos a biblioteca `chrono` da linguagem `C++`. Além disso, o experimento não considera o tempo para inicializar um grafo com  $n$  vértices e  $m$  arestas. Considera apenas o tempo para as remoções das arestas e para as consultas ao peso de uma MST.

Foi implementado um gerador de grafos aleatórios, seguindo o modelo  $G(n, p)$  de Erdős-Rényi, onde  $n$  é o número de vértices e  $p$  é a probabilidade da existência de cada aresta. É sabido que, no modelo  $G(n, p)$  de Erdős-Rényi, o limiar para conexidade é  $p = \frac{\ln n}{n}$ . Nos nossos experimentos, usamos o valor  $p = \frac{\lg n}{n} > \frac{\ln n}{n}$ ,  $n > 1$ . Assim, temos que o número esperado de arestas nos grafos gerados é dado por  $\frac{n(n-1)\lg n}{2n}$ . Ademais, a cada aresta é atribuído um peso inteiro no intervalo de 1 a  $n$ .

Cada arquivo de teste gerado possui a primeira linha com os valores  $n$  e  $m$ , seguida de  $m$  linhas da forma  $u v w$ , onde  $w$  é o peso da aresta  $uv$ . Ademais, temos outras  $k$  linhas da forma  $u v$ , que representam uma lista aleatória das arestas a serem removidas. Nos experimentos, cada grafo gerado possui  $n = 20.000$  vértices, o que dá um número esperado de arestas de 142.000, e removemos  $k = 25.600$  arestas, o que foi suficiente para demonstrar a eficiência do algoritmo para MSF decremental.

Nos nossos experimentos, geramos seis grafos  $G_i$ ,  $0 \leq i \leq 5$ , com cinco listas aleatórias distintas de arestas para cada. Inicialmente, avaliamos o grafo  $G_0$  considerando a remoção de 25.600 arestas em cinco listas distintas. Para cada lista, registramos o peso de uma MST

após a remoção de um certo número de arestas e o tempo de execução, em milissegundos, dos dois algoritmos. Depois, calculamos a média dos cinco testes realizados.

Já para outros cinco grafos, realizamos os mesmos experimentos de  $G_0$ , usando apenas a primeira lista de arestas gerada para cada grafo, tendo em vista que os cinco testes eram muito semelhantes. Os resultados dos testes foram apresentados em tabelas e gráficos gerados por programas escritos em *Python 3*.

Para cada grafo, realizamos a remoção de arestas em lotes sucessivos. Após cada lote de remoções, imprimimos o peso de uma MST correspondente ao estado atual do grafo e, em seguida, dobramos o tamanho do lote. Assim, removemos 100, 200, 400, ..., 25.600 arestas, registrando o tempo acumulado das remoções e o peso de uma MST após cada etapa.

Todos os arquivos de teste mencionados neste capítulo, bem como os geradores desenvolvidos, estão disponíveis no diretório `src/tests/` da nossa implementação [7]. Os arquivos de teste gerados possuem um nome genérico `graph_i_permutation_j`,  $0 \leq i \leq 5$  e  $0 \leq j \leq 4$ , e o programa que gera os arquivos de teste se chama `randomGraphGenerator.cpp`. Neste programa, é possível configurar o valor de  $n$  e de  $p$  do modelo  $G(n, p)$  de Erdős-Rényi, além do número de grafos e de permutações a serem gerados. Por fim, os programas em *Python* para geração de tabelas e gráficos são `chart.py` e `graph.py`, cujos valores devem ser alterados de acordo com os resultados de cada teste.

## 4.1 Algoritmo de Kruskal

O algoritmo de Kruskal foi implementado de uma forma que permita remoção de arestas. Utilizamos Union-Find como a parte central do algoritmo. Na inicialização do construtor, ordenamos o vetor de  $m$  arestas em ordem crescente de peso, usando o método `sort` da linguagem *C++*, que consome tempo esperado  $O(m \lg m)$ . Em seguida, inserimos as arestas no grafo, em ordem crescente de peso.

Toda vez que removermos uma aresta  $uv$ , precisamos reordenar as arestas restantes em ordem crescente de peso. Para isso, basta deslocar as arestas a partir de  $uv$  de uma posição para cima no vetor, o que consome tempo  $O(m)$ .

## 4.2 Grafo $G_0$

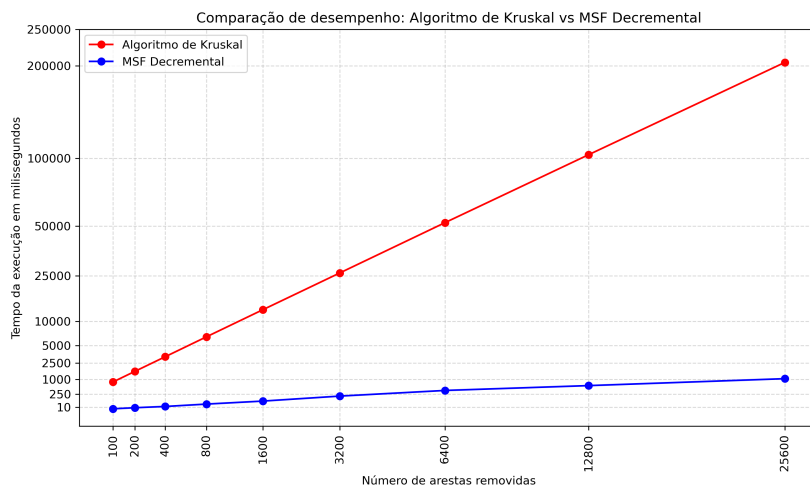
O grafo  $G_0$  gerado tem 142.069 arestas, que é um número próximo do esperado. A seguir, mostraremos os resultados das remoções em  $G_0$  de algumas listas de arestas, visto que o comportamento dos gráficos e valores das tabelas são muito semelhantes.

É importante ressaltar que, como o algoritmo derivado de Kruskal consome tempo  $O(m)$  por remoção de aresta, optamos por fazer uma compressão de valores dos eixos  $x$  e  $y$  dos gráficos para evitar a sobreposição dos números, preservando ainda a aparência de crescimento linear.

### 4.2.1 Primeira lista de arestas

Arestas removidas	peso da MST	Algoritmo de Kruskal (ms)	MSF Decremental (ms)
100	33762814	821	3
200	33785737	1645	7
400	33819663	3290	14
800	33908570	6585	35
1600	34113006	13138	77
3200	34475634	26145	189
6400	35208851	52104	384
12800	36904722	103301	613
25600	41029020	204580	1045

**Figura 4.1:** Desempenho dos dois algoritmos em  $G_0$  na primeira lista de arestas, exibindo o peso de uma MST após a remoção de cada lote de arestas.



**Figura 4.2:** Desempenho dos dois algoritmos em  $G_0$  na primeira lista de arestas.

### 4.2.2 Segunda lista de arestas

Arestas removidas	peso da MST	Algoritmo de Kruskal (ms)	MSF Decremental (ms)
100	33772392	862	51
200	33800786	1739	57
400	33870503	3647	67
800	33956041	7493	94
1600	34156556	14402	165
3200	34513752	29798	241
6400	35290830	57433	394
12800	37027756	111321	648
25600	41021221	216698	1055

**Figura 4.3:** Desempenho dos dois algoritmos em  $G_0$  na segunda lista de arestas, exibindo o peso de uma MST após a remoção de cada lote de arestas.

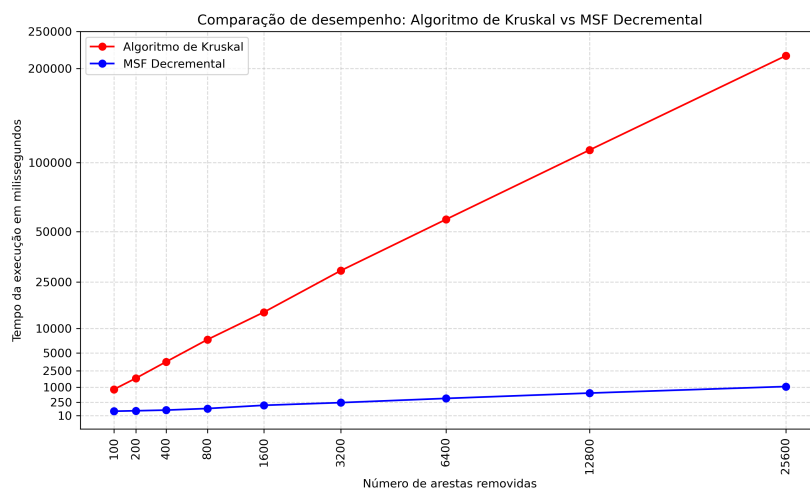


Figura 4.4: Desempenho dos dois algoritmos em  $G_0$  na segunda lista de arestas.

### 4.2.3 Tempo médio de execução das cinco listas de arestas

Arestas removidas	Algoritmo de Kruskal (ms)	MSF Decremental (ms)
100	827,6	12,4
200	1664,2	20,4
400	3361,2	29,4
800	6806,6	56,2
1600	13438,8	111,6
3200	26996,4	209,0
6400	53831,4	374,0
12800	106854,0	630,6
25600	212800,6	1075,2

Figura 4.5: Tempo médio de execução obtido a partir de cinco listas de arestas de  $G_0$ .

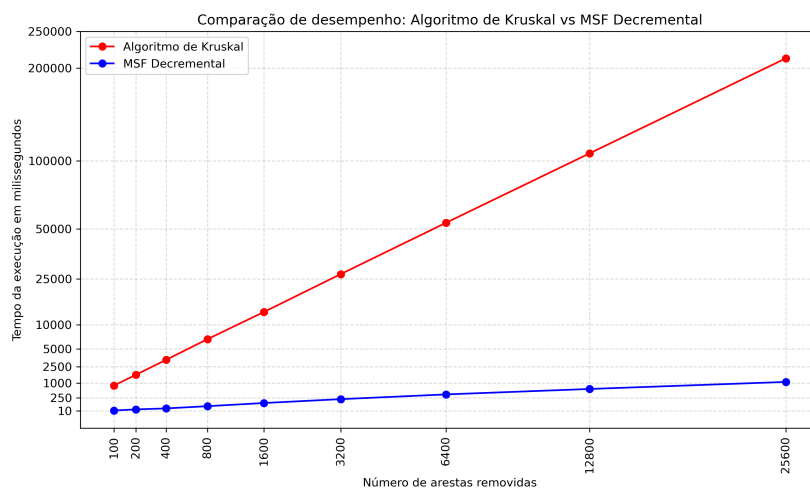


Figura 4.6: Comparação do tempo médio de execução dos dois algoritmos ao longo de cinco listas de arestas de  $G_0$ .



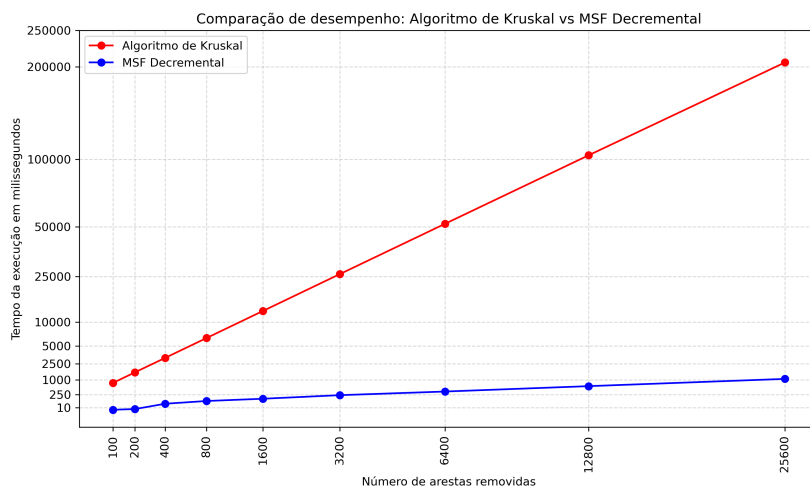
### 4.3 Grafos $G_1$ , $G_2$ , $G_3$ , $G_4$ e $G_5$

Neste experimento, realizamos os mesmos experimentos de  $G_0$ , mas usando apenas a primeira lista aleatória de arestas de outros cinco grafos. Isso porque vimos na Seção 4.2 que os resultados entre as diferentes listas aleatórias de um mesmo grafo são bem parecidos. Por isso, focamos no desempenho dos dois algoritmos em grafos aleatórios distintos. O grafo  $G_1$  gerado tem 142.589 arestas; o grafo  $G_2$  tem 142.954 arestas; o grafo  $G_3$  tem 142.734 arestas; o grafo  $G_4$  tem 142.402 arestas; e o grafo  $G_5$  tem 143.216 arestas.

#### 4.3.1 Grafo $G_1$

Arestas removidas	peso da MST	Algoritmo de Kruskal (ms)	MSF Decremental (ms)
100	33716589	799	2
200	33740550	1609	4
400	33783957	3224	46
800	33841145	6468	89
1600	34069725	12964	136
3200	34512154	25961	234
6400	35254848	51880	364
12800	37064231	103548	616
25600	40987759	205685	1073

**Figura 4.7:** Desempenho dos dois algoritmos em  $G_1$  na primeira lista de arestas, exibindo o peso de uma MST após a remoção de cada lote de arestas.

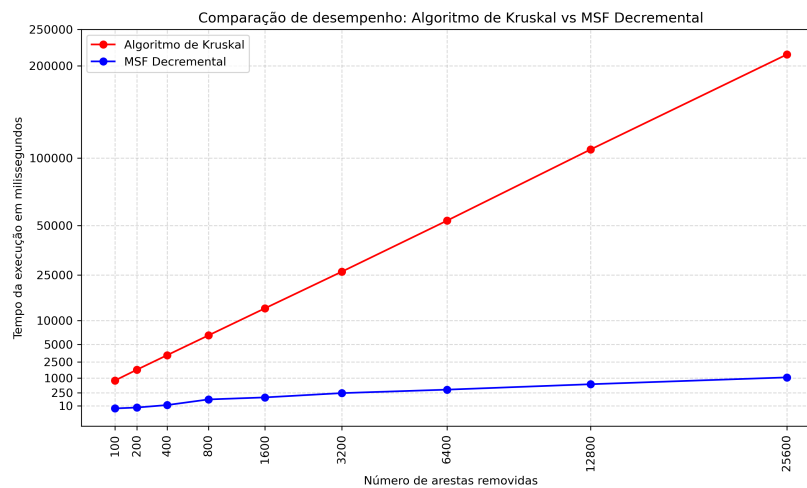


**Figura 4.8:** Desempenho dos dois algoritmos em  $G_1$  na primeira lista de arestas.

### 4.3.2 Grafo $G_2$

Arestas removidas	peso da MST	Algoritmo de Kruskal (ms)	MSF Decremental (ms)
100	33608618	839	1
200	33627608	1692	3
400	33664674	3359	15
800	33771940	6663	84
1600	33970361	13257	125
3200	34342223	26329	242
6400	35199125	52941	367
12800	37028250	107687	623
25600	41061532	214918	1053

**Figura 4.9:** Desempenho dos dois algoritmos em  $G_2$  na primeira lista de arestas, exibindo o peso de uma MST após a remoção de cada lote de arestas.



**Figura 4.10:** Desempenho dos dois algoritmos em  $G_2$  na primeira lista de arestas.

### 4.3.3 Grafo $G_3$

Arestas removidas	peso da MST	Algoritmo de Kruskal (ms)	MSF Decremental (ms)
100	33565584	835	2
200	33587661	1880	6
400	33644718	3588	92
800	33715057	6713	124
1600	33935024	13819	172
3200	34335498	26719	283
6400	35148344	52872	398
12800	36854631	106895	605
25600	40930086	215517	1073

**Figura 4.11:** Desempenho dos dois algoritmos em  $G_3$  na primeira lista de arestas, exibindo o peso de uma MST após a remoção de cada lote de arestas.

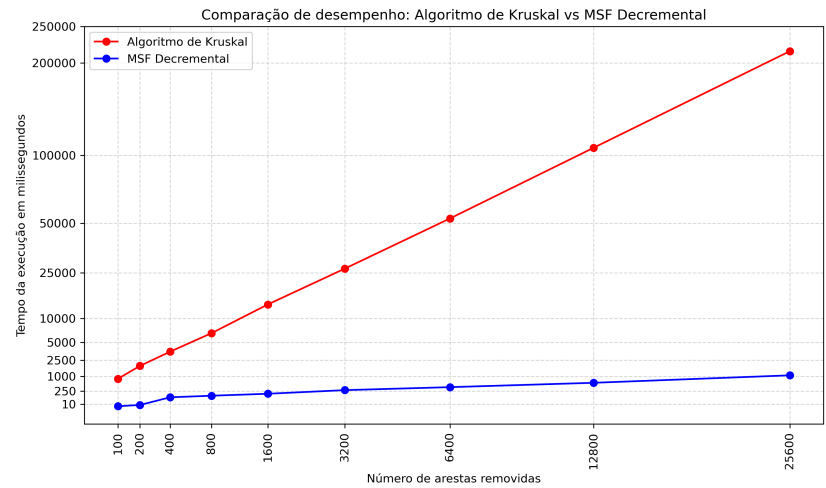


Figura 4.12: Desempenho dos dois algoritmos em  $G_3$  na primeira lista de arestas.

4.3.4 Grafo  $G_4$

Arestas removidas	peso da MST	Algoritmo de Kruskal (ms)	MSF Decremental (ms)
100	33829742	888	1
200	33848803	1873	6
400	33893983	3715	15
800	33993565	7208	60
1600	34224219	14336	87
3200	34596283	29004	201
6400	35437537	58493	339
12800	37207483	115347	581
25600	41267643	221589	1058

Figura 4.13: Desempenho dos dois algoritmos em  $G_4$  na primeira lista de arestas, exibindo o peso de uma MST após a remoção de cada lote de arestas.

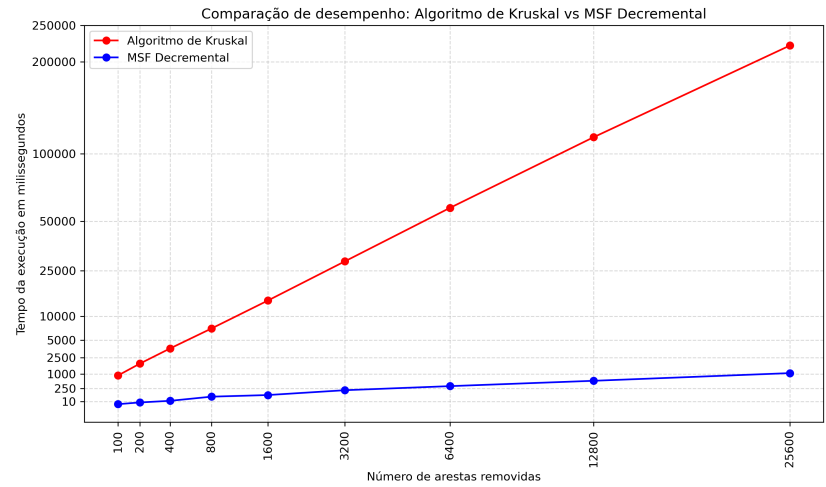


Figura 4.14: Desempenho dos dois algoritmos em  $G_4$  na primeira lista de arestas.

4.3.5 Grafo  $G_5$

Arestas removidas	peso da MST	Algoritmo de Kruskal (ms)	MSF Decremental (ms)
100	33100731	882	1
200	33123666	1779	3
400	33162874	3701	7
800	33240740	8030	57
1600	33414077	16763	135
3200	33821182	34159	196
6400	34602138	68632	386
12800	36392134	135427	650
25600	40386060	255063	1079

Figura 4.15: Desempenho dos dois algoritmos em  $G_5$  na primeira lista de arestas, exibindo o peso de uma MST após a remoção de cada lote de arestas.

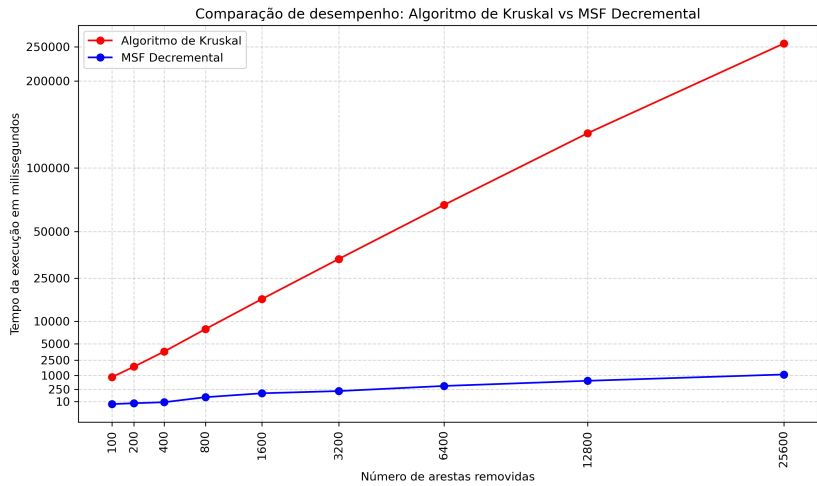
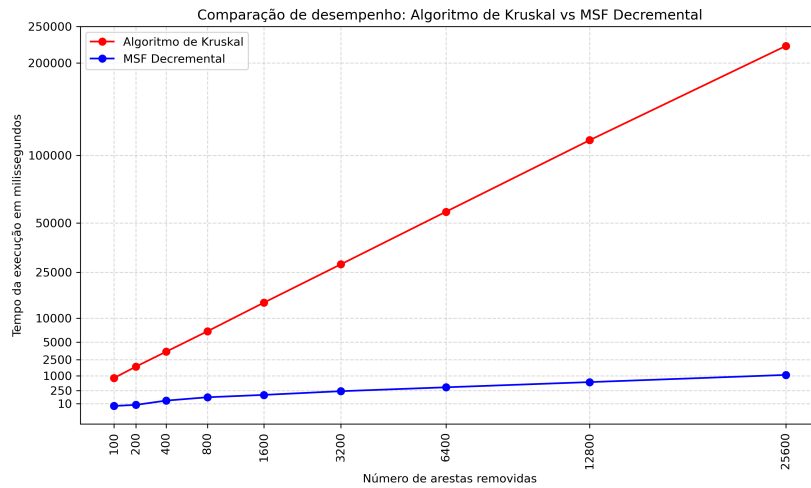


Figura 4.16: Desempenho dos dois algoritmos em  $G_5$  na primeira lista de arestas.

4.3.6 Tempo médio de execução dos cinco grafos

Arestas removidas	Algoritmo de Kruskal (ms)	MSF Decremental (ms)
100	848,6	1,4
200	1766,6	4,4
400	3517,4	35,0
800	7016,4	82,8
1600	14227,8	131,0
3200	28434,4	231,2
6400	56963,6	370,8
12800	113780,8	615,0
25600	222554,4	1067,2

Figura 4.17: Tempo médio de execução obtido a partir de cinco grafos.



**Figura 4.18:** Comparação do tempo médio de execução dos dois algoritmos considerando cinco grafos distintos.

## 4.4 Conclusão

A partir dos experimentos realizados, verifica-se que os grafos gerados para os testes apresentam um número de arestas próximo do valor esperado para um grafo do modelo  $G(n, p)$ , com  $p = \frac{\lg n}{n}$ . Além disso, os resultados indicam que, nos gráficos de tempo de execução, o algoritmo derivado de Kruskal apresenta um crescimento aproximadamente linear em função do número de arestas removidas, enquanto o algoritmo para MSF decremental exibe um padrão de crescimento compatível com o esperado que é polilogarítmico.

As tabelas de resultados, por outro lado, evidenciam a diferença significativa no tempo de execução entre os dois algoritmos durante o processo de remoção de arestas, diferença esta que já se mostra perceptível mesmo nas primeiras remoções realizadas.

Portanto, observa-se que os experimentos conduzidos sobre diferentes grafos aleatórios com o mesmo número de vértices produzem gráficos e tabelas com comportamentos semelhantes no que tange ao tempo de execução, indicando consistência nos resultados obtidos.

Por fim, seria interessante usar essas implementações para testar os algoritmos em grafos vindos de aplicações reais.



## Capítulo 5

### Conclusões

Neste trabalho, estudamos, implementamos e apresentamos um algoritmo para a MSF decremental. Esse algoritmo é uma adaptação do algoritmo para conectividade em grafos dinâmicos. Essencialmente, a adaptação consiste em trocar a estrutura de dados usada para armazenar as arestas reserva de listas de adjacências para min-heaps.

Estudamos também o algoritmo de Holm, de Lichtenberg e Thorup [4] para o problema da MSF dinâmica, no qual se quer dar suporte eficiente também a inserções de arestas a qualquer momento. Esse algoritmo também é uma adaptação do algoritmo para conectividade em grafos dinâmicos, mas é uma adaptação mais extensa e complexa, que utiliza uma implementação adaptada do algoritmo para MSF decremental que implementamos.

A adaptação agora troca a estrutura de dados usada para armazenar as florestas dinâmicas. Em vez de Euler tour trees, esse algoritmo usa as chamadas **top trees**, que são versões de uma árvore introduzida por Alstrup et al. [1] e denominada de **topological trees**.

Inicialmente, será descrito resumidamente o motivo principal de usar top trees no algoritmo, em vez de Euler tour trees. Nas Euler tour trees, um caminho não corresponde a um segmento contínuo ao longo do percurso da Euler tour tree. Isso dificulta a manutenção eficiente de informações sobre caminhos na árvore, como, por exemplo, o peso máximo no caminho entre dois vértices dados, que é importante ao inserir uma aresta que forma um circuito no grafo, pois temos que decidir se ela deve substituir uma aresta da MSF. Por causa disso, os autores do artigo sugeriram o uso de top trees para armazenar e retornar dados sobre qualquer caminho entre dois vértices numa árvore.

Top trees são árvores binárias que suportam adição e remoção de arestas. A construção delas se baseia em uma sequência de merges e splits, que acabam destruindo e reconstruindo nós e arestas da árvore. Conforme Alstrup et al. [1], para uma floresta dinâmica de  $n$  vértices podemos manter top trees de altura  $O(\lg n)$  implementando as operações mencionadas com uma sequência de  $O(\lg n)$  merges e splits. Podemos, então, definir uma operação que retorna o peso máximo de um caminho entre dois vértices em tempo  $O(\lg n)$ , que será fundamental na operação de inserção de arestas do algoritmo para MSF dinâmica.

Holm, de Lichtenberg e Thorup [4] propuseram um algoritmo para MSF dinâmica que mantém uma MSF que suporta adições e remoções de arestas em tempo amortizado

$O(\lg^4 n)$  por operação. A ideia deste algoritmo é manter uma MSF decremental  $F$  de um grafo  $G$  de  $n$  vértices e  $m$  arestas, como também um conjunto  $\mathcal{G} = \{G_0, \dots, G_L\}$ ,  $L = \lceil \lg m \rceil$ , de subgrafos de  $G$ , de modo que para cada  $G_i$  manteremos uma MSF decremental  $F_i$ , implementada com top trees.

As arestas de  $F$  são chamadas de **arestas da floresta globais** e as arestas de  $R = E(G) \setminus F$  são chamadas de **arestas reserva globais**, onde  $R$  corresponde à lista de arestas reserva retornadas pelas estruturas decrementais de  $\mathcal{G}$ . É nesta lista que iremos procurar uma aresta substituta de menor peso para reconectar as componentes separadas de  $F$  quando removemos alguma aresta da floresta global.

Similarmente, as arestas de  $F_i$  são chamadas de **arestas da floresta locais** e as arestas de  $R_i = E(G_i) \setminus F_i$  de **arestas reserva locais**. Além disso, todas as arestas de  $F$  estarão em alguma  $F_i$ , ou seja,  $F \subseteq \bigcup_i F_i$ .

Para inserir uma aresta  $uv$ , temos dois casos a considerar:

- se  $u$  e  $v$  não estão conectados, então basta inserir a aresta  $uv$  em  $F$ ;
- caso contrário, temos dois casos:
  - se o caminho entre  $u$  e  $v$  onde contiver uma aresta  $w$  cujo peso é maior que o de  $uv$ , então substituímos  $w$  por  $uv$ , e atualizamos  $\mathcal{G}$  com  $w$ ;
  - caso contrário, atualizamos  $\mathcal{G}$  com  $uv$ .

Já para remover uma aresta  $uv$ , primeiramente removemos todas as ocorrências desta aresta nos  $G_i$ 's. Se  $uv$  for uma aresta de  $F$ , a removemos de  $F$  e verificamos se em  $R$  há arestas que reconectem as componentes separadas de  $F$ . Se houver, escolhemos uma de menor peso dentre elas. Finalmente, independentemente de  $uv$  ser uma aresta da floresta global ou aresta reserva global, atualizamos  $\mathcal{G}$  com  $R$ .

Quando falamos em atualizar  $\mathcal{G}$  com um conjunto  $E$  de arestas, queremos encontrar o menor  $j$  tal que  $|(E \cup \bigcup_{h \leq j} R_h) \setminus F| \leq 2^j$ . Em seguida, definimos

$$G_j := F \cup E \cup \bigcup_{h \leq j} R_h$$

inicializando  $G_j$  como uma nova MSF decremental. Por fim, definimos  $G_h := \emptyset$  para todo  $h < j$ .

Na verdade, a atualização de  $\mathcal{G}$  ocorre com a adição de uma floresta  $F$  de modo implícito. O artigo explica em detalhes sobre como esta floresta é construída, e para isso ele se baseia fortemente na estrutura das top trees para podermos implementar este algoritmo para MSF dinâmica mais eficientemente, tanto em termos de espaço quanto de consumo de tempo. No final da Seção 5 do artigo, é mencionado que a implementação deste algoritmo consome espaço  $O(m \lg n)$ .

Até o momento, fica claro que há uma certa cadeia de dependências entre os algoritmos que estudamos e implementamos. Dessa forma, seria interessante apresentar os detalhes de como implementar a biblioteca deste algoritmo para MSF dinâmica. Mas, para isso, precisaríamos modificar a implementação da biblioteca da conexidade em florestas



dinâmicas, que passaria a manter top trees no lugar de Euler tour trees. Como a nossa implementação da biblioteca de Euler tour trees possui um consumo de tempo diferente da implementação de top trees apresentada em Holm, de Lichtenberg e Thorup [4], a biblioteca que implementamos do algoritmo de conexidade em grafos dinâmicos teria a sua complexidade de tempo alterada, visto que este passaria a manter componentes destas florestas dinâmicas ajustadas.

Além disso, ajustes na biblioteca do algoritmo de conexidade em grafos dinâmicos alteraria, por sua vez, o consumo de tempo da biblioteca que implementamos do algoritmo para MSF decremental. É após todos estes ajustes que, finalmente, poderíamos implementar o algoritmo para a MSF dinâmica proposto por Holm, de Lichtenberg e Thorup [4] na Seção 5 do artigo deles.

Em suma, dada a complexidade de se realizar estes ajustes nos algoritmos já implementados, não houve tempo de implementá-lo e optamos por não descrever uma biblioteca deste algoritmo para MSF dinâmica.



# Bibliografia

- [1] Stephen Alstrup et al. “Maintaining Information in Fully-Dynamic Trees with Top Trees”. Em: (2003). arXiv:cs/0310065v2, revised 21 Nov 2003. arXiv: [cs / 0310065 \[cs.DS\]](#) (ver p. 53).
- [2] Thomas H. Cormen et al. *Introduction to Algorithms*. 3ª ed. Cambridge, MA: MIT Press, 2009. ISBN: 978-0262033848 (ver pp. 2, 29).
- [3] Monika Rauch Henzinger e Valerie King. “Randomized dynamic graph algorithms with polylogarithmic time per operation”. Em: *Proceedings of the 27th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC '95)*. Las Vegas, Nevada, USA: Association for Computing Machinery, 1995, pp. 519–527. ISBN: 0897917189. DOI: [10.1145/225058.225269](#) (ver p. 16).
- [4] Jacob Holm, Kristian de Lichtenberg e Mikkel Thorup. “Poly-Logarithmic Deterministic Fully-Dynamic Algorithms for Connectivity, Minimum Spanning Tree, 2-Edge, and Biconnectivity”. Em: *Journal of the ACM* 48.4 (2001), pp. 723–760. URL: <https://citeseerx.ist.psu.edu/document?repid=rep1&type=pdf&doi=1f63499a9cb43f0f4d6a56b37de551c7e0c94971> (ver pp. 1, 3, 5, 6, 15, 16, 27, 53, 55).
- [5] Dexter C. Kozen. *The Design and Analysis of Algorithms*. New York, NY: Springer-Verlag, 1991. ISBN: 0-387-97687-6 (ver p. 6).
- [6] Arthur Henrique Dias Rodrigues. “Algoritmos para conexidade em grafos dinâmicos”. Master’s thesis. São Paulo, Brazil: Universidade de São Paulo, 2024 (ver p. 5).
- [7] Chung Jin Shian. *Repositório Git*. 2025. URL: <https://github.com/cjinshian27/TCC> (acesso em 26/06/2025) (ver pp. 3, 7, 28, 44).
- [8] Daniel D. Sleator e Robert E. Tarjan. “Self-adjusting binary search trees”. Em: *Journal of the ACM* 32.3 (1985), pp. 652–686. ISSN: 0004-5411. DOI: [10.1145/3828.3835](#). URL: <https://doi.org/10.1145/3828.3835> (ver p. 6).