RESOLUCIÓN APROXIMADA DE ECUACIONES TRASCENDENTES - PARTE 3

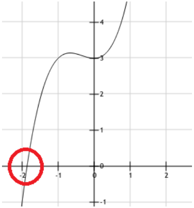
Francisco Javier Fernández

Universidad Pública de Navarra

Depto. Estadística, Informática y Matemáticas
Pamplona

Computación 2023

Sobre las clases anteriores...



- Introducción a la resolución de ecuaciones trascendentes $F(x) = 0$:
  1. **Acotación**; .
  2. **Separación**;
  3. **Resolución aproximada**.
- Método de Bisección
- Método de la Regula Falsi
- Método de la Secante
- El método de Newton-Raphson
  1. ¿Cuál el princípio de cada método?
  2. ¿Cuál de los métodos es siempre convergente?
  3. ¿Cuál de los métodos es más rápido?
  4. ¿En qué casos puede no haber convergencia?

Iteración del punto fijo

Definición

Sea g una función cualquiera. Un punto fijo de g es cualquier punto p tal que $g(p) = p$.

Considera una función f:

- Buscar una raíz de $f(x)$ es equivalente a buscar un punto fijo de $g(x) = f(x) + x$;
  Suponga de que el punto fijo de $g(x) = f(x) + x$ es p:
  $$\Rightarrow g(p) = p \Rightarrow g(p) = f(p) + p = p \Rightarrow f(p) = 0 \Rightarrow$$
  p es raiz de f.
- Buscar un punto fijo de $f(x)$ es equivalente a buscar una raíz de $g(x) = f(x) - x$.
  Suponga de que la raiz de $g(x) = f(x) - x$ es p:
  $$\Rightarrow g(p) = 0 \Rightarrow g(p) = f(p) - p = 0 \Rightarrow f(p) = p \Rightarrow$$
  p es punto fijo de f.

Existencia y unicidad de puntos fijos

Teorema

Sea $g : [a, b] \to [a, b]$ *una función continua. Entonces, existe al menos un punto fijo de* g *en* $[a, b]$.

Teorema

Sea $g : [a, b] \to [a, b]$ *una función continua. Supongamos que existe* $0 < k < 1$ *tal que* $|g'(x)| \leq k$ *para todo* $x \in (a, b)$. *Entonces, existe un único punto fijo de* g *en* $[a, b]$.

Iteración funcional. Convergencia.

Teorema

Sea $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una función continua. Sea* $p_0 \in [a, b]$ *y consideremos la sucesión*

$$p_n = g(p_{n-1})$$

Supongamos que existe $0 < k < 1$ *tal que* $|g(x) - g(y)| \leq k(|x - y|)$ *para cualesquiera* $x, y \in [a, b]$*. Entonces la sucesión* p_n *converge a un punto fijo* p*.*

Iteración funcional. Convergencia.

Corolario

Sea $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una función continua derivable en* (a, b)*, y sea* $p_0 \in [a, b]$*. Supongamos que existe* $0 < k < 1$ *tal que para todo* $x \in [a, b]$*,* $|g'(x)| \leq k \; 0 < k < 1$*. Entonces la sucesión iterada definida por* $p_{n+1} = g(p_n)$ *converge a un punto fijo.*

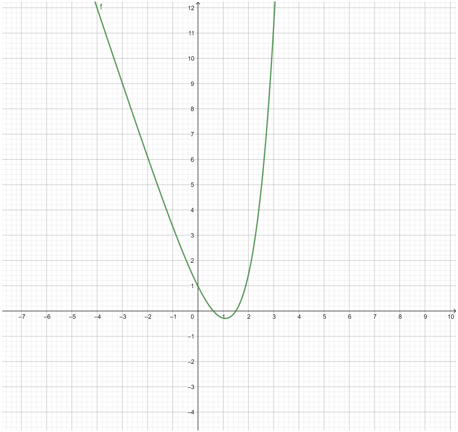
Ejemplo

- Buscar una raíz de una función f es equivalente a buscar un punto fijo de $g(x) = f(x) + x$.
- La sucesión iterada definida por $p_{n+1} = g(p_n)$ converge a un punto fijo, o sea:

  $$x_{n+1} = g(x_n) = f(x_n) + x_n$$

  converge a un punto fijo de g que es una raiz de f.
- Encuentra una raiz de $f(x) = e^x - 3x$ con tolerancia máxima de 0.001.
  Solución: encontrar el punto fijo de
  $g(x) = f(x) + x = e^x - 2x \Rightarrow x_{n+1} = e^{x_n} - 2x_n$

Ejemplo



Una raiz de $f(x) = e^x - 3x$ es un punto fijo de $g(x) = f(x) + x = e^x - 2x$

$$x_{n+1} = e^{x_n} - 2x_n$$

Ejemplo

$$x_{n+1} = e^{x_n} - 2x_n$$

n	x_n	x_{n+1}	$\lvert x_{n+1} - x_n \rvert$
0	0	1	1
1	1	...	
...	...	...	...

Ejemplo

$$x_{n+1} = e^{x_n} - 2x_n$$

n	x_n	x_{n+1}	$\lvert x_{n+1} - x_n \rvert$
0	0	1	1
1	1	0.718	0.282
2	0.718	...	
...	...	...	

Ejemplo

$$x_{n+1} = e^{x_n} - 2x_n$$

n	x_n	x_{n+1}	$\lvert x_{n+1} - x_n \rvert$
0	0	1	1
1	1	0.718	0.282
2	0.718	0.614	0.104
3	0.614	...	
...	...	...	

Ejemplo

Una raíz de $f(x) = e^x - 3x$ es un punto fijo de $g(x) = f(x) + x = e^x - 2x$

$$x_{n+1} = e^{x_n} - 2x_n$$

n	x_n	x_{n+1}	$\lvert x_{n+1} - x_n \rvert$
0	0	1	1
1	1	0.718	0.282
2	0.718	0.614	0.104
3	0.614	0.620	0.006
4	0.620	0.619	0.001
5	0.619	0.619	Ponto Fijo de g = raíz de f

Iteración funcional. Convergencia.

Corolario

Sea $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una función continua derivable en* (a, b)*, y sea* $p_0 \in [a, b]$*. Supongamos que existe* $0 < k < 1$ *tal que para todo* $x \in [a, b]$*,* $|g'(x)| \leq k$ $0 < k < 1$*. Entonces, una cota de error para la aproximación por medio de la sucesión* $\{p_n\}$ *viene dada por*

$$|p - p_n| \leq \frac{k^n}{1 - k}|p - p_0|$$

Iteración funcional. Convergencia.

Prueba. Tenemos que

$$|p-p_n| = |g(p)-g(p_{n-1})| \leq k|p-p_{n-1}| \leq \dots k^n|p-p_0|$$

Pero

$$|p-p_0| \leq |p-p_1| + |p_1-p_0| \leq k|p-p_0| + |p_1-p_0|$$

de donde

$$|p-p_0| \leq \frac{1}{1-k}|p_1-p_0|$$

$$|p-p_n| = \frac{k^n}{1-k}|p_1-p_0| \square$$

Iteración funcional. Convergencia.

Corolario

En las mismas condiciones del resultado anterior, si $k \leq \frac{1}{2}$*, tenemos que*

$$|p_n - p| \leq |p_n - p_{n-1}|$$

Prueba. Tenemos que

$$|p - p_n| \leq k|p - p_{n-1}|$$

y también

$$|p - p_{n-1}| \leq |p - p_n| + |p_n - p_{n-1}| \leq k|p - p_{n-1}| + +|p_n - p_{n-1}|$$

de donde

$$|p - p_n| \leq \frac{k}{1-k}|p_n - p_{n-1}| \leq |p_n - p_{n-1}| \square$$

Orden de convergencia.

Definición

El orden de convergencia de un método iterativo convergente ($p_n \to p$) *es el mayor número real q tal que*

$$\lim \frac{|p_{n+1} - p|}{|p_n - p|^q} = C \neq 0$$

Orden de convergencia.

Teorema

Sea g *una función de clase* C^k *en el intervalo* $(p-\delta, p+\delta)$*. Supongamos que* p_n *converge al punto fijo* p*. Sea* q *un número real tal que*

$$g^{i)}(p) = 0 \text{ para todo } i = 1, 2, \ldots, q-1$$

y

$$g^{q)}(p) \neq 0$$

Entonces el orden de convergencia del método iterativo es al menos q*.*

ECUACIONES POLINÓMICAS

Ecuaciones polinómicas

Un polinomio de grado n es una expresión de la forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

con $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^n$ y $a_n \neq 0$.

Teorema

Todo polinomio de grado ≥ 1 tiene al menos una raíz (real o compleja)

Ecuaciones polinómicas

Corolario

Sea $P(x)$ *un polinomio de grado* $n \geq 1$*. Entonces existen* k *números (reales o complejos) distintos* $s_1, \dots, s_k$ *y* k *enteros* $m_1, \dots, m_k$ *tales que* $\sum_{j=1}^{n} m_j = n$ *y se verifica*

$$P(x) = a_n (x - s_1)^{m_1} \dots (x - s_k)^{m_k}$$

Corolario

Sean $P(x)$ *y* $Q(x)$ *dos polinomios de grado a lo más* n*. Supongamos que existen* k *números* $x_1, \dots, x_k$ *(con* $k > n$*) de modo que* $P(x_j) = Q(x_j)$ *para todo* $j = 1, \dots, k$*. Entonces* $P(x) = Q(x)$*.*

Método de Horner: División sintética

- Para N-R, necesitamos evaluar el polinomio $P(x)$ y su derivada $P'(x)$.
- La forma más eficiente de hacerlo es mediante anidamiento.
- El método de Horner utiliza anidación para evaluar un polinomio en un punto.
- Para ello requiere n multiplicaciones y n sumas para un polinomio de grado n.

Método de Horner: División sintética

Teorema

Sea $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ *y* $x_0 \in \mathbb{R}$. *Definimos* $b_n = a_n$ *y* $b_k = a_k + b_{k+1}x_0$ *para* $k = n-1, \ldots, 1$. *Entonces*

1. $b_0 = P(x_0)$;
2. $P(x) = (x - x_0)Q(x) + b_0$, *donde* $Q(x) = b_n x^{n-1} + \cdots + b_2 x + b_1$.

Método de Horner: ejemplo

$b_n = a_n,\ b_k = a_k + b_{k+1}x_0,\ b_0 = P(x_0),$
$Q(x) = b_n x^{n-1} + \cdots + b_2 x + b_1,\ P(x) = (x - x_0)Q(x) + b_0$

$$P(x) = 5x^3 + 7x^2 + 2x + 3$$

Suponga $x_0 = 0$:
$b_0 = P(x_0) = P(0) = 3,\ b_3 = a_3 = 5,\ b_2 = a_2 + b_3 x_0 = 7 + 0 = 7$
$,\ b_1 = a_1 + b_2 x_0 = 2 + 0 = 2$
$Q(x) = 5x^2 + 7x + 2 \Rightarrow P(x) = (5x^2 + 7x + 2)x + 3$

$$P_1(x) = 5x^2 + 7x + 2$$

$b_0 = P_1(x_0) = P_1(0) = 2,\ b_2 = a_2 = 5,\ b_1 = a_1 + b_2 x_0 = 7 + 0 = 7$
$Q_1(x) = 5x + 7 \Rightarrow P(x) = ((5x + 7)x + 2)x + 3$

Evaluación de las derivadas

Como $P(x) = (x - x_0)Q(x) + b_0$, tenemos que

$$P'(x) = Q(x) + (x - x_0)Q'(x) \to P'(x_0) = Q(x_0)$$

luego es suficiente aplicar Horner dos veces.

Deflación

Sea x_1 una aproximación a un cero de $P(x)$. Entonces

$$P(x) = (x - x_1)Q_1(x) + P(x_1) \simeq (x - x_1)Q_1(x)$$

Por Newton, podemos calcular otro cero para Q. De esta forma, podemos hallar todos los ceros de P.
Problema Al aproximar un cero de Q_k, generalmente no aproximamos un cero de P. La inexactitud crece al aumentar k.
Posible solución Tomar el cero de Q_k como valor de partida para aplicar N-R a P directamente.

Acotación de raíces de polinomios

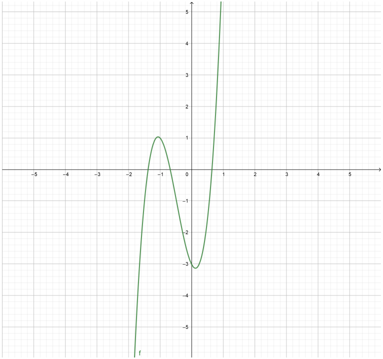
Teorema

Si todas las raíces del polinomio $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ *son reales, entonces todas ellas están contenidas en el intervalo* $[-M, M]$, *donde*

$$M = \sqrt{(\frac{a_{n-1}}{a_n})^2 - 2\frac{a_{n-2}}{a_n}}$$

M se denomina cota de Cardano-Vieta.

Acotación de raíces de polinomios: Ejemplo



$$P(x) = 5x^3 + 7x^2 - 2x - 3$$

$$M = \sqrt{(\frac{7}{5})^2 - 2\frac{-2}{5}} = 1.66 \Rightarrow [-1.66, 1.66]$$

Acotación de Laguerre-Thibault: Cota superior de las raíces positivas

Proposición

Sea $M > 0$ *y sea* $P(x)$ *un polinomio de grado* $n \geq 1$. *Si al dividir* $P(x)$ *por* $x - M$ *se obtiene que:*

1. *el resto es positivo.*
2. *todos los coeficientes del polinomio cociente son positivos o nulos.*

entonces, M *es una cota superior de las raíces positivas del polinomio* $P(x)$.

Acotación de Laguerre-Thibault: Cota inferior de las raíces positivas

Sea $P(x)$ un polinomio. Definimos

$$Q(y) = P(\frac{1}{x})$$

Si a partir de la proposición anterior obtenemos M' como cota superior del numerador de Q, entonces $m = \frac{1}{M}$ es una cota inferior de las raíces positivas de $P(x)$.

Acotación de Laguerre-Thibault: Cotas de las raíces negativas

Para el cálculo de la cota inferior, basta hacer el cambio $Q(y) = P(-x)$. Si M es la cota obtenida para las raíces de Q, entonces $-M$ es la cota inferior buscada.
Para el cálculo de la cota superior, basta hacer $Q(y) = P(-\frac{1}{x})$. Si M es la cota superior obtenida para para el numerador Q, entonces $m = -\frac{1}{M}$ es la cota superior de las raíces negativas que buscamos.

Acotación de Newton

Teorema

Sea $P(x)$ *un polinomio de grado* n. M *es una cota superior de las raíces de* P *si* $P(M), P'(M), \ldots, P^{(n)}(M)$ *son todos valores positivos o nulos.*

Método de Sturm

- El método más efectivo para aislar los ceros es el Teorema de Sturm
- Lo primero que haremos es construir el sistema de polinomios de Sturm. Lo usaremos para hacer evaluaciones en él ya que el número de cambios de signo entre las distintas evaluaciones nos dará la cantidad de ceros entre los valores

Método de Sturm

Sea $P(x)$ un polinomio. Queremos conocer cuantas raíces hay en (a, b). Sabemos que

1. Si $P(a)P(b) < 0$ hay un número impar de raíces (contando multiplicidades).
2. Si $P(a)P(b) > 0$ hay un número par de raíces (contando multiplicidades).

Método de Sturm

Definición

Dada una sucesión finita de números reales $c_1, \ldots, c_n$, *se dice que existe un cambio de signo para un par de elementos consecutivos* c_k *y* c_{k+1} *si* $c_k c_{k+1} < 0$.

Se llama número de cambios de signo de la secuencia al número total de cambios de signo que se producen en la misma.

Método de Sturm:Sucesión de Sturm

- Sea P un polinomio de grado n, con coeficientes reales y con todas las raíces reales y simples. Definimos:
  $P_0(x) = P(x)$; $P_1(x) = P'(x)$; $P_2(x) = -\lambda_2 Resto(\frac{P_0}{P_1})$;
  $P_3(x) = -\lambda_3 Resto(\frac{P_1}{P_2})$... $P_m(x) = -\lambda_m Resto(\frac{P_{m-2}}{P_{m-1}})$,
  donde seguimos hasta que $P_m \in \mathbb{R}$ y $\lambda_j, j = 2, \ldots, m$ son constantes positivas que fijamos libremente.
- Si tomamos $x = c \in \mathbb{R}$, tenemos una sucesión de números reales: $P_0(c), P_1(c), ..., P_m(c)$
- N_c el número de cambios de signo en esta sucesión.

EJEMPLO 1 (Sistema de polinomios de Sturm)

Calcule el sistema de polinomios de Sturm de
$P(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 36$.
Solución:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= x^3 - 9x^2 + 24x - 36 \\ P_1(x) &= P'(x) = 3x^2 - 18^x + 24 \\ P_2(x) &= -\lambda_2 Resto(\frac{P_0}{P_1}) = 18x + 108(\lambda_2 = 3^2) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l} 9x^3 - 81x^2 + 216x - 324 & \underline{3x^2 - 18x + 24} \\ \underline{-9x^3 + 54x^2 - 72x \qquad\quad} & 3x - 9 \\ -27x^2 + 144x - 324 & \\ \underline{27x^2 - 162x + 216} & \\ -18x - 108 & \end{array}$$

EJEMPLO 1 (Sistema de polinomios de Sturm)

Calcule el sistema de polinomios de Sturm de
$P(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 36$.
Solución:

$$
\begin{array}{rcl}
P_0(x) & = & x^3 - 9x^2 + 24x - 36 \\
P_1(x) & = & P'(x) = 3x^2 - 18^x + 24 \\
P_2(x) & = & -\lambda_2 Resto(\dfrac{P_0}{P_1}) = 18x + 108 \\
P_3(x) & = & -\lambda_3 Resto(\dfrac{P_1}{P_2}) = -77760(\lambda_3 = 18^2)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
972x^2 - 5832x + 7776 & 18x + 108 \\ \cline{2-2}
\underline{-972x^2 - 5832x \qquad\qquad} & 54x - 648 \\
-11664x + 7776 & \\
\underline{11664x + 69984} & \\
77760 &
\end{array}
$$

EJEMPLO 2 (Sistema de polinomios de Sturm)

Calcule el sistema de polinomios de Sturm de $P(x) = x^3 + 4x^2 - 7$.
Solución:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= x^3 + 4x^2 - 7 \\ P_1(x) &= P'(x) = 3x^2 + 8x \\ P_2(x) &= -\lambda_2 Resto(\frac{P_0}{P_1}) = \end{aligned}$$

EJEMPLO 2 (Sistema de polinomios de Sturm)

Calcule el sistema de polinomios de Sturm de $P(x) = x^3 + 4x^2 - 7$.
Solución:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= x^3 + 4x^2 - 7 \\ P_1(x) &= P'(x) = 3x^2 + 8x \\ P_2(x) &= -\lambda_2 Resto(\frac{P_0}{P_1}) = 32x + 63(\lambda_2 = 3^2) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rl} 9x^3 + 36x^2 + 0x - 63 & \underline{|\ 3x^2 + 8x} \\ \underline{-9x^3 - 24x^2 \qquad\qquad\quad} & 3x + 4 \\ 12x^2 + 0x - 63 & \\ \underline{-12x^2 - 32x \qquad} & \\ -32x - 63 & \end{array}$$

EJEMPLO 2 (Sistema de polinomios de Sturm)

Calcule el sistema de polinomios de Sturm de $P(x) = x^3 + 4x^2 - 7$.
Solución:

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= x^3 + 4x^2 - 7 \\
P_1(x) &= P'(x) = 3x^2 + 8x \\
P_2(x) &= -\lambda_2 Resto(\frac{P_0}{P_1}) = 32x + 63 \\
P_3(x) &= -\lambda_3 Resto(\frac{P_1}{P_2}) = ...(\lambda_3 = ...)
\end{aligned}$$

EJEMPLO 2 (Sistema de polinomios de Sturm)

Calcule el sistema de polinomios de Sturm de $P(x) = x^3 + 4x^2 - 7$.
Solución:

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= x^3 + 4x^2 - 7 \\
P_1(x) &= P'(x) = 3x^2 + 8x \\
P_2(x) &= -\lambda_2 Resto(\frac{P_0}{P_1}) = 32x + 63 \\
P_3(x) &= -\lambda_3 Resto(\frac{P_1}{P_2}) = 4221(\lambda_3 = 32^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rl}
3072x^2 + 8192x + 0 & \underline{|\ 32x + 63} \\
\underline{-3072x^2 - 6048x \quad\quad} & \ 96x + 67 \\
2144x + 0 & \\
\underline{-2144x - 4221} & \\
-4221 &
\end{array}$$

Teorema de Sturm

Teorema

Sea $P(x)$ un polinomio sin raíces múltiples y tal que $P(a) \neq 0$ y $P(b) \neq 0$. Entonces, el número de raíces reales de $P(x)$ en (a, b) es igual a $|N_c(a) - N_c(b)|$.

Si $P(x)$ tiene raíces múltiples, calculamos la sucesión de Sturm de $P_0(x) = \frac{P(x)}{P_{mcd}(x)}$, donde

$$P_{mcd}(x) = mcd(P(x), P'(x))$$

EJEMPLO 3 (Teorema de Sturm)

Aislar los ceros de $P(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 36$.
Solución
Ya conocemos el sistema de Sturm para este polinomio (se calculó en la sección anterior)

$$\begin{aligned} P_0(x) &= x^3 - 9x^2 + 24x - 36 \\ P_1(x) &= P'(x) = 3x^2 - 18^x + 24 \\ P_2(x) &= 18x + 108 \\ P_3(x) &= -77760 \end{aligned}$$

Lo primero para aislar los ceros es revisar cuántos hay en total, así que se evalúa el sistema en - ∞ y $+\ \infty$, también evaluamos en $x = 0$ para verificar cuántos ceros positivos y cuántos negativos hay:

Signos	- ∞	0	$+\ \infty$
$P_0(x)$	-	-	+
$P_1(x)$	+	+	+
$P_2(x)$	-	+	+
$P_3(x)$	-	-	-
Cambios	2	2	1

EJEMPLO 3 (Teorema de Sturm)

Aislar los ceros de $P(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 36$.

Signos	- ∞	0	+ ∞
$P_0(x)$	-	-	+
$P_1(x)$	+	+	+
$P_2(x)$	-	+	+
$P_3(x)$	-	-	-
Cambios	2	2	1

Como en - ∞ hay 2 cambios de signo y en + ∞ solo hay uno, entonces de - ∞ a + ∞ hay 2 - 1 = 1 ceros, es decir, el polinomio solo tiene un cero en R.
Ahora, de - ∞ a 0 no hay ceros, pues ambos tienen igual número de cambios de signo.
Así que el cero se encuentra de 0 a + ∞, pues al realizar la resta de cambios de signo se obtiene 2 - 1 = 1.
Ahora podemos ir evaluando de uno en uno empezando desde 0 hasta encontrar en qué intervalo se encuentra.

EJEMPLO 3 (Teorema de Sturm)

Aislar los ceros de $P(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 36$.
Ya conocemos el sistema de Sturm para este polinomio:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= x^3 - 9x^2 + 24x - 36 \\ P_1(x) &= P'(x) = 3x^2 - 18^x + 24 \\ P_2(x) &= 18x + 108 \\ P_3(x) &= -77760 \end{aligned}$$

Signos	1	2	3	4	5	6
$P_0(x)$	-	-	-	-	-	0
$P_1(x)$	+	0	-	0	+	+
$P_2(x)$	+	+	+	+	+	+
$P_3(x)$	-	-	-	-	-	-
Cambios	2	2	2	2	2	1

De aquí se obtiene que el cero está entre 5 y 6.
De hecho, en este caso se encontró directamente que $P(6) = 0$, es decir, el único cero que tiene el polinomio es $x = 6$.
Si el cero no se hubiera encontrado directamente, se hubiera tenido que utilizar algún método de aproximación en el intervalo]5, 6[.

EJEMPLO 3 (Teorema de Sturm)

Aisle los ceros de $P(x) = x^3 + 4x^2 - 7$.
Ya conocemos el sistema de Sturm para este polinomio:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= x^3 + 4x^2 - 7 \\ P_1(x) &= P'(x) = 3x^2 + 8x \\ P_2(x) &= 32x + 63 \\ P_3(x) &= 4221 \end{aligned}$$

Signos	- ∞	0	$+\infty$
$P_0(x)$			
$P_1(x)$			
$P_2(x)$			
$P_3(x)$			
Cambios			

EJEMPLO 3 (Teorema de Sturm)

Aisle los ceros de $P(x) = x^3 + 4x^2 - 7$.
Ya conocemos el sistema de Sturm para este polinomio:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= x^3 + 4x^2 - 7 \\ P_1(x) &= P'(x) = 3x^2 + 8x \\ P_2(x) &= 32x + 63 \\ P_3(x) &= 4221 \end{aligned}$$

Signos	- ∞	0	$+\ \infty$
$P_0(x)$	-	-	$+$
$P_1(x)$	$+$	0	$+$
$P_2(x)$	-	$+$	$+$
$P_3(x)$	$+$	$+$	$+$
Cambios	3	1	0

Numero de raíces entre - ∞ y 0: 3-1=2
Numero de raíces entre 0 y $+\ \infty$: 1-0=1
Ahora podemos ir evaluando de uno en uno empezando desde 0 hasta encontrar en qué intervalos se encuentran las raices.