

# Regelungstechnik

## 1 – Einführung

### WS2019/20

#### Vorbemerkungen

1. Aufbau der Vorlesung: 4 SWS, 5 ECTS, inkl. 1 Übung  
Vorlesung: 2 Doppelstunden, jeweils dienstags  
Zeit: 08:15-11:30
2. Anlage ASPO FTB 2016: FT24.1
3. Laplace-Transformation
4. Übungen / Aufgaben: in Vorlesung integriert
5. Skript
6. Prüfungsart: Klausur → Zugelassene Hilfsmittel
7. Klausurvorbereitung in der letzten Vorlesung
8. Handys und sonstiges „Spielzeug“
9. Fragen?

## Einführung

- Womit beschäftigt sich die Systemtheorie?
- Wieso befassen wir uns mit Systemtheorie (Motivation)?
- Wie ist die Disziplin Systemtheorie in der Elektrotechnik einzuordnen?
- Welche Themen behandeln wir in Vorlesung / Übung?

## Systemtheorie – Was ist das ?

Systemtheorie: Zeitliches Verhalten technischer Systeme  
math. Methoden und Beschreibungen  
Systeme für technische Aufgabenstellung

Ein technisches System soll ein bestimmtes Verhalten erfüllen.

- Raumheizung  
Im Haus soll bei kalten Außentemperaturen eine vorgegebene Raumtemperatur ständig erreicht und eingehalten werden. Das System enthält zeitveränderliche physikalische Größen Temperatur, Vorlauftemperatur, Rücklauftemperatur, Energie, Gasverbrauch
- Physikalische Größen werden durch Zahlenwerte und Einheiten beschrieben

## Systemtheorie – Was ist das ?

- Größen

Die Größen des technischen Systems werden nach Eingangs-, Ausgangs- und Störgrößen unterschieden.

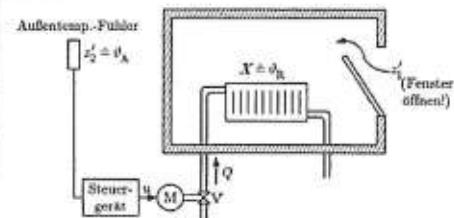
Eingangsgröße (Stellgröße)  $y$   
Ausgangsgröße (Regelgröße)  $x$   
Störgröße  $z$

- Störgrößen

Störgrößen beeinflussen das Systemverhalten

z.B. offenes Fenster führt zur Absenkung der Raumtemperatur

Art, Verlauf und Dauer sind nicht vorhersehbar.



## Systemtheorie – Was ist das ?

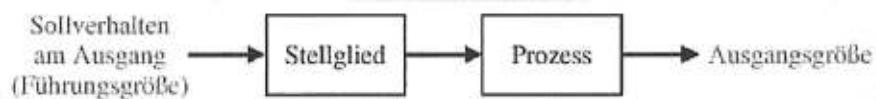
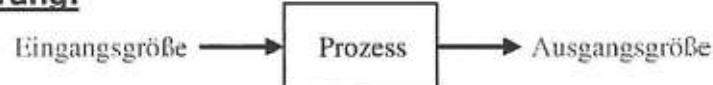
- Regelung

Um auf Störgrößen reagieren zu können, muss man bei einer Regelung auf die Störung reagieren und dem Störeinfluss entgegenwirken.

z.B. bei Abkühlen der Raumtemperatur muss mehr Wärme in den Raum eingebracht werden, um den vorgegebenen Wunschwert zu erhalten.

## Systemtheorie – Was ist das ?

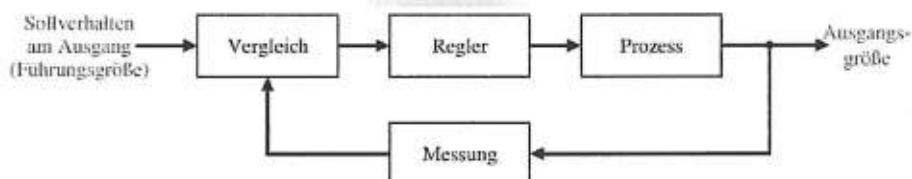
### Steuerung:



Von Eingang nach Ausgang

## Systemtheorie – Was ist das ?

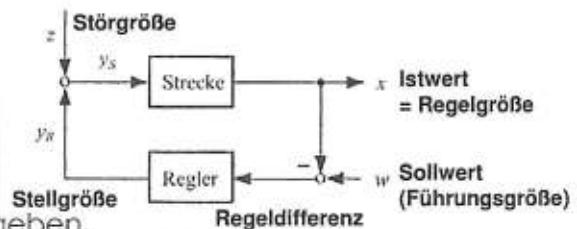
### Regelung:



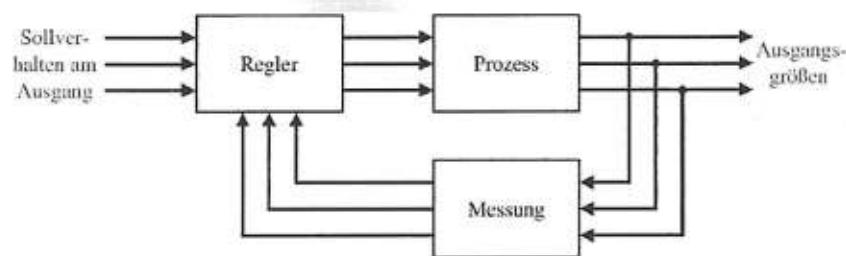
Geschlossene Regelschleife

## Regelkreis

- Regelkreis mit Rückführung des Istwertes
- Bildung der Regeldifferenz als Maß und Eingangsgröße des Reglers
- Führungsgröße von außen vorgegeben.
- Regler hat die Aufgabe, aus der Regeldifferenz nach einem festen mathematischen Zusammenhang eine Stellgröße zu bilden, so dass auf die Regelstrecke so eingewirkt wird, das die Regelgröße dem Sollwert folgt.
- Im Regelkreis wird der Störeinfluss auf verschiedene Stellen als Eingangsgrößen zurückgeführt.



## Systemtheorie – Was ist das ?

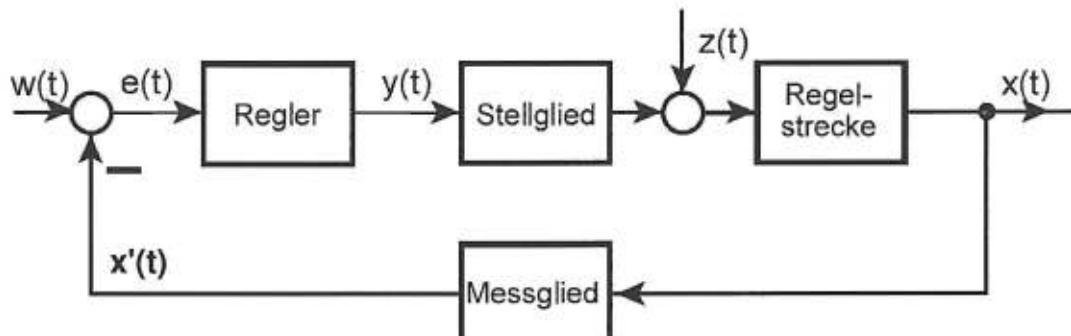


SISO: Single Input Single Output

MIMO: Multiple Input Multiple Output

MISO: Multiple Input Single Output

## Bezeichnungen des einschleifigen Regelkreises



Dabei bedeuten:  
 $x(t)$  Regelgröße (Istwert)  
 $w(t)$  Führungsgröße (Sollwert)  
 $y(t)$  Stellgröße  
 $e(t)$  Regeldifferenz ( $= w(t) - x'(t)$ )  
 $z(t)$  Störgrößen

## Systemtheorie – Welche Inhalte sind das ?

- beschäftigt sich mit der systematischen Vorhersage des Zeitverhaltens von technischen Systemen und Prozessen
- Liefert alle mathematischen Methoden, Formeln, Werkzeuge für die Beurteilung des Systemverhaltens
- Kann für technische, biologische, wirtschaftliche, chemische, verfahrenstechnische Prozesse gleichermaßen als Methode eingesetzt werden.
- Die Systemtheorie setzt mathematische Grundkenntnisse wie voraus (Dgl., Linearität, Zeitinvarianz, Faltung, Laplace-Transformation, Bodediagramm, Ortskurve)
- Stellt eine in sich geschlossene Methodik dar, die zur Beurteilung auch komplexer Systeme leicht eingesetzt werden kann.

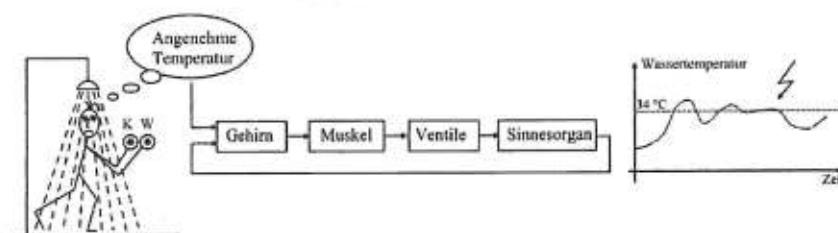
## Begriffe - deutsch

Definition der Regelung: DIN 19226

„Das Regeln, die Regelung, ist ein Vorgang, bei dem fortlaufend eine Größe, die Regelgröße (zu regelnde Größe), erfasst, mit einer anderen Größe, der Führungsgröße, verglichen und im Sinne einer Angleichung an die Führungsgröße beeinflusst wird. Kennzeichen für das Regeln ist der geschlossene Wirkungsablauf, bei dem die Regelgröße im Wirkungsweg des Regelkreises fortlaufend sich selbst beeinflusst.“

Als fortlaufend gilt auch ein hinreichend häufige Wiederholung von Einzelvorgängen, z.B. zyklische Erfassung und Regeln bei digitalen Regelungen.

## Beispiel für Steuerung

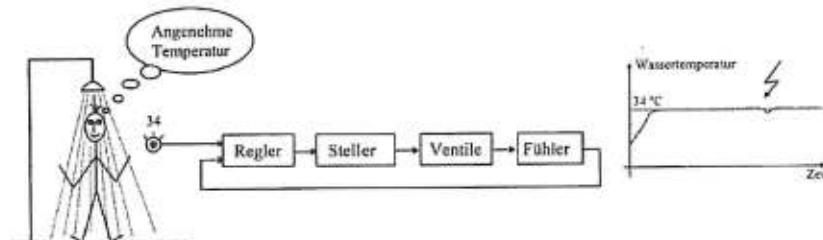


Die Vorgabe der Soll-Temperatur erfolgt in Form einer Steuerung manuell über die Ventilstellungen für Warm- und Kaltwasser.

Ein Regelkreis mit „schlechter“ Regelgüte (große Überschwinger, lange Einschwingzeit) entsteht erst durch Rückkopplung über die Sinnesorgane (Messglied), die Differenzbildung im Gehirn und den Regler „Muskel“ auf die Regelstrecke „Ventile“.

Quelle: Tröster

## Beispiel für Regelung

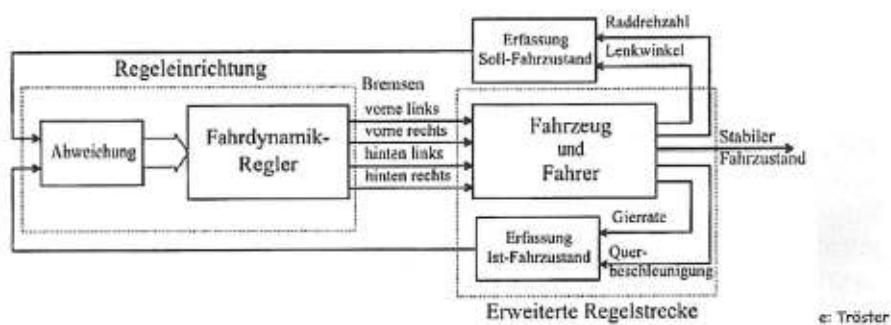


Quelle: Tröster

## ESP Fahrzeugregelung

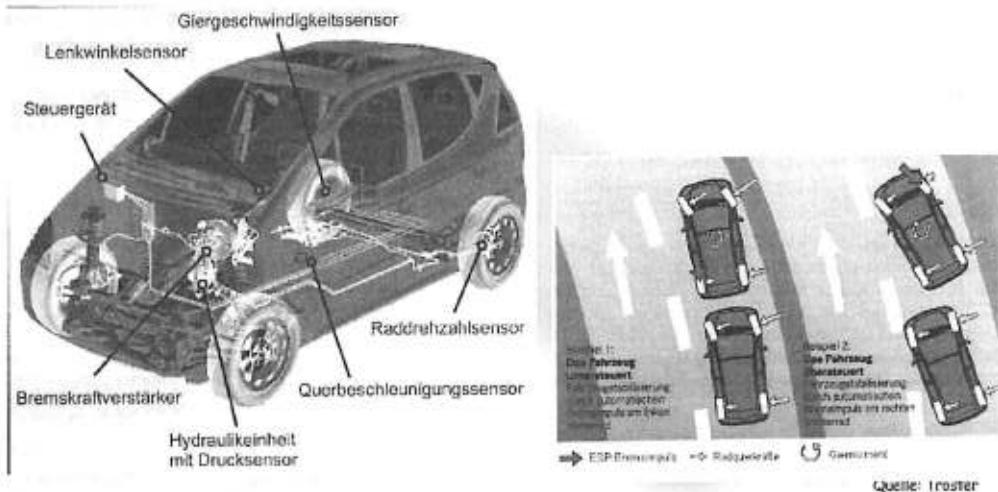
Elektronisches Stabilitätsprogramm (ESP)

- Erfassung von Querbeschleunigungen und Giergeschwindigkeiten
- Stellgröße/Reaktion ist gezieltes Bremsen einzelner Räder
- Regelgröße Spurhalten/Stabiler Fahrzustand

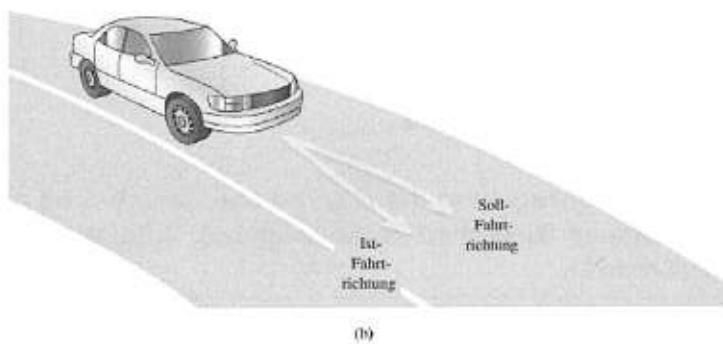
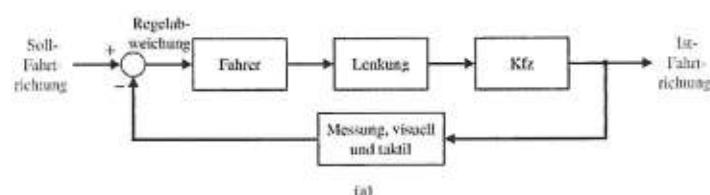


e: Tröster

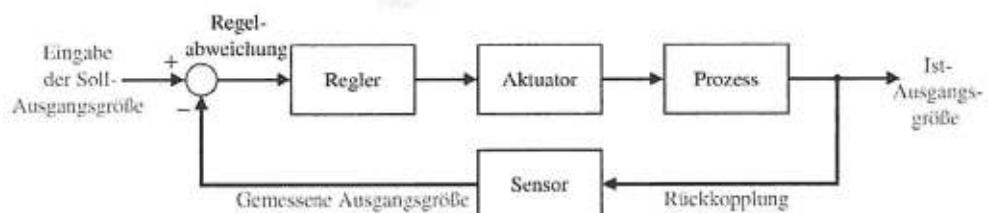
## ESP Fahrzeugregelung



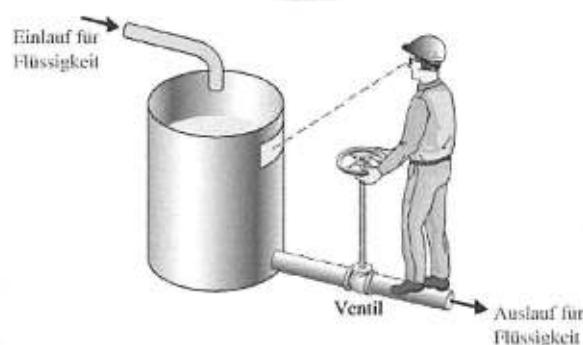
## Beispiele



## Beispiele

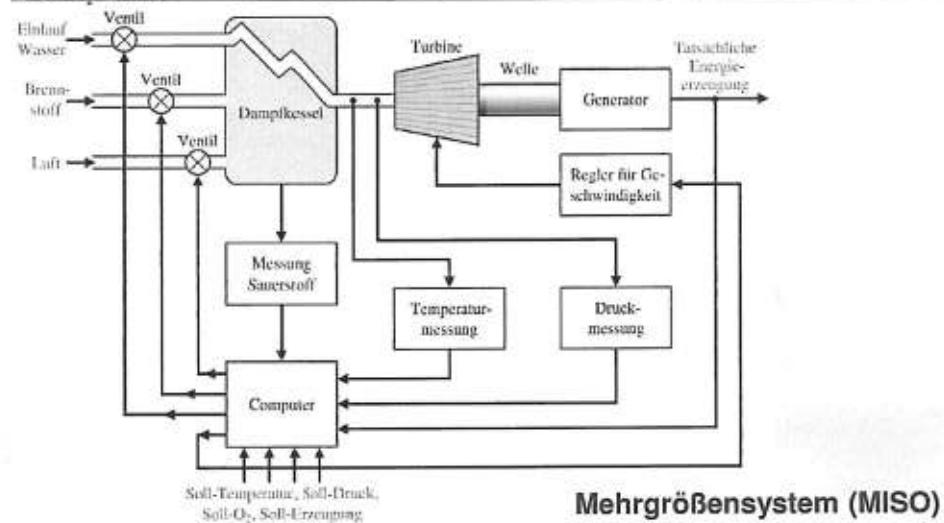


## Beispiele

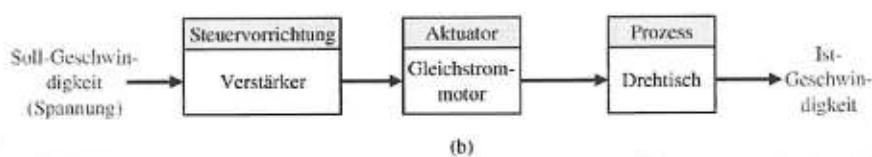
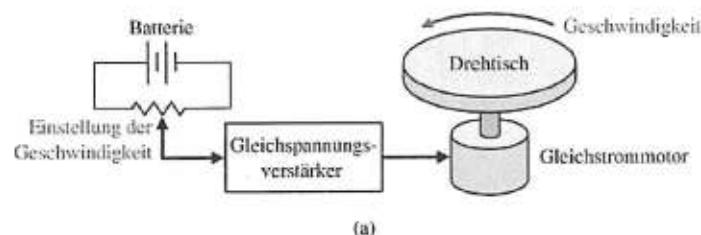


Analog zur Temperatursteuerung/-regelung der Dusche oben kombiniert der Mensch wiederum die Funktionen Messglied (Sinnesorgane), Differenzbilder (Gehirn) und Regler (Muskelkraft).

## Beispiele

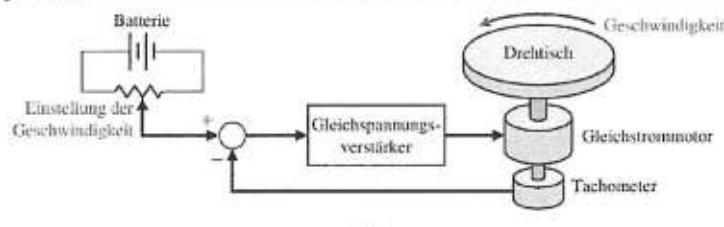


## Beispiele

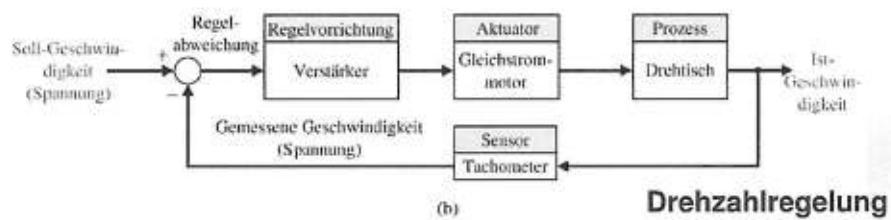


## Drehzahlsteuerung

## Beispiele



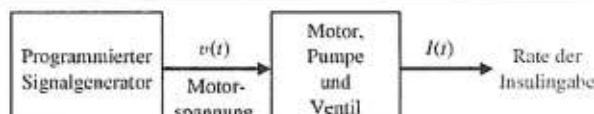
(a)



(b)

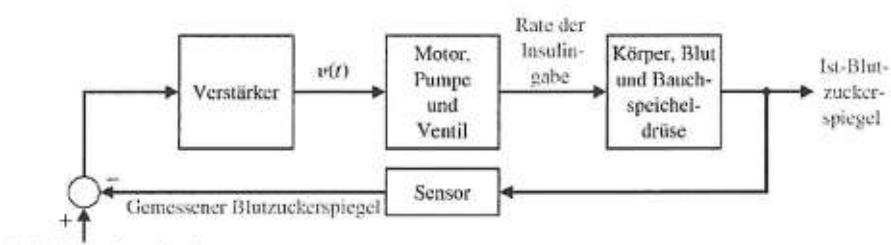
**Drehzahlregelung**

## Beispiele



(a)

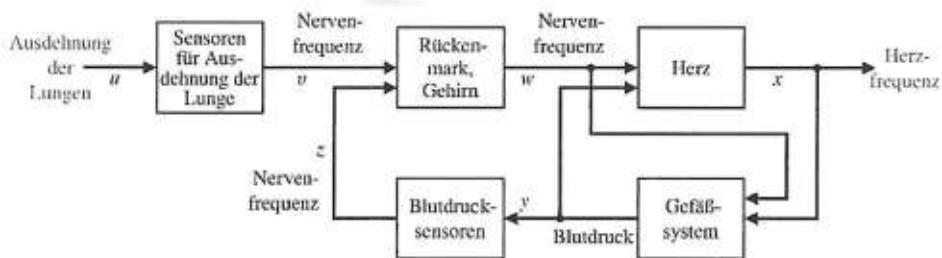
**Volumensteuerung**



(b)

**Volumenregelung**

## Beispiele



### **Kaskadenregelung (mehrere verschachtelte Regelkreise)**

## Literatur

- Hildebrand Walter: *Kompaktkurs Regelungstechnik, Lehr- und Übungsbuch*, Vieweg-Verlag, Braunschweig/Wiesbaden, 2001  
ISBN: 3-528-03827-6
- Lutz, Holger; Wendt Wolfgang: *Taschenbuch der Regelungstechnik*, 4. Auflage, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt/Main, 2002  
ISBN: 3-8171-1668-3
- Unbehauen, Heinz: *Regelungstechnik I*, 11. Auflage, Vieweg Verlag, Braunschweig/Wiesbaden, 2001  
ISBN: 3-528-01332-X
- Föllinger, O.: *Laplace- und Fouriertransformation*, Elterna-Verlag, Berlin, 1977.
- Föllinger, O.: *Regelungstechnik*, 8. Auflage, Hüthig-Verlag, Heidelberg, 1994.

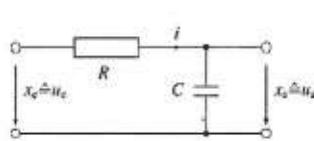
## Literatur

- Dorf, Richard; Bishop Robert: *Moderne Regelungssysteme*. Pearson-Studium, 10. Auflage
- Reuter, M.; Zacher, S.: *Regelungstechnik für Ingenieure*. Vieweg-Verlag 10. Auflage
- Zacher, S.: *Übungsbuch Regelungstechnik*. Vieweg-Verlag 3. Auflage. ISBN: 978-3-8348-0236-1
- Große, N.; Schorn, W.: *Taschenbuch der praktischen Regelungstechnik*. Hanser-Verlag. ISBN: 978-3-446-40302-4

# 2 - Laplace-Transformation als Hilfsmittel zur Darstellung komplexer Systeme

## WS2019/20

### Differentialgleichung

 Widerstand-Kondensator-Schaltung  
(RC-Element)


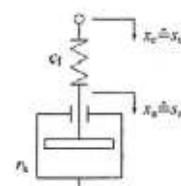
$$u_e(t) = i(t) \cdot R + u_a(t)$$

$$i(t) = C \cdot \frac{du_a(t)}{dt}$$

$$T_1 = R \cdot C$$

$$T_1 \cdot \frac{du_a(t)}{dt} + u_a(t) = u_e(t)$$

Feder-Dämpfer-Element

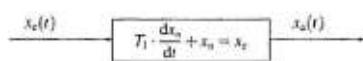


Differentialgleichung (Dgl.)

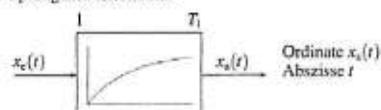
- Aufbau nach bekannten physikalischen Gesetzmäßigkeiten
- Lösung der Gleichung mathematisch möglich mit Ansatz, wenn  $u_e(t) = u_o$  ist.

$$u_a(t) = u_o (1 - e^{-\frac{t}{T_1}})$$

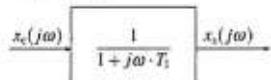
## Systembeschreibungen



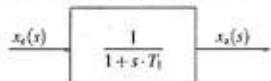
Sprungantwortfunktion



Frequenzgangfunktion



LAPLACE-Übertragungsfunktion



Quelle: Wendt

## Lineare zeitinvariante Systeme

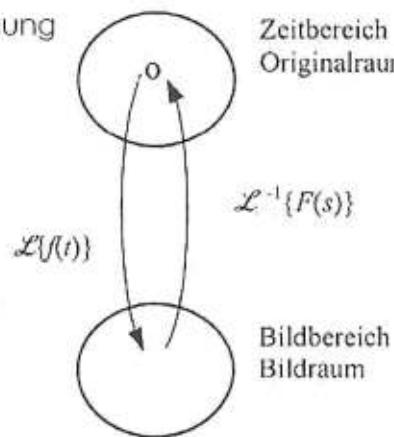
### Übertragungsfunktion

- Geeignet für die Beschreibung von SISO-Systemen
- Anwendung der Laplace-Transformation erlaubt die Überführung von LTI-Differentialgleichungen in algebraische Ausdrücke
- Aus der Übertragungsfunktion lassen sich viele verschiedene Darstellungsformen für das Systemverhalten ableiten
  - Differentialgleichung
  - Pol-Nullstellendarstellung
  - Frequenzgang
  - Ortskurve
- Alle Beschreibungen basieren auf den zeitlichen Abhängigkeiten der Ein- und Ausgangsgrößen
- Bei LTI-Systemen sind die Parameter konstant.

## Transformation

Differentialgleichung  
im Zeitbereich

Lösung erfolgt  
Im Bildbereich



## Definition der Laplace-Transformation

$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = F(s)$$

$$L\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \cdot \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) \cdot e^{st} ds = \begin{cases} f(t), & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Die Funktion  $f(t)$  wird unter Anwendung der Laplace-Transformation in den Bildbereich überführt.

$F(s)$  heißt Laplace-Transformierte der Funktion  $f(t)$ . Sie ist eine komplexwertige Funktion der komplexen Variable  $s = \sigma + j\omega$

Die Rücktransformation aus dem Bildbereich in den Zeitbereich heißt Rücktransformierte von  $F(s)$ .

Berechnungsbeispiel Sprungfunktion  $\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$

$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b f(t)e^{-st} dt$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b 1 \cdot e^{-st} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^b \right] = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{s} e^{-(\sigma+j\omega)t} \Big|_0^b \right]$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{s} e^{-\sigma b} \{ \cos \omega b - j \sin \omega b \} \Big|_0^b \right] =$$

$$- \frac{1}{s} \lim_{b \rightarrow \infty} [e^{-\sigma b} \{ \cos \omega b - j \sin \omega b \} - 1]$$

$$= -\frac{1}{s} [-1] = \frac{1}{s}$$

Das Integral ist lösbar, wenn gilt  $\operatorname{Re}\{s\} = \sigma > 0$

Berechnungsbeispiel

$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-st} dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} dt = -\frac{1}{(s-a)} e^{-(s-a)t} \Big|_0^{\infty}$$

$$= -\frac{1}{(s-a)} e^{-(\sigma+j\omega-a)t} \Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{(s-a)} e^{-(\sigma-a)t} e^{-j\omega t} \Big|_0^{\infty}$$

$$= -\frac{1}{(s-a)} [0 - 1] = \frac{1}{s-a}$$

Das Integral ist lösbar, wenn gilt  $\operatorname{Re}\{s\} = \sigma > a$

## Anwendbarkeit der Laplace-Transformation

Welche Zeitfunktionen können transformiert werden?

- Die untere Integrationsgrenze ist 0. Funktionswerte für  $t < 0$  sind nicht zulässig. Entspricht technischen Zeitfunktionen
- Die Funktion muss stetig sein. Sprünge sind zulässig, wenn jeweils der links- und rechtseitige Grenzwert existiert.
- Die Funktion darf nicht stärker wachsen als eine Exponentialfunktion mit beliebigen Exponenten  $c$ .

Keine Laplace-Transformierte existiert für  $f(t) = e^t$

## Anwendung der Laplace-Transformation

In der Systemtheorie können wir auf Referenztabellen zurückgreifen. Für viele gängige und technisch relevante Zeitfunktionen sind die Transformierten zu entnehmen.

Zeitfunktion	Laplace-Transformierte	Konvergenzbereich
Diracstoß $\delta(t)$	1	-
Sprung $\sigma(t)$	$\frac{1}{s}$	$\sigma > 0$
Rampe $t$	$\frac{1}{s^2}$	$\sigma > 0$
Exponential-Funktion $e^{at}$	$\frac{1}{s - a}$	$\sigma > a$
$te^{at}$	$\frac{1}{(s - a)^2}$	$\sigma > a$

Zeitfunktion $f(t)$	Laplace-Transformierte $F(s)$	$\sigma = \text{Re}(s)$	
$\delta(t)$	1	-	Gl 2-3
$t(t)$	$\frac{1}{s}$	$\sigma > 0$	Gl 2-4
$t^2$	$\frac{1}{s^2}$	$\sigma > 0$	Gl 2-5
$e^{at}$	$\frac{1}{s-a}$	$\sigma > a$	Gl 2-6
$\cos(bt)$	$\frac{s}{s^2 + b^2}$	$\sigma > 0$	Gl 2-7
$\sin(bt)$	$\frac{b}{s^2 + b^2}$	$\sigma > 0$	Gl 2-8
$1 - e^{at}$	$\frac{-a}{s(s-a)}$	$\sigma > 0$ und $\sigma > a$	Gl 2-9
$t e^{at}$	$\frac{1}{(s-a)^2}$	$\sigma > a$	Gl 2-10
$e^{at} \cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}$	$\sigma > a$ und $\sigma > 0$	Gl 2-11
$e^{at} \sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}$	$\sigma > a$ und $\sigma > 0$	Gl 2-12

## Anwendung der Laplace-Transformation

Konvergenzuntersuchung:

spielt für uns keine Rolle

Transformierte:

wird nicht berechnet

Übernahme aus Korrespondenztabelle

Rücktransformierte:

Anwendung von Lösungsschemata

Sätze & Rechenregeln:

Übernahme aus Korrespondenztabelle

Anwendung von Sätzen und

Rechenregeln

Linearitätssatz

Ableitungssatz

Faltungssatz

Integrationssatz

Verschiebungssatz

Ähnlichkeitssatz

Dämpfungssatz

Grenzwertsätze

Grundregeln (Sätze) der Laplace-Transformation		
$f(t) \xrightarrow{\quad} F(s)$	$h(t) \xrightarrow{\quad} H(s)$	
Zeitbereich	Bildbereich	
Linearitätsatz (Addition) $a f(t) + b h(t)$	$a, b$ reell oder komplex $a F(s) + b H(s)$	Gl 2-14
Faltungssatz $\int_0^t f(\tau) h(t-\tau) d\tau$	kommutativ $F(s) H(s)$	Gl 2-15
Ableitungssatz: $\dot{f}$ $\ddot{f}$ $f^{(n)}$	Anfangswerte $f(0)$ oder $f(0+)$ $sF(s) - f(0)$ $s^2 F(s) - sf(0) - \dot{f}(0)$ $s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} \dot{f}(0)$ $- \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$	Gl 2-16
Integrationssatz: $\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$	Gl 2-17
Verschiebungssatz $f(t-t_V)$	$t_V > 0$ $F(s) e^{-s t_V}$	Gl 2-18
Multiplikationssatz $(-t)^v f(t)$	$n = 1, 2, \dots, n$ -te Ableitung nach $s$ $F^{(n)}(s)$	Gl 2-19
Ähnlichkeitssatz $f(ax)$	$a > 0$ $\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$	Gl 2-20
Dämpfungssatz $e^{-at} f(t)$	$a$ reell oder komplex $F(s+a)$	Gl 2-21



Quelle: Seemann

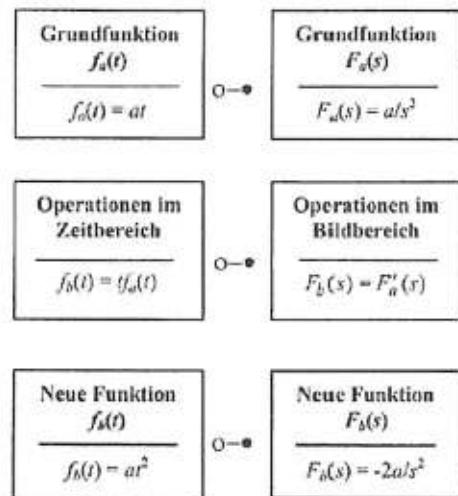
## Anwendung der Laplace-Transformation

Grundregeln (Sätze) der Laplace-Transformation		
$f(t) \xrightarrow{\quad} F(s)$	$h(t) \xrightarrow{\quad} H(s)$	
Zeitbereich	Bildbereich	
Anfangswertsatz $\lim_{t \rightarrow 0} [f(t)]$	$f(0)$ oder $f(0+)$ muss existieren $\lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s)]$	Gl 2-22
Endwertsatz $\lim_{t \rightarrow \infty} [f(t)]$	$f(\infty)$ muss existieren $\lim_{s \rightarrow 0} [sF(s)]$	Gl 2-23

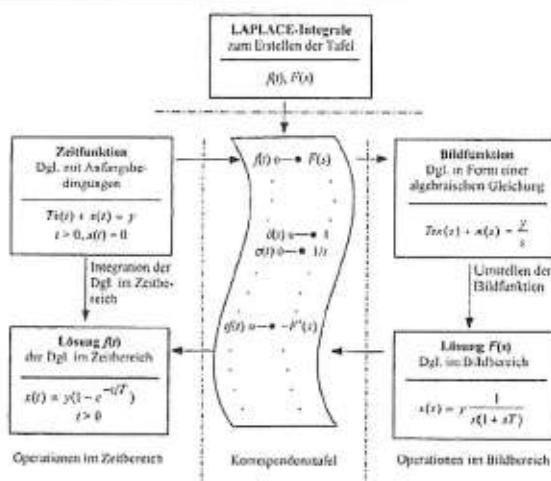


Quelle: Seemann

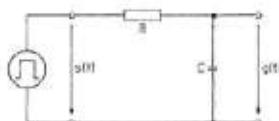
## Sätze zur Laplace-Transformation



## Transformation



### RC-Beispiel



Lösung mit Anwendung der Laplace-Transformation:



$$u_e(t) = i(t) \cdot R + u_o(t)$$

$$i(t) = C \cdot \frac{du_o(t)}{dt}$$

$$T_1 = R \cdot C$$

$$T_1 \cdot \frac{du_o(t)}{dt} + u_o(t) = u_e(t)$$

$$\mathcal{L}\{u_e(t)\} = T_1 \mathcal{L}\{u_o(t)\} + \mathcal{L}\{u_o(t)\}$$

$$Ue(s) = s T_1 Ua(s) - T_1 u_o(0) + Ua(s)$$

$$Ua(s) = \frac{1}{1+sT_1} Ue(s) + \frac{T_1}{1+sT_1} u_o(0)$$

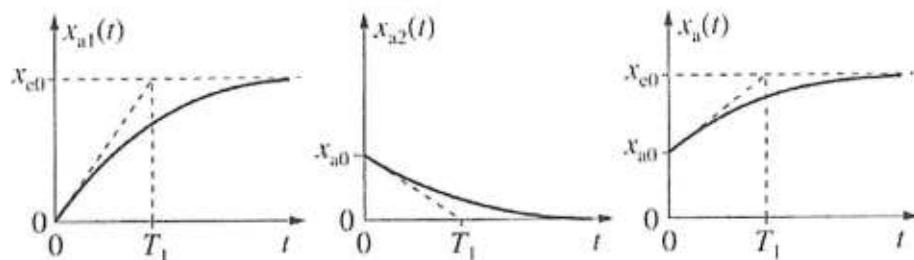
### RC-Beispiel Anregung Sprungfunktion

$$Ua(s) = \frac{1}{1+sT_1} \frac{u_0}{s} + \frac{T_1}{1+sT_1} u_o(0)$$

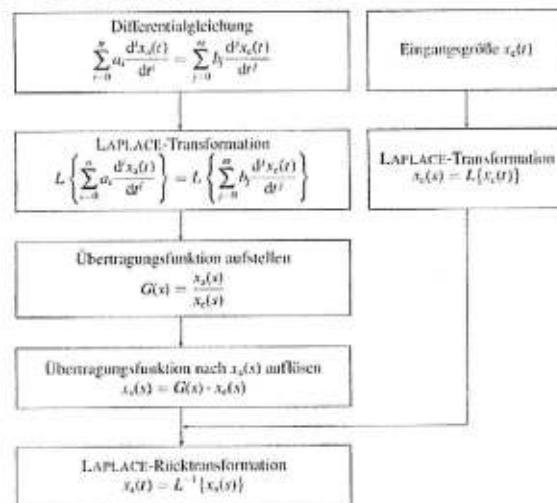
$$Ua(s) = \frac{u_0}{T_1} \frac{1}{s \left( s + \frac{1}{T_1} \right)} + \frac{1}{s + \frac{1}{T_1}} u_o(0) =$$

$$u_a(t) = \frac{u_0}{T_1} L^{-1} \left\{ \frac{1}{s \left( s + \frac{1}{T_1} \right)} \right\} + u_o(0) L^{-1} \left\{ \frac{1}{s + \frac{1}{T_1}} \right\} = u_o(1 - e^{-\frac{t}{T_1}}) + u_o(0) e^{-\frac{t}{T_1}}$$

## RC-Beispiel Aufgabe Sprungfunktion



## Schema zur Lösung von Differentialgleichungen



# 3 - Zeitverhalten einfacher Übertragungsglieder

## WS2019/20

---

### Inhalt

---

#### 3. Zeitverhalten

- 3.0 Ausgangspunkt und Zielsetzung
- 3.1 Beschreibung durch Differentialgleichungen
- 3.2 Testfunktionen
  - 3.2.1 Sprungfunktion – Sprungantwort
  - 3.2.2 Anstiegsfunktion – Anstiegsantwort
  - 3.2.3 Impulsfunktion – Impulsantwort
- 3.3 Einfache Übertragungsglieder
  - 3.3.1 Proportionalglied ohne Verzögerung (P-Glied)
  - 3.3.2 Proportionalglied mit Verzögerung ( $PT_1$ -Glied)
  - 3.3.3 Integrales Übertragungsglied (I-Glied)
  - 3.3.4 Differenzierendes Übertragungsglied (D-Glied)
  - 3.3.5 Differenzierendes Übertragungsglied mit Verzögerung ( $DT_1$ -Glied)
  - 3.3.6 Übertragungssystem 2. Ordnung ( $PT_2$ -Glied)
  - 3.3.7 Totzeitglied ( $T_1$ -Glied)
  - 3.3.8 Zusammenfassung einfacher Übertragungsglieder

### 3. Zeitverhalten

#### 3.0 Ausgangspunkt und Zielsetzung

In Kapitel 1 wurde eine Einführung in das Themengebiet Regelungstechnik gegeben und zahlreiche Beispiele für Steuerungen und Regelungen vorgestellt.

Kapitel 2 hat mathematische Grundlagen der Laplace- und der Fourier-Transformation als Spezialfall der Laplace-Transformation wiederholt.

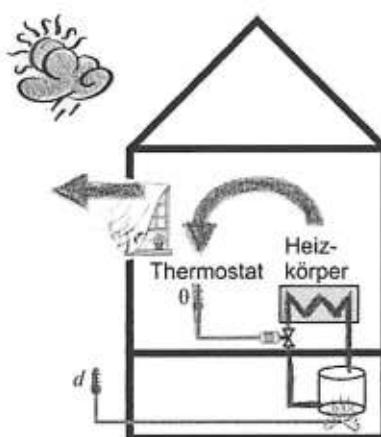
Das vorliegende Kapitel 3 behandelt nun das Verhalten und die Beschreibung einfacher Übertragungsglieder im Zeitbereich.

Kapitel 4 wird die Beschreibung einfacher Übertragungsglieder im Bildbereich durch Anwendung der Methodik der Laplace- und der Fourier-Transformation behandeln und stellt einige grundlegende Vorteile der Behandlung von Regelkreiskomponenten im Bildbereich heraus.

Die Vertiefung der Thematik durch Anwendung der einfachen Strukturen auf komplexer Systeme erfolgt im weiteren Verlauf der Vorlesung.

#### 3.0 Ausgangspunkt und Zielsetzung

##### Aufgabe 1: Raumheizung

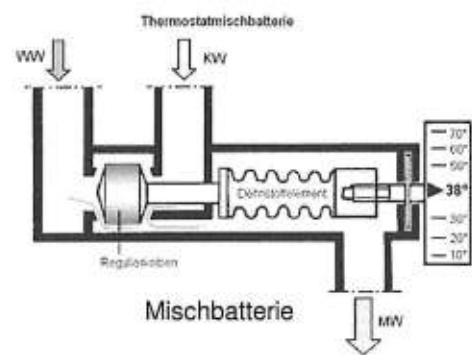
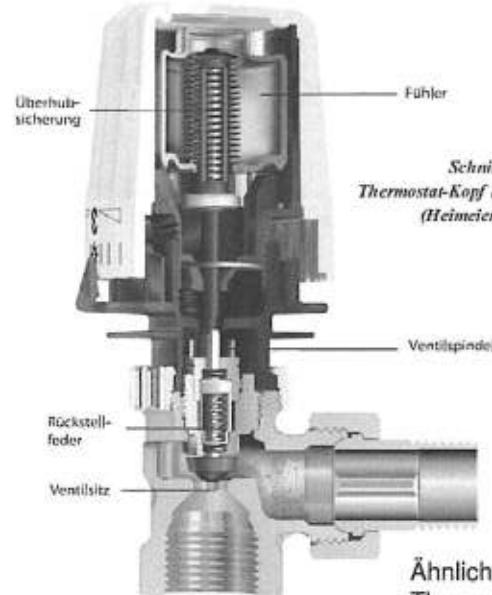


##### Fragen:

- Wie funktioniert eigentlich ein Heizungsthermostat bzw. eine Mischbatterie?
- Wie kann ein solches Gebilde systemtheoretisch beschrieben / modelliert werden?

### 3.0 Ausgangspunkt und Zielsetzung

Zu Frage 1a)



Ähnliches Prinzip:  
Thermostat Kühlkreislauf KFZ



### 3.0 Ausgangspunkt und Zielsetzung

Aufgabe 2: Übertragungsfunktion

Gegeben:  $G(s) = \frac{10 \cdot (1+s)}{s \cdot (1+2s)^2}$

$$\text{La.-Place} \Rightarrow S \quad \sigma + j\omega \leftarrow \begin{matrix} \text{Kreis-} \\ \text{Frequenz} \\ 2\pi f \end{matrix}$$

Fourier  $\Rightarrow$

Fragen:

- Welches Verhalten kann ich an der obigen Funktion ohne größere Rechnung ablesen?
- Welche Ähnlichkeiten haben Aufgabe 1 und Aufgabe 2?

### 3.0 Ausgangspunkt und Zielsetzung

Zu Frage 2a)

Es wird folgende Zerlegung in Faktoren vorgeschlagen:

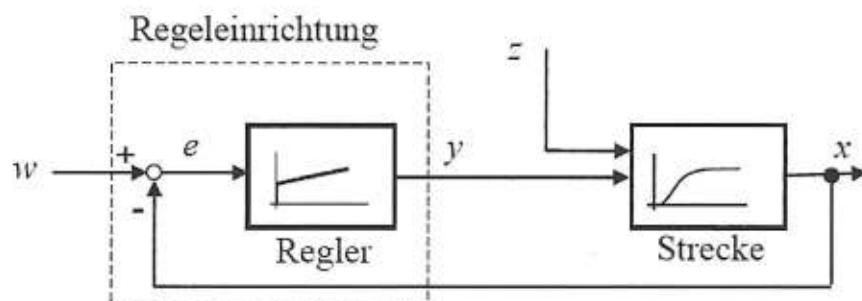
$$G(s) = 10 \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{(1+2s)^2} \cdot (1+s)$$

Frage: Warum ist diese Zerlegung sinnvoll?

### 3. Zeitverhalten

#### 3.1 Beschreibung durch Differentialgleichungen

Ausgangspunkt sei der im nachfolgenden Bild dargestellte Regelkreis.



*Prinzip einer Regelung*

w Führungsgröße      y Stellgröße  
x Regelgröße      z Störgröße

e Regeldifferenz

Der Zusammenhang zwischen den Systemgrößen Y, Z und X, das heißt zwischen Eingangs- und Ausgangsgrößen der Strecke, wird im allgemeinen Fall durch eine nichtlineare Differentialgleichung beschrieben, die sich wie folgt angeben lässt:

### 3.1 Beschreibung durch Differentialgleichungen

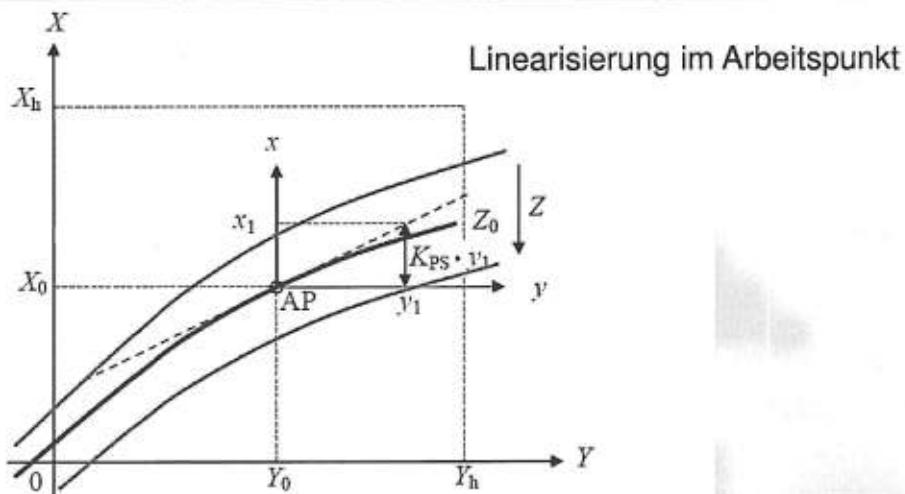
$$X = f(Y, Z, t) \quad (1)$$

Dabei kommen auch die entsprechenden Ableitungen der Größen  $X, Y, Z$  nach der Zeit vor. Die hier benutzten großen Buchstaben kennzeichnen nicht den Frequenzbereich (Laplace), sondern den Großsignalbereich mit absoluten Größen.

Die Lösung der obigen Differentialgleichung (1) ist gewöhnlich mit großen Schwierigkeiten verbunden. Man beschränkt sich deshalb, wie bei der Beschreibung des stationären Zustandes, auf die Betrachtung der Abweichungen, so dass man Gleichung (1) in der Nähe eines stationären Arbeitspunktes (AP) im Kleinsignalbereich linearisieren kann.

Nimmt man an, dass sich der Regelkreis immer in der Nähe des stationären Arbeitspunktes AP im nachfolgenden Bild befindet, so kann man die Kennlinie in diesem Arbeitspunkt als linear annehmen, das heißt, sie durch eine Tangente (Gerade) durch den Arbeitspunkt ersetzen. So lange keine sehr großen Änderungen der Führungsgröße  $W$  oder der Störgröße  $Z$  und damit auch der Stellgröße  $Y$  auftreten, wird die gewählte Näherung die tatsächlichen Verhältnisse mit ausreichender Genauigkeit beschreiben.

### 3.1 Beschreibung durch Differentialgleichungen



Kennlinienfeld einer Strecke im Groß- und Kleinsignalbereich  
 X Regelgröße Y Stellgröße Z Störgröße  
 $X_0, Y_0, Z_0$  Bezugswerte im Arbeitspunkt  
 ( $x, y$  und  $z$  entsprechend im Kleinsignalbereich)  
 $X_h$  Regelbereich       $Y_h$  Stellbereich  
 $K_{PS}$  Übertragungsbeiwert der Strecke

### 3.1 Beschreibung durch Differentialgleichungen

Es ergibt sich dann eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten:

$$a_n \cdot x^{(n)} + a_{n-1} \cdot x^{(n-1)} + \dots + a_1 \cdot \dot{x} + a_0 \cdot x = b_m \cdot y^{(m)} + \dots + b_1 \cdot \dot{y} + b_0 \cdot y \quad (2)$$

$x^{(v)} = \frac{d^v}{(dt)^v} x$  ist eine abgekürzte Schreibweise für die v-te Ableitung der Ausgangsgröße  $x$  nach der Zeit. Entsprechendes gilt für die Stell- bzw. Streckeneingangsgröße  $y$ .

Bei realen Systemen ist fast immer  $m \leq n$ , das heißt, dass eine endliche Eingangsgröße, die zum Zeitpunkt  $t = 0$  auf das System einwirkt, auch nur eine endliche Ausgangsgröße zum Zeitpunkt  $t = 0$  hervorrufen kann. Ist  $m < n$ , so ist  $x$  bei endlichem  $y$  im ersten Augenblick Null, d.h. technische Systeme haben verzögerndes Verhalten.

$n$  wird die Ordnung der Differentialgleichung oder die Ordnung des betrachteten Systems genannt. Sie hängt von der Zahl der unabhängigen Energiespeicher (= Integratoren) ab.

### 3.1 Beschreibung durch Differentialgleichungen

Sind der zeitliche Verlauf der Eingangsgröße  $y$  und die Anfangsbedingungen  $x(t), \dot{x}(t), x^{(n-1)}(0), \dots$  bekannt, kann die Gleichung (2) geschlossen gelöst werden, das heißt man kann den zugehörigen zeitlichen Verlauf der Ausgangsgröße  $x(t)$  angeben. Da die Differentialgleichung (2) linear ist, kann die Gesamtlösung durch Überlagerung von Teillösungen (Superpositionsprinzip) gefunden werden. Man geht dazu so vor, dass man zunächst die homogene Gleichung:

$$a_n \cdot x^{(n)} + a_{n-1} \cdot x^{(n-1)} + \dots + a_1 \cdot \dot{x} + a_0 \cdot x = 0 \quad (3)$$

durch den Ansatz:  $x_h = C \cdot e^{st}$  (4)

löst. Durch Einsetzen von (4) in (3) folgt die Beziehung:

$$a_n \cdot s^n + \dots + a_1 \cdot s + a_0 = 0 , \quad (5)$$

die charakteristische Gleichung der Differentialgleichung genannt wird. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra folgt, dass (5)  $n$  Lösungen (Wurzeln oder Eigenwerte)  $s_1, \dots, s_n$  haben muss, das heißt man kann auch schreiben:

$$a_n \cdot s^n + \dots + a_1 \cdot s + a_0 = a_n(s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n) = 0 \quad (6)$$

### 3.1 Beschreibung durch Differentialgleichungen

Da die Koeffizienten der homogenen Differentialgleichung  $a_i$  reell sind, sind die Wurzeln  $s_1, \dots, s_n$  entweder reell oder es treten konjugiert komplexe Paare auf. Es werden insgesamt drei Fälle unterschieden:

- Die Wurzeln sind reell und voneinander verschieden:  
Mit (4) folgt dann die homogene Lösung:

$$x_h = C_1 \cdot e^{s_1 t} + \dots + C_n \cdot e^{s_n t} = \sum_{k=1}^n C_k \cdot e^{s_k t} \quad (5)$$

mit aus den Anfangsbedingungen zu bestimmenden Konstanten  $C_i$ .

- Neben reellen Wurzeln treten konjugiert komplexe auf:  
 $s_1 = \sigma + j\omega, s_2 = \sigma - j\omega, s_3 \dots s_n$  sind reell.

$$x_h = C_1 \cdot e^{\sigma_1 t} \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \sum_{k=3}^n C_k \cdot e^{s_k t} \quad (6)$$

### 3.1 Beschreibung durch Differentialgleichungen

Hier wird der Lösungsanteil  $C_{c1} \cdot e^{s_1 t} + C_{c2} \cdot e^{s_2 t}$  zu einer reellen Zeitfunktion  $C_1 \cdot e^{\sigma_1 t} \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$  zusammengefasst.

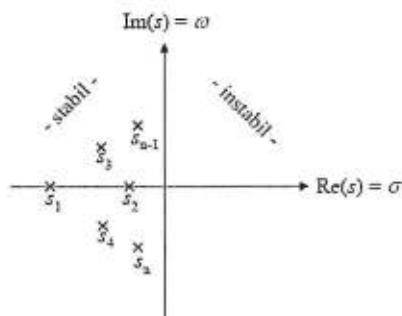
- Es treten zusätzlich mehrfache Wurzeln auf:  
 $s_1$  sei eine m-fache Wurzel ( $s_1 = s_2 = \dots = s_m$ )

$$x_h = e^{\sigma_1 t} \cdot \left( \sum_{i=1}^m C_i \cdot t^{i-1} \right) + \sum_{k=m+1}^n C_k \cdot e^{s_k t}$$

Es ist leicht einzusehen, dass  $x_h$  nur dann einem endlichen Grenzwert zustrebt, wenn die Wurzeln  $s_k$  der charakteristischen Gleichung negativ reell bzw. bei konjugiert komplexen  $s_k$  der Realteil  $\sigma_k$  negativ ist. Andernfalls würden sich ja aufklingende, das heißt mit der Zeit wachsende Exponentialfunktionen oder exponentiell wachsende Schwingungen ergeben.

### 3.1 Beschreibung durch Differentialgleichungen

Denkt man sich die Lösungen  $s_1, \dots, s_n$  in einer Gauß'schen Zahlenebene aufgetragen, wie es in nachfolgendem Bild dargestellt ist, so ist das System nur stabil, wenn die Realteile aller Wurzeln  $\sigma_\lambda$  in der linken Halbebene liegen.



*Die Wurzeln der charakteristischen Gleichung  $s_1 \dots s_n$  für ein stabiles System befinden sich in der linken Halbebene*

### 3.1 Beschreibung durch Differentialgleichungen

Zusätzlich zu der homogenen Lösung (berechnet aus den Koeffizienten  $a_i$ ), die die Eigendynamik des Systems beschreibt, kann mit den Koeffizienten  $b_i$ , dem vorgegebenen Zeitverlauf einer „Störfunktion“  $y(t)$  und einem geeigneten Ansatz die partikuläre Lösung  $x_p$  bestimmt werden.

Die Gesamtlösung der Gleichung (2) ergibt sich nun aus der Überlagerung der homogenen Lösung  $x_h$  und der sogenannten partikulären Lösung  $x_p$ ,

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) , \quad (7)$$

wobei  $x_p$  den speziellen Verlauf der Eingangsgröße  $y(t)$  berücksichtigt, der ja in  $x_h$  noch nicht enthalten war. Die sogenannten Integrationskonstanten  $C_\lambda$  werden über die Anfangsbedingungen bestimmt. Es gibt Verfahren, um einen Ansatz für die partikuläre Lösung  $x_p$  zu finden, jedoch soll hier nicht näher darauf eingegangen werden.

Wichtig sind vor allem folgende Tatsachen:

### 3.1 Beschreibung durch Differentialgleichungen

1. Der Zusammenhang zwischen der Eingangsgröße und der Ausgangsgröße eines Systems ist durch die DGL (2) gegeben.
2. Ihre Lösung kann durch Überlagerung der Teillösungen  $x_h$  und  $x_p$  gewonnen werden.
3. Das System ist nur dann stabil, wenn alle Wurzeln der charakteristischen Gleichung (4) bzw. (5) in der linken s-Halbebene liegen (siehe Bild oben).

Ist die dritte Bedingung erfüllt, so strebt das System, das durch die Gleichung (2) beschrieben wird, für  $y = \text{konst.} = y_0$  einem stationären Zustand  $x_0$  zu. Da in diesem stationären Zustand keine Änderungen der Systemgrößen mehr vorliegen, erhält man aus (2) sofort die stationäre Lösung:

$$x_0 = \frac{b_0}{a_0} \cdot y_0 \quad . \quad (8)$$

Ist  $y_0 \equiv y$  und  $x_0 \equiv x$ , so ist der Ausdruck  $b_0/a_0$  nichts anderes als der

### 3.1 Beschreibung durch Differentialgleichungen

Übertragungsbeiwert der Strecke:  $K_{PS} = \frac{b_0}{a_0}$  . (9)

Wie bereits gesagt bereitet es keine prinzipiellen Schwierigkeiten, die Ausgangsgröße  $x(t)$  bei beliebigem, aber bekanntem zeitlichen Verlauf der Eingangsgröße zu berechnen, vorausgesetzt, dass die Systemkonstanten  $a_\nu$ ,  $b_\mu$  bekannt sind. Um jedoch eine gute Vergleichsmöglichkeit zwischen verschiedenen Systemen zu bekommen, ist es zweckmäßig, die Lösung von (2) für bestimmte Eingangsfunktionen, sogenannte Testfunktionen, zu bestimmen. Das Auffinden der Lösung kann dabei rechnerisch auf dem angedeuteten Weg oder aber experimentell vorgenommen werden, indem man die Testfunktion zum Zeitpunkt  $t = 0$  dem in Ruhe befindlichen System als Eingangsgröße aufschaltet und dann die Reaktion der Ausgangsgröße beobachtet. Die Ausgangsgröße kann z.B. mit einem digitalen Speicher-oscilloskop aufzeichnet werden. Man hat somit dann das dynamische und stationäre Verhalten des Systems bestimmt.

## 3.2 Testfunktionen

### 3.2.1 Sprungfunktion – Sprungantwort

Die Eingangsfunktion  $y(t)$  wird hier zum Zeitpunkt  $t = 0$  sprungförmig um einen bestimmten Wert  $y_0$  geändert,

$$y(t) = y_0 \cdot \varepsilon(t). \quad (10)$$

$\varepsilon(t)$  beschreibt dabei den Einheitssprung (unit step), der den Bedingungen

$$\varepsilon(t < 0) = 0$$

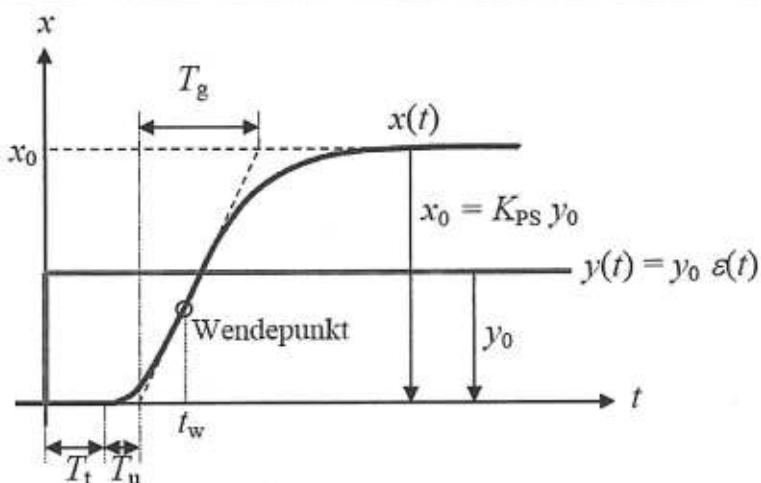
$$\varepsilon(t \geq 0) = 1$$

genügt.

Der zeitliche Verlauf  $x(t)$  als Ergebnis dieser Anregungsfunktion wird Sprungantwort (step response) genannt. Das nachfolgende Bild zeigt Eingangs- und Ausgangsfunktion eines Übertragungssystems (Regelstrecke) mit Ausgleich.

Bezieht man die Änderung der Ausgangsgröße  $x(t)$  auf die Änderung der Eingangsgröße  $y_0$ , bildet man also den Quotienten  $x(t)/y_0$ , so erhält man die Übergangsfunktion oder bezogene Sprungantwort  $h(t)$  (unit step response) des Systems.

## 3.2 Testfunktionen



*Sprungantwort eines Übertragungssystems (Regelstrecke) mit Ausgleich – gekennzeichnet durch die Kennwerte:*

$T_t$  Totzeit

$T_g$  Ausgleichszeit

$T_u$  Verzugszeit

$K_{PS}$  Übertragungsbeiwert

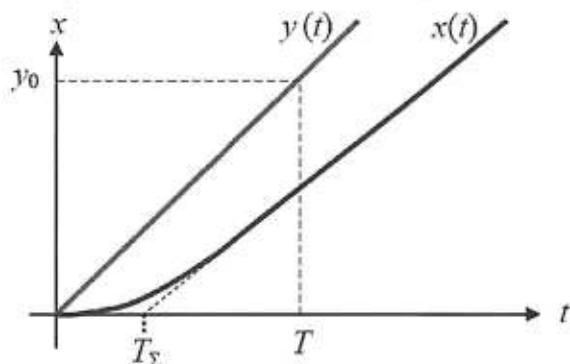
### 3.2 Testfunktionen

#### 3.2.2 Anstiegsfunktion – Anstiegsantwort

Hierbei wird das Eingangssignal  $y(t)$  mit konstanter Geschwindigkeit geändert,

$$y(t) = y_0 \cdot \frac{t}{T}, \quad (13)$$

und die Reaktion des Systems beobachtet. Das nachfolgende Bild zeigt die entstehende Anstiegsantwort, die auch Rampenantwort genannt wird.



Anstiegsfunktion und Anstiegsantwort (Rampenantwort)

Regelungstechnik (FT24.1), WS2019/20, Prof. Dr.-Ing. Hans-Werner Groh

21

### 3.2 Testfunktionen

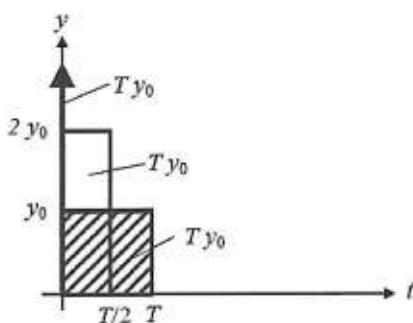
Der Schnittpunkt der Asymptote, der sich  $x(t)$  für  $t \rightarrow \infty$  nähert, mit der Abszisse liefert den Zeitpunkt  $T_\Sigma$ , für den  $T_\Sigma \approx T_t + T_u + T_g$  gilt (Summenzeitkonstante). Eine exakte Ermittlung der Größen  $T_t$ ,  $T_u$  und  $T_g$  ist hier nicht so leicht wie bei der Sprungantwort möglich. Der Übertragungsbeiwert  $K_{PS}$  bestimmt die Steigung der Rampenantwort.

## 3.2 Testfunktionen

### 3.2.2 Impulsfunktion – Impulsantwort

Die Impulsfunktion und die Impulsantwort (pulse response) sind von eher theoretischer Bedeutung, jedoch kann in manchen Fällen eine näherungsweise Messung der Impulsantwort von Interesse sein.

Man denkt sich die Eingangsfunktion gemäß einem Dirac-Impuls (Nadel-Impuls) und beobachtet wieder die Reaktion des Systems. Das nachfolgende Bild veranschaulicht, wie ein solcher Dirac-Impuls entsteht bzw. genähert werden kann.

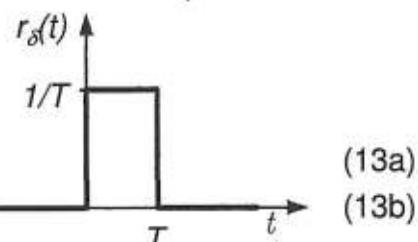


Bildung der Impulsfunktion  $\delta(t)$

## 3.2 Testfunktionen

Man stellt sich vor, dass die Eingangsgröße  $y$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  auf  $y_0$  springt und zur Zeit  $t = T$  wieder auf 0 zurückgestellt wird. Dann verkürzt man die Impulsdauer z.B. auf  $T/2$  und steigert gleichzeitig die Amplitude auf  $2 \cdot y_0$ . Die Impulsfläche  $T \cdot y_0$  bleibt dabei konstant. Im Grenzfall einer unendlich kurzen Impulsdauer erhält man dann einen unendlich hohen Impuls, den gewichteten Dirac-Impuls  $T \cdot y_0 \cdot \delta(t)$ , dessen Fläche nach wie vor  $T \cdot y_0$  ist. Bei Normierung der Fläche des Dirac-Impuls auf 1 (Einheitsimpuls) über  $y_0 = 1/T$  ergibt sich:

$$r_\delta(t) = \begin{cases} 1/T & \text{für } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

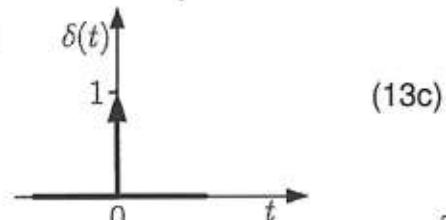


Und somit die Impulsfunktion zu:  
mit den Eigenschaften:

$$\delta(t) = \lim_{T \rightarrow 0} r_\delta(t)$$

$$\delta(t) = 0 \text{ für } t \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$



### 3.2 Testfunktionen

Bei Anregung mit einem allgemein Dirac-Impuls der Form:  $y(t) = y_0 \cdot \delta(t)$  erhält man die Gewichtsfunktion  $g(t)$  einer Strecke als bezogene Impulsantwort  $x(t) / y_0 = g(t)$ .

Der Verlauf der Ausgangsgröße eines stabilen Systems bei dieser Anregungsfunktion ist in nachfolgendem Bild dargestellt.

Bei Normierung der Dirac-Impulses auf  $y_0 = 1$  erhält man den Einheitsimpuls oder Dirac-Stoß und es gilt:

$$x(t)|_{y(t)=\delta(t)} = g(t) \quad (13d)$$

Sie ist von besonderem Interesse, da bei bekannter Gewichtsfunktion  $g(t)$  die Ausgangsgröße  $x(t)$  auch bei *beliebiger* Eingangsfunktion  $y(t)$  gemäß der Beziehung:

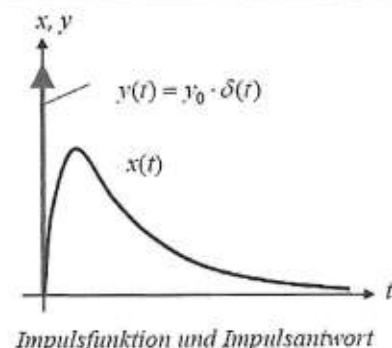
$$x(t) = \int_0^t y(\tau) \cdot g(t-\tau) \cdot d\tau \quad (14)$$

berechnet werden kann (Faltungsintegral, Duhamelsches Integral).

### 3.2 Testfunktionen

In Wirklichkeit kann ein echter Dirac-Impuls  $\delta(t)$  natürlich nicht erzeugt werden, da weder die unendlich kurze Dauer noch die unendliche Amplitude realisiert werden können.

Wenn jedoch die Dauer  $T$  eines realen Impulses endlicher Amplitude  $y$  klein gegenüber den Verzögerungen des Systems ist, so kann man annehmen, dass der Unterschied zwischen der sich dabei ergebenden Systemantwort und der Impulsantwort unerheblich ist. Unter dieser Voraussetzung kann die Impulsantwort dann zumindest näherungsweise gemessen werden.



### 3.3 Einfache Übertragungsglieder

#### 3.3 Einfache Übertragungsglieder

Grundsätzlich sind in der Differentialgleichung (2) bereits alle linearen Übertragungsglieder mit Ausnahme des Totzeitsystems enthalten. Um sich eine bessere Vorstellung vom Verhalten einfacher Übertragungsglieder und später dann von deren Zusammenspiel machen zu können ist es sinnvoll, diese im ersten Schritt separiert und gesondert zu betrachten.

Außerdem sind Regler meist Kombinationen einfacher Übertragungssysteme, so dass man die allgemeine Differentialgleichung (2) oft nur zur Beschreibung des dynamischen Verhaltens der Strecke braucht.

##### 3.3.1 Proportionalglied ohne Verzögerung (P-Glied)

Hier vereinfacht sich die Differentialgleichung zu der Beziehung:

$$x = K_p \cdot y \quad (15)$$

das Eingangssignal wird also völlig unverzögert in das Ausgangssignal überführt.

$$a_n \cdot x^{(n)} + a_{n-1} \cdot x^{(n-1)} + \dots + a_1 \cdot \dot{x} + a_0 \cdot x = b_m \cdot y^{(m)} + \dots + b_1 \cdot \dot{y} + b_0 \cdot y$$

### 3.3 Einfache Übertragungsglieder

Bei allen praktischen Systemen ist dies eine Näherung, da immer eine gewisse Verzögerung vorhanden sein wird. Diese kann jedoch so klein sein, dass sie ohne Bedenken vernachlässigt werden kann. Bei einer Durchflussregelstrecke folgt beispielsweise bei Flüssigkeiten die Menge nahezu unverzögert der Schieberstellung.

##### 3.3.2 Proportionalglied mit Verzögerung (PT<sub>1</sub>-Glied)

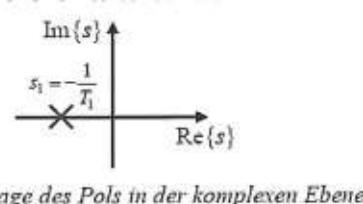
Für  $m = 0, n = 1, b_0 = K_p, a_1 = T_1, a_0 = 1$  erhält man aus (2, siehe oben) die Differentialgleichung eines PT<sub>1</sub>-Gliedes:

$$T_1 \cdot \dot{x} + x = K_p \cdot y \quad (16)$$

Die Sprungantwort ergibt sich nach dem beschriebenen Lösungsverfahren. Mit dem Ansatz für die homogene Lösung  $x_h = C \cdot e^{s_1 t}$  folgt für die charakteristischen Gleichung  $T_1 \cdot s_1 \cdot C \cdot e^{s_1 t} + C \cdot e^{s_1 t} = 0$  und damit:

$$T_1 \cdot s_1 + 1 = 0,$$

$$s_1 = -\frac{1}{T_1}.$$



### 3.3 Einfache Übertragungsglieder

Als partikuläre Lösung kann man den stationären Zustand (in diesem gibt es keine Änderungen der Systemgrößen mehr) nehmen, dem das System zustrebt. Nach (8) und (9) ergibt sich hierfür:

$$x_p = K_p \cdot y_0$$

Damit wird:

$$x(t) = x_h + x_p = C \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + K_p \cdot y_0.$$

Die Integrationskonstante  $C$  bestimmt man aus der Anfangsbedingung  $x(0) = 0$  zu  $C = -K_p \cdot y_0$ , so dass man für die Sprungantwort erhält:

$$x(t) = K_p \cdot y_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}}\right) \quad (17)$$

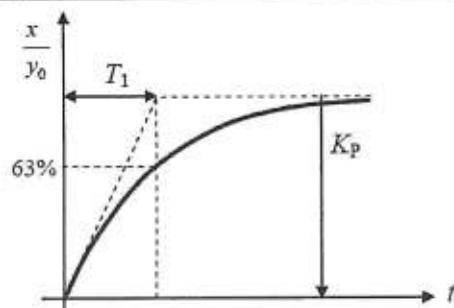
und für die Übergangsfunktion als bezogene Sprungantwort:

$$h(t) = \frac{x(t)}{y_0} = K_p \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}}\right) \quad (18)$$

Das nachfolgende Bild zeigt den zeitlichen Verlauf der Übergangsfunktion.



### 3.3 Einfache Übertragungsglieder

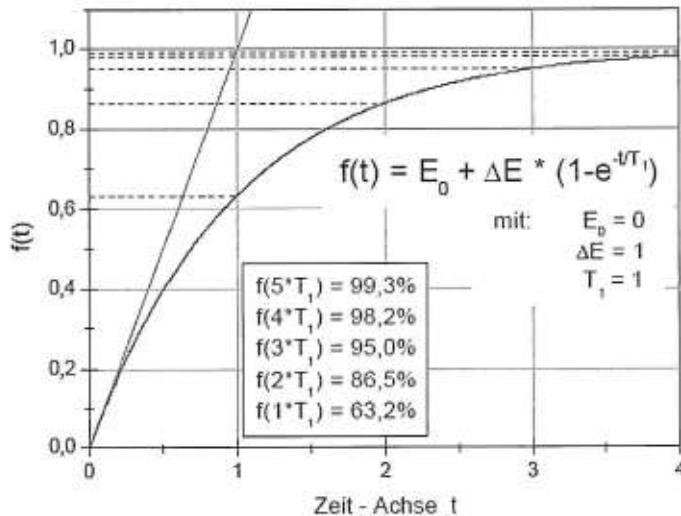


Übergangsfunktion eines  $PT_1$ -Gliedes  
 $K_p$  Übertragungsbeiwert       $T_1$  Zeitkonstante

Das nachfolgende Bild zeigt den zeitlichen Verlauf der Übergangsfunktion. Sie ist durch die Parameter  $K_p$  und  $T_1$  bestimmt. Für  $T_1 \rightarrow 0$  erhält man den Sonderfall eines P-Gliedes.

### 3.3 Einfache Übertragungsglieder

Eine Faustformel besagt, dass nach 5 Zeitkonstanten der neue Beharrungswert erreicht ist (99,3%).



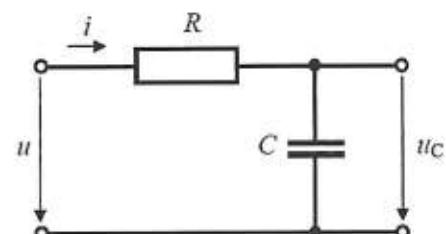
$$a_n \cdot x^{(n)} + a_{n-1} \cdot x^{(n-1)} + \dots + a_1 \cdot \dot{x} + a_0 \cdot x = b_m \cdot y^{(m)} + \dots + b_1 \cdot \dot{y} + b_0 \cdot y$$

### 3.3 Einfache Übertragungsglieder

Beispiele:  $RC$ -System

Es gilt:  $i \cdot R + u_C = u$

Mit:  $i = C \frac{d}{dt} u_C$  erhält man:  $R \cdot C \cdot \frac{d}{dt} u_C + u_C = u$



Der Vergleich mit (16):  $T_1 \cdot \dot{x} + x = K_P \cdot y$

liefert also im vorliegenden Fall:  $T_1 = R \cdot C$  und  $K_P = 1$

#### 3.3.3 Integrales Übertragungsglied (I-Glied)

Die Differentialgleichung des I-Gliedes:

$$\frac{1}{K_I} \cdot \dot{x} = y \quad (19)$$

entsteht aus (2) für  $m = 0, n = 1, b_0 = 1, a_0 = 0$  und  $a_1 = 1/K_I$ .

### 3.3 Einfache Übertragungsglieder

Man kann Gleichung (19) integrieren und erhält dann:

$$x = K_I \int y dt + C \quad (20)$$

Die Integrationskonstante  $C$  hängt von der Anfangsbedingung  $x(0) = x(t=0) = C$  ab. Sie ist Null für  $x(0) = 0$ . Die Ausgangsgröße ist also gleich dem Integral der Eingangsgröße.  $K_I$  wird Integrierbeiwert genannt.

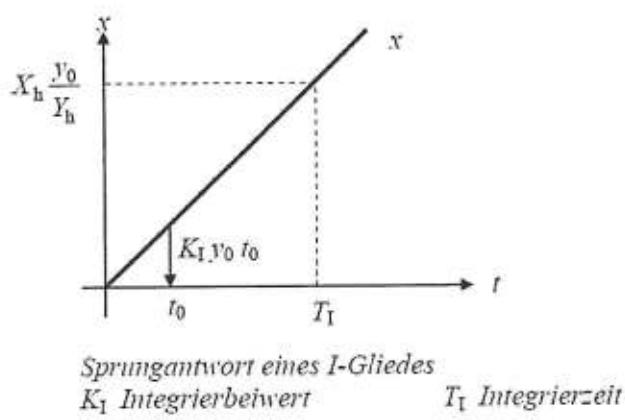
Bezieht man  $x$  und  $y$  auf ihre Messbereiche  $X_h$  und  $Y_h$ , so erhält man den Zusammenhang:

$$\frac{x}{X_h} = \frac{K_I \cdot Y_h}{X_h} \int \frac{y}{Y_h} \cdot dt = \frac{1}{T_I} \int \frac{y}{Y_h} \cdot dt \quad (21)$$

$T_I$  ist die Integrierzeit.

Die Sprungantwort eines Integriergliedes ist eine mit der Zeit linear wachsende Funktion, wie sie in nachfolgendem Bild für  $y(t) = y_0 \cdot \varepsilon(t)$  dargestellt ist.

### 3.3 Einfache Übertragungsglieder



Man kann sich die Integrierzeit  $T_I$  als die Zeit vorstellen, die vergeht, bis die Ausgangsgröße (Regelgröße  $x$ ) ihren Messbereich  $X_h$  durchlaufen hat, wenn die Eingangsgröße (Stellgröße  $y$ ) um ihren Stellbereich  $Y_h$  verändert wurde.

Die *besondere Eigenschaft* eines I-Gliedes besteht darin, dass sich die Ausgangsgröße so lange ändert, wie die Eingangsgröße ungleich Null ist.

Für  $y = 0$  bleibt die Ausgangsgröße auf einem konstanten, beliebigen Wert, der von der Vorgeschichte des Systems abhängt. Man nutzt diese Eigenschaft in Regeleinrichtungen dazu aus, Regelkreise zu verwirklichen, die im stationären Zustand eine verschwindende Regeldifferenz aufweisen sollen.

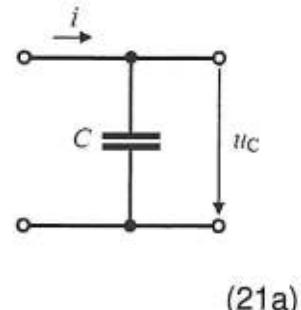
$$a_n \cdot x^{(n)} + a_{n-1} \cdot x^{(n-1)} + \dots + a_1 \cdot \dot{x} + a_0 \cdot x = b_m \cdot y^{(m)} + \dots + b_1 \cdot \dot{y} + b_0 \cdot y$$

### 3.3 Einfache Übertragungsglieder

Beispiele: Kondensator

Für den Kondensator gilt nach Kap. 3.3.2:  $i = C \frac{d}{dt} u_c$

Wird ein Kondensator mit konstantem Strom gespeist, so nimmt seine Spannung gemäß folgender Beziehung zu:



$$u_c = \frac{1}{C} \int i \cdot dt \quad (21a)$$

#### 3.3.4 Differenzierendes Übertragungsglied (D-Glied)

Setzt man in (2)  $m = 1, n = 0, b_0 = 0, b_1 = K_D, a_0 = 1$ , so erhält man die Differentialgleichung eines D-Gliedes zu:

$$x = K_D \cdot \dot{y} \quad (22)$$

Die Ausgangsgröße ist also proportional der zeitlichen Änderung der Eingangsgröße. Bezieht man  $x$  und  $y$  wieder auf die zugehörigen Messbereiche, so erhält man:

### 3.3 Einfache Übertragungsglieder

$$\frac{x}{X_h} = \frac{K_D \cdot Y_h}{X_h} \cdot \frac{\dot{y}}{Y_h} = T_D \cdot \frac{\dot{y}}{Y_h} \quad (23)$$

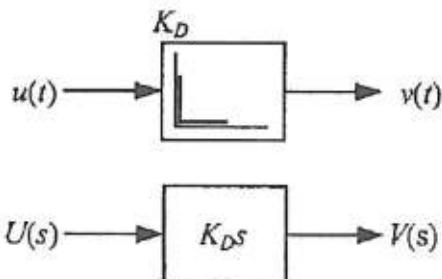
$K_D$  wird Differenzierbeiwert,  $T_D$  Differenzierzeit genannt. Die Sprungantwort des D-Gliedes ist ein Dirac-Impuls (Nadelimpuls), dessen Fläche gleich  $K_D \cdot y_0$  ist.

Als Beispiel für differenzierende Systeme kann wiederum der Kondensator dienen, wenn man Eingangs- und Ausgangsgröße beim I-Glied (21a) vertauscht. Dann gilt:

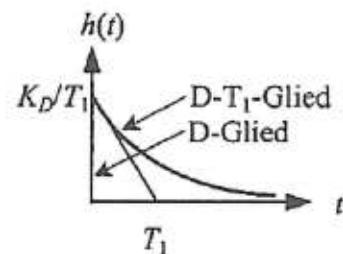
$$i_c(t) = C \cdot \frac{d}{dt} u_c$$

Legt man an einen Kondensator plötzlich eine Spannung, so würde ein unendlich hoher, unendlich kurzer Stromimpuls entstehen. Man erkennt schon an diesem einfachen Beispiel, dass differenzierende Systeme nur näherungsweise zu realisieren sind; aufgrund des endlichen Innenwiderstandes der Spannungsquelle kann der Strom nur einen endlichen Wert annehmen. Der Kondensator würde also auch nicht plötzlich, sondern verzögert auf die entsprechende Spannung aufgeladen.

### 3.3 Einfache Übertragungsglieder



D-Glied ideal: Dirac-Impuls



D-Glied real: DT<sub>1</sub>-Glied

$$a_n \cdot x^{(n)} + a_{n-1} \cdot x^{(n-1)} + \dots + a_1 \cdot \dot{x} + a_0 \cdot x = b_m \cdot y^{(m)} + \dots + b_1 \cdot \dot{y} + b_0 \cdot y$$

### 3.3 Einfache Übertragungsglieder

#### 3.3.5 Differenzierendes Übertragungsglied mit Verzögerung (DT<sub>1</sub>-Glied)

Die Differentialgleichung entsteht wieder aus (2) für  $m = 1, n = 1, b_0 = 0, b_1 = K_D, a_1 = T_1, a_0 = 1$ :

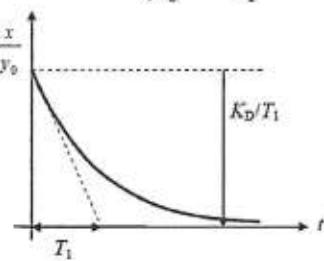
$$T_1 \cdot \dot{x} + x = K_D \cdot \dot{y} \quad (24)$$

Die Sprungantwort ergibt sich wieder für  $y(t) = y_0 \cdot \varepsilon(t)$  zu:

$$x(t) = y_0 \cdot \frac{K_D}{T_1} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} \quad (25)$$

Für die Übergangsfunktion als bezogene Sprungantwort gilt:  $\frac{x}{y_0} = \frac{K_D}{T_1} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}}$  (26)

Wird die Verzögerungszeitkonstante  $T_1$  verkleinert, so wächst die Anfangsamplitude. Gleichzeitig klingt das Ausgangssignal schneller ab. Die Fläche unter der Übergangsfunktion ist dabei konstant gleich  $K_D$ . Im Grenzfall entsteht wieder ein D-Glied, dessen Sprungantwort ein Dirac-Impuls ist.



### 3.3 Einfache Übertragungsglieder

#### 3.3.6 Übertragungssystem 2. Ordnung ( $PT_2$ -Glied)

Das System wird durch die Beziehung:  $a_2 \cdot \ddot{x} + a_1 \cdot \dot{x} + a_0 \cdot x = b_0 \cdot y$  gekennzeichnet. Man schreibt diese Gleichung gewöhnlich in der Form:

$$\frac{a_2}{a_0} \cdot \ddot{x} + \frac{a_1}{a_0} \cdot \dot{x} + x = \frac{b_0}{a_0} \cdot y \quad (28)$$

und führt die folgenden Abkürzungen ein:

$$\sqrt{\frac{a_0}{a_2}} = \omega_0 \quad , \quad \omega_0 = \text{Kennkreisfrequenz} \\ (= \text{Eigenfrequenz})$$

$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{2\vartheta}{\omega_0} \quad , \quad \vartheta = \text{Dämpfungsgrad (Theta)}$$

$$\frac{b_0}{a_0} = K_p \quad , \quad K_p = \text{Übertragungsbeiwert.}$$

### 3.3 Einfache Übertragungsglieder

Damit wird aus (28) die Beziehung:

$$\frac{1}{\omega_0^2} \cdot \ddot{x} + \frac{2\vartheta}{\omega_0} \cdot \dot{x} + x = K_p \cdot y \quad , \quad (29)$$

deren Lösung nach dem oben beschriebenen Verfahren erfolgen kann.

Nimmt man wieder an, dass die Eingangsgröße  $y$  sprungförmig geändert wird, also  $y = y_0 \cdot \varepsilon(t)$ , so erhält man als partikuläre Lösung:

$$x_p = K_p \cdot y_0$$

Die Lösung der homogenen Gleichung erhält man mit Hilfe des Ansatzes (4). Die charakteristische Gleichung:

$$\frac{s^2}{\omega_0^2} + 2\vartheta \cdot \frac{s}{\omega_0} + 1 = 0 \quad (30)$$

hat die Wurzel:

$$s_1 = -\vartheta \cdot \omega_0 + \sqrt{\vartheta^2 - 1} \cdot \omega_0 \quad \text{und} \quad (31)$$

$$s_2 = -\vartheta \cdot \omega_0 - \sqrt{\vartheta^2 - 1} \cdot \omega_0 .$$

### 3.3 Einfache Übertragungsglieder

Man erkennt, dass sich nur für  $\vartheta > 1$  reelle Nullstellen ergeben mit  $s_{1,2} < 0$ , und man führt dann meist die folgenden Abkürzungen ein (nicht schwingend):

$$s_1 = -\frac{1}{T_1}, \quad s_2 = -\frac{1}{T_2} \quad (32)$$

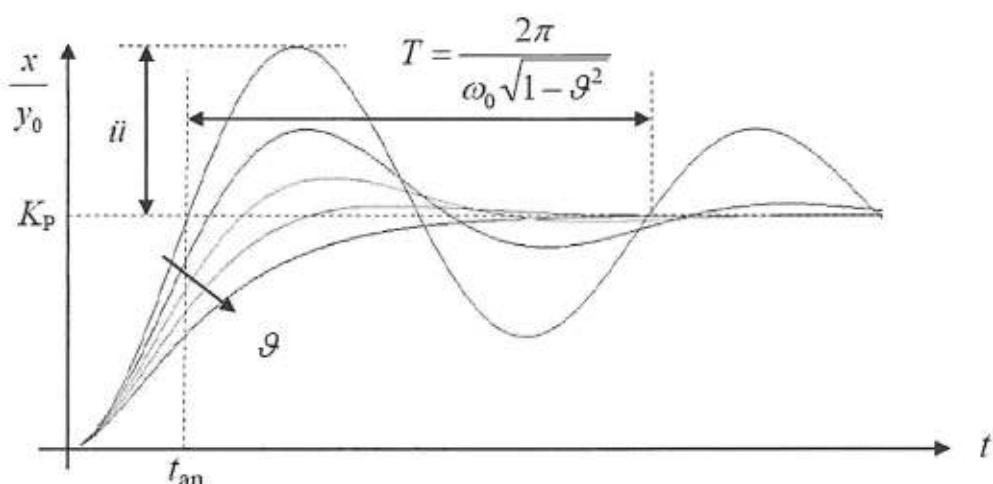
Die Übergangsfunktion:  $\frac{x(t)}{y_0} = K_p \left( 1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-t/T_1} - \frac{T_2}{T_2 - T_1} e^{-t/T_2} \right) \quad (33)$

hat dann den im nachfolgenden Bild für  $\vartheta = 1$  dargestellten aperiodischen Verlauf.

Liegt der Dämpfungsgrad im Bereich  $0 < \vartheta < 1$ , so werden die Lösungen der charakteristischen Gleichung konjugiert komplex. Die Übergangsfunktion lautet dann:

$$\frac{x(t)}{y_0} = K_p \left[ 1 - \frac{e^{-\vartheta \omega_0 t}}{\sqrt{1-\vartheta^2}} \sin(\sqrt{1-\vartheta^2} \omega_0 t + \arccos \vartheta) \right] \quad (34)$$

### 3.3 Einfache Übertragungsglieder



*Übergangsfunktion eines Systems zweiter Ordnung*

Parameter: Dämpfungsgrad  $\vartheta = 0,1 / 0,3 / 0,5 / 0,707 / 1$

### 3.3 Einfache Übertragungsglieder

Den zugehörigen zeitlichen Verlauf zeigt das obige  $\vartheta < 1$ . Es ergibt sich also eine gedämpfte Schwingung. Die Überschwingweite  $\ddot{u}$ , die Eigenfrequenz

$\omega_e = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \vartheta^2}$  und die Anregelzeit  $t_{an}$  hängen vom Dämpfungsgrad  $\vartheta$  ab.  
Für  $\vartheta = 1/\sqrt{2} = 0,7$  wird  $\ddot{u} \approx 4\%$ , für  $\vartheta = 0,5$  wird  $\ddot{u} \approx 16\%$ .

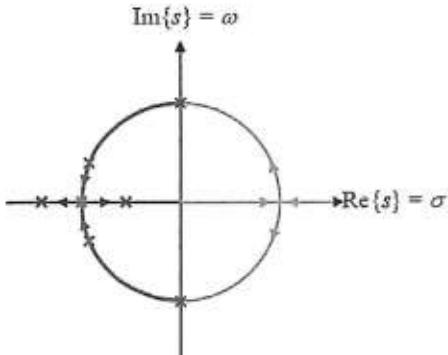
Drehspulmesswerke gehorchen näherungsweise der Differentialgleichung (29) ( $y = \text{Messstrom}$ ,  $x = \text{Anzeigewert}$ ). Man strebt als guten Kompromiss zwischen einer möglichst kurzen Anregelzeit und geringer Überschwingweite bei Messwerken meistens den Wert  $\vartheta = 0,7$  an.

Für Dämpfungsgrade  $\vartheta < 0$  ist das System instabil, die Wurzeln der charakteristischen Gleichung liegen in der rechten  $s$ -Halbebene (siehe auch Bild auf Seite 11).

Im Bereich  $-1 < \vartheta < 0$  ergeben sich aufklingende Schwingungen, für  $\vartheta < -1$  erhält man eine monoton aufklingende Übergangsfunktion.

### 3.3 Einfache Übertragungsglieder

Lage der Wurzeln der charakteristischen Gleichung in der  $s$ -Ebene, wenn man den Dämpfungsgrad  $\vartheta$  variiert (Wurzelortskurve).



Lage der Pole eines  $PT_2$ -Systems mit dem Dämpfungsgrad  $\vartheta$  als Parameter

- $\vartheta > 1$ : negativ reelle Wurzeln
- $\vartheta = 1$ : negativ reelle Doppelwurzel
- $0 < \vartheta < 1$ : konjugiert komplexe Wurzeln mit negativem Realteil
- $\vartheta = 0$ : imaginäre Wurzeln
- $-1 < \vartheta < 0$ : konjugiert komplexe Wurzeln mit positivem Realteil
- $\vartheta = -1$ : positiv reelle Doppelwurzel
- $\vartheta < -1$ : positiv reelle Wurzeln

### 3.3 Einfache Übertragungsglieder

#### 3.3.7 Totzeitglied ( $T_t$ -Glied)

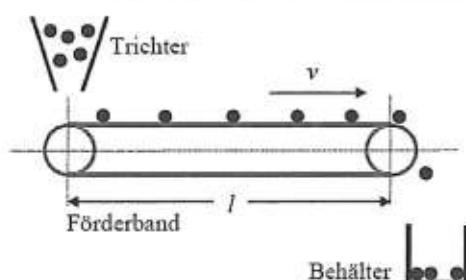
Übertragungssysteme können eine Eigenschaft haben, die durch die Beziehung (2), die für Systeme mit konzentrierten Speichern (Induktivitäten, Kapazitäten, Speichervolumen, Masse usw.) gilt, nicht erfasst wird. Diese Eigenschaft besteht darin, dass die Ausgangsgröße nach einer Änderung der Eingangsgröße während der Totzeit (oder Laufzeit)  $T_t$  zunächst ihren alten Wert beibehält.

Das nachfolgende Bild zeigt ein Beispiel für ein Totzeitglied. Über einen Trichter wird Material auf ein Förderband der Länge  $l$  geschüttet, das sich mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegt. Das Material wird in einem Behälter aufgefangen.

Ändert man plötzlich die Menge des zugeführten Materials  $y$ , so wird sich diese Änderung erst nach der Laufzeit des Bandes  $T_t = l/v$  am Bandende auswirken.

Ein ähnlicher Effekt ergibt sich, wenn man am Anfang einer langen Rohrleitung plötzlich den Druck eines Gases erhöht. Die Druckänderung wird sich erst nach einer gewissen Totzeit  $T_t$  am Rohrende bemerkbar machen.

### 3.3 Einfache Übertragungsglieder



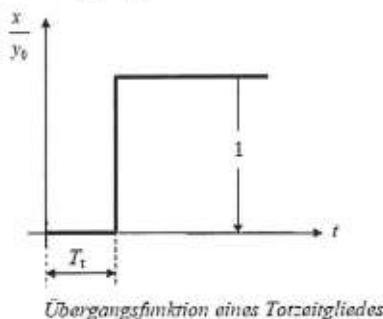
Förderband als Beispiel für ein Totzeitsystem  
 $l$  Länge des Förderbandes  
 $v$  Geschwindigkeit des Förderbandes

Man spricht bei solchen Übertragungsgliedern von Systemen mit verteilten Speichern, deren Beschreibung durch eine partielle Differentialgleichung erfolgt, von der hier nur die Lösung interessiert. Mit der Definition des Einheitssprungs nach Kapitel 3.2.1 gilt für den Zusammenhang zwischen Eingangs- und Ausgangsgröße eines Totzeitsystems:

### 3.3 Einfache Übertragungsglieder

$$x(t) = y_0 \cdot \varepsilon(t - T_t) \quad (35)$$

Im nachfolgenden Bild ist die Übergangsfunktion des Totzeitgliedes aufgezeichnet.



### 3.3 Einfache Übertragungsglieder

#### 3.3.8 Zusammenfassung einfacher Übertragungsglieder

Die in diesem Kapitel behandelten Übertragungsglieder sind zur besseren Übersicht nachfolgend nochmals in Form einer Tabelle zusammengestellt. In der ersten Spalte ist jeweils die Bezeichnung, in der zweiten die Differentialgleichung des Übertragungsgliedes angegeben. Die dritte Spalte enthält einen Block, der das Übertragungsverhalten kennzeichnen soll. Zu diesem Zweck ist in ihm die Übergangsfunktion des Übertragungsgliedes eingezeichnet. Die Übertragungsglieder sind alle rückwirkungsfrei und linear.

### 3.3 Einfache Übertragungsglieder

Bezeichnung	Differentialgleichung	Übertragungsblock Symbol: Sprungantwort
P-Glied	$x = K_p \cdot y$	
PT <sub>1</sub> -Glied	$T_1 \cdot \dot{x} + x = K_p \cdot y$	
I-Glied	$\dot{x} = K_I \cdot y$	
IT <sub>1</sub> -Glied	$T_1 \cdot \ddot{x} + \dot{x} = K_I \cdot y$	
D-Glied	$x = K_D \cdot \dot{y}$	

### 3.3 Einfache Übertragungsglieder

Bezeichnung	Differentialgleichung	Übertragungsblock Symbol: Sprungantwort
DT <sub>1</sub> -Glied	$T_1 \cdot \dot{x} + x = K_D \cdot \dot{y}$	
PDT <sub>1</sub> -Glied	$T_1 \cdot \dot{x} + x = K_p(T_v \cdot \dot{y} + y)$	
PT <sub>2</sub> -Glied	$\frac{1}{\omega_0^2} \ddot{x} + \frac{2\zeta}{\omega_0} \dot{x} + x = K_p \cdot y$	
T <sub>t</sub> -Glied	$x = y(t - T_t)$	

Zusammenstellung einfacher Übertragungsglieder  
Darstellung im Zeitbereich (Symbol = Übergangsfunktion  $h(t)$ )

# 4 – Beschreibung im Bildbereich

## WS2019/20



---

### Inhalt

---

#### 4. Beschreibung im Bildbereich

- 4.1 Frequenzgang und Ortskurve
- 4.2 Laplace-Transformation
- 4.3 Die Übertragungsfunktion (transfer function)
- 4.4 Bode-Diagramm
- 4.5 Übertragungsfunktionen einfacher Übertragungsglieder
  - 4.5.1 Übertragungsfunktion des  $PT_1$ -Gliedes
  - 4.5.2 Übertragungsfunktion des  $PT_2$ -Gliedes
- 4.6 Kombination von Übertragungsgliedern
- 4.7 Follow-Up Aufgaben aus Kapitel 3

## 4 Beschreibung im Bildbereich

### 4.1 Frequenzgang und Ortskurve

Bisher wurde gezeigt, dass das Übertragungsverhalten dynamischer Systeme durch eine Differentialgleichung beschrieben wird, deren Lösung im Prinzip angedeutet und anhand einfacher Beispiele demonstriert wurde. Der Einfachheit und Einheitlichkeit halber wird dabei meistens eine spezielle Eingangsfunktion, der Einheitssprung  $\varepsilon(t)$ , verwendet.

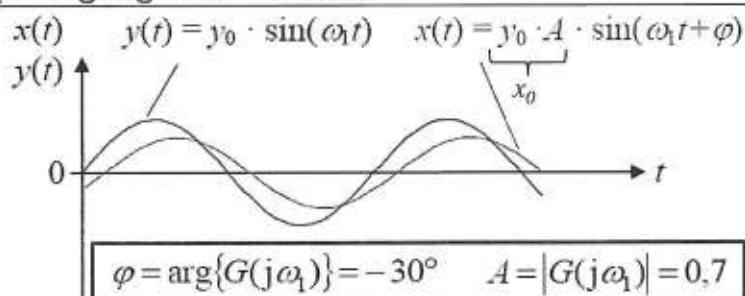
Insbesondere bei schnellen Systemen ist es üblich, auch sinusförmige Eingangssignale:

$$y(t) = y_0 \cdot \sin \omega \cdot t \quad (1)$$

zu benutzen und die Reaktion des Systems auf ein solches Signal zu beobachten. Wenn man wartet, bis die Einschwingvorgänge abgeklungen sind (Betrachtung der quasi stationären Lösung), so wird sich die Ausgangsgröße bei einem linearen System ebenfalls nach einer sinusförmigen Funktion ändern, welche die gleiche Frequenz, aber meist eine andere Amplitude und Phasenlage als die Eingangsgröße besitzt:

$$x(t) = \hat{x} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) \quad (2)$$

### 4.1 Frequenzgang und Ortskurve



*Phasenverschiebung und Amplitudendämpfung eines Systems bei einer sinusförmigen Stellgröße (die Phase eilt nach  $\rightarrow \varphi \leq 0$ )*

Das Verhältnis  $x_0/y_0$  der Amplituden von Eingangs- und Ausgangsgröße und die Phasenverschiebung  $\varphi$  hängen von der Kreisfrequenz  $\omega$  des Eingangssignals ab. Denkt man sich nun einen Zeiger  $G(j\omega)$  in die komplexe Zahlebene eingetragen, dessen Länge gleich dem Verhältnis  $x_0/y_0$  und dessen Drehung gegenüber der reellen Achse gleich der Phasenverschiebung  $\varphi$  ist, so erhält man für verschiedene Kreisfrequenzen  $\omega$  verschiedene Zeiger.

## 4.1 Frequenzgang und Ortskurve

Verbindet man die Spitzen der Zeiger, dann ergibt sich eine Kurve, die sogenannte Ortskurve des Systems. Man kann aus ihrem Verlauf genauso auf das Systemverhalten schließen wie z.B. aus der Übergangsfunktion. Genauso wie es dort prinzipiell möglich war, die Parameter  $a_v$ ,  $b_\mu$  der Gleichung (2, Kap. 3) zu bestimmen, kann man diese auch bei bekannter Ortskurve ermitteln.

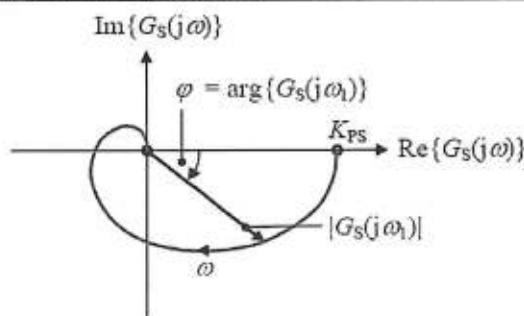
Es ist also im Grunde gleichgültig, ob man die Übergangsfunktion (oder Sprungantwort) oder die Ortskurve misst, jedoch hat die Darstellung im Frequenzbereich in manchen Fällen Vorteile.

Das nachfolgende Bild zeigt die Ortskurve eines Systems mit Ausgleich. Der Zeiger  $G$  ist nur für die Kreisfrequenz  $\omega = \omega_1$  mit eingezeichnet.

Man erkennt, dass der Zeiger eine komplexe Funktion der Kreisfrequenz  $\omega$  ist,  $G = G_S(j\omega)$ . Man bezeichnet die Funktion  $G_S(j\omega)$  als Frequenzgang des Systems.

Der Wert des Frequenzganges für  $\omega = 0$  ist der Übertragungsbeiwert  $K_{PS}$  des Systems, wie aus der Definition sofort hervorgeht.

## 4.1 Frequenzgang und Ortskurve



Ortskurve eines Systems (einer Strecke 3. Ordnung) mit Ausgleich  
(die Phase geht nach  $\rightarrow \varphi \leq 0$ )

Der Betrag der komplexe Funktion  $|G_s(j\omega)|$  entspricht der Länge des Zeigers, der Winkel zwischen ihm und der reellen Achse dem Argument  $\arg\{G_s(j\omega)\}$ .

Analog zu Signalen im Zeitbereich kann auch die Ortskurve eines Systems, d.h. sein Frequenzgang, mit entsprechendem Equipment (z.B. Vektor- oder Spektrum-Analysator) gemessen werden. Es bleibt noch zu klären, wie die komplexe Funktion  $G_s(j\omega)$  des Systems mit dessen Differentialgleichung zusammenhängt.

## 4 Beschreibung im Bildbereich

### 4.2 Laplace-Transformation

Die Grundlagen der Laplace-Transformation wurde im Kapitel 2 basierend auf dem Stoff aus der Vorlesung „Ingenieurmathematik II, (FT15)“ wiederholt. Für weiterführende Informationen sei an dieser Stelle auf die umfangreich verfügbare Fachliteratur verwiesen.

Transformiert man die zeitlich veränderliche Größe  $x(t)$  gemäß der bekannten Beziehung:

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-st} dt \quad (3)$$

in den Bildbereich (Frequenzbereich), so erhält man bei Anwendung von Gleichung (3) auf die Differentialgleichung (2, Kap. 3) unter der Voraussetzung, dass die Anfangsbedingungen sämtlich gleich Null sind, das heißt, dass sich das System zum Zeitpunkt  $t = 0$  in Ruhe befindet, die folgende algebraische Gleichung:

$$a_n \cdot s^n \cdot X + a_{n-1} \cdot s^{n-1} \cdot X + \dots + a_1 \cdot s \cdot X + a_0 \cdot X = \\ b_m \cdot s^m \cdot Y + \dots + b_1 \cdot s \cdot Y + b_0 \cdot Y$$

### 4.2 Laplace-Transformation

die sich, nach der gesuchten Unbekannten  $X$  aufgelöst, wie folgt umformen lässt:

$$X = \frac{b_m \cdot s^m + \dots + b_1 \cdot s + b_0}{a_n \cdot s^n + \dots + a_1 \cdot s + a_0} \cdot Y \quad (4)$$

Der Vollständigkeit halber sei nachfolgend nochmals eine Korrespondenztabelle mit den am häufigsten benötigten Laplace-Transformationen angegeben:

Nr.	Zeitfunktion $f(t)$ , $f(t) = 0$ für $t < 0$	$L$ -Transformierte $F(s)$
1	$\delta(t)$	1
2	$\epsilon(t)$	$\frac{1}{s}$
3	$t$	$\frac{1}{s^2}$
4	$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5	$e^{-\tau t}$	$\frac{1}{1+s\tau}$

## 4.2 Laplace-Transformation

Nr.	Zeitfunktion $f(t)$ , $f(t) = 0$ für $t < 0$	$L$ -Transformierte $F(s)$
6	$t \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$	$\frac{\tau^2}{(1+s\tau)^2}$
7	$t^n \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$	$\frac{\tau^{n+1} \cdot n!}{(1+s\tau)^{n+1}}$
8	$\varepsilon(t) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$	$\frac{1}{s(1+s\tau)}$
9	$e^{-at} \sin \omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$
10	$e^{-at} \cos \omega_0 t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$

Korrespondenzen der Laplace-Transformation

$$a_n \cdot x^{(n)} + a_{n-1} \cdot x^{(n-1)} + \dots + a_1 \cdot \dot{x} + a_0 \cdot x = b_m \cdot y^{(m)} + \dots + b_1 \cdot \dot{y} + b_0 \cdot y$$

## 4.2 Laplace-Transformation

Man hat das Problem also in einfacher, „rezeptmäßiger“ Form gelöst, denn wenn man in Gleichung (2, Kap. 3) für  $\frac{d}{dt} \rightarrow s$ ,  $\frac{d^2}{dt^2} \rightarrow s^2$ , usw. einsetzt, erhält man sofort

Beziehung (4). Es ist allerdings zu beachten, dass  $X$  jetzt eine Funktion von  $s$  und nicht mehr von  $t$  ist und dass  $X(s)$  und  $x(t)$  gemäß der Laplace-Transformation (3) zusammenhängen.

Wie wir sehen werden, kann man  $X(s)$  relativ einfach aus  $Y(s)$  berechnen; will man jedoch den zeitlichen Verlauf  $x(t)$  bestimmen, dann muss man diesen über folgendes Umkehrintegral ermitteln:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} X(s) \cdot e^{st} ds \quad (5)$$

Die Rücktransformation über die Lösung des Umkehrintegrals (5) ist in vielen Fällen mathematisch nicht einfach, wird aber, wie auch die Hintransformation, durch umfangreiches Tabellenwerk unterstützt, aus welchem man bei gegebenem  $y(t)$  das zugehörige  $Y(s)$  entnehmen, über (4) das entsprechende  $X(s)$  bestimmen und dann mit der Tabelle wieder  $x(t)$  ermitteln kann. Die obige Tabelle zeigt die wichtigsten Korrespondenzen der Laplace-Transformation.

## 4 Beschreibung im Bildbereich

### 4.3 Die Übertragungsfunktion (transfer function)

Das Verhältnis:

$$\frac{X(s)}{Y(s)} = G_S(s) = \frac{b_m \cdot s^m + \dots + b_1 \cdot s + b_0}{a_n \cdot s^n + \dots + a_1 \cdot s + a_0} \quad (6)$$

wird Übertragungsfunktion des Systems bzw. der Strecke genannt. Sie enthält die gleichen Parameter  $a_n, b_m$  wie die Differentialgleichung, sagt also genau so viel über das Systemverhalten aus wie diese.  $G_S(s)$  ist eine komplexwertige Funktion der komplexen Variable  $s = \sigma + j\omega$ .

Man erkennt, dass die Nullstellen des Nennerpolynoms von  $G_S(s)$ , die auch Pole der Übertragungsfunktion genannt werden, identisch mit den Wurzeln der charakteristischen Gleichung der Differentialgleichung sind. Damit ein System stabil ist, müssen die Pole von  $G_S(s)$  also in der linken  $s$ -Halbebene liegen.

Setzt man  $\sigma = 0$ , so wird  $s = j\omega$  und man erhält den Frequenzgang  $G_S(j\omega)$  des Systems. Dieser ist also ein Spezialfall der Übertragungsfunktion. Damit ist der Zusammenhang Frequenzgang  $\leftrightarrow$  Laplace-Transformation aus Kap. 4.2 hergestellt.

## 4 Beschreibung im Bildbereich

### 4.4 Bode-Diagramm

Im obigen Bild ist der Verlauf des Frequenzganges  $G_S(j\omega)$  als Ortskurve in der komplexen Ebene dargestellt. Dies hat den Vorteil, dass die grundsätzlichen Eigenschaften von  $G_S(j\omega)$  deutlich werden.

Für die praktische Handhabung ist aber eine andere Darstellung oft besser geeignet. Hierbei werden Betrag  $|G_S(j\omega)|$  und Phase  $\varphi(j\omega) = \arg\{G_S(j\omega)\}$  des Frequenzganges getrennt über der Kreisfrequenz  $\omega$  aufgetragen, wobei für die Amplitude und die Frequenz ein logarithmischer Maßstab gewählt wird.

Man nennt die entstehende doppelt logarithmische Frequenz-Kennlinie- oder Bode-Diagramm. Es bietet vor allen Dingen dann Vorteile, wenn aus mehreren Einzelfrequenzgängen, die in Produktform verknüpft sind, der Gesamtfrequenzgang bestimmt werden soll. In der Ortskurvendarstellung müsste zu diesem Zweck eine Drehstreckung des Zeigers  $G_S(j\omega)$  entsprechend Gleichung (7) vorgenommen werden, um bei gegebenem  $G_1(j\omega)$  und  $G_2(j\omega)$  den Gesamtfrequenzgang  $G_S(j\omega)$  zu bestimmen.

$$G_S = G_1 \cdot G_2 \quad (7)$$

#### 4.4 Bode-Diagramm

Logarithmiert man jedoch Gleichung (7), so ergibt sich:

$$\begin{aligned}\log G_s &= \log |G_1| \cdot |G_2| \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)} \\ \log G_s &= \log |G_1| + \log |G_2| + j K (\varphi_1 + \varphi_2)\end{aligned}\quad (8)$$

und man erhält:

$$\begin{aligned}\log |G_s| &= \log |G_1| + \log |G_2| \\ \varphi_s &= \varphi_1 + \varphi_2\end{aligned}\quad (9)$$

Man hat damit die komplexe Multiplikation auf zwei reelle Additionen zurückgeführt. Dieser Zusammenhang wird nachfolgend an einem Beispiel erläutert und später in den Übungsaufgaben angewandt und vertieft.

#### 4.4 Bode-Diagramm

Beispiel: Konstruktion des Bode-Diagramms

Gegeben: Folgende Übertragungsfunktion.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{10(1+s)}{s(1+10s)}$$

Aufgabe: Bode-Diagramm konstruieren

Die Überführung in der Frequenzbereich mittels der Äquivalenz  $s = j\omega$  liefert:

$$G(j\omega) = 10 \cdot \frac{1}{j\omega} \cdot (1 + j\omega) \cdot \frac{1}{1 + 10j\omega}$$

Durch Einführung der Eckfrequenzen erhält man die Übertragungsfunktion:

$$G(j\omega) = 10 \cdot \frac{1}{j\omega} \cdot \left(1 + \frac{j\omega}{1}\right) \cdot \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{0,1}}$$

#### 4.4 Bode-Diagramm

mit den folgenden Eigenschaften:

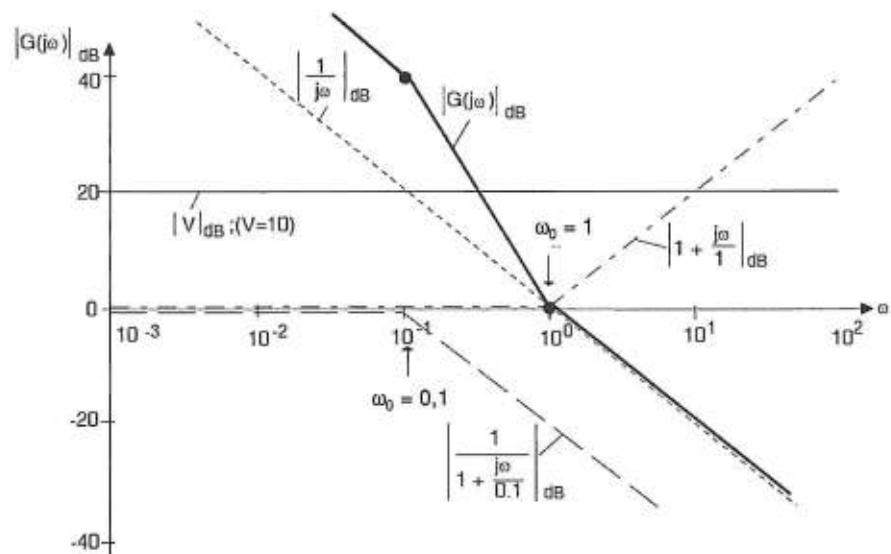
- = 10 : Verstärkungs-/Proportionalitätsfaktor  $V = 10$   
 $\Rightarrow V_{dB} = 20 \log(10) = 20 \text{ dB}$

- =  $\frac{1}{j\omega}$  : Integrierer  

$$G(j\omega) = 10 \cdot \frac{1}{j\omega} \cdot \left(1 + \frac{j\omega}{1}\right) \cdot \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{0.1}}$$
- =  $1 + \frac{j\omega}{1}$  : PD-Glied mit  $\omega_0 = 1$
- =  $\frac{1}{1 + \frac{j\omega}{0.1}}$  : PT<sub>1</sub>-Glied mit  $\omega_0 = 0.1$

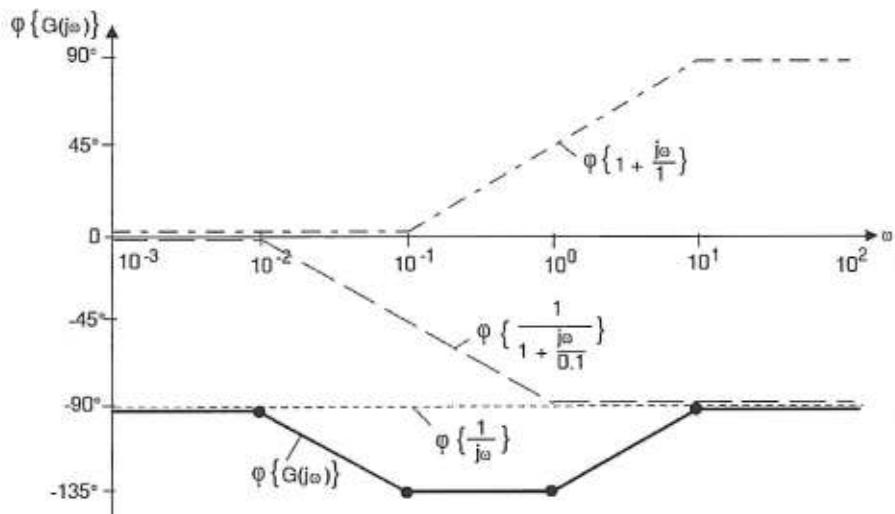
#### 4.4 Bode-Diagramm

Konstruktion des Amplitudengangs:



#### 4.4 Bode-Diagramm

Konstruktion des Phasengangs:



#### 4 Beschreibung im Bildbereich

##### 4.5 Übertragungsfunktionen einfacher Übertragungsglieder

Für die in Kapitel 3.3 behandelten einfachen Übertragungsglieder sollen nun die Übertragungsfunktionen angegeben werden.

Da die Ermittlung von  $G(s) = X(s) / Y(s)$  bei gegebener Differentialgleichung rein schematisch erfolgen kann, indem man für  $\frac{d}{dt} \rightarrow s$  schreibt und aus der entstehenden algebraischen Gleichung das Verhältnis  $X(s) / Y(s)$  ermittelt, wird nur exemplarisch das  $PT_1$ - und das  $PT_2$ -Glied vorgestellt.

##### 4.5.1 Übertragungsfunktion des $PT_1$ -Gliedes

Wenn man entsprechend in Gleichung 16, Kap. 3:

$$T_1 \cdot \dot{x} + x = K_p \cdot y$$

für  $\frac{d}{dt} \rightarrow s$  einsetzt, erhält man:  $T_1 \cdot s \cdot X(s) + X(s) = K_p \cdot Y(s)$  und damit folgt:

$$X(s) = \frac{K_p}{1+T_1 \cdot s} \cdot Y(s) \quad (10)$$

## 4.5 Übertragungsfunktionen einfacher Übertragungsglieder

Zur Berechnung des Bode-Plots eines  $PT_1$ -Gliedes ersetzt man  $s = j\omega$  und erhält somit:

$$G_S(j\omega) = \frac{X(j\omega)}{Y(j\omega)} = \frac{K_P}{1 + T_1 \cdot j\omega}$$

Definiert man die Eckfrequenz:  $\omega_e = \omega_0 = \frac{1}{T_1}$ , so folgt: Bei der Eckfrequenz gilt:  $|Re\{G_S(j\omega_0)\}| = |Im\{G_S(j\omega_0)\}|$

$$G_S(j\omega) = \frac{K_P}{1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}$$

Für kleine Frequenzen  $\omega \ll \omega_0$  gilt:  $|G_S(j\omega)| \rightarrow K_P$  und  $\arg\{G_S(j\omega)\} \rightarrow 0$

Bei der Eckfrequenz gilt:  $\omega = \omega_0$  folgt:

$$G_S(j\omega_0) = \frac{K_P}{1 + j}$$

Damit ist der Realteil des Nenners gleich dessen Imaginärteil und es ergibt sich an diesem Punkt:

## 4.5 Übertragungsfunktionen einfacher Übertragungsglieder

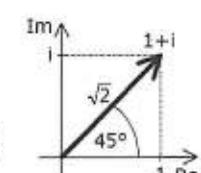
mit:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \cdot e^{j\varphi_1}}{r_2 \cdot e^{j\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

an diesem Punkt:

$$G_S(j\omega_0) = \frac{K_P}{1 + j} = \frac{K_P}{\sqrt{2} \cdot e^{j\frac{\pi}{4}}} = \frac{K_P}{\sqrt{2}} \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

$$|G_S(j\omega_0)| = K_P / \sqrt{2} = 0,707 \cdot K_P \text{ und } \arg\{G_S(j\omega_0)\} = -\pi/4$$



Logarithmiert mit  $20 \cdot \log_{10}|x| \rightarrow$  Faktor 20 in dB pro Faktor 10 linear ergibt sich bezogen auf den Übertragungsbeiwert  $K_P$  eine Amplitudendämpfung von 3 dB:

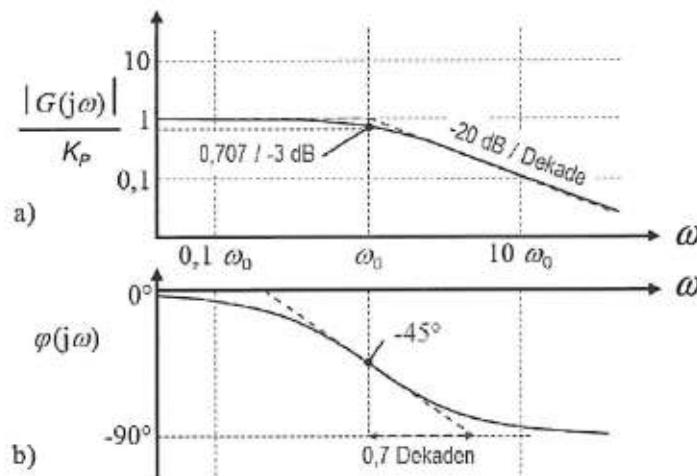
$$|G_S(j\omega_0)| = -3 \text{ dB}$$

x	$10^{\star} \log(x)$	$20^{\star} \log(x)$
1	0	0
10	10	20
100	20	40

Für große Frequenzen  $\omega \gg \omega_0$  gilt:  $|G_S(j\omega)|$  fällt mit 20 dB pro Dekade und  $\arg\{G_S(j\omega)\} \rightarrow -\pi$ .

Man erhält schließlich den im folgendem Bild dargestellten Bode-Plot.

## 4.5 Übertragungsfunktionen einfacher Übertragungsglieder



Bode-Plot eines PT<sub>1</sub>-Gliedes mit dem Übertragungsbeiwert  $K_P$   
und der Grenzfrequenz  $\omega_0 = 1/T_1$   
a) Amplitudengang      b) Phasengang

## 4.5 Übertragungsfunktionen einfacher Übertragungsglieder

### 4.5.2 Übertragungsfunktion des PT<sub>2</sub>-Gliedes

Bei einem PT<sub>2</sub>-Glied fällt der Amplitudengang oberhalb der Grenzfrequenz mit -40 dB pro Dekade ab. Im Bereich der Grenzfrequenz hängt der Verlauf zusätzlich vom Dämpfungsgrad  $\vartheta$  ab.

$$X(s) = \frac{K_P}{1 + \frac{2\vartheta}{\omega_0} s + \frac{1}{\omega_0^2} s^2} \cdot Y(s) \quad (11)$$

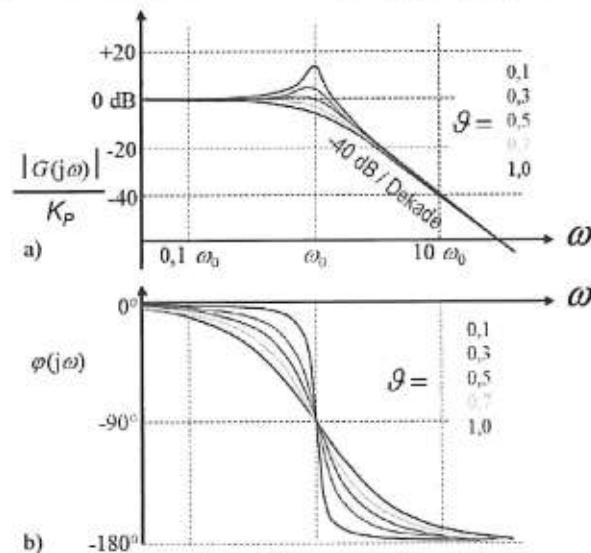
Das nachfolgende Bild zeigt den Bode-Plot eines PT<sub>2</sub>-Gliedes.

Die sich daran anschließende Tabelle enthält die Übertragungsfunktionen, die Lage der Pol- und Nullstellen und den Bode-Plot der gängigsten Übertragungsglieder.

Es soll nochmals explizit darauf hingewiesen werden, dass  $G(s)$  das Verhältnis von  $X(s)$  zu  $Y(s)$  (Laplace-Transformierte) und nicht etwa das Verhältnis der zeitlich veränderlichen Größen  $x(t)$  zu  $y(t)$  darstellt!

*Um stets eine klare Unterscheidung zu haben sind deshalb zeitlich veränderliche Größen mit kleinen, ihre Transformierten im Bildbereich mit großen Buchstaben bezeichnet.*

## 4.5 Übertragungsfunktionen einfacher Übertragungsglieder



Bode-Plot eines PT<sub>2</sub>-Gliedes mit dem Übertragungsbeiwert  $K_p$   
der Grenzfrequenz  $\omega_0$  und verschiedenen Dämpfungsgraden  $\theta$   
a) Amplitudengang      b) Phasengang

## 4.5 Übertragungsfunktionen einfacher Übertragungsglieder

Bei Multiplikation der Übertragungsfunktion zweier PT<sub>1</sub>-Glieder:

$$G_1(s) = \frac{K_{P1}}{1 + \left(\frac{s}{\omega_{01}}\right)} ; \quad G_2(s) = \frac{K_{P2}}{1 + \left(\frac{s}{\omega_{02}}\right)}$$

ergibt sich ein PT<sub>2</sub>-Glied der Form:  $X(s) = \frac{K_p}{1 + \frac{2\theta}{\omega_0} s + \frac{1}{\omega_0^2} s^2} \cdot Y(s)$  nämlich:

$$G_1(s) \cdot G_2(s) = \frac{K_{P1}}{\left(1 + \frac{s}{\omega_{01}}\right)} \cdot \frac{K_{P2}}{\left(1 + \frac{s}{\omega_{02}}\right)} = \frac{K_{P1} \cdot K_{P2}}{1 + \left(\frac{1}{\omega_{01}} + \frac{1}{\omega_{02}}\right) \cdot s + \left(\frac{1}{\omega_{01} \cdot \omega_{02}}\right) \cdot s^2}$$

Für den Spezialfall:  $\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_0$  und mit  $K_{P1} \cdot K_{P2} = K_p$  ergibt sich ein PT<sub>2</sub>-Glied mit Dämpfung  $\vartheta = 1$ :

$$G_1(s) \cdot G_2(s) = \frac{K_p}{1 + \frac{2}{\omega_0} \cdot s + \frac{1}{\omega_0^2} \cdot s^2}$$

## 4.5 Übertragungsfunktionen einfacher Übertragungsglieder

Um das Übertragungsverhalten zu kennzeichnen, wird in den Block in der dritten Spalte jeweils die Übertragungsfunktion  $G(s)$  geschrieben. In der Tabelle am Ende von Kapitel 3 (Zeitbereich) ist dagegen jeweils die Übergangsfunktion  $h(t)$  eingezeichnet.

## 4.5 Übertragungsfunktionen einfacher Übertragungsglieder

Bezeichnung	Gleichung	Übertragungsblock
P-Glied	$X(s) = K_P \cdot Y(s)$	$\xrightarrow{Y(s)} [K_P] \xrightarrow{X(s)}$
PT <sub>1</sub> -Glied	$X(s) = \frac{K_P}{1 + T_1 s} Y(s)$	$\xrightarrow{Y(s)} [\frac{K_P}{1 + T_1 \cdot s}] \xrightarrow{X(s)}$
I-Glied	$X(s) = \frac{K_I}{s} Y(s)$	$\xrightarrow{Y(s)} [\frac{K_I}{s}] \xrightarrow{X(s)}$
IT <sub>1</sub> -Glied	$X(s) = \frac{K_I}{s(1 + T_1 \cdot s)} Y(s)$	$\xrightarrow{Y(s)} [\frac{K_I}{s(1 + T_1 \cdot s)}] \xrightarrow{X(s)}$
D-Glied	$X(s) = K_D \cdot s \cdot Y(s)$	$\xrightarrow{Y(s)} [K_D \cdot s] \xrightarrow{X(s)}$

## 4.5 Übertragungsfunktionen einfacher Übertragungsglieder

Bezeichnung	Gleichung	Übertragungsblock
DT <sub>1</sub> -Glied	$X(s) = \frac{K_D \cdot s}{1 + T_I s} Y(s)$	$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K_D \cdot s}{1 + T_I \cdot s}$
PDT <sub>1</sub> -Glied Lag/Lead-Glied	$X(s) = K_P \frac{1 + T_V s}{1 + T_I s} Y(s)$	$\frac{Y(s)}{X(s)} = K_P \frac{T_V s + 1}{T_I s + 1}$
PT <sub>2</sub> -Glied	$X(s) = \frac{K_P}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_0} s + \frac{s^2}{\omega_0^2}} Y(s)$	$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K_P}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_0} s + \frac{1}{\omega_0^2} s^2}$
Totzeit-Glied	$X(s) = e^{-T_T s} \cdot Y(s)$	$\frac{Y(s)}{X(s)} = e^{-T_T s}$

Zusammenstellung einfacher Übertragungsglieder.  
Darstellung im Bildbereich (komplexer Frequenzbereich)

## 4.5 Übertragungsfunktionen einfacher Übertragungsglieder

Bezeichnung	Pole / Nullstellen	Bode Diagramm
P-Glied	$\text{Im}(s) \uparrow$ $\text{Re}(s) \rightarrow$	
PT <sub>1</sub> -Glied	$\text{Im}(s) \uparrow$ $\text{Re}(s) \rightarrow$	
I-Glied	$\text{Im}(s) \uparrow$ $\text{Re}(s) \rightarrow$	
IT <sub>1</sub> -Glied	$\text{Im}(s) \uparrow$ $\text{Re}(s) \rightarrow$	

## 4.5 Übertragungsfunktionen einfacher Übertragungsglieder

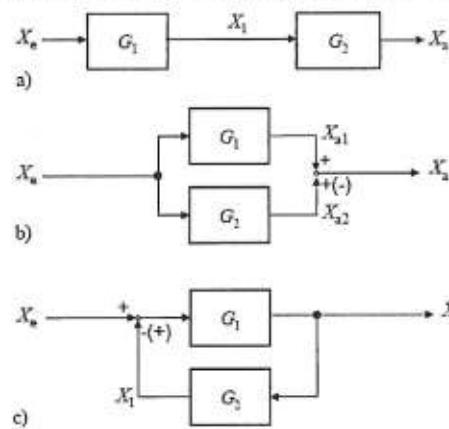
Bezeichnung	Pole / Nullstellen	Bode Diagramm
D-Glied		
DT1-Glied		
PDT1-Glied Lag-Lead Glied		
PT2-Glied		

## 4 Beschreibung im Bildbereich

### 4.6 Kombination von Übertragungsgliedern

Steuerketten oder Regelkreise setzen sich aus einer Kombination von Übertragungsgliedern zusammensetzen. Es stellt sich die Frage, wie das Übertragungsverhalten des Gesamtsystems berechnet werden kann, wenn das Verhalten der einzelnen Übertragungsglieder bekannt ist.

Im Bild rechts sind drei Grundkombinationen gezeigt.



Grundkombinationen von Übertragungsgliedern  
a) Reihenschaltung      b) Parallelschaltung      c) Rückkopplung

## 4.6 Kombination von Übertragungsgliedern

Bild a stellt eine rückwirkungsfreie Reihenschaltung von Übertragungsgliedern mit den Übertragungsfunktionen  $G_1$  und  $G_2$  dar. Über die Beziehungen:

$$X_1 = G_1 \cdot X_e, \quad X_a = G_2 \cdot X_1 \quad \xrightarrow{\text{a)}} \quad \begin{array}{c} X_e \\ \xrightarrow{G_1} \\ X_1 \\ \xrightarrow{G_2} \\ X_a \end{array} \quad (12)$$

erhält man durch Eliminierung der Zwischengröße  $X_1$  den Zusammenhang

$$X_a = G_1 \cdot G_2 \cdot X_e \quad (13)$$

zwischen Eingangs- und Ausgangsgröße.

Hier wird der Vorteil der Rechnung im Bildbereich besonders deutlich: Die Gesamtübertragungsfunktion ergibt sich einfach durch Multiplikation der Einzelübertragungsfunktionen,  $G = G_1 \cdot G_2$ . Im Zeitbereich hätte man  $x_a(t)$  über das Faltungsintegral (Gl. 14, Kap. 3) berechnen müssen.

Für die in Bild b gezeichnete Parallelschaltung erhält man  $G = G_1 \pm G_2$ :

$$X_a = X_{a1} \pm X_{a2} = (G_1 \pm G_2) \cdot X_e = G \cdot X_e \quad (14)$$

Bei der in Bild c gezeigten Rückführschaltung spricht man von einer Gegenkopplung oder Mitkopplung, je nachdem, ob das negative (-) oder positive Vorzeichen (+) an der Vergleichsstelle gültig ist.

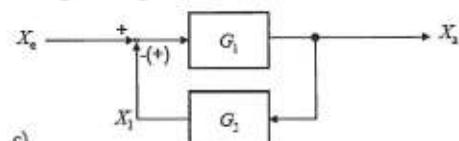
## 4.6 Kombination von Übertragungsgliedern

Dabei entspricht die Gegenkopplung dem Prinzip einer Regelung. Für den Zusammenhang zwischen einzelnen Größen gilt:

$$\begin{aligned} X_a &= G_1 \cdot (X_e \mp X_1) \\ X_1 &= G_2 \cdot X_a \end{aligned} \quad (15)$$

woraus durch Elimination von  $X_1$  folgt:

$$\begin{aligned} X_a &= G_1 \cdot (X_e \mp G_2 \cdot X_a) \\ X_a \cdot (1 \pm G_1 \cdot G_2) &= G_1 \cdot X_e \\ \Rightarrow X_a &= \frac{G_1}{1 \pm G_1 \cdot G_2} \cdot X_e \end{aligned} \quad (16)$$



Die Gesamtübertragungsfunktion  $G(s)$  der rückgekoppelten Schaltung lautet also:

$$G = \frac{G_1}{1 \pm G_1 \cdot G_2}$$

(17)

Das positive Vorzeichen im Nenner gilt für Gegen-, das negative für Mitkopplung.

## 4.6 Kombination von Übertragungsgliedern

In einem Fall wirkt das über  $G_2$  umgeformte Ausgangssignal der Eingangsgröße entgegen, im anderen Fall unterstützt es die Eingangsgröße.

Aus den drei Grundschaltungen können nun beliebig komplizierte Systeme aufgebaut werden. Die Berechnung der Gesamtübertragungsfunktion  $G$ , die ja das Verhalten des Gesamtsystems beschreibt, erfolgt dann entsprechend den Regeln (13), (14) und (17).

## 4 Beschreibung im Bildbereich

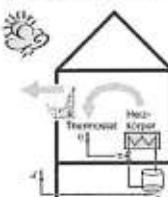
### 4.7 Follow-Up Aufgaben aus Kapitel 3

Zu Beginn von Kapitel 3 wurden 2 einfache Aufgaben gestellt, die mit Hilfe des Inhalts von Kapitel 3 und 4 nunmehr vollständig beantwortet werden können.

Nachfolgend finden sich eine Wiederholung der zwei Fragen sowie die noch ausstehenden Antworten.

## 4.7 Follow-Up Aufgaben aus Kapitel 3

### Aufgabe 1: Raumheizung



Fragen:

- Wie funktioniert eigentlich ein Heizungsthermostat bzw. eine Mischbatterie?
- Wie kann ein solches Gebilde systemtheoretisch beschrieben / modelliert werden?



### Aufgabe 2: Übertragungsfunktion

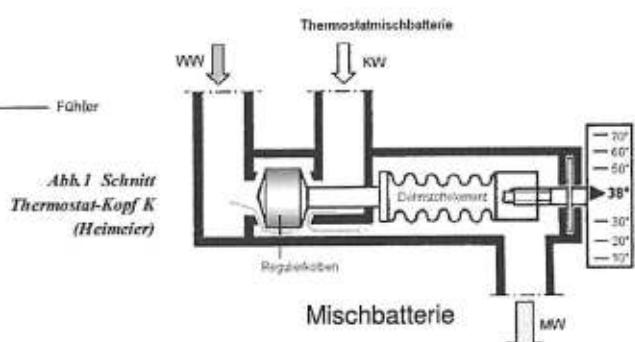
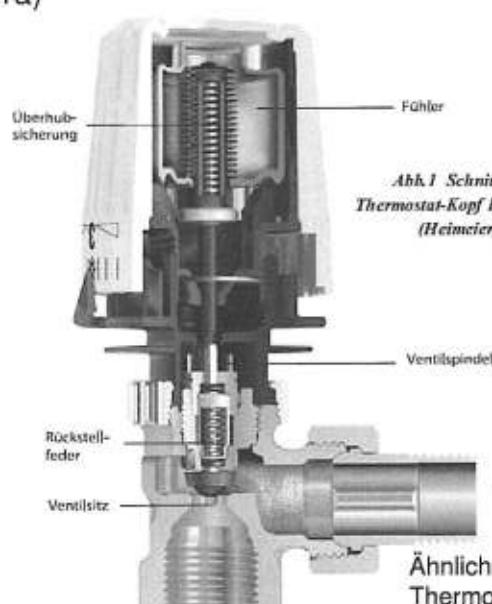
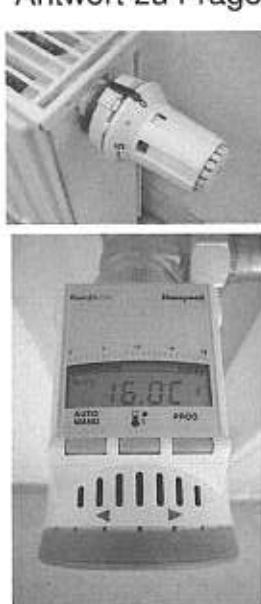
Gegeben:  $G(s) = \frac{10 \cdot (1+s)}{s \cdot (1+2s)^2}$

Fragen:

- Welches Verhalten kann ich an der obigen Funktion ohne größere Rechnung ablesen?
- Welche Ähnlichkeiten haben Aufgabe 1 und Aufgaben 2?

## 4.7 Follow-Up Aufgaben aus Kapitel 3

Antwort zu Frage 1a)



Ähnliches Prinzip:  
Thermostat Kühlkreislauf KFZ



## 4.7 Follow-Up Aufgaben aus Kapitel 3

Zu Frage 2a)

Es wurde in Kapitel 3 folgende Zerlegung vorgeschlagen:

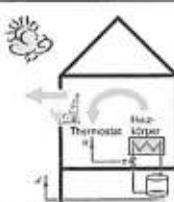
$$G(s) = 10 \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{(1+2s)^2} \cdot (1+s)$$

Frage: Warum ist diese Zerlegung sinnvoll?

$$G(s) = \underbrace{10}_{\text{P}} \cdot \underbrace{\frac{1}{s}}_{\text{I}} \cdot \underbrace{\frac{1}{(1+2s)^2}}_{\text{PT}_2} \cdot \underbrace{(1+s)}_{\text{PD}}$$

## 4.7 Follow-Up Aufgaben aus Kapitel 3

Aufgabe 1: Raumheizung



Fragen:

- a) Wie funktioniert eigentlich ein Heizungsthermostat bzw. eine Mischbatterie? 
- b) Wie kann ein solches Gebilde systemtheoretisch beschrieben / modelliert werden?

Aufgabe 2: Übertragungsfunktion

Gegeben:  $G(s) = \frac{10 \cdot (1+s)}{s \cdot (1+2s)^2}$

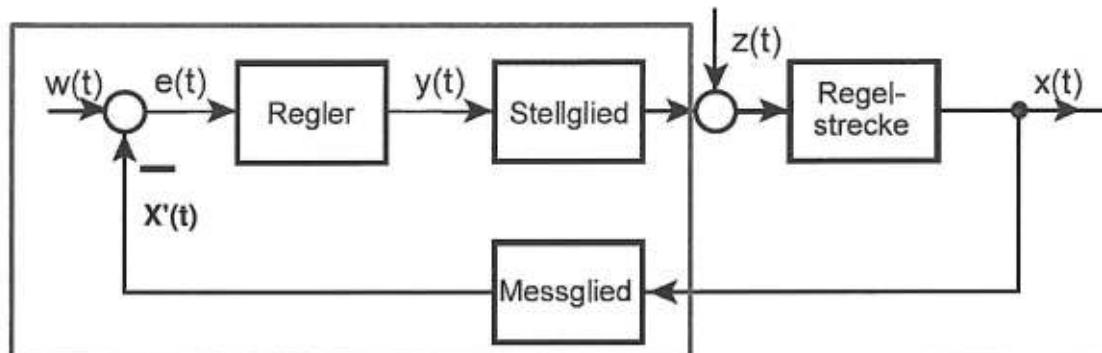
Fragen:

- a) Welches Verhalten kann ich an der obigen Funktion ohne größere Rechnung ablesen? 
- b) Welche Ähnlichkeiten haben **Aufgabe 1** und **Aufgabe 2**?

## 4.7 Follow-Up Aufgaben aus Kapitel 3

### Antwort zu Frage 1b)

Wie kann ein solches Gebilde systemtheoretisch beschrieben / modelliert werden bzw. welche Teile des nachfolgend dargestellten allgemeinen Regelkreises beinhaltet das Thermostat?



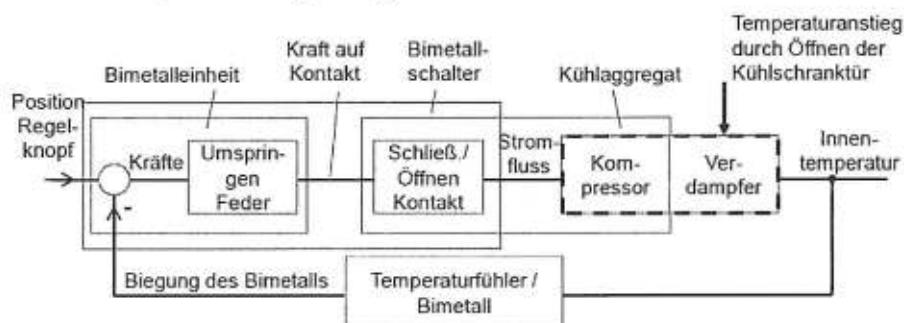
Dabei bedeuten:

$x(t)$	Regelgröße	$y(t)$
$w(t)$	Führungsgröße (Sollwert)	$z(t)$
$e(t)$	Regeldifferenz ( $= w(t) - x'(t)$ )	Stellgrößen

## 4.7 Follow-Up Aufgaben aus Kapitel 3

Generell sind Regelkreise mit sogenannten schaltenden Regler und kontinuierlichen/stetigen Regler möglich.

Typische Beispiele für schaltende Regler sind die sogenannten Zweipunktregler mit den Schaltzuständen „Ein“ und „Aus“, die häufig für einfache Temperaturregelungen z.B. im Haushaltbereich eingesetzt werden (Elektroherd, Warmwasserspeicher, Bügeleisen, Kühlschrank, Waschmaschine). Nachfolgend dargestellt ist das Beispiel einer Kühlschranktemperaturregelung mit schaltendem Thermostat.



## 4.7 Follow-Up Aufgaben aus Kapitel 3

Neben Zweipunktregler werden aber auch sogenannte Dreipunktregler eingesetzt, z.B. zur Ansteuerung von Stellmotoren für Rechtslauf, Linkslauf und Stillstand.

Frage:

Um welchen Reglertyp (schaltend / kontinuierlich) handelt es sich im vorliegenden Fall des Heizungsthermostats?

Antwort:

Da als Stellglied ein Ventil mit kontinuierlich verstellbarem Schieber verwendet wird, handelt es sich in der Kombination Regler + Stellglied um einen kontinuierlichen Regler.

Frage:

Wonach muss sich das Verhalten des Reglers richten?

Antwort:

Nach dem dynamischen Verhalten der Regelstrecke und den Vorgaben des Regelungstechnik-Ingenieurs.

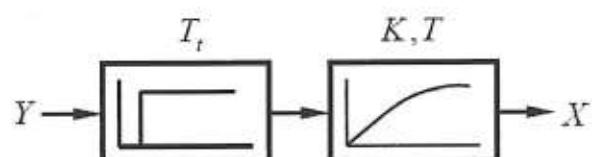
## 4.7 Follow-Up Aufgaben aus Kapitel 3

Frage:

Welches dynamische Verhalten hat die Regelstrecke: Heizkörper + Raumluft?

Antwort:

Totzeit und Verzögerung ( $T_t + PT_1 / PT_2$ )



Frage:

Welcher Regler ist optimal Regler für die Strecke?

Antwort:

Günstige Regler/Regelstrecken-Kombinationen werden im Laufe der Vorlesung noch behandelt und hierfür unter Vorgabe von statischen und dynamischen Kenngrößen des Regelkreises auch praktische Regler-Auswahl- und -Einstellregeln angeben.

---

#### 4.7 Follow-Up Aufgaben aus Kapitel 3

Antwort zu Frage 2b): Welche Ähnlichkeiten haben Aufgabe 1 und Aufgabe 2?

Beider Aufgaben lassen sich auf einfache Grundstrukturen P-, I-, D-,  $T_n$ - und  $T_t$ -Glied zurückführen.

# Regelungstechnik – 5. Vorlesung

## Aufgeschnittener Regelkreis

### Zeitbereich $\leftrightarrow$ Bildbereich

### WS2019/20

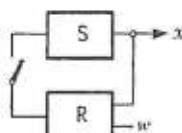
#### Vorteile der Laplace-Transformation

Durch die Laplace-Transformation wird die Differentiation in eine Multiplikation und die Integration in eine Division, also in einfache algebraische Operationen, überführt.

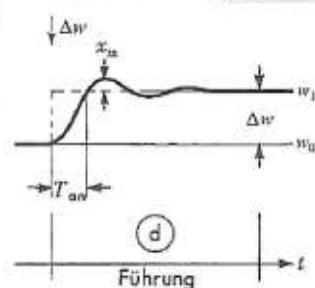
Die Reihenschaltung von mehreren Übertragungsgliedern mit jeweils bekannter Übertragungsfunktion ergibt sich im Bild-/Frequenzbereich durch einfache Multiplikation der Einzelblöcke, während im Zeitbereich ein im Verhältnis aufwendiges Faltungintegral über die Gewichtsfunktion (Impulsantwort) zu lösen ist.

## Stabilitätsuntersuchung eines Regelkreises

Für die nachfolgenden Überlegungen gehe man zunächst von einem aufgeschnittenen Regelkreis der folgenden Form aus:

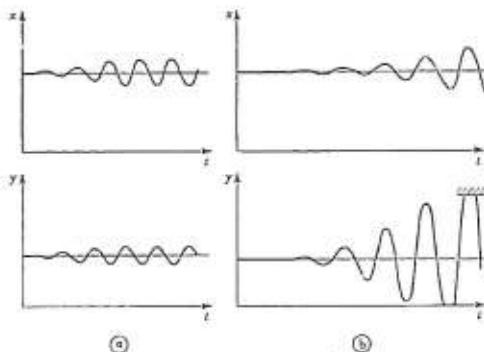


Nach Schließen des Regelkreises und nach Abklingen des Einschwingvorgangs nimmt die Regelgröße  $x$  meist den durch die Führungsgröße  $w$  vorgegebenen Wert an, d.h. der Regelkreis arbeitet stabil.



## Stabilitätsuntersuchung eines Regelkreises

Es kann jedoch der Fall eintreten, dass nach Abklingen des Einschwingvorgangs die Regelgröße keinen konstanten Wert annimmt, sondern beginnt periodische Schwankungen auszuführen, d.h. dass der Regelkreis instabil wird. Das unangenehme dabei ist, dass die Amplitude der auftretenden Schwingung u.U. auch nicht konstant bleibt (Bild a), sondern laufend anwächst, bis von einem Konstanthalten der Regelgröße nicht mehr gesprochen werden kann und die Stellgröße periodisch zwischen einem oberen und unterem Maximalwert hin- und herpendelt (Bild b).



Sich selbst erregender instabiler Regelkreis  
 a) mit konstant bleibender Schwingungsamplitude  
 b) mit anwachsender Schwingungsamplitude der Regelgröße  $x$  und Stellgröße  $y$

## Stabilitätsuntersuchung eines Regelkreises

### Frage:

Wie können in einem Regelkreis, der nur stetige Glieder enthält, die meist alle für sich keine Schwingfähigkeit besitzen, solche Schwingungen der Regelgröße auftreten?

### Antwort:

Um das zu verstehen machen wir folgendes Gedankenexperiment:

Wir schneiden den im nachfolgenden Bild dargestellten Regelkreis an der Schnittstelle SST zwischen Regler und Stellglied auf. Dabei wollen wir annehmen, dass der Regler einen pneumatischen Ausgang besitzt und dass das Stellglied als Membranventil MVe ausgeführt ist. An das Membranventil schließen wir den Druckgeber DG und den Druckschreiber DSchr 1 an, der den jeweiligen Stelldruck auf einem laufende Papierstreifen aufzeichnet. Der Druckgeber gestattet, den Stelldruck feinstufig einzustellen.

An den Ausgang des Reglers schließen wir einen zweiten Druckschreiber DSchr 2 an. Nun ändern wir von Hand oder mit Hilfe eines kleinen Motors den Stelldruck  $p_S$  des Druckgebers so, dass der Stelldruck beispielsweise innerhalb von 60 s zwischen 0,4 und 0,8 bar eine volle Sinusschwingung ausführt, wie es in Bild 3b auf dem linken Schreibstreifen für  $T_1 = 60$  s zu erkennen ist, das nur die Druckänderungen zeigt.

## Stabilitätsuntersuchung eines Regelkreises

Beobachten wir den am Regler angeschlossenen Druckschreiber DSchr 2, so zeigt sich, dass dieser ebenfalls sinusförmige Schwingungen des Ausgangsdruckes  $p_S^*$  aufzeichnet, wie wir sie dem Stellglied aufgedrückt haben. Die Schwingung am Reglerausgang hat jedoch eine wesentlich größerer Amplitude  $A_1^*$  als die in die Regestrecke hineingeschickte Amplitude  $A_1$ . Außerdem zeigt sich, dass diese Schwingung zu einem anderen Zeitpunkt ihren Höchstwert erreicht als die Eingangsschwingung, d.h. es ist eine Phasenverschiebung  $\varphi_1$  zwischen den beiden Schwingungen vorhanden. Bei der gewählten großen Schwingungsdauer werden wir feststellen, dass die Phasenverschiebung  $\varphi_1 = 180^\circ$  ist.

Ursache für die wesentlich größere Schwingungsamplitude am Reglerausgang ist die Kreisverstärkung  $K_0$  des Regelkreises. Ursache für die Phasenverschiebung von  $180^\circ$  ist die erforderliche Wirkungsumkehr im Regelkreis.

## Stabilitätsuntersuchung eines Regelkreises

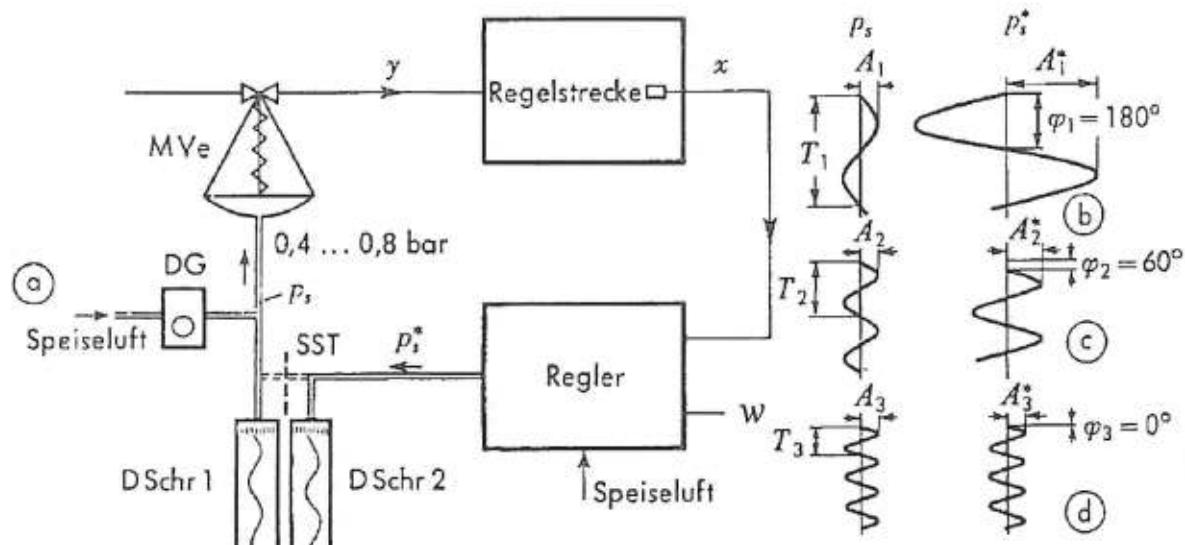


Bild 3

## Stabilitätsuntersuchung eines Regelkreises

Machen wir den Versuch anschließend mit schnellerer Druckänderung, d.h. wählen wir der Reihe nach die Schwingungsdauern 30 s, 15 s u.s.w., so zeigt sich bei einer Regelstrecke mit Verzögerung, dass erstens die Amplitude der Ausgangsschwingung abnimmt und zweitens die Phasenverschiebung kleiner als  $180^\circ$  wird. Bei der Schwingungsdauer  $T_2$  ist – bedingt durch die zeitlichen Verzögerungen im Regelkreis – die Ausgangsamplitude  $A_2^*$  zusammengeschrumpft (Bild 3c). Die Phasenverschiebung beträgt nur noch  $\varphi_1 = 60^\circ$ .

Bei einer ganz bestimmten Schwingungsdauer  $T_3$  (Bild 3d) werden wir feststellen, dass die Phasenverschiebung  $\varphi_3$  der Ausgangsschwingung auf Null zusammengezehrumpft ist. Die aus dem Regler herauskommende Schwingung hat dann dieselbe Phasenlage wie die in die Regelstrecke hineingeschickte. Wir wollen außerdem annehmen, dass die Amplitude  $A_3^*$  der herauskommenden Schwingung bei der Schwingungsdauer  $T_3$  so stark abgesunken ist, dass sie gleich der Eingangsamplitude  $A_3$  ist. In diesem Fall kommt also aus dem Regelkreis genau das gleiche Signal heraus, das wir in ihn hineingeschickt haben.

## Stabilitätsuntersuchung eines Regelkreises

Verbinden wir nun die beiden zu dem Druckschreiber DSchr 1 und DSchr 2 führenden Rohrleitungen miteinander, d.h. schließen wir den Regelkreis, so wird sich nichts ändern, da ja kein Druckunterschied zwischen den beiden Rohren vorhanden ist. Dann können wir uns aber auch das weitere Einstellen des Stelldruckes durch den Druckgeber ersparen, da ja nun die aus dem Regler herauskommenden Schwingung das Stellglied zum weiteren Schwingen anregt. Der Regelkreis wird also, sich selbst überlassen, unbegrenzt weiterschwingen. Es liegt somit der Fall der Selbsterregung vor.

Hat die aus dem Regler herauskommende Amplitude einen größeren Wert als die am Druckgeber eingestellte, so nimmt nach dem Schließen des Regelkreises die Amplitude zu, bis sie durch irgendwelche Anschläge begrenzt wird (Bild b). Im entgegengesetzten Fall, wenn die herauskommende Schwingung eine kleinere Amplitude hat als die hineingeschickt, werden die Schwingungen im Regelkreis abklingen.

## Stabilitätsuntersuchung eines Regelkreises

Genau dasselbe, was wir hier durch das Gedankenexperiment festgestellt haben, tritt in einem Regelkreis bei Selbsterregung ein. Den Anstoß zum Schwingen geben kleine, im Regelkreis immer vorhandene Störamplituden (Unruhen im Regelkreis), welche die Schwingungsdauer aufweisen, für welche die oben beschrieben Selbsterregungsbedingung erfüllt ist.

Die Selbsterregung ist unabhängig vom Aufbau des Regelkreises, d.h. es ist ganz gleich, ob es sich um mechanische, hydraulische oder elektrische Bauteile handelt. Sie tritt ein, wenn die oben angeführten Voraussetzungen (Schwingbedingungen) erfüllt sind, d.h. wenn die zurückkommende Schwingung eine gleiche oder größere Amplitude hat und die gleiche Phasenlage wie die hineingeschickte.

## Stabilitätsuntersuchung eines Regelkreises

U.a. die obigen Überlegungen unter Nutzungen von Schwingungen implizieren die Systembetrachtung im Frequenzbereich. Diese erfolgt unter Verwendung der Laplace- bzw. Fourier-Transformation, wobei letztere als Spezialfall der Laplace-Transformation aufgefasst werden kann.

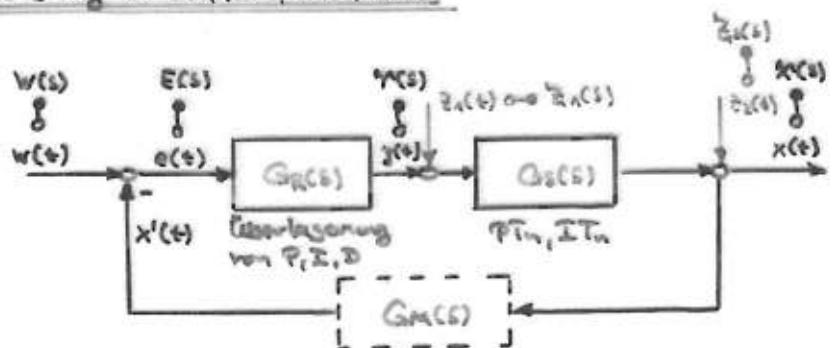
Der Transformationsansatz vom Original- bzw. Zeitbereich in den Bild- bzw. Frequenzbereich wird durch die Tatsache motiviert, dass sich jedes beliebige Zeitsignal mit Hilfe der Fourier-Transformation in die Summe einer Vielzahl von Sinus-/oder Kosinus-Schwingungen zerlegen lässt. Die einzelnen Frequenzen werden auch Spektrallinien genannt, die Summe aller Spektrallinien wird auch Spektrum genannt.

Die nachfolgende Tabelle enthält zur Anschauung einige typische Signale im Zeit- und Frequenzbereich.

Animation: [Wie man ein Haus aus Sinus-Funktionen baut .mp4](#)

## Verhalten einiger Signale im Zeit- und Frequenzbereich

		Im Zeitbereich: Signal mit konstanter Amplitude  Im Frequenzbereich: Unendlichkeitsstelle bei $\omega = 0$
		Im Zeitbereich: Signal mit konstanter Amplitude  Im Frequenzbereich: Unendlichkeitsstellen bei $\omega = \pm\omega_0$
		Im Zeitbereich: Signal mit gedämpfter Amplitude  Im Frequenzbereich: Keine Unendlichkeitsstellen
		Im Zeitbereich: Signal mit gedämpfter Amplitude  Im Frequenzbereich: Keine Unendlichkeitsstellen
		Im Zeitbereich: Kurzzeitig wirkendes auf null zurückgehendes Signal  Im Frequenzbereich: Keine Unendlichkeitsstellen



$x(t)$  : Regelgröße

$y(t)$  : Stellgröße

$w(t)$  : Führungswert (Sollwert)

z: (4) : Störungswellen

$e(t)$  : Regelabweichung ( $= w(t) - x^*(t)$ )

$G_R(s)$ : Übertragungsfunktion des Reglers

$G_b(t)$ : Übertragungsfunktion der Strecke

G(MS): Übertragungsfunktion des Messsystems

### Übertragungsfunktionen:

$$\left. \begin{aligned} G_{R(s)} &= \frac{Y(s)}{E(s)} \\ G_{S(s)} &= \frac{X(s)}{Y(s)} \\ G_{M(s)} &= \frac{X(s)}{X(s)} \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{kettenschaltung } G_{R(s)} \text{ und } G_{S(s)} : \\ \frac{X(s)}{E(s)} = \frac{Y(s)}{E(s)} \cdot \frac{X(s)}{Y(s)} = G_{R(s)} \cdot G_{S(s)}$$

Zusammenhang aus Blockschaltbild: (Wirkungs- oder Signalflußplan)

$$x(t) = \{ x_1(t), x_2(t), x_3(t) \}$$

$$x(s) = G_{\text{U}}(s) \cdot w(s) + G_{\text{Zn}}(s) \cdot z_n(s) + G_{\text{Lz}}(s) \cdot z_L(s)$$

Eingangsgröße = Störgröße  
→ Störverhalten

↑  
Eingangsgröße = Sollwert → Führungsverhalten

Guess : Führungsübertragungsfunktion

G<sub>2</sub>(z) : Störübertragungsfunktion 1

$G_{21}(s)$  : Störübertragungsfunktion 2

Fall 1:  $W(s) \neq 0, \dot{x}_1(s) = \dot{x}_2(s) = 0$  Führungsvorhalten

$$E(s) = W(s) - R(s) \quad (1) \quad \text{Messglied vernachlässigt}$$

$$Y(s) = G_R(s) \cdot E(s) \quad (2)$$

$$R(s) = G_E(s) \cdot Y(s) \quad (3)$$

} Störgrößen nicht berücksichtigt, da null

ges.:  $X(s) = f(W(s)) \rightarrow$  Ziel: Gleichung, die nur  $R(s)$  und  $W(s)$  beinhaltet

$$(2) \text{ in } (3): X(s) = G_E(s) \cdot G_R(s) \cdot E(s) \quad (4)$$

$$(1) \text{ in } (4): R(s) = G_E(s) \cdot G_R(s) \cdot [W(s) - X(s)]$$

$$= G_E(s) \cdot G_R(s) \cdot W(s) - G_E(s) \cdot G_R(s) \cdot X(s) \rightarrow X(s) \text{ auf eine Seite bringen}$$

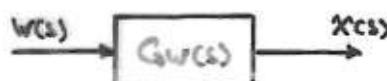
$$X(s) + G_E(s) \cdot G_R(s) \cdot X(s) = G_E(s) \cdot G_R(s) \cdot W(s)$$

$$X(s) \cdot [1 + G_E(s) \cdot G_R(s)] = G_E(s) \cdot G_R(s) \cdot W(s)$$

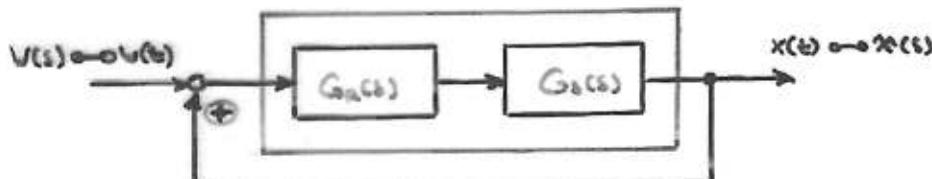
$\Rightarrow$

$$G_W(s) = \frac{X(s)}{W(s)} = \frac{G_E(s) \cdot G_R(s)}{1 + G_E(s) \cdot G_R(s)}$$

Führungübertragungsfunktion



Vorzeichen:  $E(s) = W(s) \oplus X(s) \quad (1a)$



$$\Rightarrow G_W(s) = \frac{[G_E(s) \cdot G_R(s)]}{1 \oplus [G_E(s) \cdot G_R(s)]}$$

a) Signalflusplan "- " (Differenz)

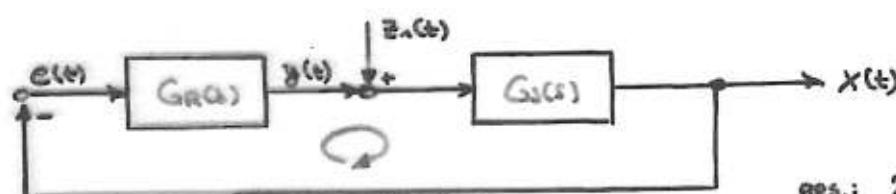
$\rightarrow$  Formel "+"

b) Signalflusplan "+" (Addition)

$\rightarrow$  Formel "- "

Fall 2:  $W(s) = 0, \dot{x}_1(s) \neq 0, \dot{x}_2(s) = 0$  Störverhalten 1

$W(s) = 0$   
d.h. kein  
Störwert  
vorhanden



ges.:  $X(s) = f(\dot{x}_1(s))$

$$E(s) = -X(s) \quad (1)$$

$$Y(s) = G_R(s) \cdot E(s) \quad (2)$$

$$X(s) = G_S(s) \cdot [Y(s) + Z_1(s)] \quad (3)$$

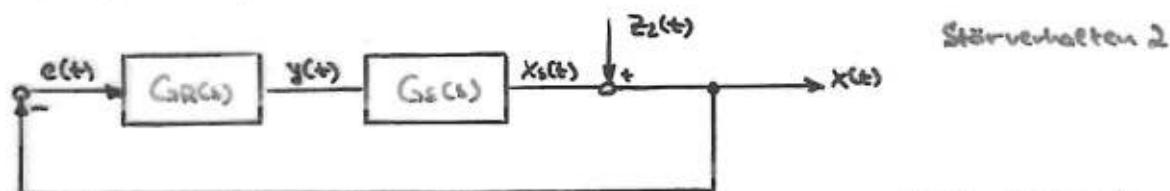
$$(1)+(2) \text{ in (3)} : X(s) = -G_R(s) \cdot G_S(s) \cdot X(s) + G_S(s) \cdot Z_1(s)$$

$$X(s) \cdot [1 + G_R(s) \cdot G_S(s)] = G_S(s) \cdot Z_1(s)$$

$$\Rightarrow G_{Z_1}(s) = \frac{X(s)}{Z_1(s)} = \frac{G_S(s)}{1 + G_R(s) \cdot G_S(s)}$$

Störübertragungsfunktion 1

Fall 3:  $W(s) = Z_1(s) = 0, Z_2(s) \neq 0$



ges.:  $X(s) = f(Z_2(s))$

$$E(s) = -X(s) \quad (1)$$

$$Y(s) = G_R(s) \cdot E(s) = -G_R(s) \cdot X(s) \quad (2)$$

$$X_1(s) = G_S(s) \cdot Y(s) = -G_R(s) \cdot G_S(s) \cdot X(s) \quad (3)$$

$$X(s) = X_1(s) + Z_2(s) = -G_R(s) \cdot G_S(s) \cdot X(s) + Z_2(s)$$

$$X(s) \cdot [1 + G_R(s) \cdot G_S(s)] = Z_2(s)$$

$$\Rightarrow G_{Z_2}(s) = \frac{X(s)}{Z_2(s)} = \frac{1}{1 + G_R(s) \cdot G_S(s)}$$

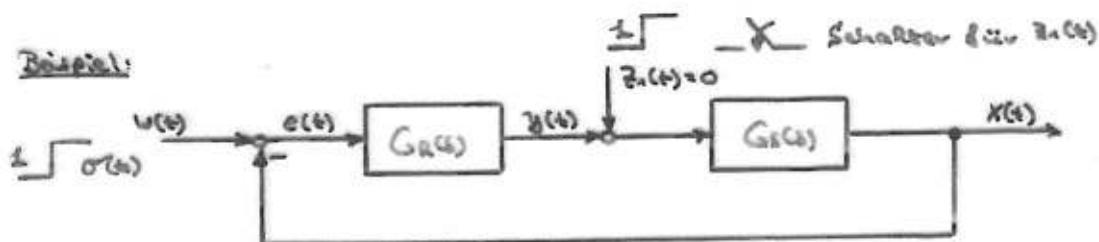
Störübertragungsfunktion 2

Überlagerung der Fälle 1, 2 und 3:

$$X(s) = G_R(s) \cdot W(s) + G_{Z_1}(s) \cdot Z_1(s) + G_{Z_2}(s) \cdot Z_2(s)$$

$$\Rightarrow X(s) = \frac{(G_R(s) \cdot G_S(s))}{1 + G_R(s) \cdot G_S(s)} \cdot W(s) + \frac{G_S(s)}{1 + G_R(s) \cdot G_S(s)} \cdot Z_1(s) + \frac{1}{1 + G_R(s) \cdot G_S(s)} \cdot Z_2(s)$$

Gesamtübertragungsfunktion

Beispiel:Ges.:

$$G_{w(s)} = K_p = 2$$

$$G_{z_1(s)} = \frac{K_p}{s} = \frac{1}{s}$$

Ges.: a)  $G_{w(s)}$  → Betrachtung: Schalter offen (Führungsverhalten)

b)  $G_{z_1(s)}$

c)  $X(s)$

$$a) G_{w(s)} = \frac{G_{w(s)} \cdot G_{z_1(s)}}{1 + G_{w(s)} \cdot G_{z_1(s)}} = \frac{\frac{2}{s}}{1 + \frac{2}{s}} = \frac{2}{s+2} = \frac{1}{(1 + \frac{1}{2}s)} \quad PT_1$$

$$b) G_{z_1(s)} = \frac{G_{z_1(s)}}{1 + G_{w(s)} \cdot G_{z_1(s)}} = \frac{\frac{1}{s}}{1 + \frac{2}{s}} = \frac{1}{s+2} = \frac{0.5}{(1 + \frac{1}{2}s)} \quad PT_1$$

$$c) x(t) = \mathcal{L}(w(t))$$

$\mathcal{L}\{f(t)\}$

$$X(s) = G_{w(s)} \cdot w(s) = \frac{1}{(1 + \frac{1}{2}s)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s(1 + \frac{1}{2}s)} \quad IT_1$$

↓ Korrespondenztabelle Kap. 4, Nr. 8

$E(t) = e^{-\frac{t}{T}}$  ↔  $\frac{1}{s(1 + \frac{1}{2}s)}$  mit  $E(t) = \delta(t)$  = Einheitsimpulsfunktion

$$\circ x(t) = 1 - e^{-\frac{2t}{1}}$$

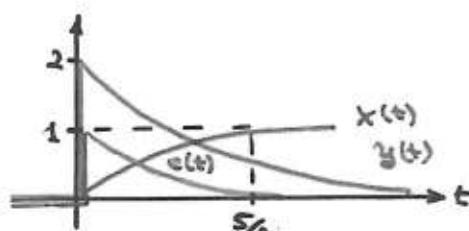
$$e(t) = w(t) - x(t)$$

$$= 1 - 1 + e^{-\frac{2t}{1}}$$

$$\circ e(t) = e^{-\frac{2t}{1}}$$

$$y(t) = G_{z_1(s)} \cdot e(t) = 2 \cdot e(t)$$

$$\circ y(t) = 2 \cdot e^{-\frac{2t}{1}}$$



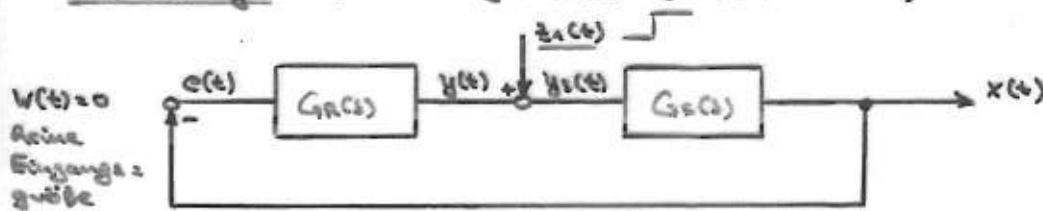
Faustformel: Nach ca.  $5\tilde{T}$  ist das System eingeschwungen,  
denn:  $\mathcal{L}(e^{\frac{2t}{1}}) = 99,3\%$

$$\tilde{T} = \frac{1}{2} \rightarrow 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

Stationäre Regelabweichung:  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = e(\infty) = 0$

d.h.: System verhält sich  $\emptyset$

Betrachtung: Schalter geschlossen (Störverhalten)



$$\text{Es war: } G_{z_1}(s) = \frac{1}{1+s_2 s}$$

$$X(s) = G_{z_1}(s) \cdot z_1(s) = \frac{1}{s_2} \cdot \frac{1}{(1+s_2 s)} = \frac{1}{s(s+1/s_2)}$$

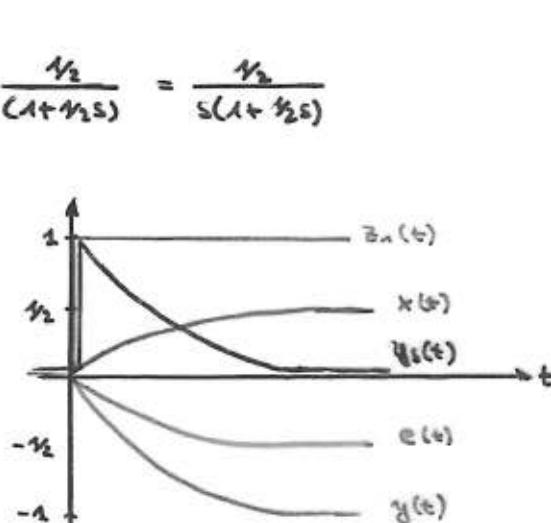
- $x(t) = \frac{1}{s} \cdot (1 - e^{-t/s})$

$$e(t) = -x(t)$$

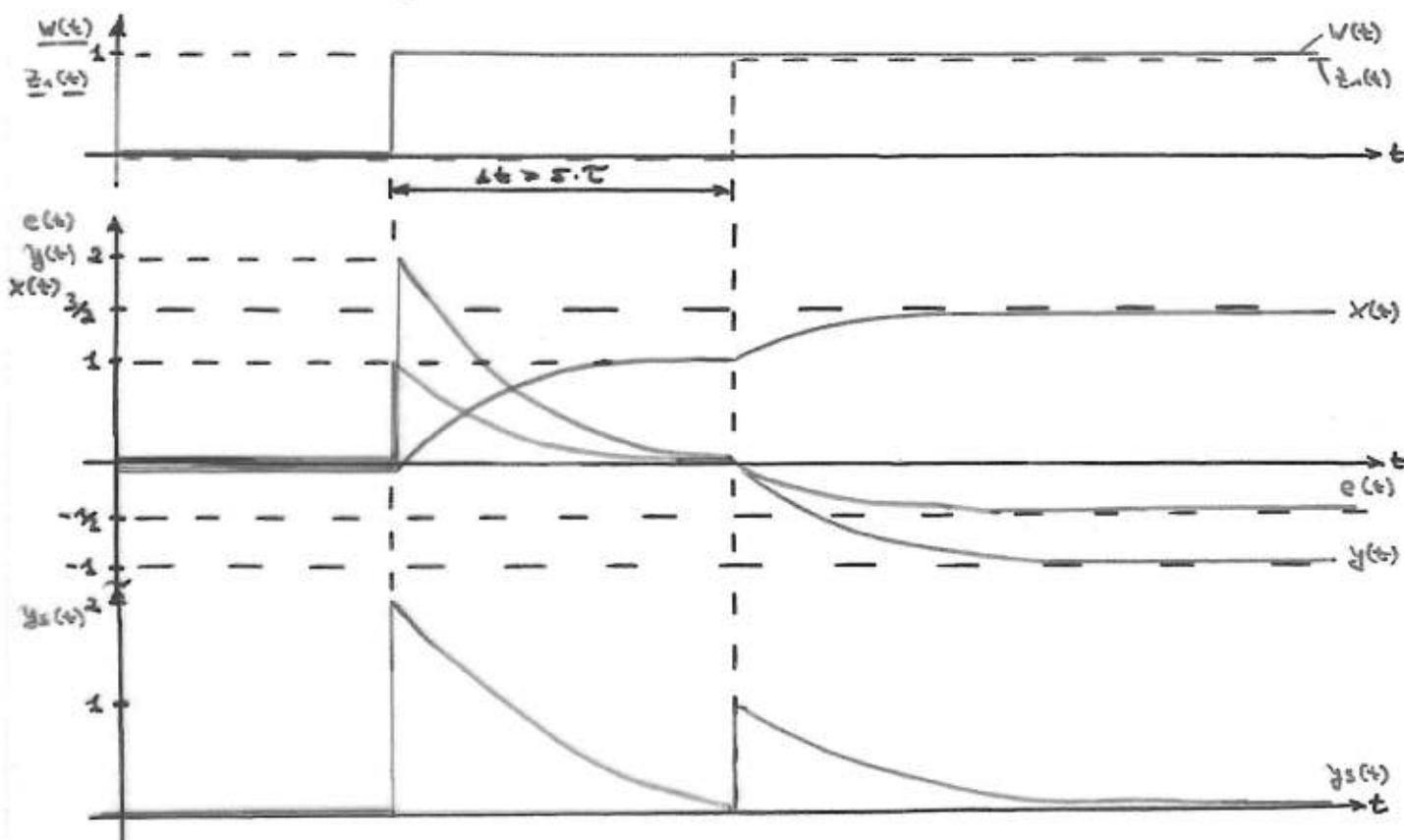
- $e(t) = -\frac{1}{s} \cdot (1 - e^{-t/s})$

- $y(t) = G_R(s) \cdot e(t) = 2 \cdot e(t)$

- $y_s(t) = y(t) + z_1(t)$



Frage: Wie sieht das zeitliche Verhalten bei einem Führungsgroßensprung gefördert von einem Störgrößensprung aus?



- Fragen:
- Was sind Regler?  $\rightarrow$  Ihr Verhalten lässt sich auf das einfacher Grundglieder zurückführen
  - Was sind Strecken?  $\rightarrow P_{Tu}, I_{Tu}$

Nachfolgend Betrachtung von kontinuierlichen statigen Reglern  $\rightarrow P, I, D$

Stationäre Regelabweichung (Anwendung des Endwertatzes)

$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \rightarrow e(\infty)$  (mathematisch ist "e( $\infty$ )" nicht erlaubt ...)

Laplace-Transformation: Endwertatz

$$\begin{aligned} u(t) &\rightarrow u(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} u(t) \stackrel{!}{=} \lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot u(s)] \\ u(\infty) &= u(t) \Big|_{t=0} = \lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot u(s)] \end{aligned}$$

Anwendung auf Regelabweichung:  $e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot E(s)]$

$$e(t) = w(t) - x(t) \Rightarrow E(s) = W(s) - X(s)$$

$$E(s) = W(s) - G_{wU}(s) \cdot V(s)$$

$$E(s) = V(s) \cdot [1 - G_{wU}(s)]$$

$G_{wU}$  einsetzen:

$$E(s) = V(s) \cdot \left[ 1 - \frac{G_{wU}(s) \cdot G_{eU}(s)}{1 + G_{wU}(s) \cdot G_{eU}(s)} \right] = V(s) \cdot \left[ \frac{1 + G_{wU}(s) \cdot G_{eU}(s) - G_{wU}(s) \cdot G_{eU}(s)}{1 + G_{wU}(s) \cdot G_{eU}(s)} \right]$$

$$E(s) = V(s) \cdot \left[ \frac{1}{1 + G_{wU}(s) \cdot G_{eU}(s)} \right]$$

$\Rightarrow$

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ s \cdot V(s) \cdot \frac{1}{1 + G_{wU}(s) \cdot G_{eU}(s)} \right]$$

Stationäre  
Regelabweichung,  
wenn  $w(t)$  ansteigt  
und  $\dot{x}_1(t) = \dot{x}_2(t) = 0$   
ist.

Beispiel von oben:  $G_{wU}(s) = 2$ ;  $G_{eU}(s) = \frac{1}{s}$  mit  $w(t) = \text{Einsatzspannung}$

$$\Rightarrow e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1 + 2 \cdot \frac{1}{s}} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{s}{s+2} \right] = \frac{0}{2} = 0$$

Regelt aus

Frage: Wie groß ist  $e(\infty)$ , wenn  $w(t) = \dot{z}_2(t) = 0$  ist und  $\ddot{z}_1(t) \neq 0$ ?

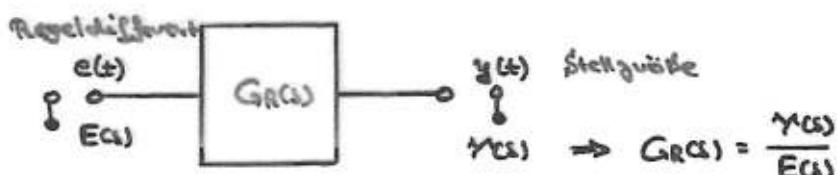
$$\begin{aligned} e(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot e(s)] \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} [-s \cdot \gamma(s)] \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} [-s \cdot G_2(s) \cdot \ddot{z}_1(s)] \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[ -s \cdot \ddot{z}_1(s) \cdot \frac{G_S(s)}{1 + G_R(s) \cdot G_S(s)} \right] \end{aligned}$$

Beispiel von oben:  $e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ -s \cdot \frac{\ddot{z}_1(s)}{1 + 2/s} \right]$

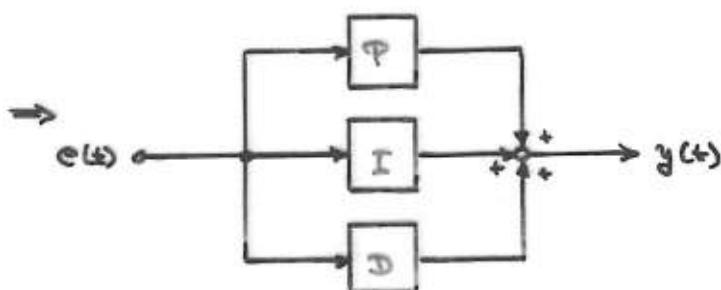
$$= \lim_{s \rightarrow 0} \left[ -\frac{s}{s+2} \right]$$

$$\underline{e(\infty) = -\gamma_L} \quad \text{Regel nicht aus!}$$

### Regelaufbau aus Grundgliedern



Regler: stetig, bestehend aus P-, I- und D-Anteil



$$y_{PID}(t) = y_P(t) + y_I(t) + y_D(t)$$

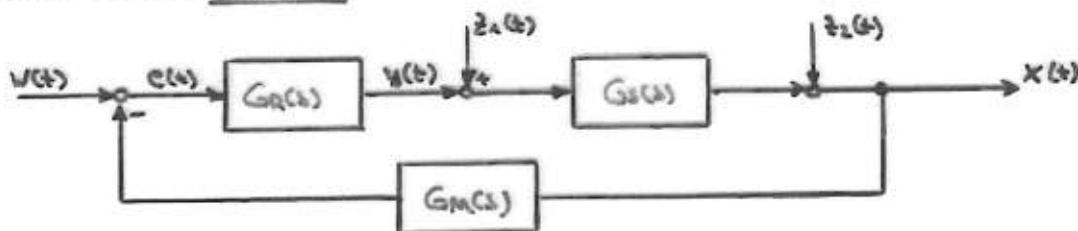
Additives PID-Verhalten

Dabei gilt:

$$\begin{aligned} y_P(t) &= k_P \cdot e(t) \\ y_I(t) &= k_I \cdot \int_0^t e(\tau) d\tau \\ y_D(t) &= k_D \cdot \frac{de(t)}{dt} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y_{PID}(t) = k_P \cdot e(t) + k_I \cdot \int_0^t e(\tau) d\tau + k_D \frac{de(t)}{dt}$$

Regelkreis mit Meßglied:



Wie ohne Meßglied gilt auch hier:  $X(s) = G_W(s) \cdot W(s) + G_{H1}(s) \cdot z_1(s) + G_{H2}(s) \cdot z_2(s)$

Jedoch mit um  $G_M(s)$  erweiterter Schleifenverstärkung:

$G_W(s) = \frac{G_R(s) \cdot G_S(s)}{1 + G_R(s) \cdot G_S(s) \cdot G_M(s)}$	Schleifenverstärkung ohne Meßglied:
$G_{H1}(s) = \frac{G_S(s)}{1 + G_R(s) \cdot G_S(s) \cdot G_M(s)}$	$G_O(s) = G_R(s) \cdot G_S(s)$
$G_{H2}(s) = \frac{1}{1 + G_R(s) \cdot G_S(s) \cdot G_M(s)}$	Schleifenverstärkung mit Meßglied:

Schleifenverstärkung ohne Meßglied:

$$G_O(s) = G_R(s) \cdot G_S(s)$$

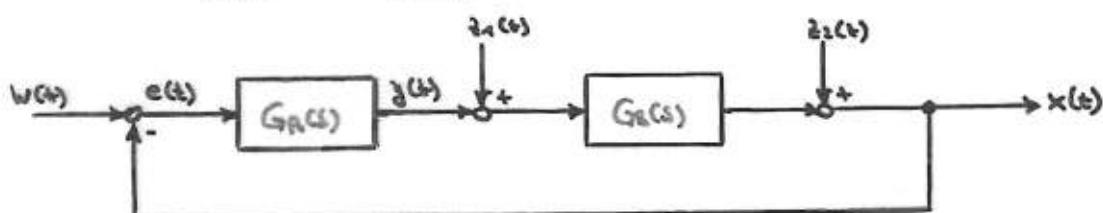
Schleifenverstärkung mit Meßglied:

$$G_O(s) = G_R(s) \cdot G_S(s) \cdot G_M(s)$$

### Tübungsbogen 1, Aufgabe 1.1

Geg.:  $G_{R(s)} = K_P = 2$

$$G_S(s) = \frac{K_S}{1+ST} = \frac{1}{1+5s}$$



a.) Führungsübertragungsverhalten:  $W(t) \neq 0, z_1(t) = z_2(t) = 0$

$$\Rightarrow X(s) = G_W(s) \cdot W(s)$$

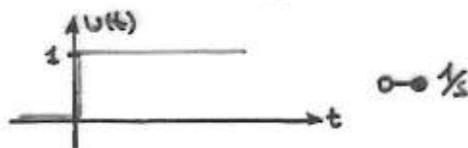
$$G_O(s) = G_R(s) \cdot G_S(s)$$

$$G_W(s) = \frac{G_R(s) \cdot G_S(s)}{1 + G_R(s) \cdot G_S(s)} = \frac{G_O(s)}{1 + G_O(s)} = \frac{2 \cdot \frac{1}{1+5s}}{1+2 \cdot \frac{1}{1+5s}} = \frac{\frac{2}{1+5s}}{\frac{1+10s}{1+5s} + \frac{2}{1+5s}}$$

$$= \frac{2}{1+5s} \cdot \frac{1+5s}{3+5s} = \frac{2}{3+5s}$$

$$\Rightarrow G_W(s) = \frac{2/3}{1+5s}$$

- $W(t) = \text{Einheits sprung}$



$$X(s) = G_U(s) \cdot W(s) = \frac{\frac{1}{s}}{s(1 + \frac{1}{s} \cdot \zeta)} = \frac{\frac{1}{s}}{s^2 + s + \zeta^2}$$

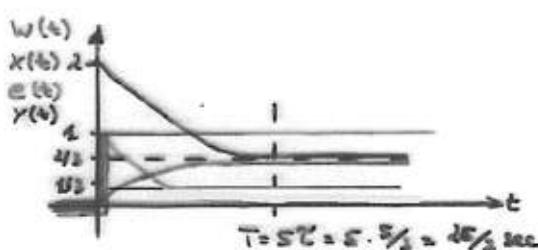
$$\bullet X(s) = \frac{1}{s} \cdot [1 - e^{-\frac{1}{2}s}] \quad \text{PTA-Glied}$$

$$\bullet C(t) = W(t) - x(t)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}t} \\ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}t}$$

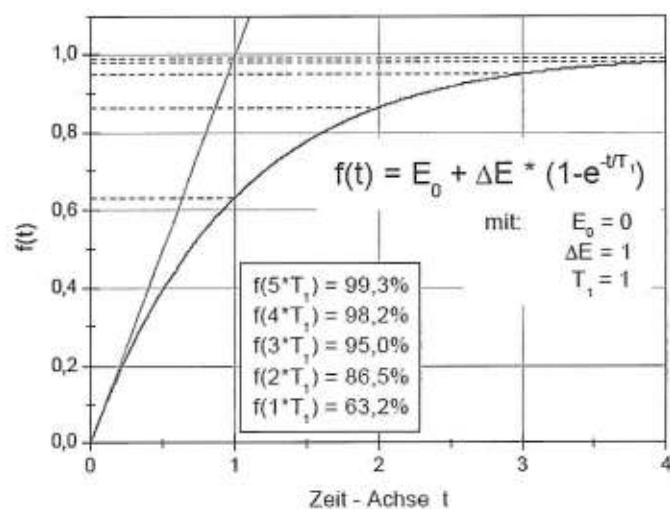
$$\bullet Y(t) = k_p \cdot c(t)$$

$$= 2 \cdot [\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}t}] \\ = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} \cdot e^{-\frac{1}{2}t}$$

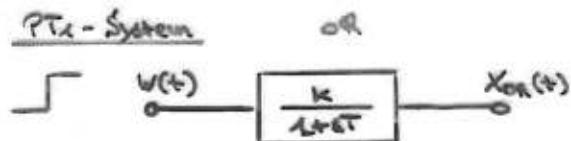


### 3.3 Einfache Übertragungsglieder

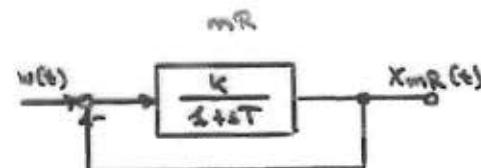
Eine Faustformel besagt, dass nach 5 Zeitkonstanten der neue Beharrungswert erreicht ist (99,3%).



PT<sub>1</sub>-System



oh



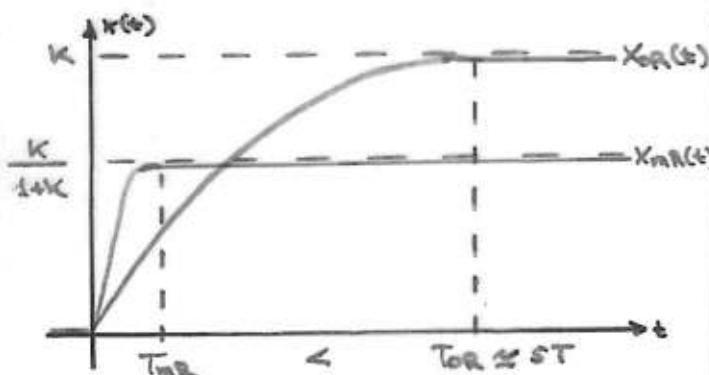
oh = ohne Rückkopplung  
MR = mit Rückkopplung

$$x_{\text{oh}}(s) = \gamma_s \cdot \frac{K}{1+sT}$$

•

$$x_{\text{oh}}(t) = K \cdot [1 - e^{-\frac{t}{T}}]$$

$$G_{\text{oh}}(s) = \frac{K}{1+sT}$$



$$\begin{aligned} G_w(s) &= \frac{G_{\text{oh}}(s)}{1+G_{\text{oh}}(s)} = \frac{\frac{K}{1+sT}}{1 + \frac{K}{1+sT}} \\ &= \frac{K}{1+sT+K} = \frac{K}{1+K+sT} \end{aligned}$$

$$G_w(s) = \frac{K}{(1+K)} \cdot \frac{1}{(1+s\frac{T}{1+K})} = G_{\text{MR}}(s)$$

$$x_{\text{MR}}(s) = \gamma_s \cdot G_w(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{K}{(1+K)} \cdot \frac{1}{(1+s\frac{T}{1+K})}$$

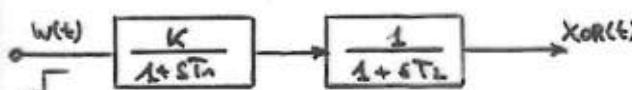
$$x_{\text{MR}}(t) = \frac{K}{1+K} \cdot \left[ 1 - e^{-\frac{t(1+K)}{T}} \right]$$

PT<sub>2</sub>-System

oh

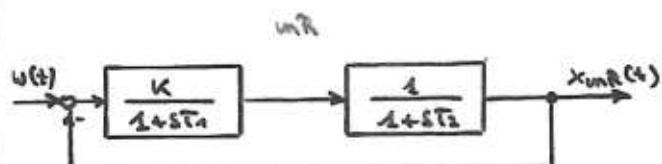
$$G_{\text{oh}}(s) = \frac{K}{(1+sT_1) \cdot (1+sT_2)}$$

2xPT<sub>1</sub>



$$G_{\text{oh}}(s) = \frac{K}{1+s(T_1+T_2)+s^2T_1T_2}$$

$$G_{\text{oh}}(s) = \frac{\frac{K}{T_1T_2}}{s^2+s \cdot \frac{T_1+T_2}{T_1T_2} + \frac{1}{T_1T_2}}$$



$$\begin{aligned} G_w(s) &= \frac{G_{\text{oh}}(s)}{1+G_{\text{oh}}(s)} = \frac{\frac{K}{(1+sT_1) \cdot (1+sT_2)}}{1 + \frac{K}{(1+sT_1) \cdot (1+sT_2)}} \\ &= \frac{K}{(1+sT_1) \cdot (1+sT_2) + K} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{K}{1+s(T_1+T_2)+s^2T_1T_2+K} \\ &= \frac{K}{s^2T_1T_2+s(T_1+T_2)+1+K} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{K}{T_1T_2}}{s^2+s \cdot \frac{T_1+T_2}{T_1T_2} + \frac{1+K}{T_1T_2}} \end{aligned}$$

Allgemeines System 2. Ordnung:

$$G(s) = \frac{K \omega_0^2}{s^2 + s \cdot 2\zeta \omega_0 + \omega_0^2}$$

$$\rightarrow \omega_0^2 = \frac{1}{T_1 \cdot T_2} ; 2\zeta \omega_0 = \frac{T_1+T_2}{T_1 \cdot T_2}$$

$$\hookrightarrow \mathfrak{D} = \frac{1}{2} \cdot \frac{T_1+T_2}{T_1 \cdot T_2} \cdot \frac{1}{1+K} = \frac{1}{2} \cdot \frac{T_1+T_2}{T_1 \cdot T_2} \cdot \sqrt{\frac{1}{1+K}}$$

$$\boxed{\mathfrak{D} = \frac{1}{2} \cdot \frac{T_1+T_2}{\sqrt{T_1 \cdot T_2}}} \quad \left[ \frac{1}{1+K} = \frac{1}{\sqrt{1+K^2}} \right]$$

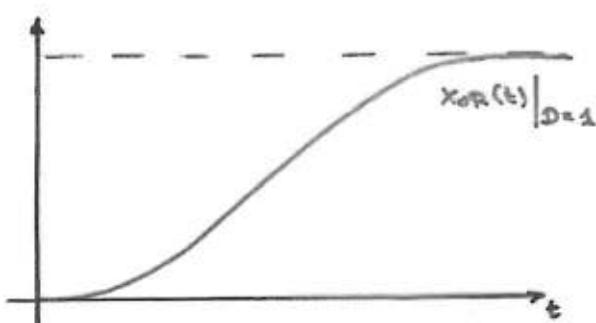
$$\begin{aligned}\mathfrak{D} > 1 : \quad & \frac{1}{2} \cdot \frac{T_1+T_2}{\sqrt{T_1 \cdot T_2}} > 1 \\ & T_1+T_2 > 2 \cdot \sqrt{T_1 \cdot T_2} \quad || \cdot c^2 \\ & (T_1+T_2)^2 > 4 \cdot T_1 \cdot T_2 \\ & T_1^2 + 2 \cdot T_1 \cdot T_2 + T_2^2 > 4 \cdot T_1 \cdot T_2 \\ & T_1^2 - 2 \cdot T_1 \cdot T_2 + T_2^2 > 0 \\ & (T_1 - T_2)^2 > 0\end{aligned}$$

Für  $T_1 \neq T_2 \rightarrow$  konservative Annahme  
 $\mathfrak{D} > 1$

$$T_1 = T_2 = T : \quad \Rightarrow \boxed{\mathfrak{D} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2T}{T} = 1}$$

$$\rightarrow G_S(s) = \frac{K}{(s+2T)^2} = G_R(s) \Big|_{\substack{T_1=T_2 \\ \mathfrak{D}=1}}$$

$$x_{OR}(t) \Big|_{\mathfrak{D}=1} = K \cdot \left[ 1 - \left( 1 + \frac{1}{T} \right) \cdot e^{-\frac{t}{T}} \right]$$



$\mathfrak{D} = 1$ : Aperiodischer Grenzfall

$\mathfrak{D} > 1$ : Kriechfall (langsame Erreichung)

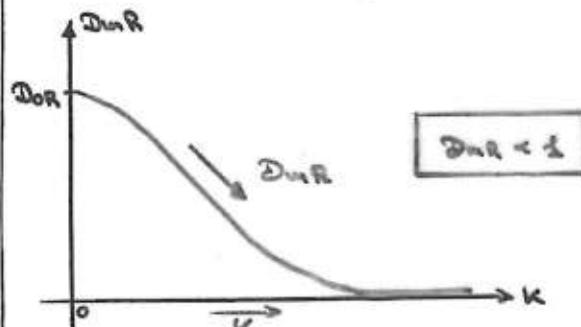
$$G_{OR}(s) = \frac{\frac{K}{s+2s}}{s^2 + s \frac{T_1+T_2}{T_1 \cdot T_2} + \frac{1+K}{T_1 \cdot T_2}} \stackrel{s \rightarrow 0}{=} G_{DR}(s)$$

$$\rightarrow \omega_n^2 = \frac{1+K}{T_1 \cdot T_2} \quad ; \quad 2D\omega_0 = \frac{T_1+T_2}{T_1 \cdot T_2}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{D} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{T_1+T_2}{T_1 \cdot T_2} \cdot \frac{\sqrt{T_1 \cdot T_2}}{\sqrt{1+K}} \\ \mathfrak{D}_{DR} &= \underbrace{\frac{1}{2} \frac{T_1+T_2}{\sqrt{T_1 \cdot T_2}}}_{\mathfrak{D}_{OR}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+K}}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathfrak{D}_{DR} = \mathfrak{D}_{OR} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+K}}}$$

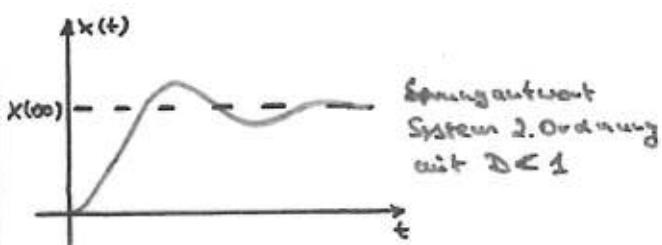
Fazit: Die Dämpfung wird durch eine Rückführung verkleinert?



$$K > 0 : \sqrt{1+K^2} > 1 \Rightarrow \boxed{\frac{\mathfrak{D}_{DR}}{\mathfrak{D}_{OR}} < 1}$$

→ Sprungantwort ist für  $K > 0$  schwungfähig

→ Systeme 2. Ordnung, die OR nicht schwungfähig sind (stabil), können durch Rückführung schwungfähig (instabil) werden?

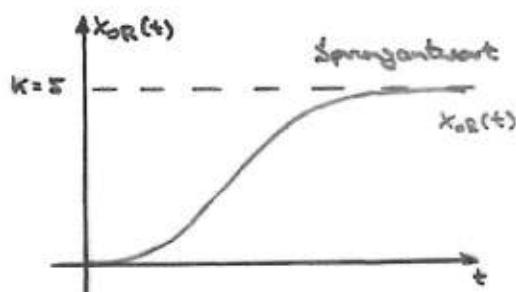


Zahlenbeispiel: PT<sub>2</sub>

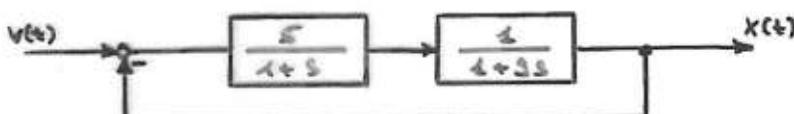
$$\begin{aligned} K &= 5 \\ T_1 &= 1 \\ T_2 &= 3 \end{aligned}$$

a) ohne Rückführung:

$$\left. \begin{aligned} G(s) &= \frac{\frac{K}{T_1 T_2}}{s^2 + s \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} + \frac{1}{T_1 T_2}} \approx \frac{K \cdot \omega_0^2}{s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2} \\ \Rightarrow G(s) &= \frac{\frac{5}{3}}{s^2 + \frac{10}{3}s + \frac{1}{3}} ; \quad \omega_0^2 = \frac{1}{3} \rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 2D\omega_0 &= \frac{10}{3} \rightarrow D = \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{\omega_0} = \frac{5}{3} \cdot 3 \end{aligned} \right\} \underline{D = \frac{5}{3} > 1} \quad \text{kriechfall}$$



b) mit Rückführung:



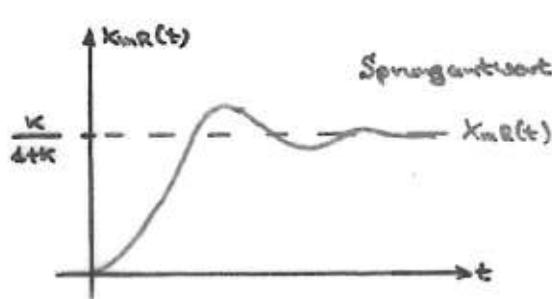
$$\begin{aligned} G_{uL}(s) &= \frac{\frac{K}{1+s}}{s^2 + s \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} + \frac{1+K}{T_1 T_2}} \approx \frac{\frac{5}{3}}{s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2} = \frac{\frac{5}{3}}{s^2 + \frac{10}{3}s + \frac{5}{3}} \\ \rightarrow \omega_0^2 &= \frac{5}{3} = \frac{25}{9} \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{25}{9}} ; \quad D = \frac{1}{2\omega_0} \cdot \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{T_1 + T_2}}{\sqrt{1+K}} \cdot \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+K}} \cdot \frac{4}{3} \\ D &= \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+K}} = \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{16}} = \frac{5}{3} < 1 \quad \text{Schwingfall} \end{aligned}$$

Grenzwertanalyse:

$$x(0+) = \lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot x(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot \frac{1}{s} \cdot G_{uL}(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} [G_{uL}(s)] = G_{uL}(0)$$

$$\underline{\underline{x}(0+) = G_{uL}(0) = \frac{\frac{5}{3}}{6/3} = \frac{5}{6} < 1}$$

$$G_{uL}(s) = \frac{\frac{K}{1+s}}{\frac{T_1 + T_2}{1+K}} = \frac{K}{1+K}$$



Übungsbilkt 2, Aufgabe 2.2:

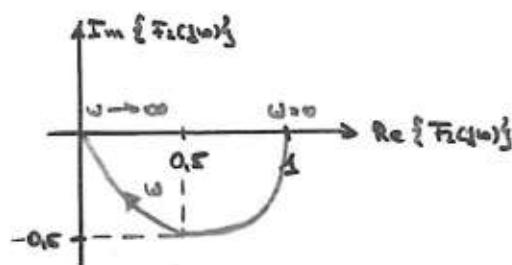
(4)

geg.:  $F_2(s) = \frac{1}{1+s}$   $\text{PT}_n$ -Glied ges.: Outskurve

Outskurve: Trägt man  $F(j\omega)$  für verschiedene Kreisfrequenzen in die komplexe Zeilenebene ein, so ergeben sich unterschiedliche Zeiger. Verbinden die Spitzen der Zeiger miteinander verbunden, so entsteht die Outskurve des Systems.

$$\rightarrow F_2(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega} \cdot \frac{(1-j\omega)}{(1-j\omega)} = \frac{1-j\omega}{1+\omega^2} = \frac{1}{1+\omega^2} - j \cdot \frac{\omega}{1+\omega^2}$$

$\omega$	Real	Imaginär
0	1	0
1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\rightarrow \infty$	0	0



(a)

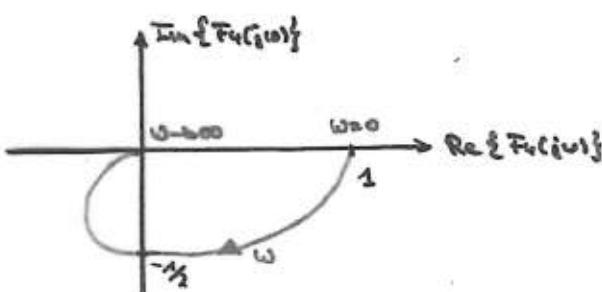
ges.: Bodediagramm  $\rightarrow$  siehe Beiblatt "Beispiel eines  $\text{PT}_n$ -Gliedes"

geg.:  $F_4(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1} = \frac{1}{(1+s)^2}$   $\text{PT}_n$ -System ges.: Outskurve

$$\rightarrow F_4(j\omega) = \frac{1}{1-\omega^2 + j2\omega} \cdot \frac{(1-\omega^2 - j2\omega)}{(1-\omega^2 - j2\omega)} = \frac{1-\omega^2 - j2\omega}{(1-\omega^2)^2 + 4\omega^2}$$

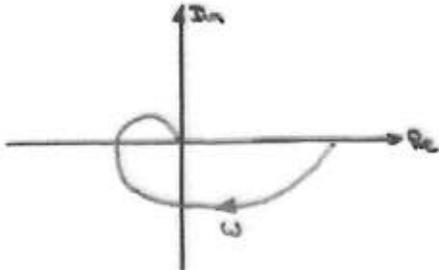
$$= \frac{1-\omega^2}{(1-\omega^2)^2} - j \cdot \frac{2\omega}{(1-\omega^2)^2}$$

$\omega$	Real	Imaginär
0	1	0
1	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\rightarrow \infty$	0	0

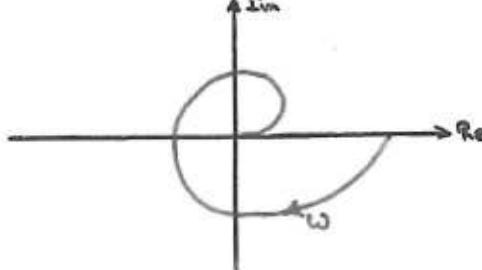


(b)

$\text{PT}_3$ :



$\text{PT}_4$ :



ges.:  $\tilde{F}_3(s) = \frac{1}{1+s} \cdot e^{-st}$

Verschiebungssatz:

$$f(t-t_0) \Leftrightarrow F(s) \cdot e^{-st_0}$$

(5)

ges.: Ortskurve

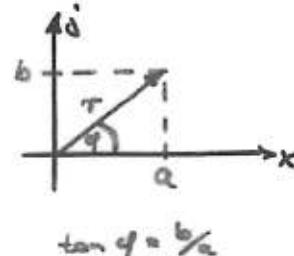
$$\rightarrow \tilde{F}_3(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega} \cdot e^{-j\omega t}$$

Komplexe Zahlen:

$$z = a+jb = r \cdot e^{j\varphi}$$

$$\text{mit: } r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

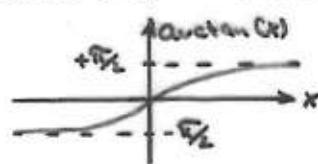


$$\rightarrow \frac{1}{1+j\omega} \stackrel{?}{=} r \cdot e^{j\varphi}$$

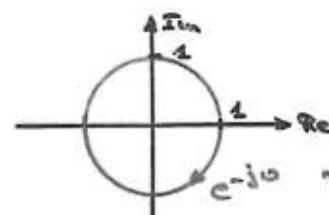
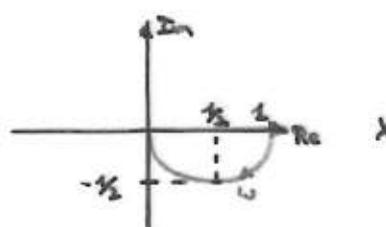
$$\frac{1}{1+j\omega} = \frac{1}{1+\omega^2} \cdot \frac{(1-j\omega)}{(1-j\omega)} = \underbrace{\frac{1}{1+\omega^2}}_{a} \cdot \underbrace{j\omega}_{b}$$

$$\hookrightarrow r = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}, \quad \varphi = \arctan(\omega)$$

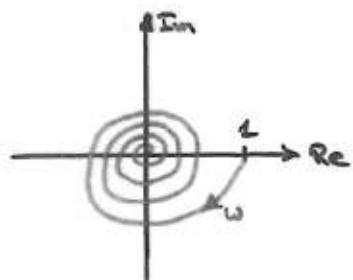
$$\Rightarrow \arctan(-x) = -\arctan(x)$$



$$\Rightarrow \tilde{F}_3(j\omega) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}}_{\text{Frequenz}} \cdot \underbrace{e^{-j\arctan(\omega)}}_{\text{Phasenverschiebung}} \cdot e^{-j\omega t}$$



Phase nimmt mit steigender Frequenz immer weiter zu



©

ges.:  $\tilde{F}_4(s) = \frac{1}{s^2+s} = \frac{1}{s(s+1)}$

ITn-System

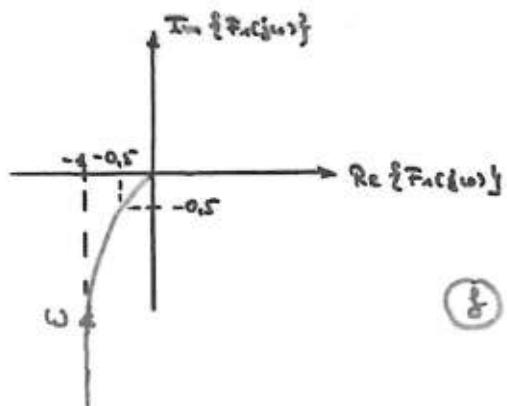
ges.: Ortskurve

⑥

$$F_1(i\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + i\omega} \cdot \frac{(-\omega^2 - i\omega)}{(-\omega^2 + i\omega)} = \frac{-i\omega^2}{\omega^2(\lambda + i\omega^2)} = i \frac{\omega^2}{\omega^2(\lambda + i\omega^2)}$$

$$F_1(i\omega) = -\frac{i}{\lambda + i\omega^2} - i \frac{1}{\omega(\lambda + i\omega^2)}$$

$\omega$	Real	Imaginär
0	-1	$\rightarrow -\infty$
1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\rightarrow \infty$	$\rightarrow 0$	$\rightarrow 0$



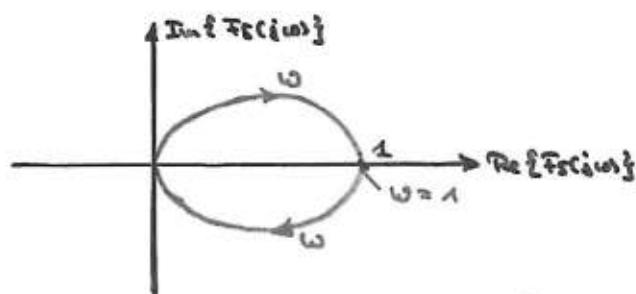
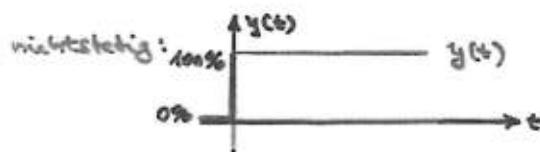
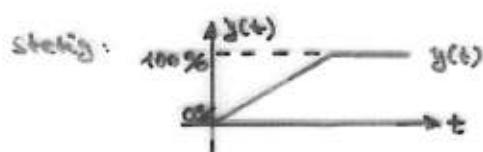
(1)

z.B.:  $F_2(i\omega) = \frac{2i\omega}{s^2 + 2s + 4}$  PDT<sub>2</sub>-System

z.B.: Ortskurve

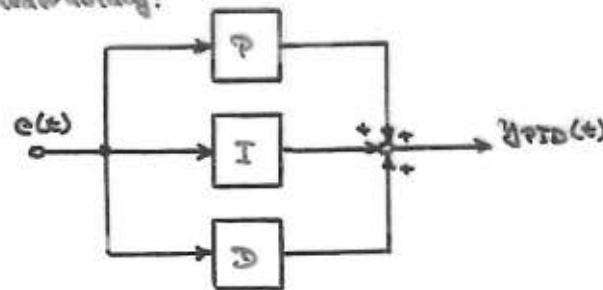
$$\begin{aligned} F_2(i\omega) &= \frac{2i\omega}{1 - \omega^2 + i2\omega} \cdot \frac{(1 - \omega^2 - i2\omega)}{(1 - \omega^2 - i2\omega)} = \frac{2i\omega - 2\omega^3 + 4\omega^2}{(1 - \omega^2)^2 + (2\omega)^2} = \frac{4\omega^2 + i2\omega(1 - \omega^2)}{(1 + \omega^2)^2} \\ &= \frac{4\omega^2}{(1 + \omega^2)^2} + i \frac{2\omega(1 - \omega^2)}{(1 + \omega^2)^2} \end{aligned}$$

$\omega$	Real	Imaginär
0	0	0
1	1	0
$\rightarrow \infty$	$\rightarrow 0$	$\rightarrow 0$

Im:  $\omega < 1 \rightarrow 1 - \omega^2 > 0 \rightarrow \text{Im} > 0$  $\omega > 1 \rightarrow 1 - \omega^2 < 0 \rightarrow \text{Im} < 0$ Stetiger (kontinuierlicher) Regler:Stetiger Regler: Bei stetigen Reglern ist die Stellgröße  $y(t)$  kontinuierlich einstellbar.Bei nichtstetigen Reglern kann  $y(t)$  nur diskrete Werte annehmen,  
z.B. beim Schalten  $\rightarrow$  nur Stellgrößen ein/falls

Stetiger PID-Regler:

Wiederholung:



$$y_{PID}(t) = k_p \cdot e(t) + k_i \cdot \int_0^t e(\tau) d\tau + k_d \cdot \frac{de(t)}{dt}$$

Stationäre Regelabweichung  $\rightarrow$  Endwertatz

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot E(s)]$$

$$\rightarrow x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot X(s)] ; \quad E(s) = W(s) - X(s) ; \quad X(s) = G_w(s) \cdot W(s)$$

$$\rightarrow e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ s \cdot W(s) \cdot \frac{1}{1+G_w(s)} \right] \quad \begin{aligned} \text{mit } G_w(s) &= \text{Schleifenverstärkung} \\ &= G_a(s) \cdot G_r(s) \end{aligned}$$

siehe 2. Vorlesung, Seite 6

$$G_w(s) = \frac{x(s)}{W(s)} \rightarrow X(s) = W(s) \cdot G_w(s)$$

Für die Sprungantwort folgt mit  $W(t) = \delta'(t)$  (Einheitsimpuls)

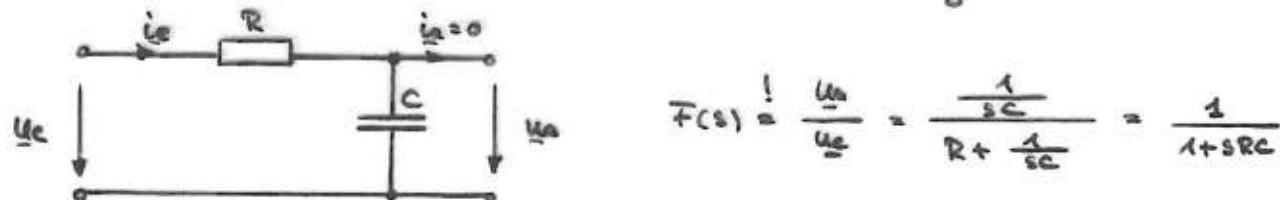
$$X(s) = Y_s \cdot G_w(s)$$

$$\rightarrow x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot X(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ s \cdot W(s) \cdot G_w(s) \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ s \cdot Y_s \cdot G_w(s) \right]$$

$$\Rightarrow \underline{x(\infty) = G_w(0)}$$

### Beispiel eines PI-Gliedes

Aufgabe: Bode-Diagramm ableiten aus der folgenden Schaltung



Mit  $s = j\omega$  und durch Einführung der Eckfrequenz  $\omega_c = \frac{1}{RC}$  mit  $T = RC$  folgt:

$$F(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$$

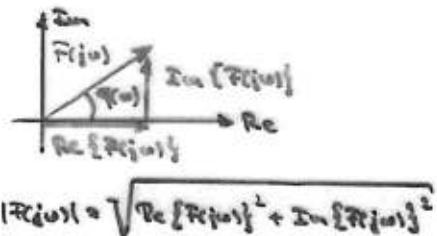
Die Zerlegung in Real- und Imaginärteil liefert:

$$F(j\omega) = \frac{1 - j\frac{\omega}{\omega_c}}{1 + (\frac{\omega}{\omega_c})^2} = \frac{1}{1 + (\frac{\omega}{\omega_c})^2} - j \frac{\frac{\omega}{\omega_c}}{1 + (\frac{\omega}{\omega_c})^2}$$

Für den Amplitudengang ergibt sich:

$$A(\omega) = |F(j\omega)| = \sqrt{\frac{1^2 + (\frac{\omega}{\omega_c})^2}{(1 + (\frac{\omega}{\omega_c})^2)^2}}$$

$$A(\omega) = |F(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\omega}{\omega_c})^2}}$$



Logarithmus:

$$|F(j\omega)|_{dB} = 20 \cdot \log_{10}(A(\omega))$$

Definitionen:

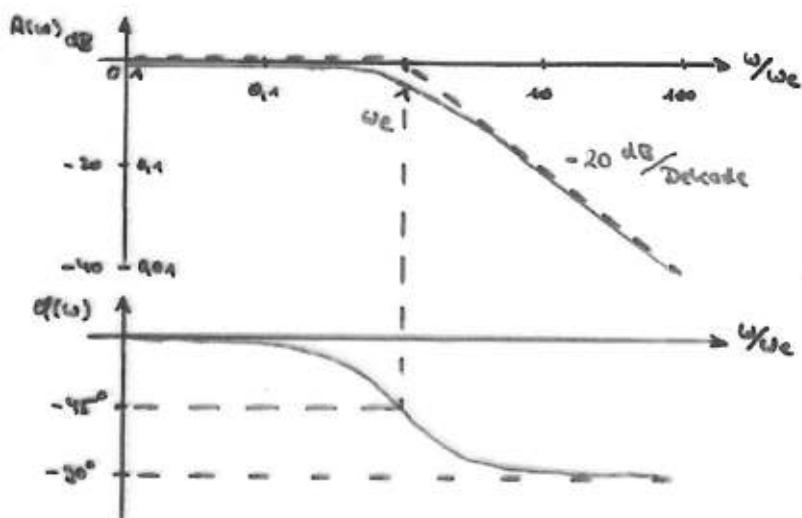
Spannung: Lichtung:

$$\frac{U_2}{U_1} = 20 \cdot \log\left(\frac{U_2}{U_1}\right) \quad \frac{P_2}{P_1} = 10 \cdot \log\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^2 \\ = 20 \cdot \log\left(\frac{U_2}{U_1}\right)$$

und für den Phasengang:

$$\varphi(\omega) = \arg\{F(j\omega)\} = \arctan \frac{\text{Im}\{F(j\omega)\}}{\text{Re}\{F(j\omega)\}}$$

$$\underline{\varphi(\omega) = \arg\{F(j\omega)\} = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)}$$



für  $\omega \gg \omega_c$  gilt:

$$A(\omega) \approx \frac{\omega_c}{\omega} \quad \text{bzw. } M(\omega)_{dB} = 20 \cdot \log \omega_c \cdot \omega^{-1} \\ \rightarrow M(\omega)_{dB} = -20 \cdot \log \omega \cdot \omega$$

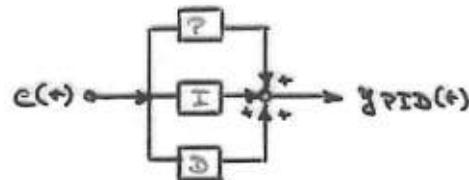
d.h. bei einer Verstärkung der Frequenz verringert sich die Verstärkung um den Faktor 10 bzw.  $20 \text{ dB/Decade}$ .

Folgerung 4. Vorlesung: Kontinuierlichen PID-Regler

$$y_p(t) = K_p \cdot e(t)$$

$$y_I(t) = K_I \cdot \int_0^t e(\tau) d\tau$$

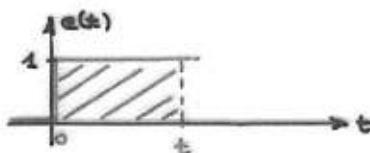
$$y_D(t) = K_D \cdot \frac{de(t)}{dt}$$



→ Ausgangsgrößen werden addiert:

$$y_{PID}(t) = y_p(t) + y_I(t) + y_D(t)$$

$$\underline{y}_{PID}(s) = K_p \cdot e(s) + K_I \cdot \int_0^s e(\tau) d\tau + K_D \cdot \frac{de(s)}{ds}$$



$$\rightarrow \int_0^t e(\tau) d\tau = \int_0^t 1 d\tau = 1 [\tau]_0^t = 1 \cdot (t - 0) = t \text{ [sec]}$$

$$K_I = \left[ \frac{1}{\text{sec}} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{de(s)}{ds} = \left[ \frac{1}{\text{sec}} \right] \rightarrow K_D = \left[ \text{sec} \right]$$

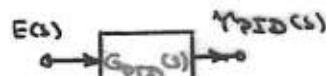
$$y_{PID}(s) = K_p \cdot e(s) + K_I \cdot \int_0^s e(\tau) d\tau + K_D \cdot \frac{de(s)}{ds} \quad (\text{ideal})$$

?

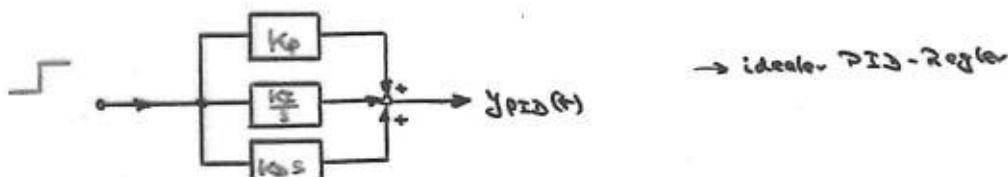
$$Y_{PID}(s) = K_p \cdot E(s) + K_I \cdot \frac{1}{s} \cdot E(s) + K_D \cdot s \cdot E(s)$$

Linearitätsmaß

$$G_{PID}(s) = \frac{Y_{PID}(s)}{E(s)} = K_p + \frac{K_I}{s} + K_D \cdot s$$



Spannungsauswert PID-Regler:



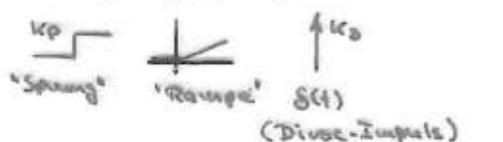
→ idealer PID-Regler

$$Y_{PID}(s) = G_{PID}(s) \cdot \frac{1}{s}$$

$$= \left[ K_p + \frac{K_I}{s} + K_D \cdot s \right] \cdot \frac{1}{s}$$

$$= \frac{K_p}{s} + \frac{K_I}{s^2} + K_D$$

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ K_p & K_I \cdot t & 1 \end{matrix}$$



Vgl. Tabelle Seite 11 in "Vorlesung - Regelungstechnik EE-S13 - 2. Laplace Transformation"

$\Sigma$ : Sprungantwort:



Reiner PID-Regler: D-Element wird durch DT<sub>N</sub>-Element ersetzt:

$$K_{DS} \rightarrow \frac{K_D \cdot s}{(1+sT_N)}$$

$$\rightarrow y_{PID}(t) = K_p \cdot e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau + K_D \cdot \frac{de(t)}{dt} \quad (\text{ideal})$$

$$\hookrightarrow Y_{PID,\text{real}}(s) = K_p \cdot E(s) + K_I \cdot \frac{1}{s} \cdot E(s) + \frac{K_D \cdot s}{(1+sT_N)} E(s)$$

$$G_{PID,\text{real}}(s) = \frac{Y_{PID,\text{real}}(s)}{E(s)} = K_p + \frac{K_I}{s} + \frac{K_D \cdot s}{1+sT_N}$$

Spurungsfunktion:  $y_{PID,\text{real}}(t) = G_{PID,\text{real}}(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{K_p}{s} + \frac{K_I}{s^2} + \frac{K_D \cdot s}{1+sT_N} \cdot \frac{1}{s}$

$$y_{PID} = K_p \cdot \left[ e(t) + \frac{K_I}{K_p} \cdot \int_0^t e(\tau) d\tau + \frac{K_D}{K_p} \cdot \frac{de(t)}{dt} \right] \quad K_p \text{ ausgeklammert}$$

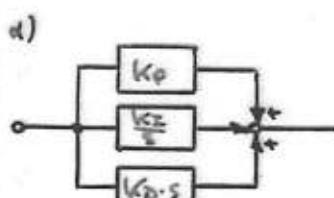
$$\frac{1}{T_N} \quad \frac{1}{T_V}$$

$$T_H = \frac{K_p}{K_I}$$

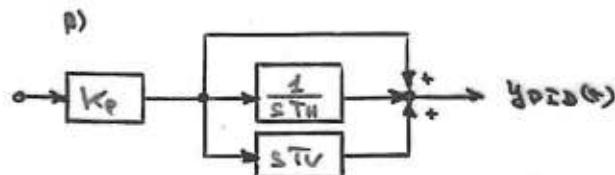
Nachstellzeit

$$T_V = \frac{K_D}{K_p}$$

Vorhaltzeit



$$\Rightarrow$$



$$y_{PID}(t)$$

$$\hookrightarrow y_P(t)$$

$$\hookrightarrow y_I(t)$$

$$\rightarrow y_d(t)$$

$$\hookrightarrow y_{PS}(t)$$

$$\hookrightarrow y_{PD}(t)$$

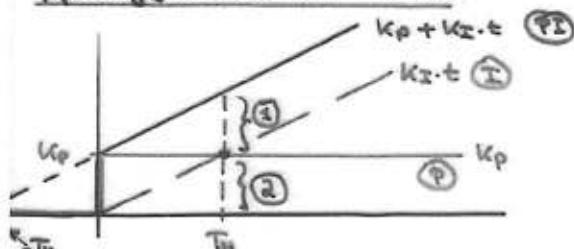
Bsp.: PI

$$G_{PI}(s) = K_p + \frac{K_I}{s}$$

$$(B) = K_p \cdot \left( 1 + \frac{1}{sT_N} \right)$$

$$G_{PI}(s) = K_p \cdot \left( \frac{1+sT_N}{sT_N} \right)$$

Spurungsfunktion PI-Glied:



$$y_{PI}(t=T_N) = K_p + K_I \cdot T_N = 2K_p$$

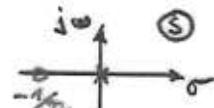
d.h. zum Zeitpunkt  $t = T_N$  gilt: ① = ②

$T_N$  ist die Zeit, welche bei der Spurungsentwert benötigt wird, um aufgrund der I-Wirkung eine gleichmäßige Stellgrößenänderung zu erzielen, wie sie infolge der P-Wirkung sofort entsteht.

Pol-/Nullstellen, Bode-Diagramm und Oberschwingen:

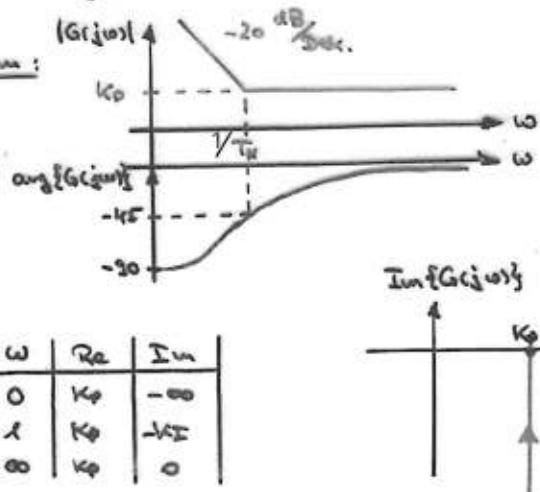
$$G_{PI}(s) = K_p + \frac{K_I}{s} = K_p \cdot \frac{1+sT_N}{sT_N}$$

Pol-/Nullstellen:

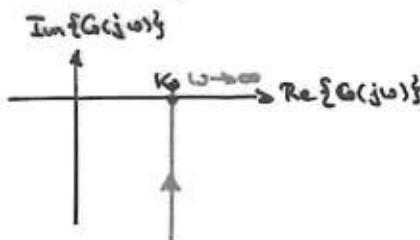


$$G_{PT}(j\omega) = K_p + \frac{K_I}{j\omega} = K_p - j \frac{K_I}{\omega} \approx K_p \cdot [1 - j \frac{1}{\omega T_N}] \quad (3)$$

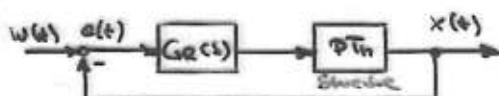
Bode-Diagramm:



<u>Outskurve:</u>	$\omega$	$\text{Re}$	$\text{Im}$
	0	$K_p$	$-\infty$
	$\infty$	$K_p$	$-K_I$
	$\rightarrow \infty$	$K_p$	0



Geschlossene Regelstrecke mit P<sub>TN</sub>-Strecke:



Frage: Wie groß ist die bleibende Regelabweichung bei den drei Eingangssignalen  $w(t)$ :

- a) Sprung:  $\square$   $1 \quad 0 \rightarrow w(s) \approx \frac{1}{s}$
- b) Rampe (lineare Eingangssignal):  $\diagdown$   $t \quad 0 \rightarrow w(s) \approx \frac{1}{s^2}$
- c) Quadratische Eingangssignal (Parabolförmig):  $\curvearrowleft$   $t^2 \quad 0 \rightarrow w(s) \approx \frac{2}{s^3}$

Stationäre Regelabweichung:  $e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} (s \cdot E(s))$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} (s \cdot W(s) \cdot \frac{1}{1+G(s)}) \quad (\text{wurde oben hergeleitet})$$

$$\text{mit } G(s) = G_C(s) \cdot G_P(s)$$

$$T_1 = T_2 = \dots = T_N = T$$

$$\text{Übertragungsfunktion P}_{TN}\text{-Strecke: } G_{PTN} = \frac{K_S}{(1+sT_1)(1+sT_2) \cdots (1+sT_N)} = \frac{K_S}{(1+sT)^N}$$

① P-Regler und P<sub>TN</sub>-Strecke:  $G_C(s) = \frac{K_p \cdot K_S}{(1+sT)^N}$

$$w(t) = \square : e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1 + \frac{K_p \cdot K_S}{(1+sT)^N}} \right) = \frac{1}{1 + K_p \cdot K_S}$$

$$w(t) = \diagdown : e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( s \cdot \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{K_p \cdot K_S}{(1+sT)^N}} \right) \rightarrow \infty \quad //$$

$$w(t) = \curvearrowleft : e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( s \cdot \frac{2}{s^3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{K_p \cdot K_S}{(1+sT)^N}} \right) \rightarrow \infty \quad //$$

② I-Regler mit P<sub>TN</sub>-Strecke:

$$G_C(s) = \frac{K_I}{s} \rightarrow G_C(s) = \frac{K_I \cdot K_S}{s(1+sT)^N}$$

$$w(t) = \square : e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1 + \frac{K_I \cdot K_S}{s(1+sT)^N}} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{1}{1 + \frac{K_I \cdot K_S}{s(1+sT)^N}} \right) = \dots$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{s(1+sT)^n}{s(1+sT)^n + K_p K_s} \right) \rightarrow 0 \quad (4)$$

$$W(s) = \text{---} : e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{(1 + \frac{K_p K_s}{s(1+sT)^n})} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{1}{s} \cdot \frac{s(1+sT)^n}{s(1+sT)^n + K_p K_s} \right) \\ = \frac{1}{K_p K_s}$$

	$w(t)$	$\text{---}$	$\text{---}$	$\text{---}$
①	P mit $P_{Th}$	$\frac{1}{1+K_p K_s}$	$\infty$	$\infty$
②	I mit $P_{Th}$	0	$\frac{1}{K_p K_s}$	$\infty$
	$I^2$ mit $P_{Th}$	0	0	$\frac{1}{K_p K_s}$

Die Regelabweichung (Regel = abweichend) kann umso kleiner gehalten werden, je größer die Kreisverstärkung  $K_p \cdot K_s$  bzw.  $K_i \cdot K_s$  gewählt wird. Häufig führt jedoch eine zu große Kreisverstärkung schnell zu Instabilität!

### 1. additive und Multiplikative Form:

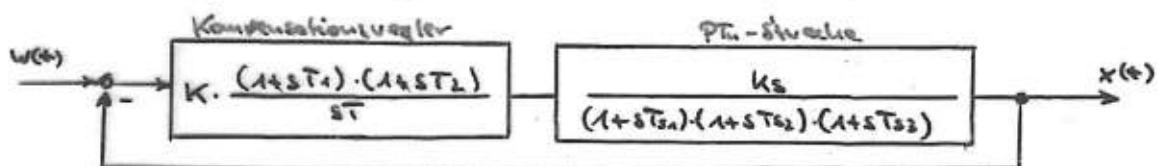
Additive Form: Index "a"

Multiplikative Form: Index "m"

$$G_{PID,a} = K_p a \cdot \left[ 1 + \frac{1}{s T_{Na}} + s T_{Va} \right] \quad \text{Additive Form} \quad (a)$$

↑↓!

$$G_{PID,m} = K_p m \cdot \frac{(1+sT_{Nm}) \cdot (1+sT_{Vm})}{s T_{Nm}} \quad \text{Multiplikative Form} \quad (m)$$



$$G_{CCS} = \frac{K_p \cdot K_s (1+sT_{Na}) \cdot (1+sT_{L})}{sT (1+sT_{Tz1}) \cdot (1+sT_{Tz2}) \cdot (1+sT_{Tz3})} \quad \text{Wenn } T_{L} = T_{Tz1} \text{ und } T_{L} = T_{Tz2}$$

$$G_{PID,a} = \frac{K_p a}{s T_{Na}} \cdot \left( 1 + s T_{Na} + s^2 T_{Na} T_{Va} \right) \quad \text{aus (a)}$$

$$G_{PID,m} = \frac{K_p m}{s T_{Nm}} \cdot \left( 1 + s(T_{Nm} + T_{Vm}) + s^2 T_{Vm} T_{Nm} \right) \quad \text{aus (m)}$$

Koeffizientenvergleich:  $\Rightarrow T_{Nm}, T_{Vm}, K_p m = f(K_p, T_{Va}, T_{Na})$

$$\text{Es ergibt sich: } K_p m = \frac{K_p a}{2} \cdot \left[ 1 + \sqrt{1 - 4 \cdot \frac{T_{Va}}{T_{Na}}} \right]$$

$$T_{Nm} = \frac{T_{Na}}{2} \cdot \left[ 1 + \sqrt{1 - 4 \cdot \frac{T_{Va}}{T_{Na}}} \right]$$

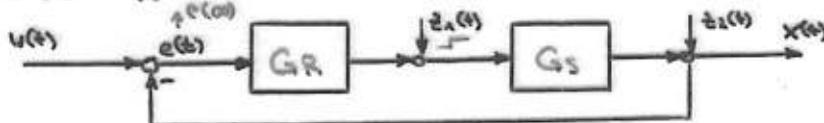
$$T_{Vm} = \frac{T_{Na}}{2} \cdot \left[ 1 - \sqrt{1 - 4 \cdot \frac{T_{Va}}{T_{Na}}} \right]$$

Kreisverstärkung kommt später im Detail ...

## Stationäres Verhalten:

(5)

Man betrachte den bekannten Regelkreis:



Für Änderungen der Führungsgroße erhält man mit dem Endwertatz für die Regelabweichung:

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} (s \cdot E(s)) = \lim_{s \rightarrow 0} (s \cdot W(s) \cdot \frac{1}{1+G_0(s)}) \quad \text{mit } W(s) = \text{Führungsgroße}$$

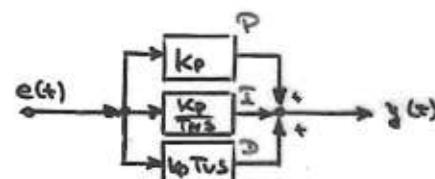
Frage: Welche stationäre Regelabweichung ergibt sich bei einem Sprung der Störgröße z\_1(t)?

Störverhalten:  $e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} (s \cdot E(s)) \quad \text{mit } E(s) = -K(s), \text{ da } W(s) = 0 \text{ und } \frac{x(s)}{z_1(s)} = 0$

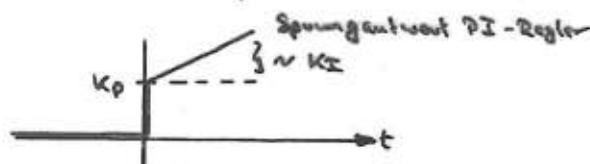
$$\begin{aligned} &= \lim_{s \rightarrow 0} (-s \cdot K(s)) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( -s \cdot \underbrace{\frac{G_S}{1+G_F \cdot G_R}}_{\frac{1}{s}} \right) \quad \text{denn: } \frac{x(s)}{z_1(s)} = G_{z_1}(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} (-G_{z_1}(s)) = -G_{z_1}(0) \end{aligned}$$

Regler:  $e(t) \rightarrow \boxed{G_R} \rightarrow y(t)$

$$\begin{aligned} G_{PID}(s) &= K_P + \frac{K_I}{s} + K_D \cdot s \\ &= K_P \left[ 1 + \frac{1}{sT_N} + sT_V \right] \\ &= K_P \frac{1+sT_{NA}+s^2T_{NA}T_{VA}}{sT_{NA}} \end{aligned}$$



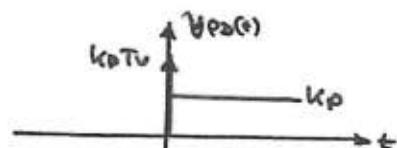
$$P\bar{I}: \quad G_{P\bar{I}}(s) = K_P + \frac{K_I}{s} = K_P \cdot \frac{1+sT_N}{sT_N}$$



$$PD: \quad G_{PD}(s) = K_P + K_D \cdot s = K_P \cdot (1+sT_V)$$

$$\text{Sprungantwort: } Y_{PD}(s) = \frac{K_P}{s} \cdot (1+sT_V) = \frac{K_P}{s} + K_P \cdot T_V$$

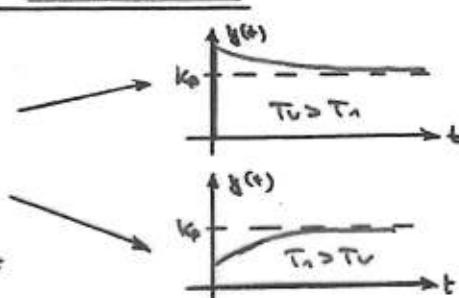
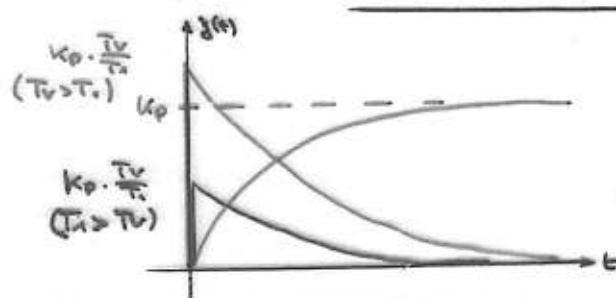
$$y_{PD}(t) = K_P + K_P \cdot T_V \cdot \delta(t)$$



$$\text{Regler } P\bar{D} \rightarrow P\bar{D}T_1: \quad G_{P\bar{D}T_1} = K_P \cdot \frac{(1+sT_V)}{(1+sT_1)} \quad (T_1 > T_V)$$

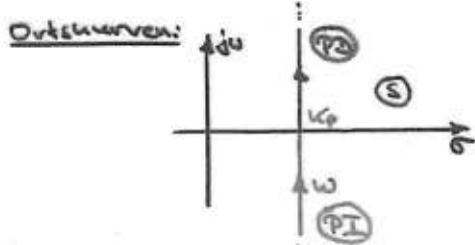
$$\text{Sprungantwort: } Y_{P\bar{D}T_1}(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{K_P(1+sT_V)}{(1+sT_1)} = \frac{K_P}{s(1+sT_1)} + \frac{K_P T_V}{(1+sT_1)}$$

$$y_{P\bar{D}T_1}(t) = K_P \cdot (1 - e^{-\frac{t}{T_1}}) + K_P \frac{T_V}{T_1} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}}$$

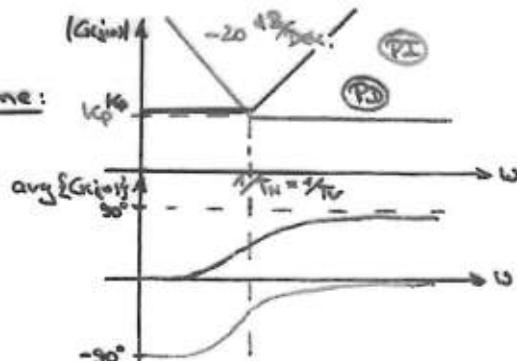


### Ortskurven und Bode-Diagramm $G_{PZ}(s)$ und $G_{PD}(s)$

PT:  
 $G_{PZ}(s) = K_p + \frac{K_a}{s} = K_p + \frac{K_a}{T_H} \cdot \frac{1}{s}$   
 $\rightarrow G_{PZ}(j\omega) = K_p - j \frac{K_a}{T_H} \cdot \frac{1}{\omega}$

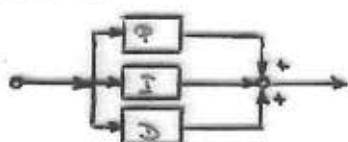


PD:  
 $G_{PD}(s) = K_p + K_a \cdot s = K_p + K_a \cdot T_H \cdot s$   
 $\rightarrow G_{PD}(j\omega) = K_p + j K_a \cdot T_H \cdot \omega$



### Umwandlung von additiver in multiplikative Form und umgekehrt

Additive Form: (Parallele Form)



$$G_{PID,a}(s) = K_{pa} \cdot \left[ 1 + \frac{1}{sT_{Na}} + sT_{Va} \right]$$

$$G_{PID,a}(s) = \frac{K_{pa} \cdot (1 + sT_{Na} + s^2(T_{Na}T_{Va}))}{sT_{Na}}$$

Multiplikative Form: (Serielle Form)



$$G_{PID,m}(s) = K_{pm} \cdot \frac{(1+sT_{Na})(1+sT_{Va})}{sT_{Na}}$$

$$G_{PID,m}(s) = \frac{K_{pm} \cdot (1+s(T_{Na}+T_{Va})+s^2(T_{Na}T_{Va}))}{s \cdot T_{Na}}$$

#### Koeffizientenvergleich:

- $\frac{K_{pa}}{T_{Na}} = \frac{K_{pm}}{T_{Na}}$  ①
- $T_{Na} = T_{Nm} + T_{Vm}$  ②
- $T_{Na}T_{Va} = T_{Nm} \cdot T_{Vm}$  ③

②:

Multipplikativ  $\rightarrow$  Additiv

$$T_{Na} = T_{Nm} + T_{Vm}$$

aus ③ mit ②:

$$T_{Va} = \frac{T_{Nm} \cdot T_{Vm}}{T_{Nm} + T_{Vm}}$$

aus ③ mit ②:

$$K_{pa} = \frac{K_{pm}}{T_{Na}} \cdot (T_{Nm} + T_{Vm})$$

#### 2 Umwandlungswege:

a) Additiv  $\rightarrow$  Multiplikativ

$$K_{pa}, T_{Na}, T_{Va} \Rightarrow K_{pm}, T_{Nm}, T_{Vm}$$

$$= f(K_{pa}, T_{Na}, T_{Va})$$

b) Multiplikativ  $\rightarrow$  Additiv

$$K_{pm}, T_{Na}, T_{Vm} \Leftarrow K_{pa}, T_{Nm}, T_{Vm}$$

$$= f(K_{pm}, T_{Na}, T_{Vm})$$

Additiv  $\rightarrow$  Multiplikativ (1/2)

aus ②:  $T_{Vm} = T_{Na} - T_{Nm}$

aus ③:  $T_{Na}T_{Va} = T_{Nm}(T_{Na} - T_{Nm}) = T_{Nm}T_{Na} - T_{Nm}^2$   
 $\rightarrow T_{Nm}^2 - T_{Nm}T_{Na} + T_{Na}T_{Va} = 0$

$$\hat{x}^2 + px + q = 0$$

mit Lösungen:  $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

$$\rightarrow T_{Nm,1/2} = \frac{T_{Na}}{2} \pm \sqrt{\frac{T_{Na}^2}{4} - T_{Na}T_{Va}}$$

$$T_{Nm,1/2} = \frac{T_{Na}}{2} \pm \frac{T_{Na}}{2} \sqrt{1 - 4 \frac{T_{Va}}{T_{Na}}}$$

$$T_{Nm,1} = \frac{T_{Na}}{2} + \frac{T_{Na}}{2} \sqrt{1 - 4 \frac{T_{Va}}{T_{Na}}}$$

$$T_{Nm,2} = \frac{T_{Na}}{2} - \frac{T_{Na}}{2} \sqrt{1 - 4 \frac{T_{Va}}{T_{Na}}}$$

$T_{Na} > 0$

Additiv  $\rightarrow$  Multiplikativ (2/2)

$$\text{aus ①: } T_{Nm} = T_{Na} - T_{Vm}$$

$$\text{aus ③: } T_{Na} \cdot T_{Vm} = (T_{Na} - T_{Vm}) \cdot T_{Vm} \\ = T_{Na} \cdot T_{Vm} - T_{Vm}^2$$

$$\Rightarrow T_{Vm}^2 - T_{Na} \cdot T_{Vm} + T_{Na} \cdot T_{Vm} = 0 \quad \text{quadratische Gleichung}$$

$$\text{Lösungen: } T_{Vm1/2} = \frac{T_{Na}}{2} \pm \sqrt{\frac{T_{Na}^2}{4} - T_{Na} \cdot T_{Vm}}$$

$$T_{Vm1} = \frac{T_{Na}}{2} + \frac{T_{Na}}{2} \sqrt{1 - 4 \frac{T_{Vm}^2}{T_{Na}^2}}$$

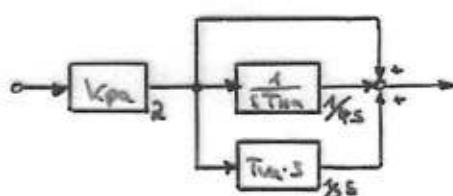
$$T_{Vm2} = \frac{T_{Na}}{2} - \frac{T_{Na}}{2} \sqrt{1 - 4 \frac{T_{Vm}^2}{T_{Na}^2}}$$

$$T_{Vm1} = ?$$

Beachte: Die Realisierung eines additiven PID-Reglers mit einem Regler in multiplikativer Form ist nur möglich für  $T_{Na} \geq 4 \cdot T_{Vm}$ , da sonst  $K_{Vm}$ ,  $T_{Nm}$  und  $T_{Vm}$  nicht reell sind.  
 $\rightarrow$  keine Lösungen  $\emptyset$

Beispiele mit Zahlenwerten:

1) Gegeben: Additive Form mit den Werten



$$K_{Vm} = 2$$

$$T_{Vm} = \frac{1}{2} \text{ sec}$$

$$T_{Na} = 4 \text{ sec}$$

Gesucht: Multiplikative Form mit den Kenngrößen  $K_{Vm}$ ,  $T_{Vm}$  und  $T_{Nm}$

$$\xrightarrow{K_{Vm}} \xrightarrow{(1+sT_{Nm})} \xrightarrow{(1+sT_{Vm})} \xrightarrow{G_{PIDm} = K_{Vm} \cdot \frac{(1+sT_{Vm}) \cdot (1+sT_{Vm})}{sT_{Nm}}}$$

Kenngrößen der additiven Form eingesetzt in Formeln für multiplikative Form ergibt:

$$T_{Nm} = \frac{T_{Na}}{2} + \frac{T_{Na}}{2} \sqrt{1 - 4 \frac{T_{Vm}^2}{T_{Na}^2}} \\ = 2 + 2 \cdot \sqrt{1 - 4 \frac{\frac{1}{4}}{4}} \\ = 2 + 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$T_{Nm} = 2 + \sqrt{2}$$

$$T_{Vm} = \frac{T_{Na}}{2} - \frac{T_{Na}}{2} \sqrt{1 - 4 \frac{T_{Vm}^2}{T_{Na}^2}} \\ = 2 - 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \\ T_{Vm} = 2 - \sqrt{2}$$

$$K_{Vm} = \frac{K_{Vm}}{T_{Na}} \cdot T_{Vm} = \frac{1}{4} \cdot (2 + \sqrt{2}) = 1 + \frac{2}{2 \cdot 2} \cdot \sqrt{2}$$

$$K_{Vm} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

2) Gegeben: Additive PID-Regler mit

$$K_{Vm} = 100$$

$$T_{Na} = 100 \text{ sec}$$

$$T_{Vm} = 2 \text{ sec}$$

$$\underline{\text{Gesucht: }} G_{PIDm} = ?$$

$$\begin{aligned} T_{\text{Nm}} &= \frac{100}{2} + \frac{100}{2} \sqrt{1 - 4 \cdot \frac{9}{100}} \\ &\approx 50 + 50 \cdot \sqrt{\frac{100-36}{100}} = 50 + 50 \cdot \sqrt{\frac{64}{100}} = 50 + 50 \cdot \frac{8}{10} = 50 + 5 \cdot 8 \end{aligned}$$

$$\underline{T_{\text{Nm}} = 90}$$

$$T_{\text{Vm}} = 50 - 40$$

$$\underline{T_{\text{Vm}} = 10}$$

$$K_{\text{pa}} = \frac{K_{\text{pm}}}{T_{\text{Nm}}} \cdot T_{\text{Vm}} = \frac{100}{100} \cdot 30$$

$$\underline{K_{\text{pa}} = 30}$$

$$\Rightarrow G_{\text{PIDm}}(s) = K_{\text{pm}} \cdot \frac{(1+sT_{\text{Nm}}) \cdot (1+sT_{\text{Vm}})}{sT_{\text{Nm}}} = K_{\text{pm}} \cdot \frac{(1+s(T_{\text{Nm}}+T_{\text{Vm}})+s^2T_{\text{Nm}} \cdot T_{\text{Vm}})}{sT_{\text{Nm}}} \quad (4)$$

$$= 30 \cdot \frac{(1+s(90+10)+s^2 30 \cdot 10)}{s 90}$$

$$\underline{G_{\text{PIDm}}(s) = \frac{90(1+100s+900s^2)}{90s}}$$

3) Gegeben: Übertragungsfunktion in multiplikativer Form

$$G_{\text{PIDm}}(s) = s \cdot \frac{(1+10s) \cdot (1+5s)}{s} \quad (4+5)$$

Gesucht:  $G_{\text{PIDa}}(s) = ?$

Koeffizienten vergleichen:  $T_{\text{Nm}} = 10 \text{ sec}$   
 $(4) = (4+5)$   $T_{\text{Vm}} = 5 \text{ sec}$

$$\textcircled{2}: T_{\text{Na}} = T_{\text{Nm}} + T_{\text{Vm}}$$

$$\underline{T_{\text{Na}} = 15 \text{ sec}}$$

$$\textcircled{4}: \frac{K_{\text{pa}}}{T_{\text{Na}}} = \frac{K_{\text{pm}}}{T_{\text{Nm}}} \stackrel{!}{=} 5$$

$$\rightarrow K_{\text{pa}} = 5 \cdot T_{\text{Na}} = 5 \cdot 15$$

$$\underline{K_{\text{pa}} = 75}$$

$$\textcircled{3} \quad T_{\text{Va}} = \frac{T_{\text{Nm}} \cdot T_{\text{Vm}}}{T_{\text{Na}}}$$

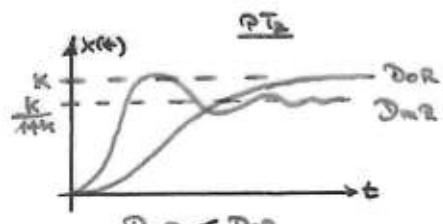
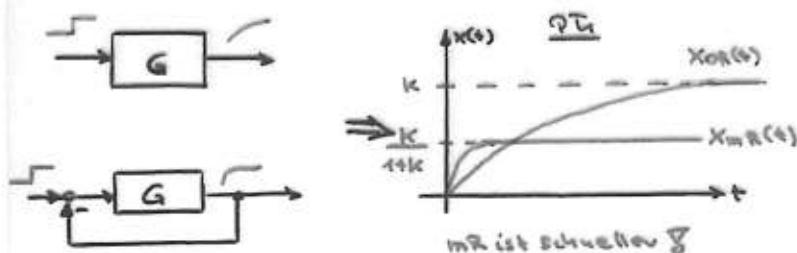
$$= \frac{10 \cdot 5}{15} \text{ sec}$$

$$\underline{T_{\text{Va}} = \frac{10}{3} \text{ sec}}$$

$$\Rightarrow G_{\text{PIDa}}(s) = K_{\text{pa}} \cdot \left( 1 + \frac{1}{sT_{\text{Na}}} + sT_{\text{Va}} \right)$$

$$\underline{G_{\text{PIDa}}(s) = 75 \cdot \left( 1 + \frac{1}{15s} + \frac{10}{3}s \right)}$$

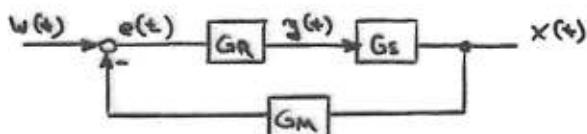
Wiederholung PT<sub>1</sub>-Glieder mit und ohne Rückkopplung:



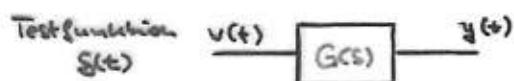
je nach Dämpfung Überschwingen oder sogar Instabilität ☹

### Stabilität:

Frage: Wenn wird der Regelkreis der folgenden allgemeinen Form instabil?



Definition Stabilität: Ein System ist stabil, wenn die Gewichtsfunktion (Antwort des Systems auf einen Impuls bzw. Dirac-Stoß) für  $t \rightarrow \infty$  zu Null wird, d.h.  $g(t \rightarrow \infty) = 0$ .



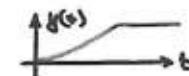
Eigenschaft im Bildbereich über:

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$$

\*  $\lim_{t \rightarrow \infty} \{g(t)\} = g(\infty) = 0$  : stabil



\*  $\lim_{t \rightarrow \infty} \{g(t)\} = \text{const.}$  : grenzstabil



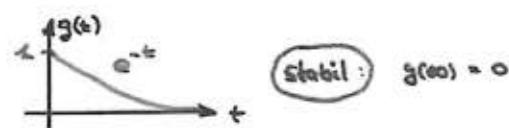
\*  $\lim_{t \rightarrow \infty} \{g(t)\} \rightarrow \infty$  : instabil



Beispiele: Dabei Beachtung der Lage der Polstellen

PT<sub>1</sub>:

$$G(s) = \frac{1}{1+s} \Leftrightarrow g(t) = e^{-t}$$



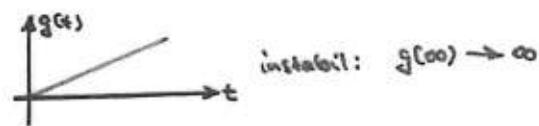
I-Glied:

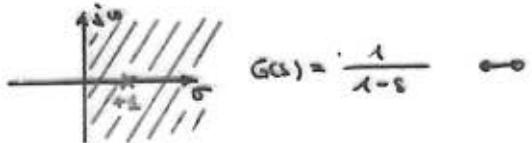
$$G(s) = \frac{1}{s} \Leftrightarrow g(t) = t$$



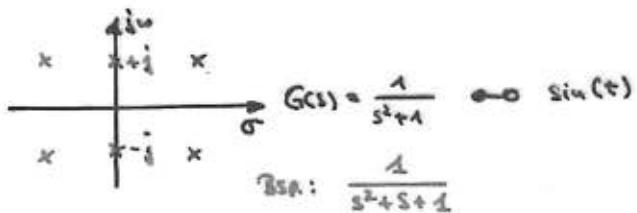
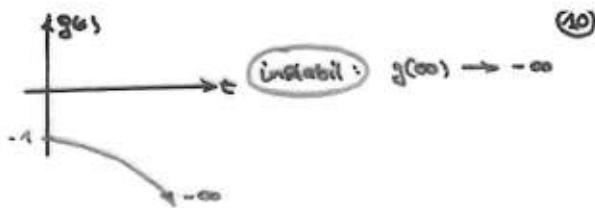
I<sub>2</sub>-Glied:

$$G(s) = \frac{1}{s^2} \Leftrightarrow g(t) = t^2$$

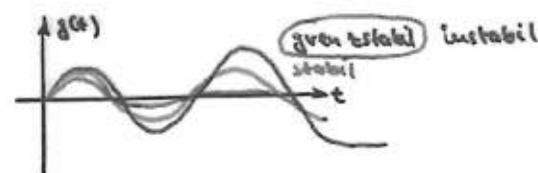




$$G(s) = \frac{1}{s+2} \quad \Rightarrow \quad g(t) = -e^{-2t}$$

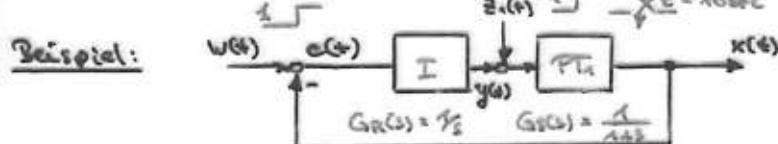


$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 1} \quad \Rightarrow \quad g(t) = \sin(t)$$



## G. Verteilung RT, EEB

Seite 1-5: siehe Zusatzblätter "Stabilitätsbetrachtung aufgrund der Lage der Pole"



a) Bestimmen Sie  $G_{w(s)}$ ,  $G_{z(s)}$ ,  $G_{o(s)}$  und PN-Diagramm von  $G_{w(s)}$ .

b) Bestimmen Sie  $x(t)$ ,  $c(t)$ ,  $y(t)$  für  $w(t) = \underline{1}$  und  $\tau_1(t) = 0$ .

c) Bestimmen Sie den Wert  $c(0)$  über den Grenzwertsatz.  
und  $y(00)$

d) Bestimmen Sie die Stabilität des Regelkreises (stabil oder instabil).

$$\text{zu a)} \quad G_{z(s)} = \frac{G_c(s)}{1 + G_{w(s)} \cdot G_c(s)} = \frac{\frac{1}{s+2}}{1 + \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s+2}} = \frac{\frac{1}{s+2}}{1 + \frac{1}{s(s+3)}} = \frac{\frac{1}{s+2}}{\frac{s(s+1)}{s(s+3)} + 1}$$

$$= \frac{1}{s+2} \cdot \frac{s(s+3)}{s(s+1) + 1}$$

$$G_{z(s)} = \frac{s}{s(s+1) + 1}$$

$$G_{w(s)} = \frac{G_w(s) \cdot G_c(s)}{1 + G_{w(s)} \cdot G_c(s)} = \frac{\frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s+2}}{1 + \frac{1}{s(s+1)}} = \frac{\frac{1}{s(s+1)}}{1 + \frac{1}{s(s+1)}} = \frac{\frac{1}{s(s+1)}}{\frac{s(s+1) + 1}{s(s+1)}}$$

$$= \frac{1}{s(s+1)} \cdot \frac{s(s+1)}{s(s+1) + 1}$$

$$G_{w(s)} = \frac{1}{s(s+1) + 1}$$

$$G_o(s) = G_{w(s)} \cdot G_{c(s)} = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s+2}$$

$$G_o(s) = \frac{1}{s(s+3)}$$

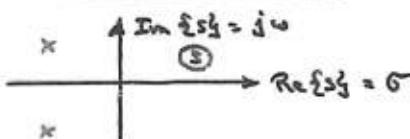
PN-Diagramm:

\* keine Nullstellen

\* Pole:  $s^2 + s + 1 = 0$

$$\rightarrow s_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1}$$

$$s_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm j \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$\begin{aligned} & x^2 + px + q = 0 \\ & \rightarrow x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \end{aligned}$$

zu d) Nach Lage der Pole: stabil !

Zu b) - Allgemeiner Ansatz mit  $\tilde{x}(s)$ :

$$X(s) = G_w(s) \cdot w(s) + G_{\tilde{x}}(s) \cdot \tilde{x}(s)$$

$$\tilde{x}(s) = 0 : X(s) = G_w(s) \cdot w(s) \quad \text{mit } w(s) = \frac{1}{s}$$

mit  $G_w(s)$  aus Teil a) folgt:

$$X(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1} \cdot \frac{1}{s}$$

Laplace-Rücktransformation über Tabellen (z.B. Lüttich, Wendt: Taschenbuch der Regelungstechnik  
Tabelle S. 88, Nr. 82)

$$\rightarrow \frac{\omega_0^2}{(s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2) \cdot s} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{\sqrt{1-D^2}} \cdot e^{-D\omega_0 t} \cdot \sin(\omega_0 \sqrt{1-D^2} \cdot t + \phi)$$

mit  $\phi = \arccos(D)$

$$\text{Koeffizientenvergleich: } \omega_0^2 = 1 \rightarrow \omega_0 = 1$$

$$2D\omega_0 = 1 \rightarrow D = \frac{1}{2}$$

$$\hookrightarrow \sqrt{1-D^2} = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

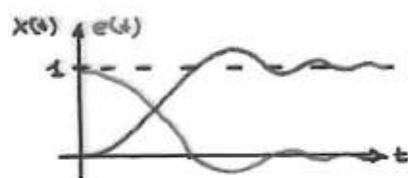
$$\Rightarrow x(t) = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot e^{-\frac{t}{2}} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \phi\right) \quad \phi = \arccos(\frac{1}{2}) \rightarrow \cos(\phi) = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \phi = \frac{\pi}{3} \approx 60^\circ$$

$$\hookrightarrow \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

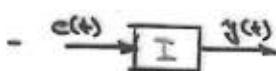
Für  $t=0$  erhält man somit folgender Startwert:

$$x(t=0) = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ x(t=0) = 0$$

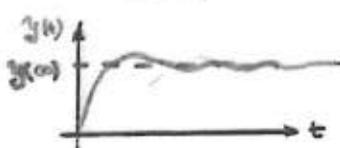


$$- e(t) = w(t) - x(t)$$

$$e(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot e^{-\frac{t}{2}} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \phi\right)$$



$$y(t) = \int_0^t e(\tau) d\tau$$



$$\text{Zu c)} \quad E(s) = w(s) - x(s) = w(s) - G_w(s) \cdot w(s)$$

$$= w(s) \cdot [1 - G_w(s)] = \frac{1}{s} \cdot \left[1 - \frac{1}{s(s+1)+1}\right]$$

$$= \frac{1}{s} \cdot \left[\frac{s(s+1)+1-1}{s(s+1)+1}\right] = \frac{1}{s} \cdot \left[\frac{s(s+1)}{s(s+1)+1}\right]$$

$$E(s) = \frac{s+1}{s(s+1)+1}$$

$$\rightarrow Y(s) = E(s) \cdot G_R(s) = E(s) \cdot \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{s+1}{s(s^2+s+1)}$$

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot y(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{1+s}{s^2+s+1} \right)$$

$$\underline{y(\infty) = 1}$$

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot E(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{s \cdot (s+1)}{s^2+s+1} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{s(s+1)}{s(s+1)+s^2} \right)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1+s}$$

$$\underline{e(\infty) = 0}$$

Zurück zum Thema:

Bewertung der Stabilität aufgrund der Pole:

Pole von  $G(s)$  mit  $G(s) = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + b_3 s^3 + \dots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + \dots + a_n s^n}$  mit  $m < n$

$$G(s) = \frac{Z(s)}{N(s)}$$

Algebraisches Kriterium:

$$G_0(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}$$

$$G_{1,1}(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}$$

$$G_{2,1}(s) = \frac{1}{1+G(s)}$$

$\Rightarrow$  Charakteristisches Polynom:

$$P(s) = 1+G(s)$$

$$P(s) = 1+G(s)$$

$$\begin{aligned} &= 1 + \frac{Z(s)}{N(s)} = \frac{N(s) + Z(s)}{N(s)} \\ &= \frac{(a_0+b_0) + (a_1+b_1)s + (a_2+b_2)s^2 + \dots + (a_m+b_m)s^m}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n} \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Betrachtung des Zählers von  $P(s)$ :  $a+b \stackrel{!}{\geq} 0$

$$P(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_m s^m \stackrel{!}{=} 0$$

Beispiel von oben:  $G(s) = G_0(s) \cdot G_1(s) = \frac{1}{s(s+1)}$

$$\rightarrow P(s) = 1+G(s) = 1 + \frac{1}{s(s+1)}$$

$$= \frac{s^2+s+1}{s^2+s} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\rightarrow P(s) \approx 0 = s^2+s+1 = 0$$

$$\Rightarrow a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 1$$

## Stabilitätskriterium nach Hurwitz

$$P(s) = 1 + G(s) = 0$$

→ Zähler von  $P(s)$  gleich null:

$$Z(s) = d_0 + d_1 s + d_2 s^2 + \dots + d_n s^n = 0$$

Allgemeine Form:

$$Z(s) = \sum_{i=0}^n a_i s^i = 0$$

Man bildet aus den Koeffizienten  $a_i$  eine  $(n,n)$ -Determinante  $H_n$  der folgenden Form:

$$H_n = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & \dots & & & & a_n \end{bmatrix}$$

Dabei besteht die erste Zeile nur aus den Koeffizienten mit ungeradem Index und die zweite Zeile nur aus denen mit geradem Index. Die folgenden Zeilenpaare sind jeweils um eine Spalte nach rechts verschoben. Koeffizienten, deren Indices größer als  $n$  oder kleiner als Null wären, werden durch Null ersetzt.

### Definition der Stabilität nach Hurwitz:

Ein Regelkreis ist dann und nur dann stabil, wenn alle Koeffizienten  $a_i > 0$  ( $i=0,1,2,\dots,n$ ) und alle Hurwitz-Determinanten  $H_k > 0$  ( $k=1,2,3,\dots,n$ ) sind, also die  $(n,n)$ -Determinanten  $H_n$  und die  $n-1$  Hauptachsidentitäten, die von der linken oberen Ecke ausgehend gebildet werden können.

System 2. Ordnung:  $d_0, d_1, d_2$

$$Z(s) = d_0 + d_1 \cdot s + d_2 \cdot s^2 = 0$$

$$\rightarrow d_1 > 0 ; H_2 = d_1 \cdot d_2 - d_0 \cdot d_3 > 0 \quad (d_0 = d_3 > 0)$$

System 3. Ordnung:  $Z(s) = d_0 + d_1 \cdot s + d_2 \cdot s^2 + d_3 \cdot s^3 = 0$

$$\rightarrow d_1 > 0 ; H_1 > 0, H_2 > 0, H_3 > 0$$

$$H_1 = d_1$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} d_1 & d_3 \\ d_0 & d_2 \end{bmatrix}$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} d_1 & d_3 & d_5 \\ d_0 & d_2 & d_4 \\ 0 & d_1 & d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & d_3 & 0 \\ d_0 & d_2 & 0 \\ 0 & d_1 & d_3 \end{bmatrix}$$

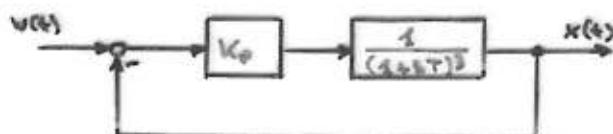
Entwicklung nach der 3. Spalte:

$$\rightarrow H_3 = d_3 \cdot \begin{bmatrix} d_1 & d_5 \\ d_0 & d_2 \end{bmatrix} = d_3 \cdot H_2$$

Aufgabe zu System 3. Ordnung:

(10)

Wie groß muss im folgendem Beispiel  $K_p$  gewählt werden, damit der Regelkreis stabil ist?



Zur Lösung soll das Hurwitz-Kriterium angewandt werden.

Lösung:  $P(s) = 1 + G(s)$        $G(s) = \frac{K_p}{(1+sT)^3} = \frac{K_p}{s^3 + 3s^2b + 3sb^2 + b^3}$

$$= \frac{K_p}{1 + 3Ts^2 + 3Ts + (sT)^2} = \frac{K_p}{1 + 3Ts + 3T^2s^2 + T^3s^3}$$

$$P(s) = 1 + \frac{K_p}{1 + 3Ts + 3T^2s^2 + T^3s^3} \stackrel{s=0}{=} 0$$

$$\rightarrow P(s) = (1+K_p) + 3Ts + 3T^2s^2 + T^3s^3 \stackrel{s=0}{=} 0$$

→ 3. Ordnung:  $d_0 = 1+K_p$ ,  $d_1 = 3T$   
 $d_2 = 3T^2$   
 $d_3 = T^3$

Hurwitz-Kriterium:  $d_i > 0 : d_0 > 0$  wenn  $K_p > -1$

$$K_0 = d_0 > 0 ; K_2 = d_3 \cdot K_1 > 0 \text{ für } K_1 > 0$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} d_0 & d_3 \\ d_1 & d_2 \end{bmatrix} = d_0 \cdot d_2 - d_0 \cdot d_3 > 0$$
$$= 9T^3 - (1+K_p)T^3 > 0$$

$$\rightarrow 9T^3 > (1+K_p)T^3$$
$$8 > K_p$$

⇒ Der Regelkreis ist stabil wenn gilt:  $-1 < K_p < 8$

# Regelungstechnik – 6. Vorlesung

## Stabilitätsbetrachtung anhand der Lage der Pole

### WS2019/20

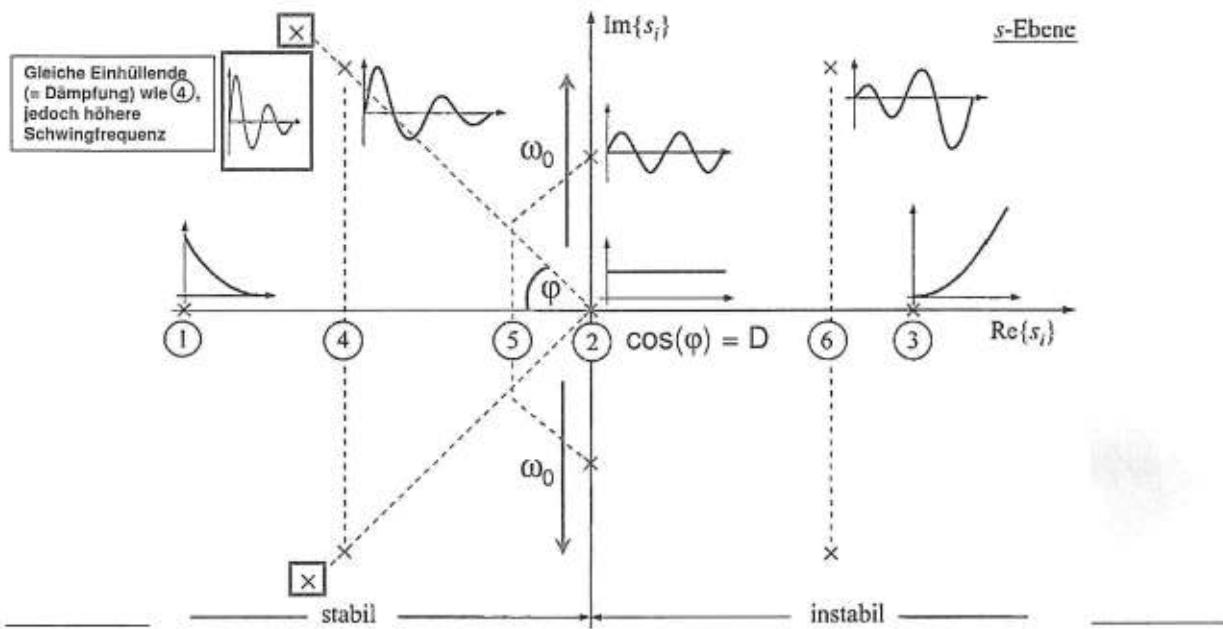
#### Stabilitätsbetrachtung anhand der Pole

Man betrachte die 6 nebenstehenden Systeme und zeichne im nächsten Bild die Lage der Pole  
(= Nullstellen des Nennerpolynoms, = Lösungen der charakteristischen Gleichung der Übertragungsfunktion)

Differentialgleichung, Übertragungsfunktion, charakteristische Gleichung, Nullstellen, Lösungstyp und Stabilität von linearen Systemen I. und II. Ordnung

1	$\frac{dx_a}{dt} + 5 \cdot x_a = x_e, G(s) = \frac{1}{s+5}, s+5 = 0, s_1 = -5,$ $x_a(t) = C_1 \cdot e^{-5t}, x_a(t \rightarrow \infty) \rightarrow 0, \text{ stabil},$
2	$\frac{dx_a}{dt} = x_e, G(s) = \frac{1}{s}, s = 0, s_1 = 0,$ $x_a(t) = C_1 \cdot e^{0t} = C_1, x_a(t \rightarrow \infty) \neq 0, \text{ instabil},$
3	$\frac{dx_a}{dt} - 4 \cdot x_a = x_e, G(s) = \frac{1}{s-4}, s-4 = 0, s_1 = 4,$ $x_a(t) = C_1 \cdot e^{4t}, x_a(t \rightarrow \infty) \neq 0, \text{ instabil},$
4	$\frac{d^2x_a}{dt^2} + 6 \frac{dx_a}{dt} + 18 \cdot x_a = x_e, G(s) = \frac{1}{s^2 + 6 \cdot s + 18},$ $s^2 + 6 \cdot s + 18 = 0, s_{1,2} = -3 \pm j3,$ $x_a(t) = A \cdot e^{-3t} \cdot \sin(3t + \phi), x_a(t \rightarrow \infty) = 0, \text{ stabil},$
5	$\frac{d^2x_a}{dt^2} + 4 \cdot x_a = x_e, G(s) = \frac{1}{s^2 + 4}, s^2 + 4 = 0,$ $s_{1,2} = \pm j2,$ $x_a(t) = A \cdot \sin(2t + \phi), x_a(t \rightarrow \infty) \neq 0, \text{ instabil},$
6	$\frac{d^2x_a}{dt^2} - 6 \frac{dx_a}{dt} + 18 \cdot x_a = x_e, G(s) = \frac{1}{s^2 - 6 \cdot s + 18},$ $s^2 - 6 \cdot s + 18 = 0, s_{1,2} = 3 \pm j3,$ $x_a(t) = A \cdot e^{3t} \cdot \sin(3t + \phi), x_a(t \rightarrow \infty) \neq 0, \text{ instabil}.$

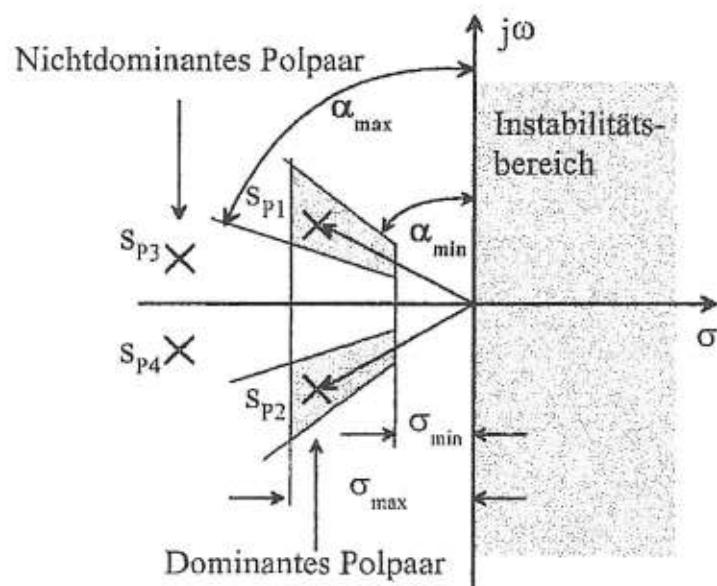
## Stabilitätsbetrachtung anhand der Lage der Pole



## Stabilitätsbetrachtung anhand der Lage der Pole

Anhand der Lage der Wurzeln der charakteristischen Gleichung in der  $s$ -Ebene lässt sich die Stabilität eines linearen Systems sofort beurteilen. Gewöhnlich ist die Berechnung der genauen Werte der Wurzeln der charakteristischen Gleichung nicht einfach. Es ist jedoch für regelungstechnische Problemstellungen oftmals gar nicht notwendig, diese Wurzeln genau zu bestimmen. Vielmehr interessiert den Regelungstechniker für die Stabilitätsuntersuchung nur, ob alle Wurzeln der charakteristischen Gleichung in der linken  $s$ -Halbebene liegen oder nicht. Hierfür gibt es einfache, sogenannte Stabilitätskriterien, mit welchen dies leicht überprüft werden kann. Derartige Kriterien sind teils in algebraischer (und damit numerischer) Form, teils als graphische Methoden anwendbar.

## Stabilitätsbetrachtung anhand der Lage der Pole



Wiederholung Stabilität:

- ① Zeitbereich:  $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) \rightarrow$  stabil, wenn  $g(\infty) = 0$
- ② PN-Diagramm:  $\rightarrow$  Pole nur in der linken Halbebene
- ③ Algebraische Kriterien:  $\rightarrow$  Hurwitz:  
 $P(s) = 1 + G_0(s) \Rightarrow d_i > 0 ; h_i > 0$
- ④ Graphisches Verfahren:  $\rightarrow$  Nyquist-Kriterium  
 (Nyquist-Kriterium)

Aufgabe 3.5:

$$G_{T_I}(s) = \frac{K_p(1+sT_N)}{sT_N}$$

$$= K_p + \frac{K_I}{s}$$

$$G_{I*T_N}(s) = K_p \cdot \left[ 1 + \frac{1}{T_N s} \right]$$

$$G_{I*T_N}(s) = \frac{K_I}{s \cdot T_N (1+sT_N)}$$

Frage: Für welche Werte von  $K_p$  und  $T_N$  ist der geschlossene Regelkreis stabil?

Lösung: über Hurwitz-Kriterium  $\rightarrow$  charakteristisches Polynom  $P(s) = 1 + G(s) \stackrel{!}{=} 0$

$$G(s) = G_I(s) \cdot G_S(s) = \frac{K_p \cdot (1+sT_N)}{sT_N} \cdot \frac{K_I}{s \cdot T_N (1+sT_N)}$$

$$= \frac{K_I \cdot K_p \cdot (1+sT_N)}{s^2 T_I T_N (1+sT_N)}$$

$$P(s) = 1 + G(s) \stackrel{!}{=} 0$$

$$= 1 + \frac{K_I \cdot K_p \cdot (1+sT_N)}{s^2 T_I T_N (1+sT_N)} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\rightarrow s^2 T_I T_N (1+sT_N) + K_I \cdot K_p (1+sT_N) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\underbrace{s^3}_{d_3} \underbrace{T_I T_N}_{} \underbrace{T_N}_{} + \underbrace{s^2}_{d_2} \underbrace{T_I T_N}_{} + \underbrace{3 K_I K_p T_N}_{} + \underbrace{K_I K_p}_{} = 0$$

Hurwitz:  $d_i > 0$ :

$$\rightarrow d_3 : T_N > 0 ; d_2 : T_N > 0 ; d_1 : K_I \cdot K_p > 0 ; d_0 : K_I \cdot K_p > 0$$

Hi > 0:

$$\rightarrow H_2 = d_1 > 0$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 \\ d_0 & d_2 \end{bmatrix} = d_1 d_2 - d_0 d_3 > 0$$

$$\rightarrow \text{Vorzeichen von } T_N^2 \bar{T}_N - \text{Vorzeichen von } T_K T_N \bar{T}_N > 0$$

$$T_N > T_K$$

Ergebnis:  $\text{Vorzeichen von } K_2 > 0$  (Vorausgesetzt  $K_2$  ist positiv)

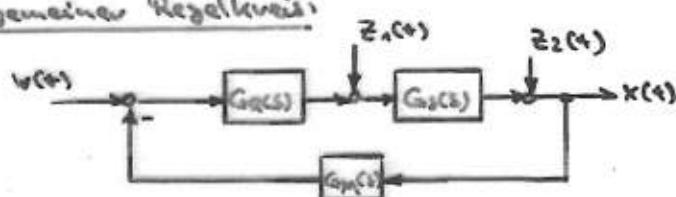
$$\underline{T_K > T_N}$$

Frage: Was ist mit  $H_2$ ?

$$H_2 = \begin{bmatrix} d_1 & d_3 & d_5 \\ d_0 & d_2 & d_4 \\ 0 & d_1 & d_3 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} d_4 = 0 \\ d_5 = 0 \end{array} \quad \rightarrow H_2 = d_3 \cdot \begin{bmatrix} d_1 & d_3 \\ d_0 & d_2 \end{bmatrix} = d_3 \cdot K_2$$

Da  $d_3$  und  $K_2 > 0$  folgt damit auch  $H_2 > 0$ .

Allgemeiner Regelkreis:



$$X(s) = G_F(s) \cdot W(s) + G_{D1}(s) \cdot Z_1(s) + G_{D2}(s) \cdot Z_2(s)$$

$$G_O(s) = G_F(s) \cdot G_C(s) \cdot G_M(s)$$

$$\text{Mit: } G_F(s) = \frac{G_C(s) \cdot G_M(s)}{1 + G_C(s)} ; \quad G_{D1}(s) = \frac{G_C(s)}{1 + G_O(s)} ; \quad G_{D2}(s) = \frac{1}{1 + G_O(s)}$$

$\rightarrow$  Stabilität bei allen drei Anregungen  $W(s)$ ,  $Z_1(s)$  und  $Z_2(s)$  in  $G_O(s)$  ablesbar?

$$1 + G_O(s) = 0, \text{ wenn}$$

$$G_O(s) = -1$$

$$G_O(j\omega) = -1$$

$\Rightarrow$  kritischer Punkt?

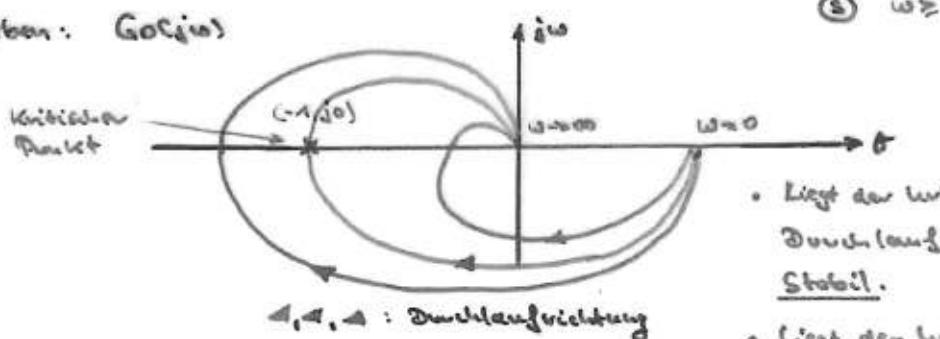
Die Betrachtung dieser Zusammenhänge führt schließlich zum

Nyquist-Kriterium

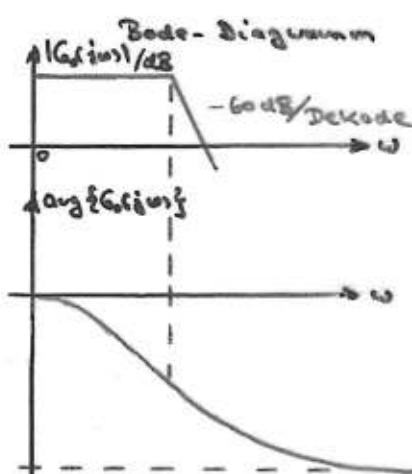
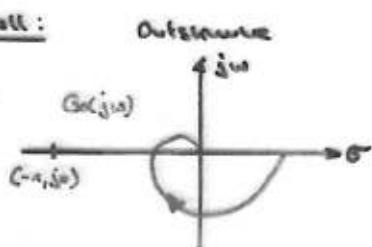
Wobei zwischen dem vollständigen und dem eingeschränkten Kriterium unterschieden werden kann.

(vereinfachten / speziellen)

Wir beschreiben uns im Nachfolgenden auf die Betrachtung des vereinfachten Nyquist-Kriteriums, das Voraussetzt, daß alle Pole von  $G_C(s)$  und  $G_M(s)$  (mit Ausnahme von Polen im Ursprung) komplexe sind und in der linken Halbebene liegen.

Vereinfachtes Nyquist-KriteriumGegeben:  $G(j\omega)$ 

- Liegt der kritische Punkt links zur Drehrichtung, ist das System stabil.
- Liegt der kritische Punkt auf der Outbeweg., ist das System unbestabil.
- Liegt der kritische Punkt rechts zur Drehrichtung, ist das System instabil.

Stabiler Fall:Definitionen:

$$|G(j\omega_0)| = 1 \quad \underline{\text{Durchtrittsfrequenz}}$$

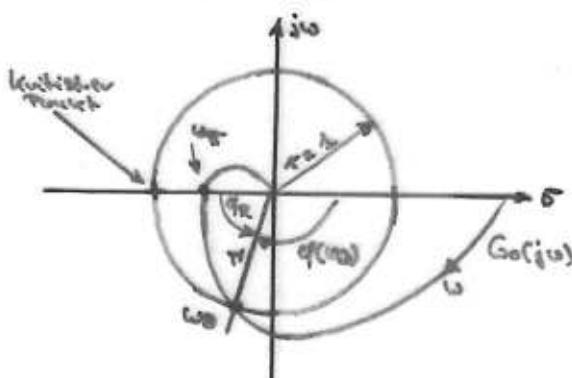
$$\phi(G(j\omega_0)) = -180^\circ$$

$$\alpha_{\text{Rand}} = 180^\circ + \phi(\omega_0)$$

Phasenrand  $\rightarrow$  Maß für Stabilitätsreserve

$$\alpha_{\text{Rand}} = \frac{1}{|G(j\omega_0)|}$$

Amplitudensrand  $\rightarrow$  Maß für Stabilitätsreserve

Bedingungen für Stabilität:

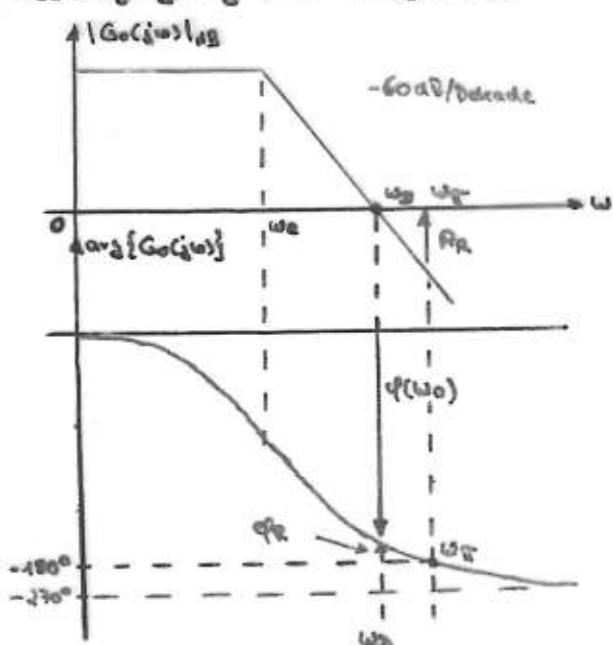
$$|G(j\omega_0)| < 1$$

$$\phi(\omega_0) > -180^\circ$$

$\omega_0 < \omega_p$
$\alpha_{\text{Rand}} > 0$
$\alpha_{\text{Rand}} > 1$

Grenzstabilität: Punkt von  $\omega_p$  wandert auf ein kritisches Punkt zu:  $\omega_0 \rightarrow \omega_p$   
 $\rightarrow \alpha_{\text{Rand}} \rightarrow 0$   
 $\alpha_{\text{Rand}} \rightarrow 1$

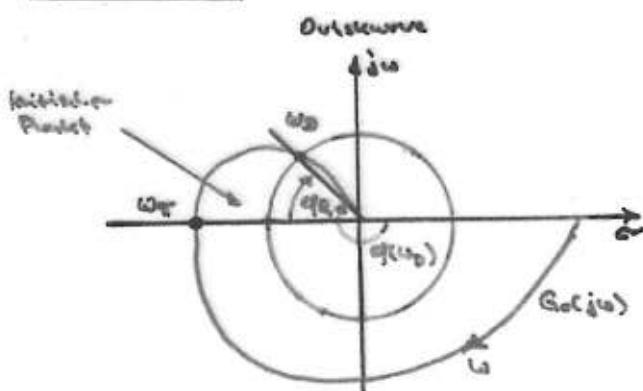
### Übertragung auf Bode-Diagramm:



$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \cdot \log(|G(j\omega)|)$$

(4)

### Instabiler Fall:



$$|G(j\omega_R)| > 1$$

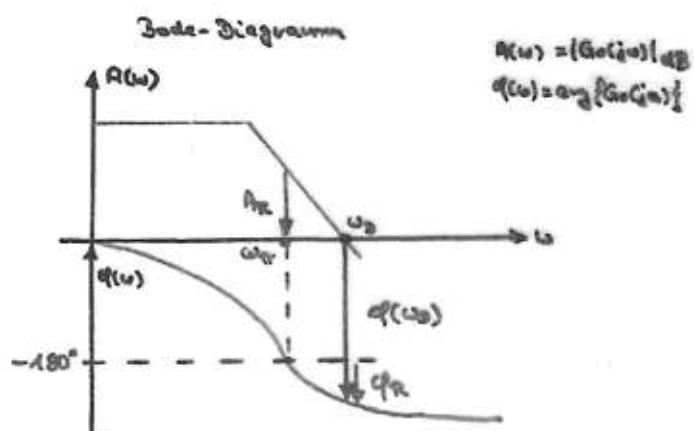
$$|G(j\omega_0)| = 1$$

$$\Leftrightarrow A_R = \frac{1}{|G(j\omega_0)|} < 1$$

$$\omega_0 > \omega_R$$

$$\varphi(G(j\omega_R)) = -180^\circ$$

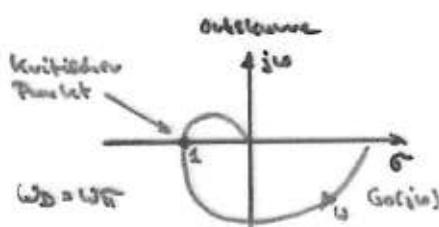
$$\varphi_{\text{Rand}} = 180^\circ + \varphi(\omega_0) < 0$$



### Bedingungen für Instabilität:

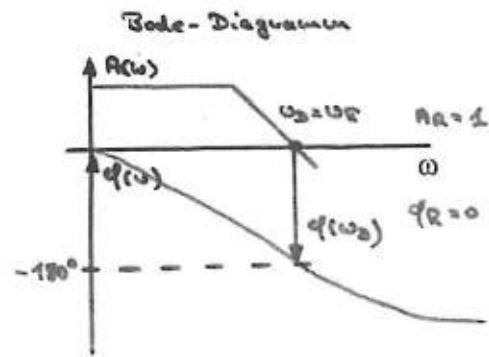
$$\boxed{\begin{aligned} \omega_0 &> \omega_R \\ \varphi_{\text{Rand}} &< 0 \\ A_R &< 1 \end{aligned}}$$

### Grenzstabiler Fall:



### Bedingungen für Grenzstabilität:

$$\boxed{\begin{aligned} \omega_0 &= \omega_R \\ \varphi_{\text{Rand}} &= 0 \\ A_R &= 1 \end{aligned}}$$



Beispiel: Untersuchung einer Regelstrecke und Dimensionierung eines Reglers für Stabilität

Gegaben: Regelstrecke mit Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{10}{(1+s)^2}$$

Gesucht: P-Regler mit Übertragungsfunktion

$$G(s) = K_P$$

Wie muß  $K_P$  gewählt werden, damit der Regelkreis stabil ist?

$$G(s) = \frac{10}{1+3s+3s^2+s^3} \Big|_{s=j\omega} = \frac{10}{1+3j\omega-3\omega^2+(j\omega)^3} = \frac{10}{1-3\omega^2+j(3\omega-\omega^3)}$$

$$G(j\omega) = \frac{10}{1-3\omega^2+j\omega(3-\omega^2)} \rightarrow \text{Real- und Imaginärteil trennen}$$

$$\hookrightarrow G(j\omega) = \frac{10(1-3\omega^2)}{(1-3\omega^2)^2+\omega^2(3-\omega^2)^2} - \frac{10j\omega(3-\omega^2)}{(1-3\omega^2)^2+\omega^2(3-\omega^2)^2}$$

Schnittpunkte mit der reellen Achse:  $\rightarrow$  Imaginärteil = 0

$$\frac{-\omega(3-\omega^2)}{\text{Nenner}} = 0 \rightarrow \omega(3-\omega^2) = 0 \rightarrow \omega_1 = 0$$

$$\hookrightarrow 3-\omega^2 = 0$$

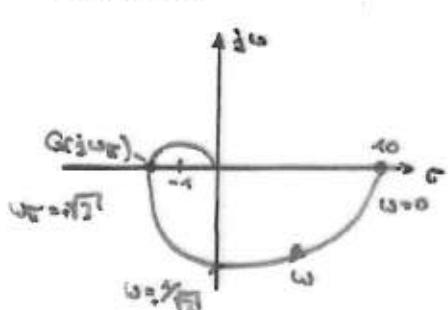
$$\omega^2 = 3 \rightarrow \omega_{2,3} = \pm \sqrt{3}$$

Schnittpunkte mit der imaginären Achse:  $\rightarrow$  Realteil = 0

$$1-3\omega^2 = 0 \rightarrow \omega^2 = \frac{1}{3}$$

$$\hookrightarrow \omega_{4,5} = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$$

Ausklammern:



$$G(j\omega) \Big|_{\begin{array}{l} \omega=\omega_R \\ \omega_R=\sqrt{3} \end{array}} = \frac{10 \cdot (1-3 \cdot 3)}{(1-3 \cdot 3)^2 + 3(3-3)^2} = \frac{10 \cdot (-8)}{8^2} = -\frac{10}{8}$$

$$G(j\omega_R) < -1$$

$$|G(j\omega_R)| = \frac{10}{8} > 1$$

$\rightarrow$  instabile Regelstrecke  $\square$

$$G(j\omega) = G_{PT} \cdot G_{CE}$$

$$= \frac{10K_p(1-3\omega^2)}{\text{Nenner}} - j \frac{10K_p\omega(3-\omega^2)}{\text{Nenner}} \quad \text{Nenner: } (1-3\omega^2)^2 + \omega^2(3-\omega^2)^2$$

Damit  $K_p$  bestimmt werden kann und der Regelkreis (Regler + instabile Strecke) stabil wird, muss gelten:

$$|G(j\omega=j\omega_p)| < 1 \quad \text{mit } \omega_p=\sqrt{3}$$

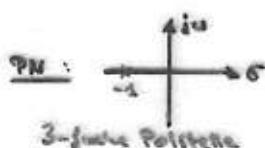
$$\Rightarrow \left| \frac{10K_p \cdot (1-3)}{(1-3)^2 + 3 \cdot (3-3)^2} \right| < 1$$

$$\left| \frac{10K_p \cdot (-2)}{8} \right| < 1$$

$$K_p < \frac{8}{10} = 0,8$$

### Bode - Plot und PN - Verteilung der Strecke:

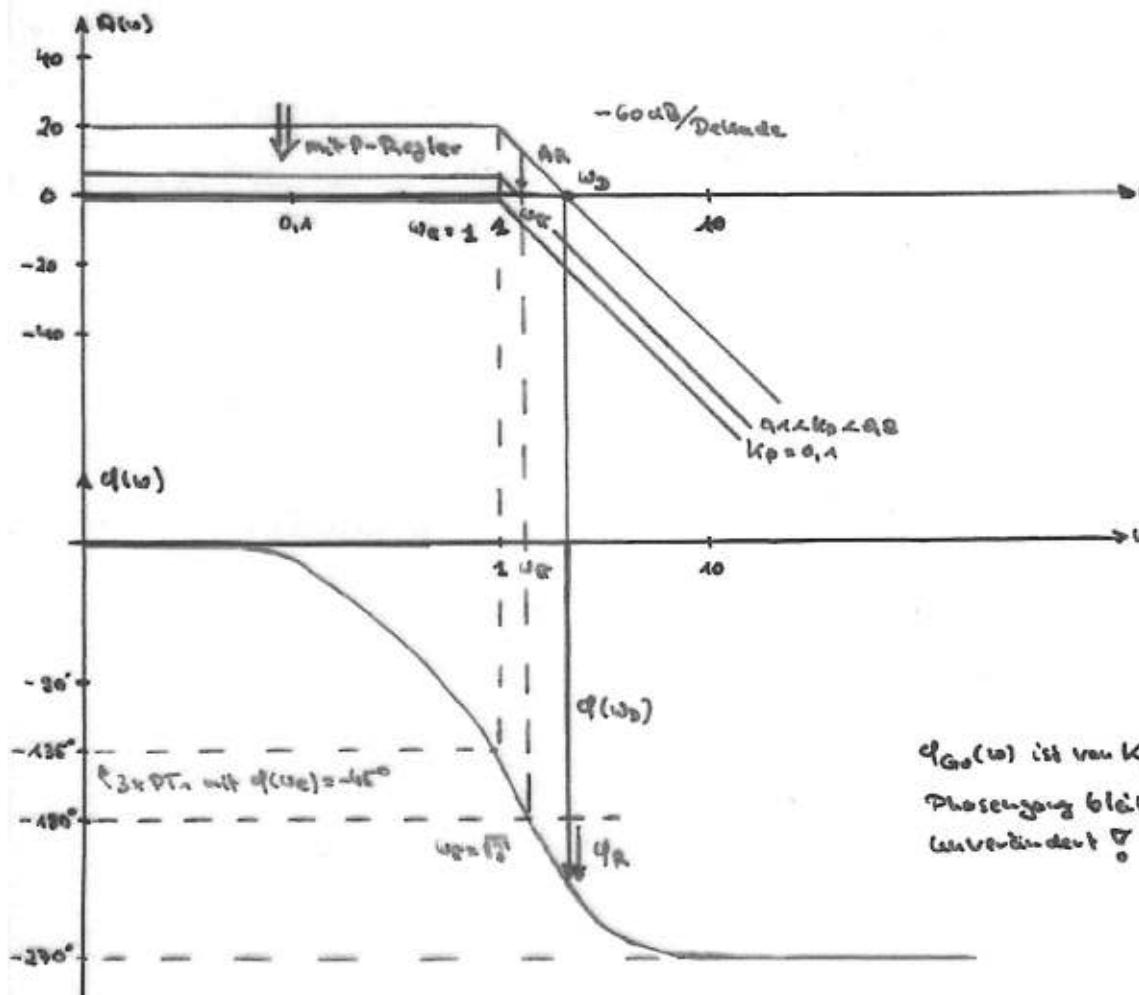
$$|G(j\omega)| = \frac{10}{1(1+\frac{j\omega}{3})^2} = \frac{10}{(\sqrt{1+\omega^2})^2} \Rightarrow \vartheta(\omega) = 20 \cdot \log(10) - 20 \cdot \log(\sqrt{1+\omega^2})$$



$$\vartheta(\omega) = \arctan \frac{\text{Im}\{G(j\omega)\}}{\text{Re}\{G(j\omega)\}} \rightarrow \text{3er PTn-Glied}$$

spurig 3 arg°

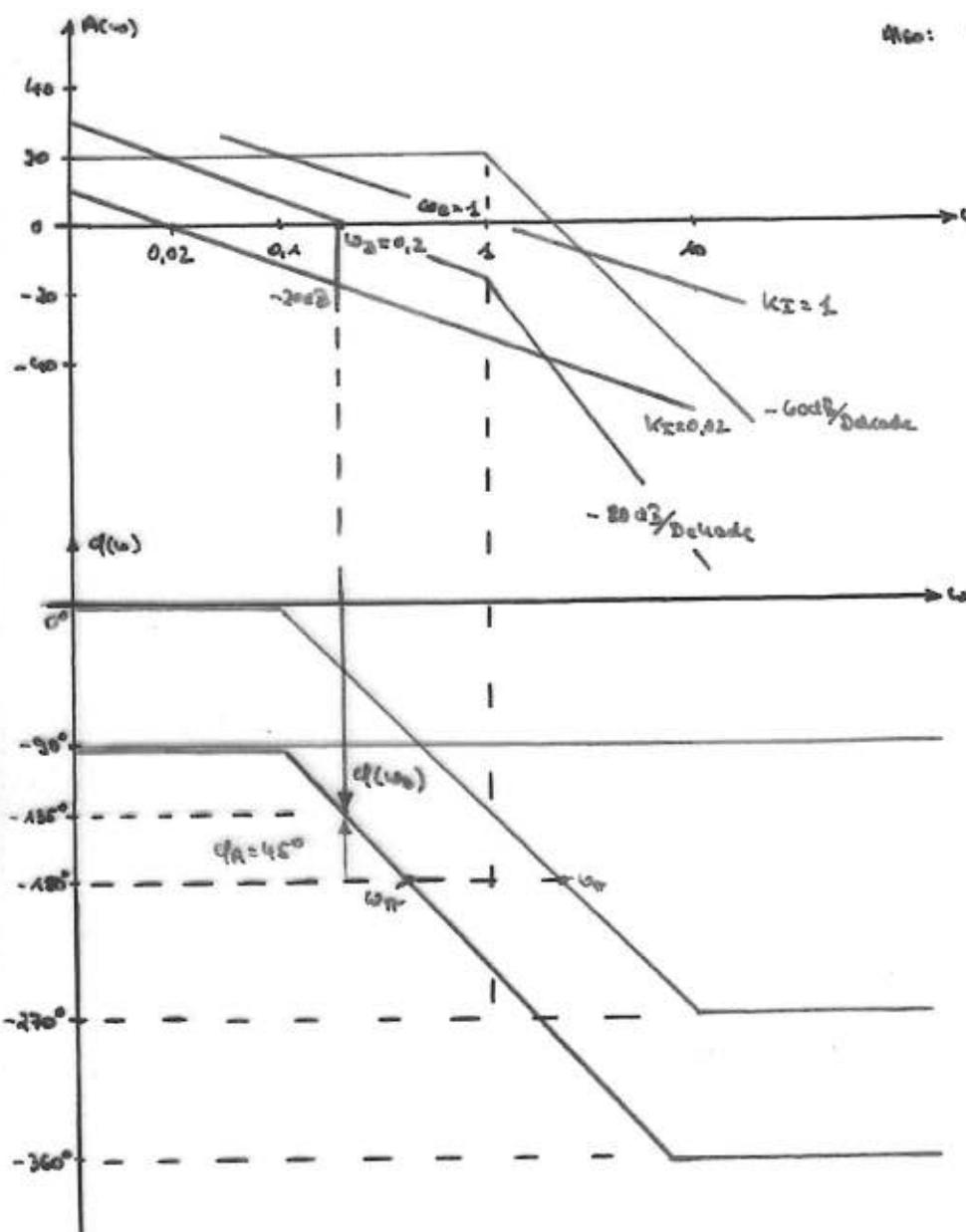
### Bode - Plot:



$\vartheta_{G(j\omega)}$  ist von  $K_p$  unabhängig, d.h.  
Phasengang bleibt mit Regler  
unverändert.

Beispiel: Regelstrecke wie im Beispiel oben, jetzt jedoch kombiniert mit I-Regler.

Gegeben:  $k_{\Sigma} \rightarrow \infty$ , daß eine Phasenverschiebung von  $45^\circ$  vorliegt



$$\text{Also: } G(s) = \frac{K}{(s + \omega_p)^2}$$

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega}$$

$$\Rightarrow A_I(\omega) = \frac{K}{\omega}$$

$\rightarrow 20 \text{ dB/Decade}$

$$\phi_I(\omega) = -\frac{\pi}{2}$$

- $G_S(j\omega)$

- $G_P(j\omega)$

- $G_I(j\omega)$

$\omega_D = 0.2 \text{ rad/s}$  in Bode-Plot ablesen

$$\rightarrow A_I(\omega) = 20 \cdot \log \left( \frac{k_{\Sigma}}{\omega} \right)$$

$$A_I(\omega_D) = 20 \cdot \log \left( \frac{k_{\Sigma}}{\omega_D} \right)$$

$$\stackrel{!}{=} -20 \text{ dB}$$

$$\rightarrow -1 = \log \left( \frac{k_{\Sigma}}{\omega_D} \right)$$

$$k_{\Sigma} = 10^{-1} \cdot \omega_D = 0.1 \cdot 0.2 \text{ s}^{-1}$$

$$\Rightarrow \underline{k_{\Sigma} = 0.02 \text{ s}^{-1}}$$

Wiederholung Stabilität: (siehe auch Anfang 7. Vorlesung)

- ① Grenz  $\dot{y}(t)$  für  $t \rightarrow \infty$  Führungsgüterübergangsfunction  $G_U(s)$
  - ② Hurwitz-Kriterium: charakteristische Gleichung  $P(s) = 1 + G_U(s) = 0$
  - ③ Lage der Pole von  $G_U(s)$ : linke Halbebene  $\Rightarrow$  stabil
  - ④ Graphische Kriterien: Nyquist / Bode-Diagramm  $\rightarrow$  Phasenrand  $\varphi_R$ , Amplitudengrenze  $M_R$
- 

### E: Stellverfahren für Regler:

- ① Betragsoptimum  
Symmetrisches Optimum
- ② Im Zeitbereich

} S - bzw. Frequenz-Ebene

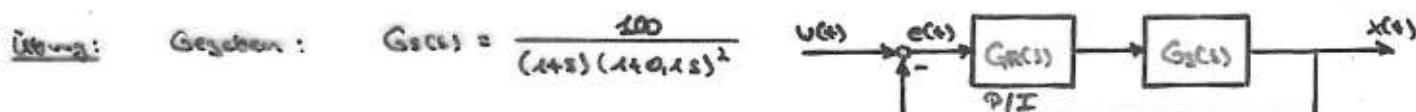
- ② Im Zeitbereich

#### Spezielle Regler

- ③ Lead-Lag-Regler
- PDT<sub>n</sub>-Regler

#### Schwingende Regler

- ④ Zweipunktregler
- Dreipunktregler



Gesucht: ① P-Regler:  $\Rightarrow \varphi_R = 45^\circ$  erreichen mit  $G_R(s) = k_P$

② Wie groß ist  $a(\infty)$ , wenn Reglerkreis mit Schwellensprung angeregt wird?

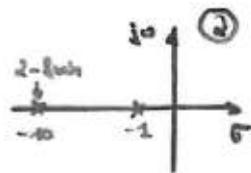
③ I-Regler:  $\Rightarrow \varphi_R = 45^\circ$  erreichen mit  $G_R(s) = \frac{k_I}{s} = \frac{1}{sT_R}$

④  $e(\infty)$  bei Schwellensprung und I-Regler

Phasendiagramm:

Nullstellen: keine

$$\text{Polstellen: } (1+j\omega) \cdot (1+0,1j\omega)^2 \rightarrow p_1 = -1, p_{2,3} = -0,1$$



Bode-Plot:

$$G(s) = \frac{100}{(1+s) \cdot (1+0,1s)^2} \rightarrow G(j\omega) = \frac{100}{(1+j\omega) \cdot (1+0,1j\omega)^2}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{100}{\sqrt{1+\omega^2} \cdot (\sqrt{1+0,1^2\omega^2})^2}$$

↳

$$M(\omega) = 20 \cdot \log |G(j\omega)|$$

$$= 40 \text{ dB} - 20 \cdot \log (\sqrt{1+\omega^2}) - 40 \cdot \log (\sqrt{1+(0,1\omega)^2})$$

$$\varphi(\omega): \text{PT}_1\text{-Glied: } \frac{1}{1+j\omega} = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_R}} \text{ mit } \omega_R = 1$$

$\varphi_{PT_1}$ : Phase dreht von 0 bis  $-90^\circ$  und hat bei Schwingungsfrequenz  $-45^\circ$

$$\text{PT}_2\text{-Glied: } \frac{100}{(1+0,1j\omega)^2} = \frac{100}{(1+j\frac{\omega}{\omega_R})^2} \text{ mit } \omega_R = 10$$

$\varphi_{PT_2}$ : Phase dreht von 0 bis  $2 \times -90^\circ = -180^\circ$  und hat bei Schwingungsfrequenz

$$2 \times -45^\circ = -90^\circ$$

$$\varphi(j\omega) = \varphi_{PT_1} + \varphi_{PT_2}$$

$\varphi(j\omega), \varphi(10)$ : siehe nächsten Block

Lösung:

① P-Regler:  $\varphi_R = 45^\circ$

$$G(s) = G_R(s) \cdot G_S(s) \rightarrow G(j\omega)$$

$$G(j\omega) = K_0 \cdot \frac{100}{(1+j\omega) \cdot (1+0,1j\omega)^2}$$

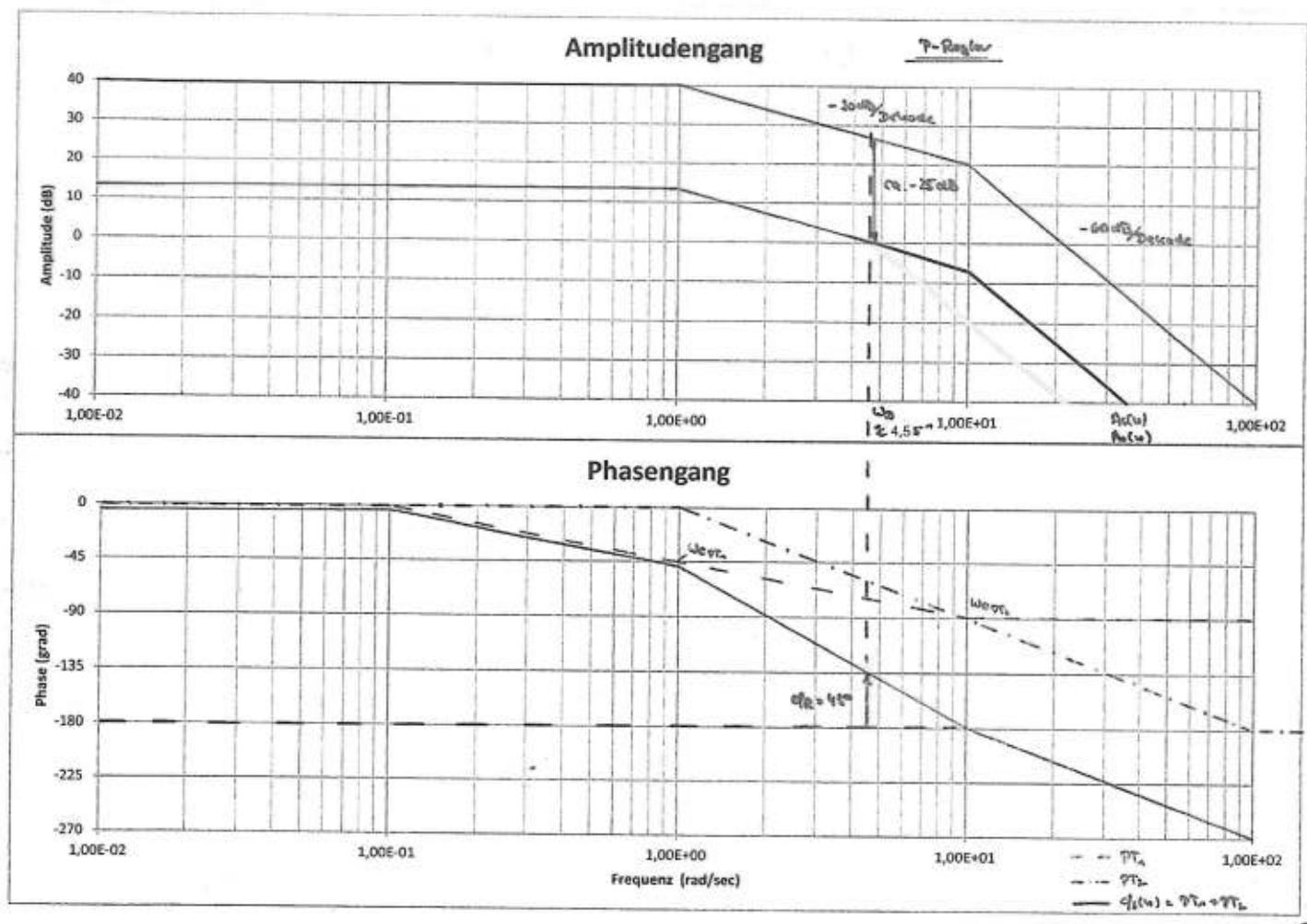
$$\varphi_R = 45^\circ \rightarrow \text{Wertstand von } -180^\circ \text{ zu } -135^\circ$$

⇒  $M(j\omega)$  muss um ca. 25 dB abgesenkt werden, um bei der Durchtrittsfrequenz 0dB zu erreichen, d.h.

$$20 \cdot \log (K_0) = -25 \text{ dB}$$
  
$$\rightarrow K_0 = 10^{-\frac{25}{20}}$$

$$K_0 \approx 0,05$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{5}{(1+s)(1+0,1s)^2} \quad K_{ges} = K_0 \cdot 100 \approx 0,05 \cdot 100 = 5$$

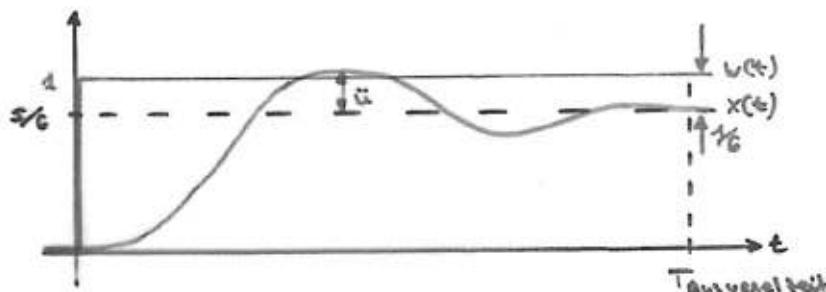


$$\textcircled{2} \quad e(0) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( s \cdot W(s) \cdot \frac{1}{1+G_0(s)} \right) \quad \text{Grenzwertabb}$$

mit  $W(s) = \frac{1}{s}$

$$\rightarrow e(0) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1+G_0(s)} \right) = \frac{1}{1+G_0(0)} = \frac{1}{1+5}$$

$$\underline{e(0) = \frac{1}{6}}$$



Näherungslösung für den Zusammenhang Phasenrand und Dämpfung:

$$\text{D} \approx \frac{\varphi_R [^{\circ}]}{100}$$

Quellen:  
Lecture:  
Regelungstechnik  
S. 520

$$45^\circ \rightarrow \text{D} \approx 0,45$$

$$\Rightarrow \ddot{u} = e^{-\frac{-j\pi}{1-0,45^2}}$$

Unknowns, S. 212  
Lütt, Vorles., S. 285

$$\textcircled{3} \quad G_E(s) = \frac{100}{(s+1)(s+0,1s)^2} \quad \text{mit I-Regler} \quad G_R(s) = \frac{k_I}{s} \rightarrow G_E(j\omega) = -j \frac{k_I}{\omega} \rightarrow A_R(\omega) = \frac{k_I}{\omega}$$

$A_R(\omega)$  ist um 40 dB bei  $\omega_B$  abgesenkt. Es gilt daher mit  $\omega_B = 15^\circ$ :

$$\Rightarrow 20 \log(k_I) = -40 \text{ dB}$$

$$k_I = 10^{-\frac{40}{20}}$$

$$\underline{k_I = 0,01}$$

$$\rightarrow G_E(s) = \frac{0,01 \cdot 100}{s(1+s) \cdot (1+0,1s)^2} = \frac{1}{s(1+s) \cdot (1+0,1s)^2}$$

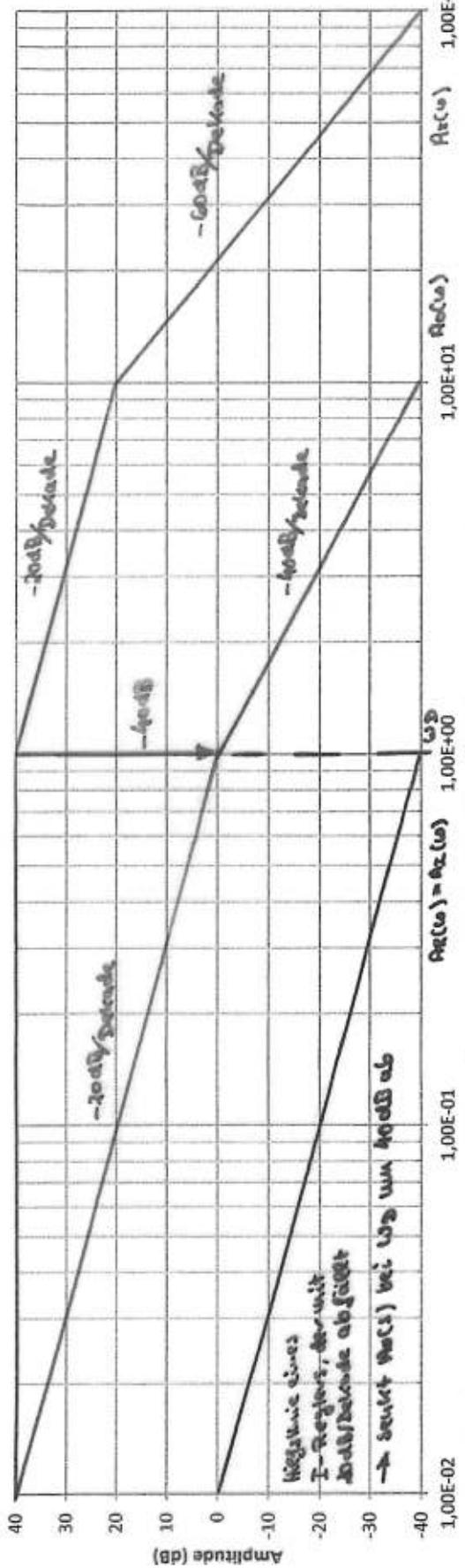
$$\textcircled{4} \quad e(0) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( s \cdot W(s) \cdot \frac{1}{1+G_0(s)} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1+G_0(s)} \right), \quad G_0(s) \rightarrow \infty \text{ für } s \rightarrow 0$$

$$\rightarrow \underline{e(0) \rightarrow 0} \quad \text{I-Regler wegekt aus!}$$

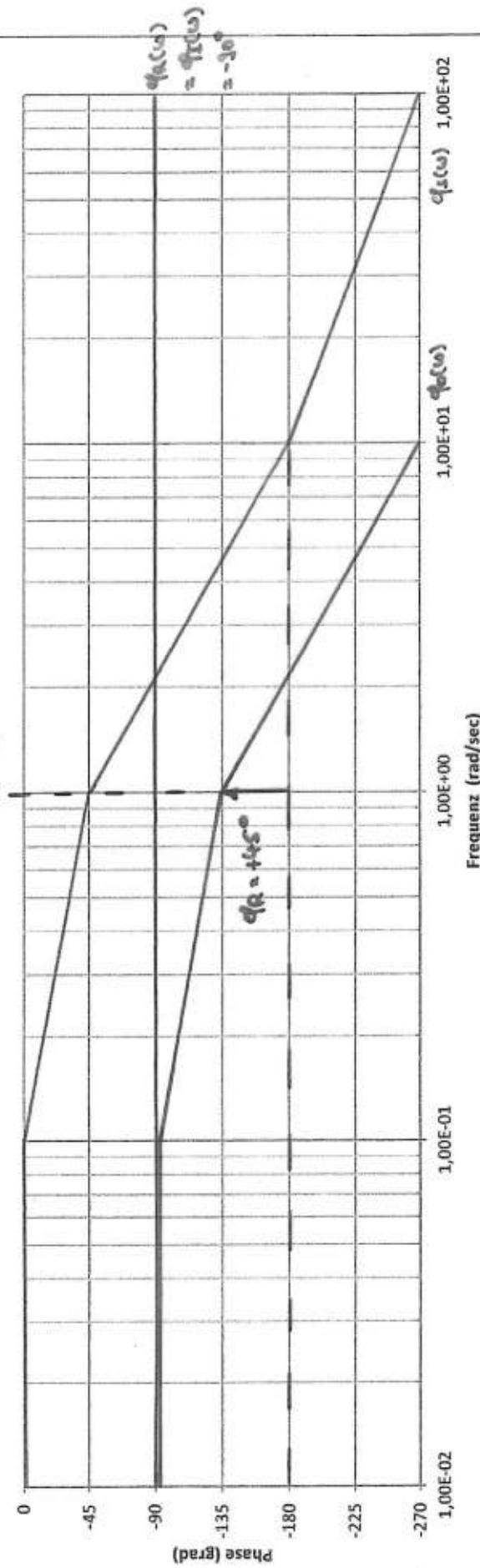
$G(s)$  bleibt unverändert wie  
bei den P-Reglern

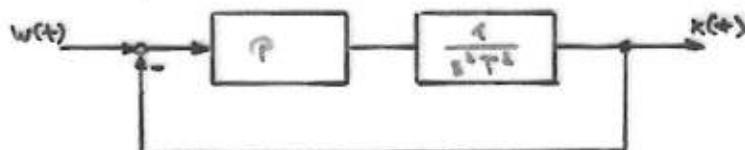
### P-Regler

#### Amplitudengang



#### Phasengang



3. Vorlesung RT, ECEÜbungsaufgabe 4.2:

$$P\text{-Regler: } G_R(s) = K_P$$

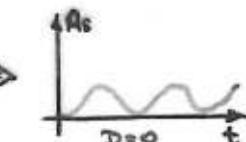
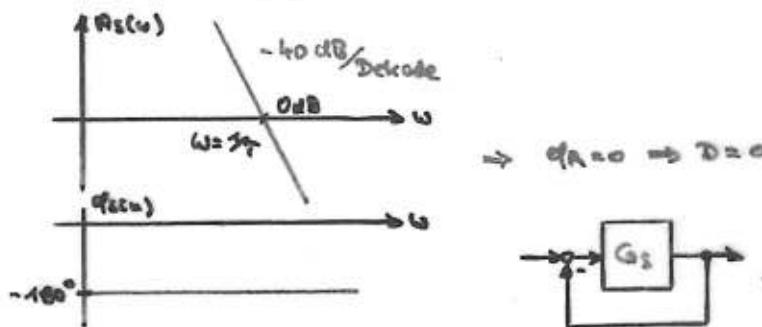
$$T_2\text{-Strecke: } G_S(s) = \frac{1}{s^2 T^2}$$

Eigenschaften der Regelstrecke:  $G_S(s) = \frac{1}{s^2 T^2}$

$$G_S(j\omega) = \frac{1}{T^2(j\omega)^2} = \frac{-1}{T^2 \omega^2}$$

$$|A_S(\omega)| = \left| -\frac{1}{T^2 \omega^2} \right| = \frac{1}{T^2 \omega^2} ; \quad \phi_S(\omega) \approx -180^\circ$$

$$A_S(\omega = \omega_p) = \frac{1}{T^2 \omega_p^2} \stackrel{?}{=} 1 \Rightarrow \omega = \omega_p$$

Übertragungsfunktion des aufgezeichneten Reglers:

$$G_R(s) = \frac{K_P}{s^2 T^2}$$

Führungsübertragungsfunktion:  $G_{R,G}(s) = \frac{G_R(s)}{1 + G_R(s)} = \frac{\frac{K_P}{s^2 T^2}}{1 + \frac{K_P}{s^2 T^2}} = \frac{K_P}{s^2 T^2 + K_P}$

$$G_{R,G}(s) = \frac{K_P / T^2}{s^2 + K_P / T^2}$$

Polstellen:  $s^2 + \frac{K_P}{T^2} = 0$

$$\Rightarrow s_{1,2} = \sqrt{-\frac{K_P}{T^2}}$$

$\Rightarrow$



$\Rightarrow$  gurentstellt 0

### Einstellung von Regelweisen nach dem Betragsoptimum (BO).

↳ Für PT<sub>n</sub>-Strecken mit PI oder PID-Regler

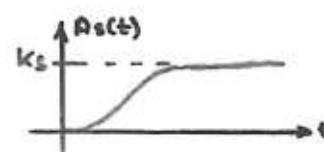
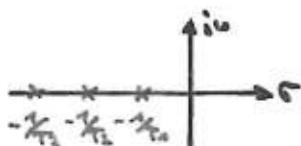
→ Auslegung führt zu einem Standardregelkreis

→ Kompenationsregler - Ansatz

Bsp.: PT<sub>3</sub>-Strecke

$$G_S(s) = \frac{K_S}{(1+sT_1)(1+sT_2)(1+sT_3)} \quad \text{mit } T_1 > T_2 > T_3$$

Pole:



Spurantwort:

$$R_S(t \rightarrow \infty) = \lim_{s \rightarrow 0} [s^{-1} G_S(s)]$$

Spur

$$R_S(t \rightarrow \infty) = K_S$$

$$R_S(t \rightarrow \infty) = K_S$$

PI-Regler nach dem BO:

P-Regler mit PT<sub>n</sub>:  $e(\infty) \neq 0$

siehe Lösung  
8. Vorlesung

Tauschregel hat schnell ein Vergleich

zu I-Regler

I-Regler mit PT<sub>n</sub>:  $e(\infty) = 0$

Tauschregel hat langsam ein Vergleich

zu P-Regler

PI-Regler:

$$G_{PI}(s) = K_P + \frac{K_I}{s} = K_P \cdot \left[ 1 + \frac{1}{sT_H} \right] = K_P \cdot \frac{1+sT_H}{sT_H}$$

Gesucht: Werte für K<sub>P</sub> und T<sub>H</sub>

$$\hookrightarrow G_O(s) = G_R(s) \cdot G_S(s) = \frac{K_S}{(1+sT_1)(1+sT_2)(1+sT_3)} \cdot K_P \frac{(1+sT_H)}{sT_H}$$

Kompenationsregler

Mit Wahl von  $\bar{T}_H = T_{max}$ , Strecke + T<sub>H</sub> häuft sich  $(1+sT_1)$  und  $(1+sT_3)$  aus.

$$\rightarrow G_O(s) = \frac{K_S \cdot K_P}{sT_H(1+sT_E)}$$

mit  $\bar{T}_E = T_2 + T_3$  kann angepasst werden wenn  
(Ersatzzeitkonstante) gilt  $\bar{T}_E \gg T_2 + T_3$   
(z.B. Faktor 5)

Führungsübertragungsfunktion:

$$\begin{aligned} G_U(s) &= \frac{G_O(s)}{1+G_O(s)} = \frac{\frac{K_S \cdot K_P}{sT_H(1+sT_E)}}{1 + \frac{K_S \cdot K_P}{sT_H(1+sT_E)}} = \frac{K_S K_P}{s^2 T_H^2 T_E + sT_H K_P + K_S K_P} \\ &= \frac{K_S K_P}{s^2 T_H^2 T_E + sT_H K_P + K_S K_P} \end{aligned}$$

$$G(s) = \frac{\frac{K_{elkp}}{T_E T_E}}{s^2 + 2\zeta \frac{1}{T_E} s + \frac{K_{elkp}}{T_E T_E}} \Rightarrow \text{System 2. Ordnung}$$

$$\ddot{x} = e^{\frac{-\zeta s}{T_E(1-\zeta^2)}} \quad \text{siehe 8. Vorlesung, Seite 4}$$

$$\zeta = 0 \Rightarrow \ddot{x} = 1$$

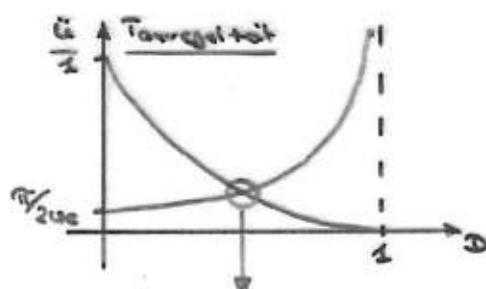
$$\zeta \rightarrow 1 \Rightarrow \ddot{x} \rightarrow 0$$

Anregzeit: Nach dieser Zeit erreicht die Sprungantwort zum ersten Mal den Endwert für  $t \rightarrow \infty$

$$\text{Tauzeit} = \frac{\pi - \arccos(\zeta)}{\omega_c \sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\zeta = 0 \Rightarrow \text{Tauzeit} = \frac{\pi - \pi/2}{\omega_c} = \frac{\pi}{2\omega_c}$$

$$\zeta \rightarrow 1 \Rightarrow \text{Tauzeit} \rightarrow \infty$$



Überhöhung und Anregzeit optimiert für:

$$\zeta = 1/\sqrt{2} \approx 0.707$$

Betragsoptimum

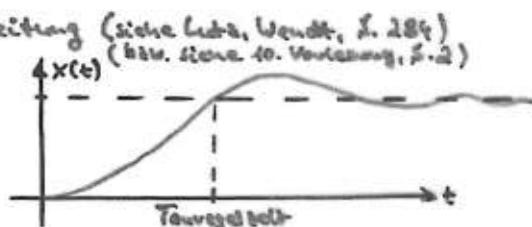
$$\underline{\text{Koeffizientenvergleich: }} \quad s^2 + \underline{2D\omega_0 s} + \underline{\omega_0^2} \stackrel{!}{=} s^2 + \frac{1}{T_E} \cdot s + \frac{K_{elkp}}{T_E T_E}$$

$$\rightarrow 2D\omega_0 = \frac{1}{T_E}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{2T_E D} = \frac{1}{T_E^2 \cdot T_E}$$

$$\rightarrow \omega_0^2 = \frac{K_{elkp}}{T_E \cdot T_E} \stackrel{!}{=} \frac{1}{2 \cdot T_E^2}$$

$$\rightarrow K_p = \frac{T_E}{2 K_{elkp}}$$



$K_p$  eingesetzt in  $G(s)$  ergibt:

$$G(s) = \frac{K_p s}{sT_H(1+sT_E)} = \frac{K_p \cdot T_H}{sT_E(1+sT_E) \cdot 2sT_E} = \frac{1}{s^2 T_E(1+sT_E)}$$

$$\rightarrow G_{\text{reg}}(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{\frac{1}{s^2 T_E(1+sT_E)}}{1 + \frac{1}{s^2 T_E(1+sT_E)}} = \frac{1}{s^2 T_E(1+sT_E) + 1} = \frac{\frac{1}{2T_E^2}}{s^2 + s \frac{1}{T_E} + \frac{1}{2T_E^2}}$$

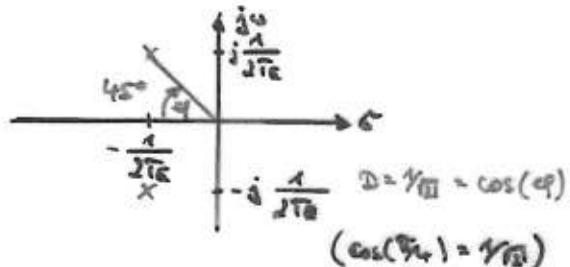
$$\text{Pole von } G_{\text{reg}}(s) : s^2 + s \cdot \frac{1}{T_E} + \frac{1}{2T_E^2} = 0$$

$$x^2 + px + q = 0$$

$$\rightarrow s_{p_{1,2}} = -\frac{1}{2T_E} \pm \sqrt{\frac{1}{4T_E^2} - \frac{1}{2T_E^2}} \\ = -\frac{1}{2T_E} \pm \sqrt{-\frac{1}{4T_E^2}}$$

$$\rightarrow x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$s_{p_{1,2}} = -\frac{1}{2T_E} \pm j \frac{1}{2T_E}$$



$$\hookrightarrow \ddot{u} = e^{-\frac{D\pi}{T_E-2^2}} \approx 0.04 = 4\%$$

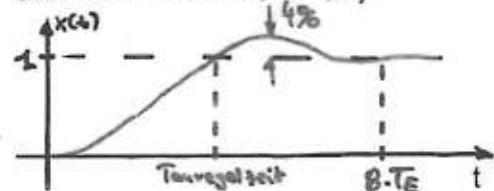
$$\text{Tauszeitzeit} \approx \frac{4}{Dw_0}$$

$$\varepsilon = 2\%$$

ohne Verleitung (siehe Lütt, Wendt, S. 284, mit für die Abweichung vom Wert  $\varepsilon$  ( $t \rightarrow \infty$ ) üblichen Werte: 2%, 5%)

Mit  $2Dw_0 = 1/T_E$  aus Koeffizientenvergleich folgt

$$\text{Tauszeitzeit} \approx 8 \cdot T_E$$



$$x(t \rightarrow \infty) = \lim_{s \rightarrow 0} (s \cdot x(s)) = \lim_{s \rightarrow 0} (s \cdot \underbrace{W(s)}_{\frac{1}{2}} \cdot G_{\text{reg}}(s)) = \lim_{s \rightarrow 0} G_{\text{reg}}(s) = G_{\text{reg}}(0)$$

$$G_{\text{reg}}(0) = \frac{\frac{1}{2T_E^2}}{\frac{1}{2T_E^2}} = 1$$

### "Kohnezept" für PI-Regler nach Betragsoptimum

$$1) T_H = T_{\text{max, Statische}} = T_H$$

$$2) T_E = \sum_{i=1}^n T_i \text{ für verlässliche Zeitkonstanten}$$

$$3) K_p = \frac{T_H}{2K_E T_E}$$

→ Sprunggrößenauslegung: Tauszeitzeit  $\approx 8T_E$  und  $\mu \approx 4\% ; D = \frac{1}{2T_E}$

"Koeffizient" für PID-Regler nach Behnagloffinen

$$G_{PID}(s) = K_p + \frac{K_I}{s} + K_D \cdot s = K_p \cdot \frac{(1+sT_H) \cdot (1+sT_V)}{sT_H}$$

1)  $T_H = T_{\text{max, Strecke}}$

$T_V$  = zweitgrößte Zeitkonstante der Strecke

2)  $T_E = \sum_{i=3}^n T_i$  für restliche Zeitkonstanten

3)  $K_p = \frac{T_H}{2K_S T_E}$

→ Sprungantwortverlauf: Tauschzeit  $\rightarrow$  schneller und  $\approx 4\%$  ;  $D = \frac{1}{2T_E}$

Übung: Gegeben: PT<sub>3</sub>-Strecke mit Übertragungsfunktion

$$G_{PT_3}(s) = \frac{100}{(1+s) \cdot (1+10s)^2} = \frac{100}{(1+s) \cdot (1+10s) \cdot (1+100s)}$$

Gesucht: PID-Regler nach BO

PID-Regler:  $G_{PID}(s) = K_p + \frac{K_I}{s} + K_D \cdot s \approx K_p \cdot \frac{(1+sT_H) \cdot (1+sT_V)}{sT_H}$

wach 1)  $T_H = 10$

$T_V = 10$

wach 2)  $T_E = 1$

wach 3)  $K_p = \frac{10}{2 \cdot K_S \cdot 1}$  mit  $K_S = 100$

$$\rightarrow K_p = \frac{10}{2 \cdot 100}$$

$$K_p = \frac{1}{20}$$

$$\rightarrow G_{PID}(s) = \frac{1}{20} \cdot \frac{(1+s_{10}) \cdot (1+s_{10})}{s \cdot 10}$$

$$\underline{G_{PID}(s) = \frac{1}{200} \cdot \frac{(1+s_{10})^2}{s}}$$

$$G(s) = G_{PT_3}(s) \cdot G_{PID}(s) = \frac{100}{(1+s)(1+10s)^2} \cdot \frac{1}{200} \cdot \frac{(1+s_{10})^2}{s}$$

$$\underline{G_0(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}}$$

$$G_0(s) = \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)} = \frac{\frac{1}{s^2 + 2s + 1}}{1 + \frac{1}{s^2 + 2s + 1}} = \frac{1}{s^2 + 2s + 2} = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

$$\underline{G_0(s) = \frac{1/2}{s^2 + s + 1/2}}$$

Berechnung → Standardformel für System 2. Ordnung (siehe G. Vorlesung, Seite 7)

$$x(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\omega_0^2}} \cdot e^{-D\omega_0 t} \cdot \sin(\omega_0 \sqrt{1-\omega_0^2} t + \varphi)$$

$$\text{mit } D\omega_0 = \frac{1}{2T_E} \text{ bzw. } \omega_0 = \frac{1}{2\pi \cdot T_E} \Big|_{D=\frac{1}{2\pi T_E}} = \frac{1}{12\pi T_E} \text{ folgt}$$

$$\underline{x(t) = 1 - \sqrt{2} \cdot e^{-\frac{t}{2T_E}} \cdot \sin\left(\frac{t}{2T_E} + \varphi\right)} \quad \text{mit } \varphi = \arccos(D) = \arccos\left(\frac{1}{12\pi}\right) \\ \underline{\varphi = 45^\circ}$$

$$\text{Tauschzeit } \approx 8T_E = 8 \cdot 1 \text{ sec}$$

$$\underline{\text{Tauschzeit } \approx 8 \text{ sec}}$$

10. Vorlesung RT, SEDEigenschaften / Anforderungen an Regelkreise① Stationäre Genauigkeit:

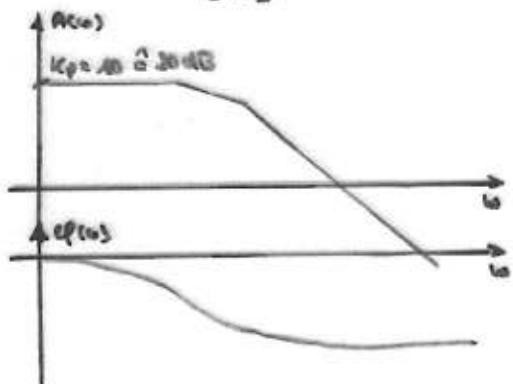
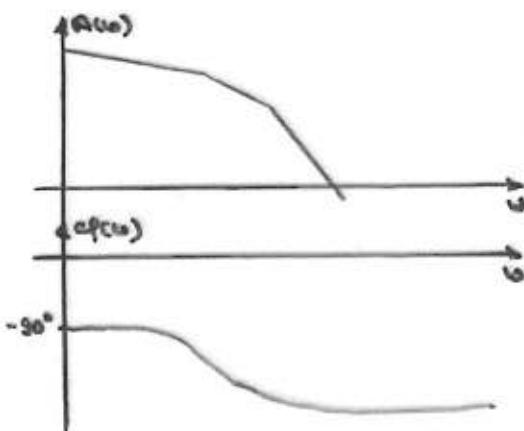
$$\epsilon(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot W(s) \cdot \frac{1}{1+G(s)}]$$

mit  $W(s) = \frac{1}{s}$  folgt

$$\epsilon(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{1+G(s)} \right]$$

Annahme:  $G(s \rightarrow 0) = 10 \stackrel{!}{=} 20 \text{ dB}$ 

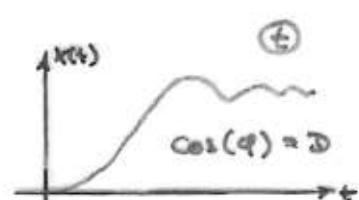
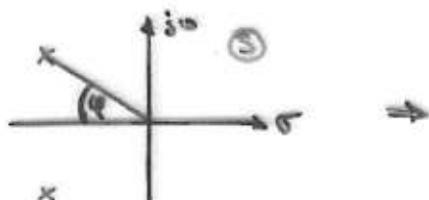
$$\Rightarrow \epsilon(\infty) = \frac{1}{1+10} = \frac{1}{11} \neq 0$$

I mit PT<sub>0</sub>Wenn K<sub>p</sub> steigt sinkt die stationäre  
Regeldifferenz  $\epsilon(\infty)$ ?I mit PT<sub>1</sub>

$$G(s \rightarrow 0) \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow \epsilon(\infty) \rightarrow 0$$

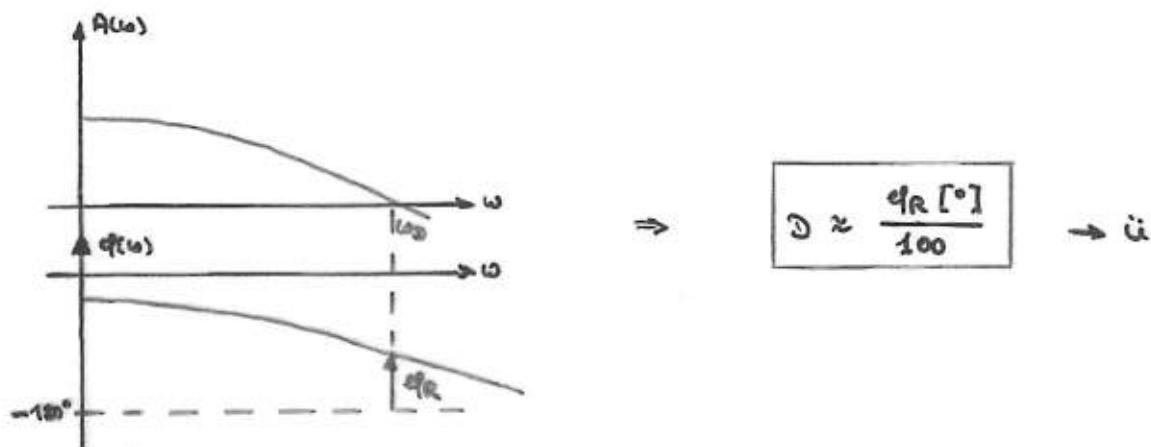
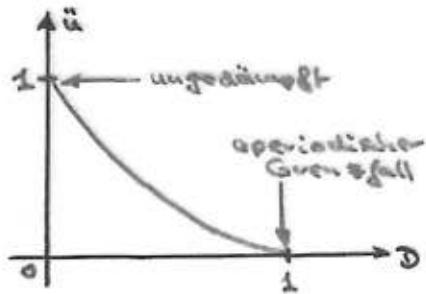
I-Regler regelt aus, damit wird

 $\epsilon(\infty)$  zwangsläufig für  $t \rightarrow \infty$  gleich null!② Überstrahlverhalten:Tritt auf wenn  $G(s)$  komplexe Pole hat.

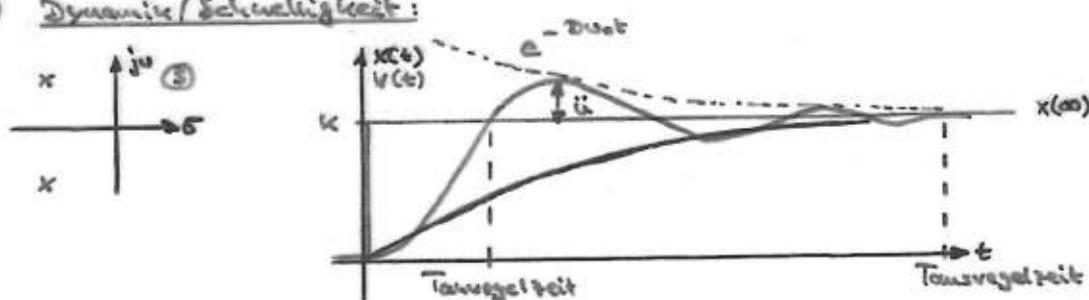
$$\Rightarrow u = e^{-\frac{3\pi}{T(1-\alpha^2)}}$$

$$\hookrightarrow u = f(\alpha)$$

(2)



### (3) Dynamik/Schwingigkeit:



$$x(t) = k \cdot \left[ 1 - \frac{d}{\sqrt{1-\Delta^2}} \cdot e^{-\Delta t} \cdot \sin(\omega_0 \sqrt{1-\Delta^2} \cdot t + \varphi) \right]$$

Schnitstellen mit  $k \rightarrow \sin(\omega_0 \sqrt{1-\Delta^2} \cdot t + \varphi) = 0$

$$\rightarrow \omega_0 \sqrt{1-\Delta^2} \cdot t + \varphi = n \cdot \pi \rightarrow \text{ganzzahliges Vielfaches von } \pi$$

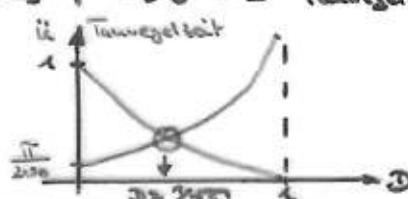
Tawegzeit:  $\rightarrow \Delta = 1 \Rightarrow$

$$\text{Tawegzeit} = \frac{\pi - \varphi}{\omega_0 \sqrt{1-\Delta^2}}$$

$$\text{mit } \cos(\varphi) = \Delta \text{ folgt: } \text{Tawegzeit} = \frac{\pi - \arccos(\Delta)}{\omega_0 \sqrt{1-\Delta^2}}$$

$$\Delta = 0 \rightarrow \arccos(\Delta) = \frac{\pi}{2} \rightarrow \text{Tawegzeit} = \frac{\pi}{2\omega_0}$$

$$\Delta = 1 \rightarrow \arccos(\Delta) = 0 \rightarrow \pi \rightarrow 0 \rightarrow \text{Tawegzeit} \rightarrow \infty$$



(siehe auch 9. Vorlesung, Seite 3)

$$\text{Tauschzeit} \approx \frac{4}{D_{\text{so}}}$$

(siehe 3. Vorlesung, §.4)

### Wiederholung Betriebs optimum (Bo):

- \* Kompensationsregler: PI oder PID für PT<sub>N</sub>-Stufen

$$\hookrightarrow G_{\text{PI}}(s) = \frac{K_p(1+sT_N)}{sT_N}$$

$$\hookrightarrow G_{\text{PID}}(s) = K_p \cdot \frac{(1+sT_N)(1+sT_V)}{sT_N}$$

Strategie: Kompensation großer Zeitkonstanten der Regelstrecke

$$T_N = \text{Tausch von } G_{\text{SCS}}$$

$$T_V = \text{zweitgrößte Zeitkonstante von } G_{\text{SCS}}$$

$$T_E = \sum_{i=3}^n T_i \quad \text{Summe der versteckten, kleinen Zeitkonstanten}$$

zusammengefaßt in der Ersatzzeitkonstanten T<sub>E</sub>

- \* Einstellung des Regelkreises:  $D = \frac{1}{K_p T_E} \rightarrow K_p = \frac{T_N}{2K_p T_E}$

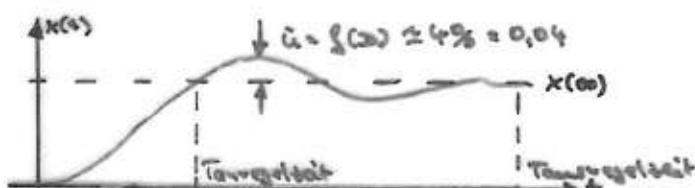
$$\text{Tauschzeit: PI-Regler } \approx 0 \cdot T_E$$

$$\text{PID-Regler } < 8 \cdot T_E$$

$$\bar{u} \approx 4\%$$

Für den PI-Regler ergibt sich: (siehe 3. Vorlesung, §.4)

$$G_{\text{PI}}(s) = \frac{1}{2T_E s(1+sT_E)} = \frac{\frac{1}{2T_E}}{s(1+sT_E)} ; \quad G_{\text{SCS}}(s) = \frac{\frac{1}{2T_E^2}}{s^2 + \frac{1}{T_E} \cdot s + \frac{1}{2T_E^2}}$$



### Einstellung von Regelweisen nach dem symmetrischen Optimum (SO)

\* Ansetz: Kompensationsregler von Typ PI und PID

$$\text{Für IT}_n\text{-Strecken, z.B. IT}_2\text{-Strecke: } G_{IT_2}(s) = \frac{k_{IS}}{sT_0(1+sT_1)(1+sT_2)} \stackrel{!}{=} \frac{k_{IS}}{sT_0(1+sT_E)}$$

\* Strategie: Das Ziel ist die Optimierung der Symmetrie des Phasenganges und eine möglichst hohe Phasenreserve

Betrachtung IT<sub>n</sub>-Strecke nach SO:

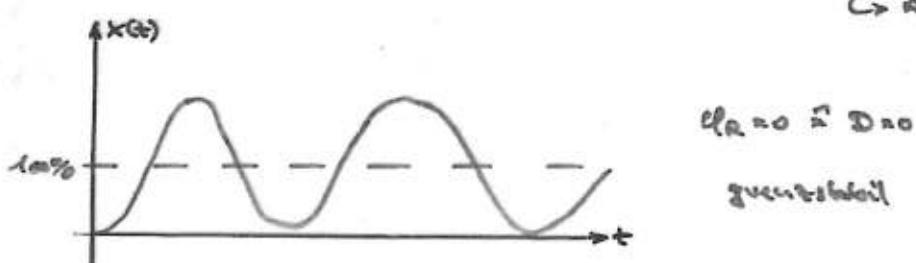
$$\text{Strecke: } G_{IT_n}(s) = \frac{k_{IS}}{sT_0(1+sT_E)} \quad \text{mit PI-Regler: } G_{PI}(s) = \frac{k_p(1+sT_H)}{sT_H} \quad \text{mit } T_E = T_H = T_{max}$$

$G_R(s) \quad (s = j\omega) \approx P$ -Beladen IT-Gleich

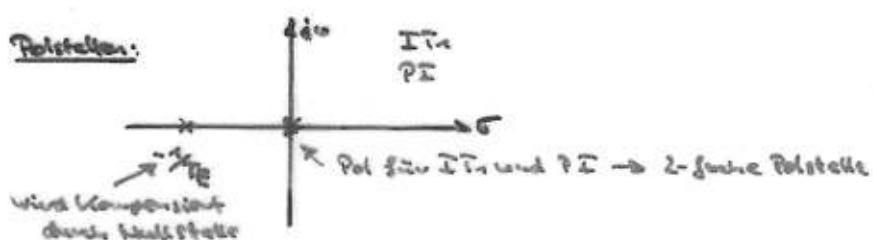
$$G_R(s) = G_{IT_n}(s) \cdot G_{PI}(s) = \frac{k_p \cdot k_{IS}(1+sT_E)}{s^2 T_0 T_H (1+sT_E)} \stackrel{!}{=} \frac{k_p \cdot k_{IS}}{s^2 T_0 T_H}$$

$$G_{R(s)} = \frac{G_R(s)}{1+G_R(s)} = \frac{k_p k_{IS}}{s^2 T_0 T_H + k_p k_{IS}} = \frac{\frac{k_p k_{IS}}{T_0 T_E}}{s^2 + \frac{k_p k_{IS}}{T_0 T_E}} \quad \text{Viele Dämpfung?}$$

↳ Allgemeine Form:  $s^2 + 2D s + \omega_0^2$

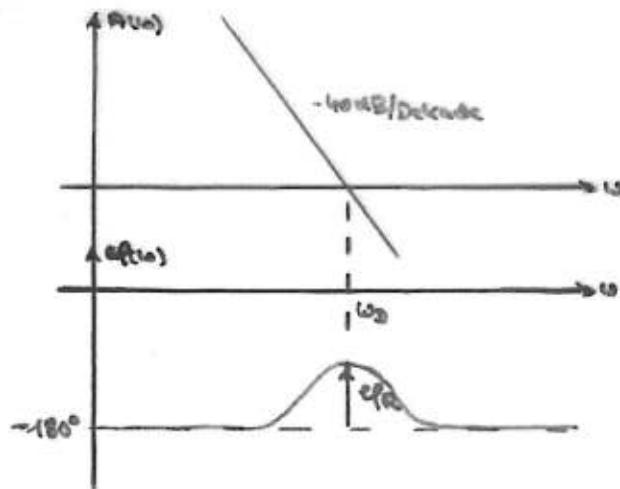


Nulstelle wird verschoben durch  $T_H \rightarrow T_E$



Ziel des SO ist Optimierung von  $\alpha_R$ , d.h. möglichst hohe  $\alpha_R$ ?

Dies führt zu folgenden qualitativen Amplituden und Phasengang:



Dazu muss  $T_N > T_E$  gewählt werden!

Wählt:  $T_N = \alpha^2 \cdot T_E$  mit  $\alpha > 1$  und  $\alpha \in \mathbb{N} \{2, 3, \dots\}$

Nach 20 gilt:  $G(j\omega) = \frac{K_{ZS} K_P (1+sT_N)}{s^2 T_N T_E (1+sT_E)} \xrightarrow{s^2 \neq 0} G(j\omega) = -\frac{K_{ZS} K_P (1+j\omega T_N)}{\omega^2 T_N T_E (1+j\omega T_E)}$

$\rightarrow$  Betrag:  $R(\omega) = |G(j\omega)| = \frac{K_{ZS} K_P}{\omega^2 T_N T_E} \cdot \frac{\sqrt{1+\omega^2 T_N^2}}{\sqrt{1+\omega^2 T_E^2}}$

Phasen:  $\phi(\omega) = -180^\circ + \underbrace{\arctan(\omega T_N) - \arctan(\omega T_E)}_{\phi_R \text{ (mit } \omega = \omega_0)}$

Ziel:  $\phi_R$  maximieren!

Vorgehensweise: Extremwert bestimmen, d.h. Ableitung  $\frac{d\phi}{d\omega}$  gleich Null setzen.

$$\phi_R(\omega) = \arctan(\omega T_N) - \arctan(\omega T_E)$$

$$\frac{d\phi_R}{d\omega} \approx \frac{d}{dx} \arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\hookrightarrow \frac{d\phi_R}{d\omega} = \frac{T_N}{1+\omega^2 T_N^2} - \frac{T_E}{1+\omega^2 T_E^2} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \frac{T_N}{1+\omega^2 T_N^2} = \frac{T_E}{1+\omega^2 T_E^2}$$

$$\rightarrow T_N(1+\omega^2 T_E^2) = T_E(1+\omega^2 T_N^2)$$

$$T_N + \omega^2 T_E^2 T_N = T_E + \omega^2 T_N^2 T_E$$

$$(T_N - T_E) = \omega^2 T_N^2 T_E - \omega^2 T_E^2 T_N = \omega^2 T_N T_E \cdot (T_N - T_E)$$

$$\rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{T_N T_E}}$$

Bei dieser Frequenz ist der Phasenwinkel  $\phi(\omega)$  maximal

Damit folgt:

$$\omega = \omega_D = \frac{1}{\sqrt{T_N T_E}}$$

$\varphi_R$  maximal

$$\text{Beweis: } \omega = \omega_D = \frac{1}{\sqrt{T_N T_E}} \rightarrow |G(\omega)| \Big|_{\omega=\omega_D} = 1 \stackrel{!}{=} 0 \text{ dB}$$

$$|G(\omega)| = \frac{K_{IS} K_P}{\omega_D^2 T_N T_E} \cdot \frac{\sqrt{1 + \omega_D^2 T_N^2}}{\sqrt{1 + \omega_D^2 T_E^2}} = 1$$

$$\omega_D \text{ einsetzen liefert: } \frac{K_{IS} K_P \cdot T_N T_E}{T_N T_0} \cdot \frac{\sqrt{1 + \frac{T_N^2}{T_N T_E}}}{\sqrt{1 + \frac{T_E^2}{T_N T_E}}} = 1$$

$$\frac{K_{IS} K_P T_E}{T_0} \cdot \frac{\sqrt{1 + \frac{T_N}{T_E}}}{\sqrt{1 + \frac{T_E}{T_N}}} = \frac{K_{IS} K_P T_E}{T_0} \cdot \sqrt{\frac{T_E + T_N}{T_N}} = 1$$

$$\frac{K_{IS} K_P T_E}{T_0} \cdot \sqrt{\frac{(T_E + T_N) \cdot T_N}{(T_E + T_N) \cdot T_E}} = \frac{K_{IS} K_P T_E}{T_0} \cdot \sqrt{\frac{T_N}{T_E}} = 1$$

$$\rightarrow V_P = \frac{T_0}{K_{IS} T_E} \cdot \sqrt{\frac{T_E}{T_N}} \quad \text{mit } T_N = \alpha^2 \cdot T_E$$

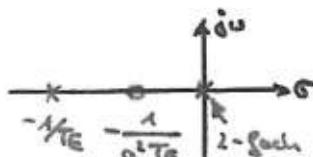
$$\Rightarrow K_P = \frac{T_0}{\alpha \cdot K_{IS} \cdot T_E}$$

$$\text{Streda: } G(s) = \frac{K_{IS}}{s T_0 (1 + s T_E)}$$

$$\text{Regler: } G(s) = \frac{V_P (1 + s T_N)}{s T_N}$$

$$G(s) = \frac{K_{IS} \cdot K_P (1 + s T_N)}{s^2 T_0 T_N (1 + s T_E)} = \frac{K_{IS}}{s^2 T_0 \alpha^2 T_E} \cdot \frac{T_0}{K_{IS} \cdot T_E} \cdot \frac{(1 + s \alpha^2 T_E)}{(1 + s T_E)}$$

$$G(s) = \frac{(1 + s \alpha^2 T_E)}{s^2 \alpha^2 T_E^2 (1 + s T_E)}$$



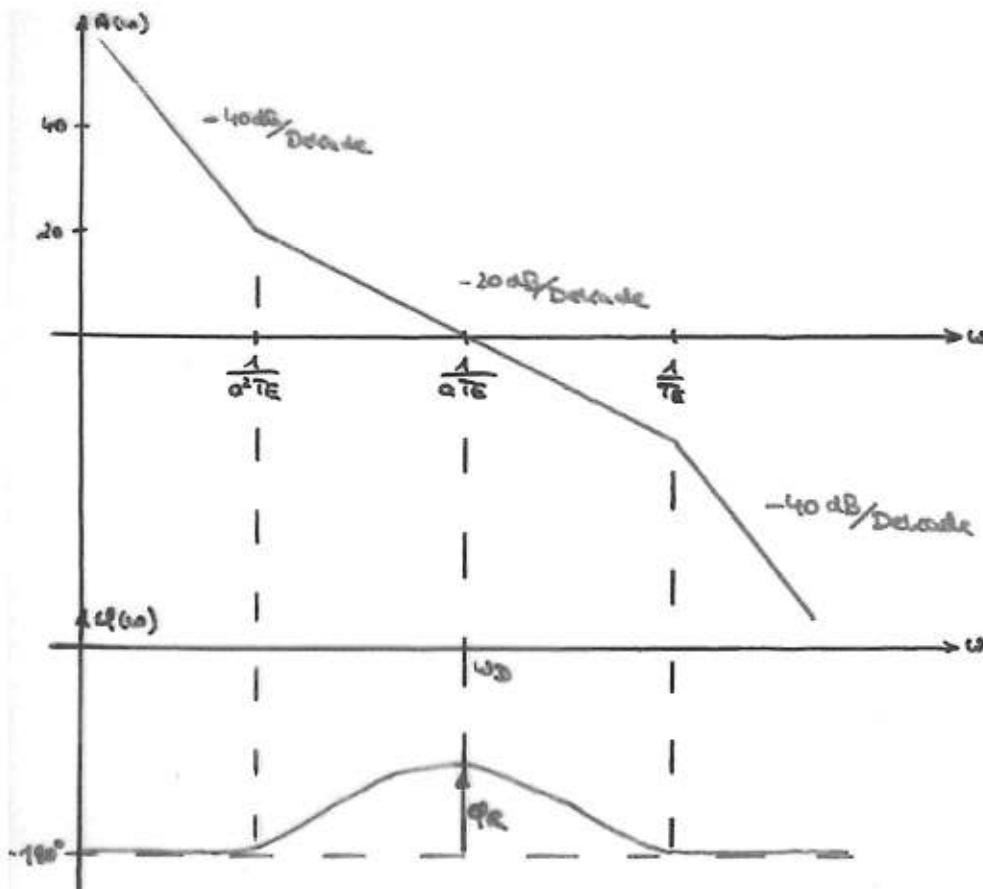
$$\omega_D = \frac{1}{\sqrt{T_N T_E}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 T_E^2}} = \frac{1}{\alpha T_E}$$

$$\varphi_R = \arctan(\omega_D T_N) - \arctan(\omega_D T_E)$$

$$= \arctan\left(\frac{T_N}{\sqrt{T_N T_E}}\right) - \arctan\left(\frac{T_E}{\sqrt{T_N T_E}}\right)$$

$$= \arctan\left(\sqrt{\frac{T_N}{T_E}}\right) - \arctan\left(\sqrt{\frac{T_E}{T_N}}\right)$$

$$\varphi_R = \arctan(\alpha) - \arctan\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$



Der Regler wird so bemessen, daß die Durchhüftfrequenz  $\omega_0$  das geometrische Mittel der Bandbreitfrequenzen

$$\omega_H = \sqrt{\omega_N} = \sqrt{\alpha^2 T_E} \text{ und } \omega_B = \sqrt{\frac{1}{T_E}}$$

annimmt.

→ Symmetrieeigenschaften von Amplituden- und Phasengang?

Durch gezielte Wahl von  $T_H$  läßt sich eine Phasenreserve  $\phi_R$  einstellen, die dem Regelkreis das gewünschte Einstellungsverhalten gibt.

Klassischer Fall:

$$\alpha = 2$$

Bsp.: Gegeben: Strecke  $G_{TE}(s) = \frac{100}{s(1+5s)}$

Gesucht: Regler-Dimensionierung nach S0 für PI-Regler

$$\Leftrightarrow T_H = \alpha^2 \cdot T_E = 4 \cdot T_E = 20 \text{ sec}$$

$$K_P = \frac{T_H}{\alpha^2 \cdot T_E} = \frac{1}{2 \cdot 100 \cdot 5} = \frac{1}{1000}$$

$$\Leftrightarrow G_{P\Sigma}(s) = \frac{K_P \cdot (1+sT_H)}{sT_N} = 0,001 \cdot \frac{1+20s}{20s}$$

$$\phi_R = \arctan(2) - \arctan(\sqrt{5}) \approx 40^\circ$$

$$G_{U\Sigma} = \frac{G_U(s)}{1+G_P(s)}$$

$$\omega_B = \frac{1}{\alpha T_E} = \frac{1}{2 \cdot 5 \text{ sec}} = \frac{1}{10 \text{ sec}}$$

$$D \approx \frac{\phi_R [^\circ]}{180}$$

} → ü. Tauschzeit

Wiederholung und Übungen

P<sub>IN</sub>-Struktur: Reglerentwurf nach Zielgrößeoptimum → siehe Lütt, Wendt, Kap. 10.4,

S. 446 ff

Einstellregeln: Kap. 10.4.5, S. 457 ff

T<sub>IN</sub>-Struktur: Reglerentwurf nach symmetrischem Optimum → siehe Lütt, Wendt, Kap. 10.5,

S. 458 ff

Einstellregeln: Kap. 10.5.5, S. 468 ff

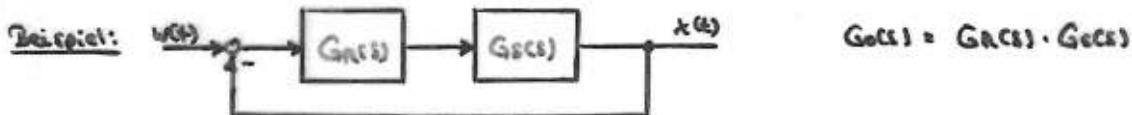
Hannitts-Kriterium:

$$G_H(s) = \frac{G_C(s)}{\underbrace{1+G_C(s)}_{\hookrightarrow \text{keine Pole in der rechten Halbebene?}}}$$

↪ keine Pole in der rechten Halbebene?

$$\hookrightarrow P(s) = 1 + G_C(s) = 0 \Rightarrow s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \dots + d_1s + d_0$$

Bedingung:  $d_i > 0, \forall i > 0$



geg.:  $G_C(s) = \frac{10}{s^2 + 2s + 2}$

ges.: Dimensionierung eines PI-Reglers nach Hannitts, d.h. wie müssen  $K_p$  und  $T_N$  gewählt werden, damit der Regelkreis stabil ist?

$$G_R(s) = G_{PI}(s) = K_p \cdot \frac{(1+sT_N)}{sT_N} \quad (G_{PI}(s) = K_p + \frac{K_I}{s} \text{ mit } T_N = K_I/K_p)$$

$$K_R = ?, D = ?, \ddot{U} = ?$$

Lösung:

a)

$$1.) P(s) \text{ bestimmen: } P(s) = 1 + G_C(s) = 1 + G_R(s) \cdot G_C(s) = 1 + \frac{K_p(1+sT_N)}{sT_N} \cdot \frac{10}{s^2 + 2s + 2} \stackrel{V}{=} 0$$

$$\rightarrow P(s) = \frac{sT_N(s^2 + 2s + 2) + K_p(1+sT_N) \cdot 10}{sT_N(s^2 + 2s + 2)} = 0$$

2.) Zähler ausmultiplizieren und sortieren:  $s^3 T_N + 2s^2 T_N + 2sT_N + 10 K_p T_N + K_p \cdot 10 = 0$

$$\underbrace{\delta^2 T_N}_{d_3} + \underbrace{z^2 \cdot 2 \bar{T}_N}_{d_2} + \underbrace{z(2\bar{T}_N + 10K_p T_N)}_{d_1} + \underbrace{K_p \cdot 10}_{d_0} = 0$$

3.)  $d_1 > 0$     } Kriterien, die erfüllt sein müssen  
 $K_p > 0$

$$\hookrightarrow d_0 > 0 \Rightarrow K_p > 0$$

$$d_1 > 0 \Rightarrow \underbrace{2\bar{T}_N}_{>0, \text{ da } K_p \text{ größer } 0} (\underbrace{1 + \delta K_p}_{>0}) > 0$$

$$\hookrightarrow \bar{T}_N > 0$$

4.) Determinanten bestimmen:

$$D_1 = d_1 > 0$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} d_1 & d_3 \\ d_0 & d_2 \end{vmatrix} = d_1 d_2 - d_0 d_3 > 0 \Rightarrow d_1 d_2 > d_0 d_3$$

$$\text{Werte einsetzen liefert: } 4\bar{T}_N^2 (1 + \delta K_p) > 10 K_p \cdot T_N$$

$$\rightarrow \bar{T}_N > \frac{10 K_p}{4(1 + \delta K_p)}$$

$$\Rightarrow \text{Regelkreis ist stabil, wenn } K_p > 0 \text{ wird und } \bar{T}_N > \frac{2.5 K_p}{1 + \delta K_p}$$

~> Werte können eingesetzt und überprüft werden, wähle z.B.  $K_p = 1$

$$\hookrightarrow \bar{T}_N > \frac{4.5}{6} = 0.75$$

B)  $\varphi_R$  lässt sich aus dem Bode-Plot an der Stelle  $A(\omega) \Big|_{\omega=\omega_D} = 0 \text{ dB}$  ermitteln.

$$\varphi_R \text{ ist Abstand von } \varphi_{G_0}(\omega) \Big|_{\omega=\omega_D} \text{ zu } -180^\circ$$

$$g) \quad D = \frac{\varphi_R [^\circ]}{180}$$

$$s) \quad i_s = \varphi \frac{D \pi}{180^\circ}$$

Allgemeiner PID-Regler: Überlagerung von P-, I-, und D-Regler (additiv)

$$\Leftrightarrow y_{PID}(t) = K_p \cdot e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau + K_D \cdot \frac{de(t)}{dt}$$

mit  $T_H = K_p / K_I$  und  $T_U = K_D / K_p$  folgt:

$$y_{PID}(t) = K_p \cdot \left[ e(t) + \frac{1}{T_H} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_U \cdot \frac{de(t)}{dt} \right]$$

$$\mathcal{L}: G_{PID}(s) = K_p + \frac{K_I}{s} + K_D \cdot s$$

$$= K_p \cdot \left[ 1 + \frac{1}{sT_H} + sT_U \right]$$

$$= K_{pH} \cdot \frac{(s^2 T_H T_U + s T_H + 1)}{s T_H}$$

$$\stackrel{!}{=} \frac{K_{pH} (1 + s T_H) \cdot (1 + s T_U)}{s T_H}$$

Die multiplikative Form ist speziell  
beim Kompensationsregler angesetzt  
von Vorteil

(siehe Lütt, Wendt, Kap. 4.5.2.7,  
S. 162 ff)

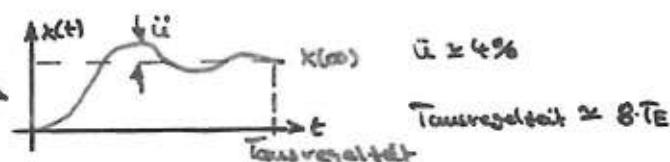
PI-Regler:  $G_{PI}(s) = K_p + \frac{K_I}{s} = K_p \cdot \left[ 1 + \frac{1}{sT_H} \right]$

$$G_{PI}(s) = K_p \cdot \frac{1 + sT_H}{sT_H}$$

### Regelervorgang für vorgegebene Prozesse bzw. Regelstrecken

→ PT<sub>H</sub>-Strecken: 30

→ IT<sub>H</sub>-Strecken: 50



Einstellregeln so:  $\bar{T}_H = \alpha^2 T_E$

$$K_p = \frac{\bar{T}_0}{\alpha \cdot K_{ES} \cdot T_E}$$

$$G_{PTH}(s) = \frac{K_{pH}}{s \bar{T}_0 (1 + s \bar{T}_E)}$$

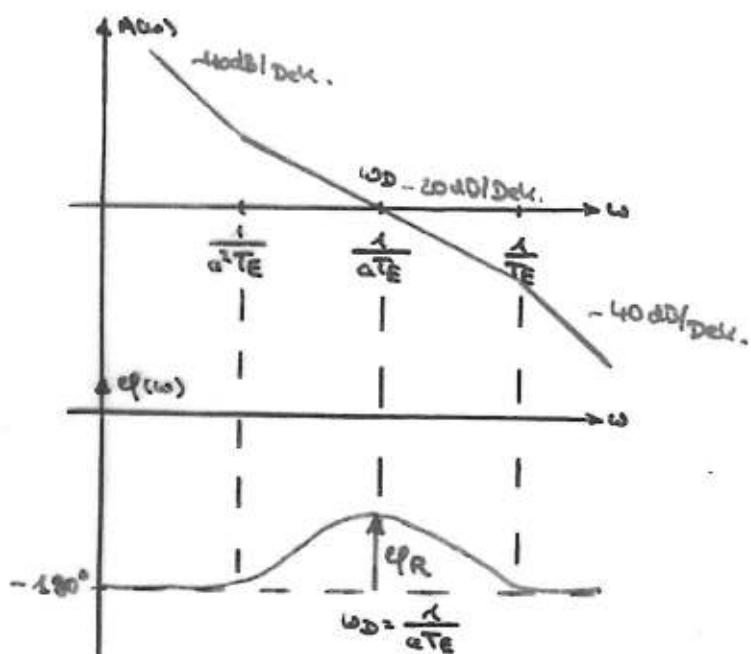
$$G_{PI}(s) = K_p \cdot \frac{(1 + s \bar{T}_H)}{\bar{T}_H}$$

(4)

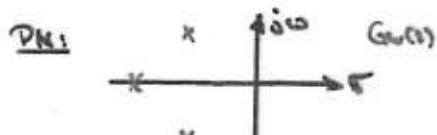
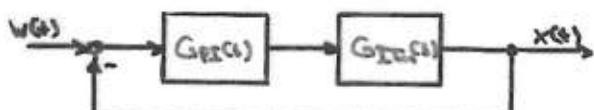
$$G(s) = G_{PT}(s) \cdot G_{TE}(s) \quad \text{mit} \quad G_{PT}(s) = K_P \cdot \frac{(1+sT_N)}{sT_N}; \quad G_{TE}(s) = \frac{K_T}{sT_E(1+sT_E)}$$

$$\rightarrow G(s) = \frac{(1+\alpha^2 T_E s)}{s^2 \alpha^2 T_E^2 (1+sT_E)}$$

$$T_N = \alpha^2 \cdot T_E; \quad K_P = \frac{T_0}{0.4 T_E \cdot T_E}$$

Bode-Diagramm:

Gv(s):  $G_{v(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{1+\alpha^2 T_E s}{s^2 \alpha^2 T_E^2 + s^2 \alpha^2 T_E^2 + \alpha^2 T_E s + 1}$



$$s_{p1} = -\frac{1}{\alpha T_E}$$

$$s_{p2,3} = -\left[ \frac{\alpha-1 \pm \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha - 3}}{2\alpha T_E} \right]$$

Forderung nach SO:  $\alpha > 1$ Optimiertes Verhalten für  $\alpha = 2$

Beispiel:

$$\text{Ges.: } G_{\text{PI}}(s) = \frac{10}{s(1+2s)(1+20s)(1+s)}$$

Ges.: PI-Regler nach dem SO

$$\text{Lösung: } \bar{T}_E = \sum_{i=1}^3 T_i = 9 + 20 + 1 = \frac{30}{s_0} = \bar{T}_1 + \bar{T}_2 + \bar{T}_3$$

$$\bar{T}_H = \alpha^2 \bar{T}_E = 4 \bar{T}_E = 120 \text{ sec} \quad \text{für optimales Verhalten mit } \alpha=2$$

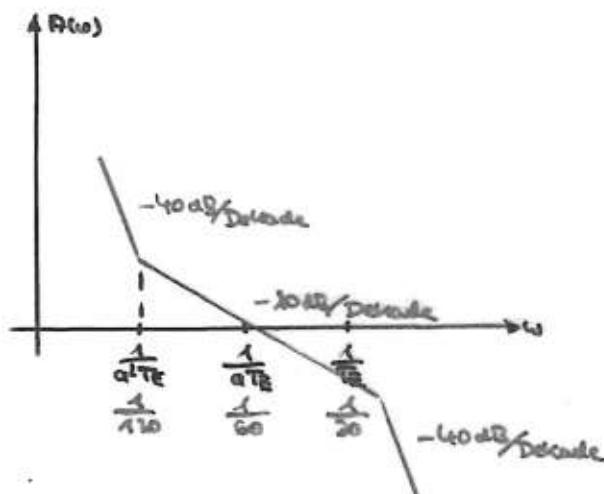
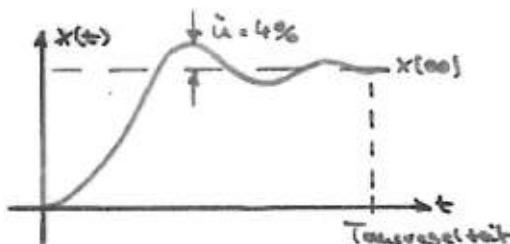
$$K_D = \frac{\bar{T}_0}{\alpha \cdot K_{II} \cdot \bar{T}_E} = \frac{\bar{T}_0}{2 \cdot 10 \cdot 30}$$

$$K_D = \frac{1}{600}$$

$$G_{\text{D}}(s) = \frac{(1+\alpha^2 \bar{T}_E s)}{s^2 \bar{T}_E^2 (1+20s)}$$

$$\rightarrow G_{\text{D}}(s) = \frac{1+4 \cdot 30s}{s^2 \cdot 8 \cdot 900 (1+30s)}$$

$$G_{\text{D}}(s) = \frac{1+120s}{s^2 \cdot 7200 (1+30s)}$$

Spurgangantwort:

$$\boxed{\text{Transientzeit } \approx 16 \cdot \bar{T}_E}$$

$$\rightarrow \text{Transientzeit } \approx 16 \cdot 30 = 480 \text{ sec}$$

Ges.: PID-Regler nach dem SO

$$\text{Lösung: } G_{\text{PID}}(s) = \frac{10}{s(1+2s)(1+20s)(1+s)} \stackrel{?}{=} \frac{10}{s(1+20s)(1+s \bar{T}_E)} \quad \text{mit } \bar{T}_E = \sum_{i=2}^4 T_i$$

analog zu 20

$$G_{PID}(s) = K_p \frac{(1+sT_H)(1+sT_U)}{sT_H}$$

$$\bar{T}_H = \alpha^2 \bar{T}_E$$

$$\bar{T}_E = 1+2 = 10$$

$$\rightarrow T_H = 4 \cdot 10 = 40 \text{ sec}$$

$\bar{T}_U = T_{\text{max, Strecke}}$

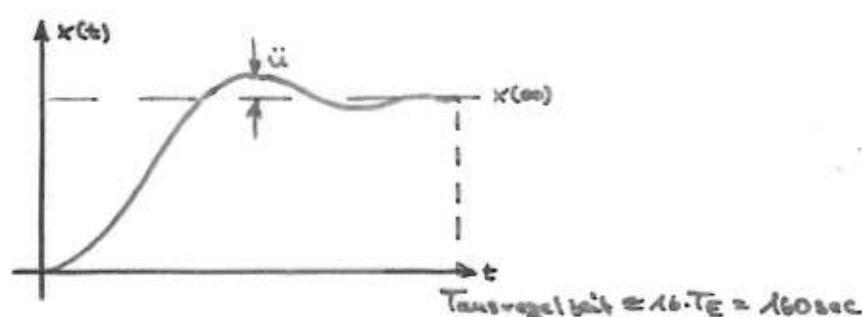
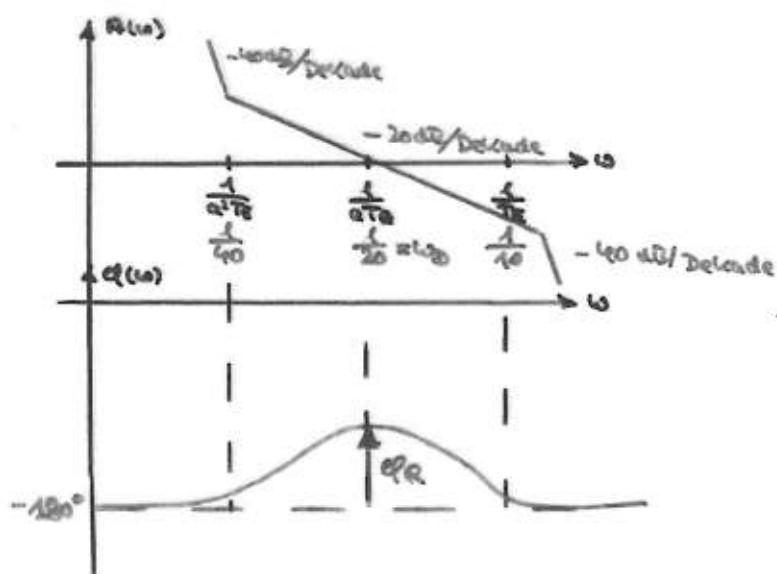
(vgl. Bo:  $\bar{T}_H = T_{\text{max, Strecke}}$ ;  $\bar{T}_U = \text{bedingt gewünschte Zeitkonst.}$ )

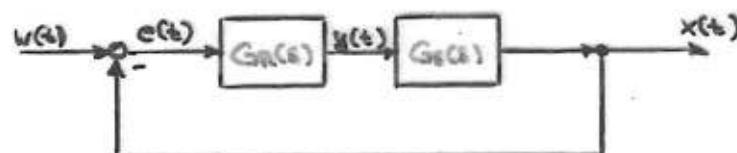
$$\rightarrow T_U = 20 \text{ sec}$$

$$\hookrightarrow G(s) = \frac{10}{s(1+40s)(1+sT_E)} \cdot \frac{K_p \cdot \frac{(1+sT_H)(1+sT_U)}{sT_H}}{sT_H} = \frac{T_U = 20}{s^2 \cdot 800 \cdot (1+8 \cdot 10)}$$

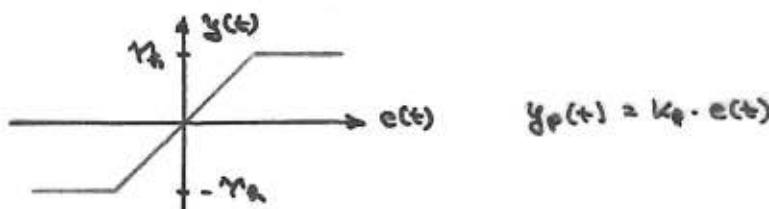
"Kompensationsteil"

$$\rightarrow G(s) = \frac{1+s^2 T_E s}{s^2 \alpha^2 \bar{T}_E^2 (1+sT_E)} = \frac{1+40s}{s^2 \cdot 800 \cdot (1+8 \cdot 10)}$$

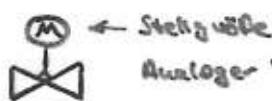


Unstetiger ReglerZiffer:

Kontinuierlicher / stetiger Regler: Stellgröße  $y(t)$  ist zwischen 0 und 100% stetig einstellbar

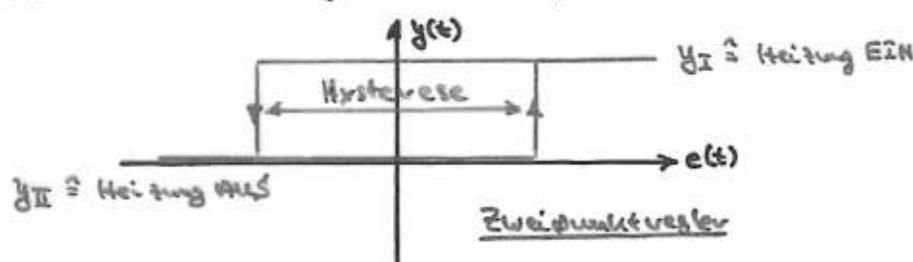
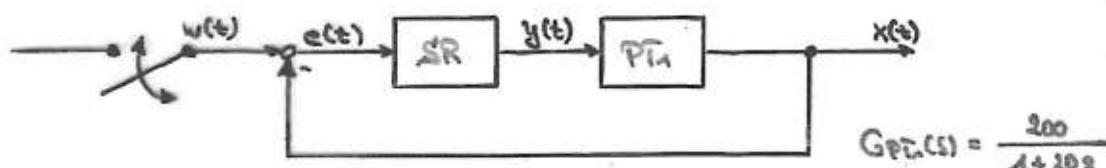
Beispiel:

Regelstrecke z.B.:



Analoger Wertebereich: z.B. 0...10V  
= 0...100%

Zeit: Schaltender / nichtstetiger Regler: Stellgröße  $y(t)$  nimmt nur diskrete Zustände an

Beispiel: HeizungsregelungBeispiel: Regelkreis mit ZweipunktregeberSR = Schaltende Regler

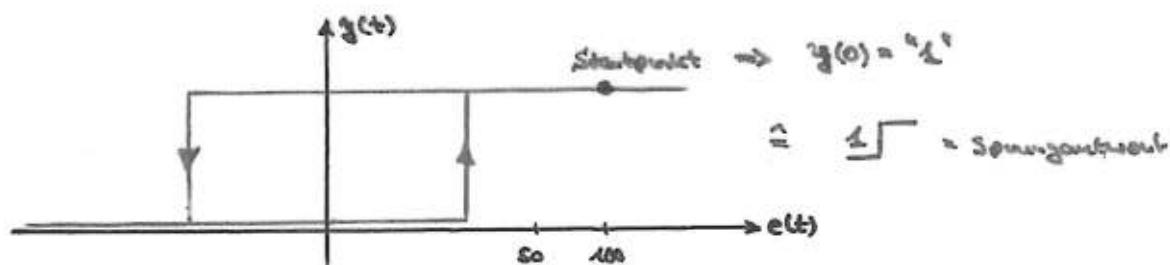
zum Zeitpunkt  $t=0$  wird 100 aufgehalten  $\rightarrow w(t=0) = 100$

Im ersten Augenblick:  $x(t=0) = 0$

$$\rightarrow e(t=0) = w(t=0) - x(t=0) = 100 - 0 = 100$$

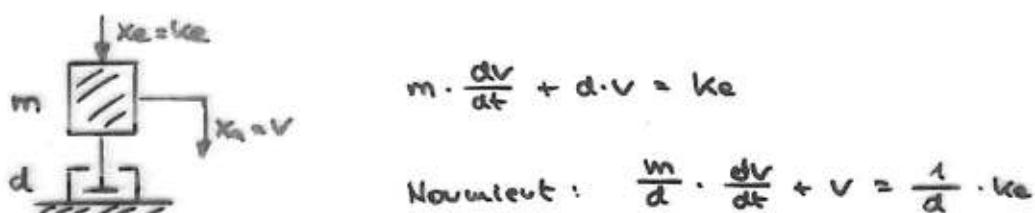
$$\text{bzw.: } y(0) = u(0) - x(0) = 100 - 0 = 100$$

Startpunkt in der Kennlinie:



→  $x(t)$  ergibt die Sprungantwort eines  $\text{PT}_1$ -Elements

$\text{PT}_1$ -System: z.B. Masse-Dämpfungssystem



Verallgemeinert mit:  $x_a = v$ ,  $k_e = k_e$ ,  $T = \frac{m}{d}$  und  $K = \frac{1}{d} \cdot k_e$  ergibt sich

$$T \cdot \frac{dx_a}{dt} + x_a = K \cdot x_a$$

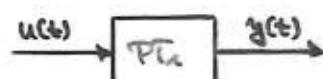
DGL 1. Ordnung

$\text{PT}_1$ -Glied

Angewandt auf das obige  $\text{PT}_1$ -System ergibt sich:

$$y(t) + T \cdot \dot{y}(t) = K \cdot u(t)$$

oder



$$Y(s) + T \cdot (s \cdot Y(s) - y(0)) = K \cdot U(s)$$

siehe Tabelle S. 13 in "... Laplace-Transformation, pag."

$$Y(s) \cdot [1 + sT] = K \cdot U(s) + T \cdot y(0)$$

→ Anfangswert  $y(0)$  bzw.  $f(0+)$

$$\rightarrow Y(s) = \frac{K}{1+sT} \cdot U(s) + \frac{T}{1+sT} \cdot y(0)$$

Sprungantwort:  $u(t) = \frac{1}{1+sT} \rightarrow \frac{1}{s}$  und mit Gl. 2-6:  $\frac{1}{s-a} \rightarrow e^{at}$

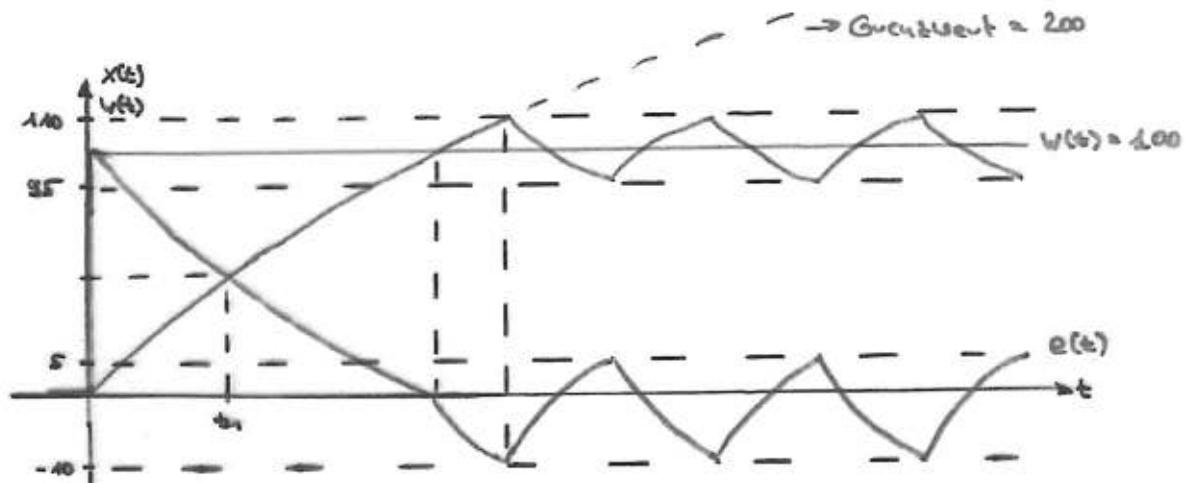
sowie Gl. 2-9:  $\frac{-a}{s(s-a)} \rightarrow 1 - e^{at}$  folgt:

$\xrightarrow{L^{-1}}$ 

$$y(t) = k \cdot (1 - e^{-t/\tau}) + y(0) \cdot e^{-t/\tau}$$

Für  $x(t)$  als Sprungantwort des  $\hat{\pi}_{II}$ -Elements ergibt sich die Analogie:

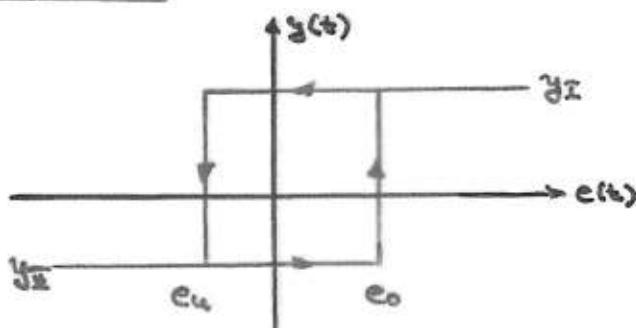
$$x(t) = y_{II} \cdot k \cdot (1 - e^{-t/\tau}) + x_0 \cdot e^{-t/\tau}$$



$$x(t) = 200 \cdot (1 - e^{-t/20}) + 25 \cdot e^{-t/20} \quad \text{Bei Umgabe von } 95$$

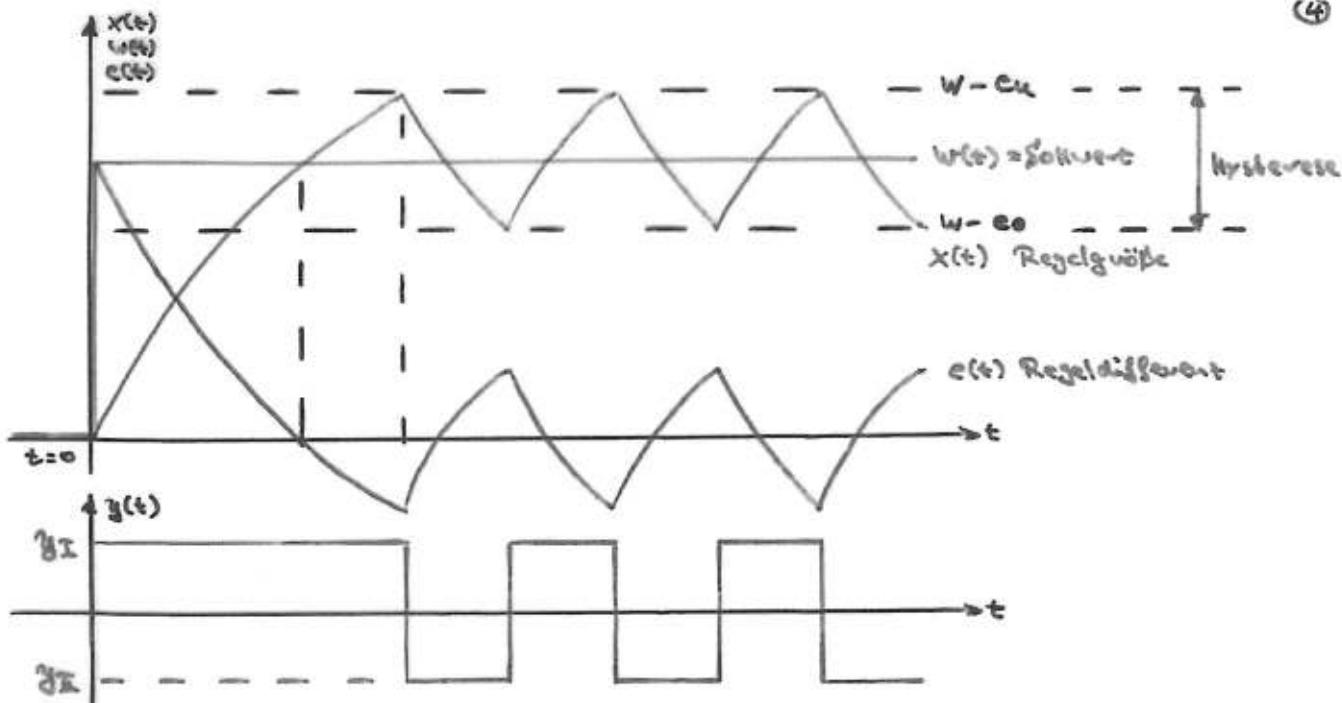
$\hookrightarrow y_{II} = 200 \cdot y_{I}$

Allgemeiner Fall:



$$x_1(t) = k \cdot y_{II} \cdot (1 - e^{-t/\tau}) + x_0 \cdot e^{-t/\tau} \quad x_0 = \text{Startwert, wenn Stellgröße den Wert } y_{II} \text{ annimmt.}$$

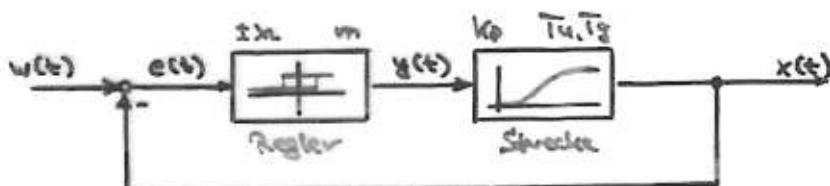
$$x_2(t) = k \cdot y_{II} \cdot (1 - e^{-t/\tau}) + x_0 \cdot e^{-t/\tau} \quad x_0 = \text{Startwert, wenn Stellgröße den Wert } y_{II} \text{ annimmt.}$$



Mit kleinerer Hysterese nimmt die Schalthäufigkeit zu  $\rightarrow$  Verbleib von mechanischen Schaltern steigt, aber auch Genauigkeit  $\gamma$

### Beispiel: Temperaturregelung

Die Temperatur im einem Ofen soll durch einen unsymmetrischen Doppelpunktregler, der eine Hysteresekreite von  $2 \cdot \Delta x_c = 40K$  besitzt, auf einem Sollwert von  $750^\circ C$  gehalten werden. Die folgende Skizze zeigt den Signalflußplan des Regelkreises.



Bei einem Test wurde die Regelstrecke mit einem Einheitssprung  $x_{\text{aus}} = u = 1$  erregt und dabei folgende Streckenparameter ermittelt:

Anfangswert der Temperatur:  $x(0) = 0^\circ C$

Endwert der Temperatur:  $x_{\text{aus}} = 1500^\circ C$

Verzugszeit:  $T_U = 0 \text{ min}$

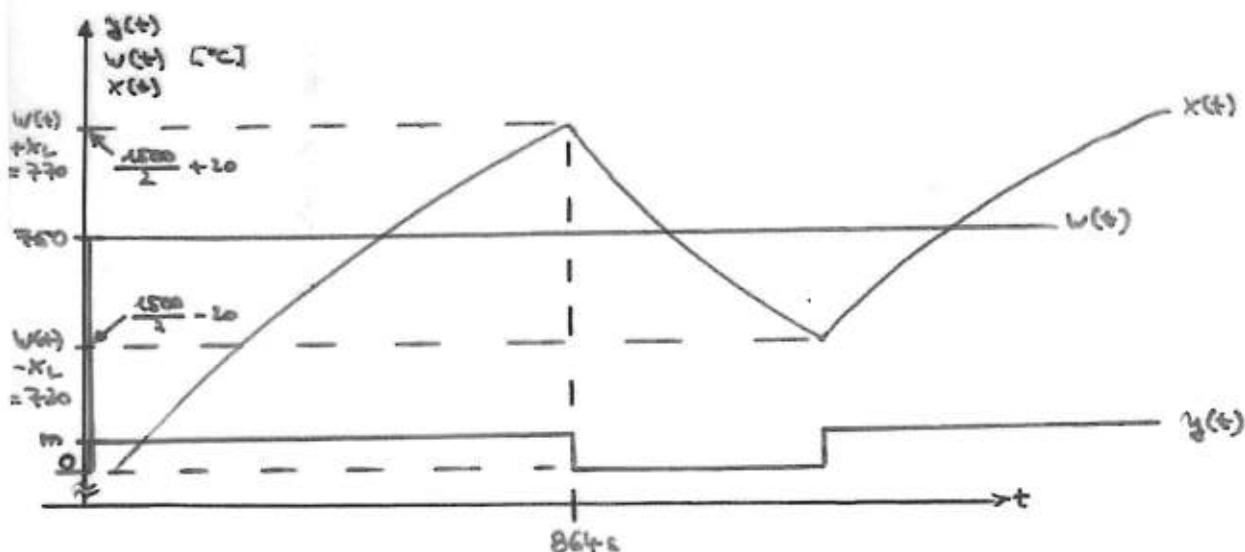
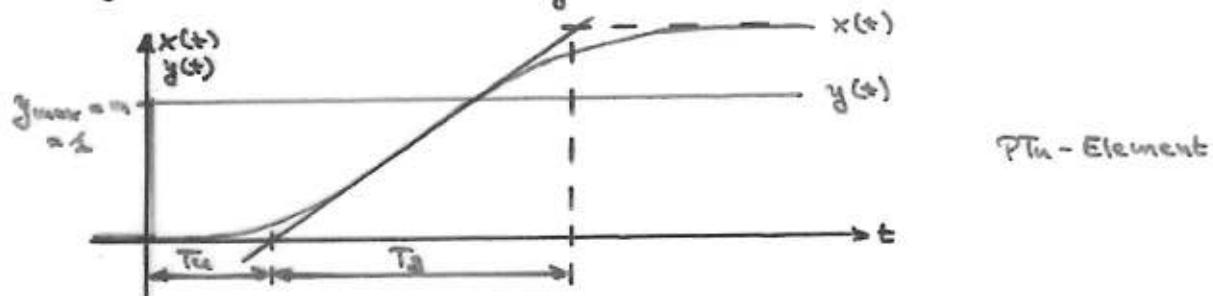
Ausgleichszeit:  $T_g = 20 \text{ min}$

- (5)
- Skizzieren Sie den Verlauf der Regelgröße und der Stellgröße beim Aufheizen des Regelkreises.
  - Bestimmen Sie die Schwingungsbreite  $x_g$  der Ofentemperatur.
  - Berechnen Sie die Länge der ersten Einhaltedauer  $\bar{T}_{EI}$ .

Lösung:

zu a) Zur Erklärung der Verzugs- und Anregelzeit:

(siehe hierzu auch Anleitung Laborversuch "Laborversuch - Enduro.pdf")



Da  $T_H = 0$  folgt:  $\bar{T}_{EI} \Rightarrow \bar{T}_A$  und damit

$$\bar{T}_A(s) = X_{max} \cdot \frac{1}{1 + s T_g}$$

$$\bar{T}_A(s) = 1600 \cdot \frac{1}{1 + 1200s} \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = 1600 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{1200}}\right)$$

b)  $x_g = 2 \cdot x_L = 400^\circ C$  da Strecke ohne Totzeit bzw. Verzugszeit

(6)

c) Ansetz:  $x_{\text{unten}} \cdot (1 - e^{-\frac{t-t_0}{T_g}}) = w(t) + x_u \quad \text{mit } t = t_{EI}$

$$\rightarrow 1 - e^{-\frac{t_{EI}-t_0}{T_g}} = (w(t) + x_u) \cdot \frac{1}{x_{\text{unten}}}$$

$$e^{-\frac{t_{EI}-t_0}{T_g}} = 1 - \frac{w(t) + x_u}{x_{\text{unten}}}$$

$$t_{EI} = -T_g \cdot \ln \left[ 1 - \frac{w(t) + x_u}{x_{\text{unten}}} \right]$$

$$t_{EI} = -1200 \text{ s} \cdot \ln \left( 1 - \frac{720^\circ\text{C}}{1500^\circ\text{C}} \right)$$

$$\underline{\underline{t_{EI} = 864,211 \text{ s}}}$$

# Regelungstechnik – 10. Vorlesung

## Symmetrisches Optimum

### WS2019/20



#### Symmetrisches Optimum

Frage: Wie kommt der charakteristische Bodeplot beim symmetrischen Optimum zustande?

#### Lösungsansatz:

Zerlegung der Schleifenübertragungsfunktion in einfachere Glieder, deren Einzelübertragungsfunktionen bekannt sind.  
(siehe auch Fragestellung zu Beginn der Vorlesung)

Gegeben:  $G_0(s) = G_{IT_1}(s) \cdot G_{PI}(s) = \frac{K_P \cdot K_{IS} \cdot (1+s \cdot T_N)}{s^2 \cdot T_0 \cdot T_N (1+s \cdot T_E)}$

Eine mögliche Zerlegung:

$$G_0(s) = \underbrace{\frac{K_P}{P}}_{\text{I}_{\omega_{e1}=K_{IS}, T_0=1}} \cdot \underbrace{\frac{\frac{1}{s \cdot T_0 \cdot T_N}}{\text{I}_{\omega_{e2}=1/(T_0 \cdot T_N)}}}_{\text{PT}_1} \cdot \underbrace{\frac{1}{(1+s \cdot T_E)}}_{\text{PD}} \cdot \underbrace{\frac{(1+s \cdot T_N)}{1}}_{\text{PD}}$$

## Symmetrisches Optimum

Weitere mögliche Zerlegung:

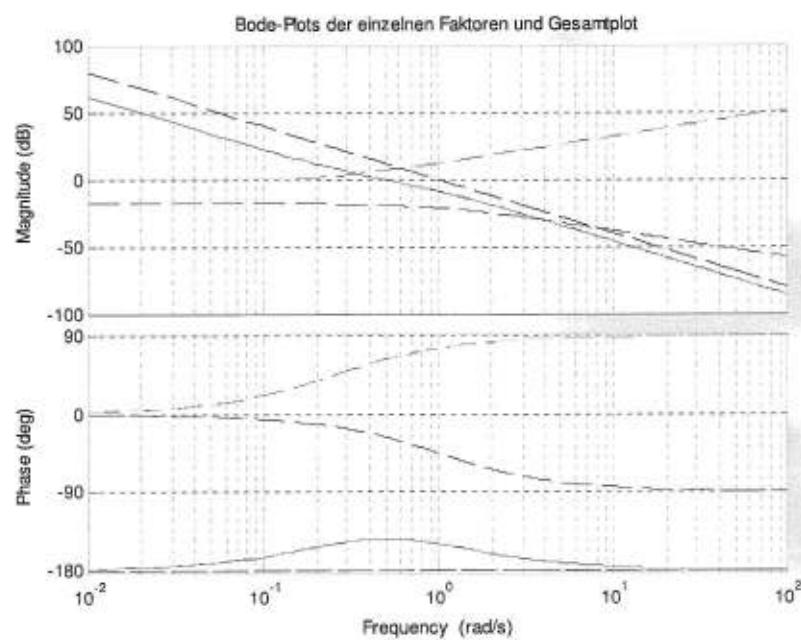
$$G_0(s) = \frac{(1 + a^2 \cdot T_E \cdot s)}{s^2 \cdot a^3 \cdot T_E^2 (1 + s \cdot T_E)} = \underbrace{(1 + a^2 \cdot T_E \cdot s)}_{\text{Summengraph}} \cdot \underbrace{\frac{1}{s^2}}_{I_2} \cdot \underbrace{\frac{1}{(1 + s \cdot T_E)}}_{PT_1}$$

Lösung Bodeplot (mit Matlab):

Siehe Übungsbeilage „Bodeplot\_symmetrisches\_Optimum\_Matlab\_EE401\_SS15“  
(Bodeplot\_symmetrisches\_Optimum.m)

Gewählte Parameter:  $a = 2$  ;  $T_E = 1$

## Symmetrisches Optimum



## Symmetrisches Optimum

Frage: Wie sieht die Ortskurve beim symmetrischen Optimum aus?

Qualitative Berechnung der Ortskurve (3 Frequenzpunkte):

$$G_0(j\omega) = -\frac{(1 + a^2 \cdot T_E \cdot j\omega)}{\omega^2 \cdot a^3 \cdot T_E^2 (1 + j\omega T_E)} = -\frac{1}{\omega^2 \cdot a^3 \cdot T_E^2} \cdot \left[ \frac{1 + a^2 \omega^2 T_E^2}{1 + (\omega T_E)^2} + j \frac{\omega \cdot (a^2 T_E - T_E)}{1 + (\omega T_E)^2} \right]$$

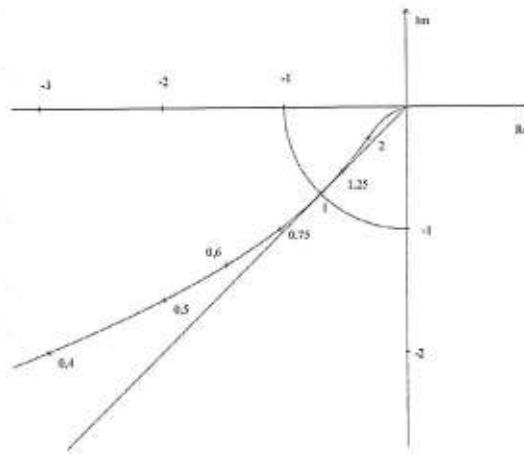
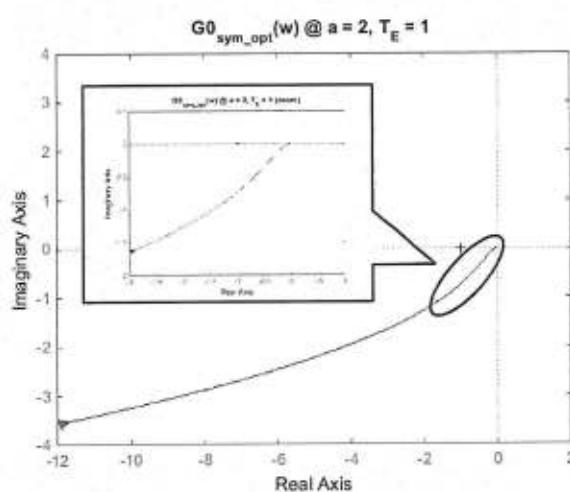
$\omega$	$\operatorname{Re}\{G_0(j\omega)\}$	$\operatorname{Im}\{G_0(j\omega)\}$
0	$-\infty$	$<< -\infty$ (endlich) (Regel von L'Hospital)
1	$-\frac{1}{a^3 \cdot T_E^2} \cdot \frac{1 + a^2 T_E^2}{1 + T_E^2}$	$-\frac{1}{a^3 \cdot T_E^2} \cdot \frac{a^2 T_E - T_E}{1 + T_E^2}$
$\infty$	0	0

## Symmetrisches Optimum

Frage: Wie sieht die Ortskurve beim symmetrischen Optimum aus?

Lösung Ortskurve (mit Matlab):  
(Ortskurve\_symmetrisches\_Optimum.m)

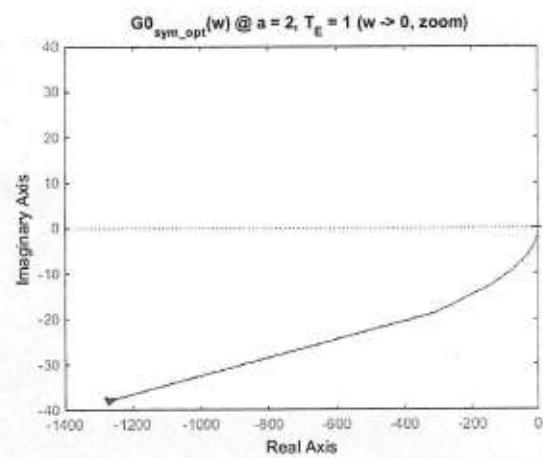
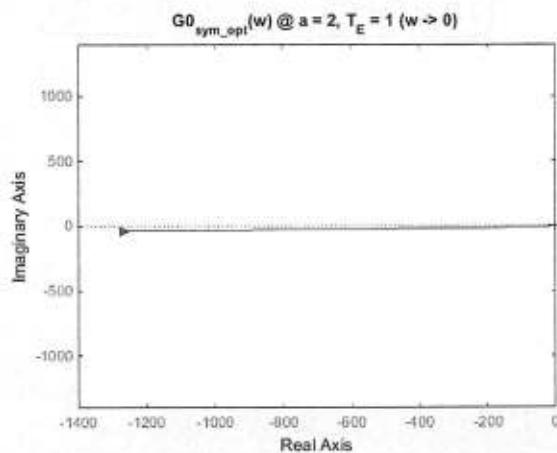
Die Charakteristik des offenen Regelkreises



## Symmetrisches Optimum

Frage: Wie sieht die Ortskurve beim symmetrischen Optimum aus?

Lösung Ortskurve (mit Matlab):  $\phi \rightarrow -180^\circ$  für  $\omega \rightarrow 0$   
(Ortskurve\_symmetrisches\_Optimum.m)



# Regelungstechnik – 12. Vorlesung

## Zweipunktregler ohne Hilfsenergie

### WS2019/20

---

#### Vergleich zwischen stetigen und unstetigen Reglern

---

Bisher: Der Wert der Stellgröße  $y(t)$  war bisher zwischen den Grenzwerten  $y = 0$  und  $y = Y_h$  kontinuierlich einstellbar. Dadurch ist es bei I-, PI- und PID-Reglern möglich, die Regelgröße  $x(t)$  im ausgeregelten Zustand immer gleich der Führungsgröße  $w(t)$  zu halten.

Jetzt: Bei den im folgenden behandelten *unstetigen Reglern* ist die Stellgröße nur in groben Stufen einstellbar. Bei den am meisten verbreiteten Zweipunktreglern sind nur die Werte  $y = 0$  und  $y = Y_h$  einstellbar. Mehrpunktregler gestatten noch einige wenige Zwischenwerte der Stellgröße einzustellen (z.B. Dreipunktregler).

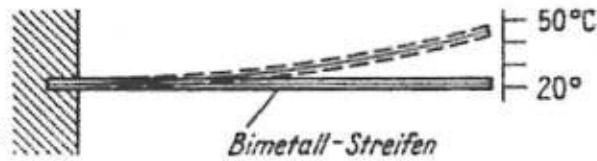
Man könnte annehmen, dass Regler mit einer so groben Stufung der Stellgröße ein nur unbefriedigendes Regelverhalten ergeben. Überraschenderweise lässt sich aber mit dem Zweipunktregler bei vielen Regelsystemen eine für die vorgesehenen Zwecke ausreichende Regelgüte erzielen. Der Grund für dieses unerwartet gute Verhalten der unstetigen Regler liegt darin, dass der Regler im geschlossenen Regelkreis das Verhältnis von Einschaltzeit zur Schaltfrequenz (1/Periodendauer), das sogenannten Tastverhältnis, stetig verändern kann. Dadurch ist eine fast stetige Dosierung der mittleren Energiezufuhr zur Regelstrecke möglich. Die Regelstrecke – muss dazu allerdings ein gewisses Energiespeichervermögen besitzen.

## Zweipunktregler ohne Hilfsenergie

Die wegen ihres einfachen Aufbaus und ihres günstigen Preis-Leistung-Verhältnisses am weitesten verbreiteten Regler sind die sogenannten unstetigen Regler (siehe oben). Beim einfachsten unstetigen Regler, dem Zweipunktregler, wird beim Unterschreiten der eingestellten Führungsgröße ein fester Wert der Stellgröße und beim Überschreiten ein kleinerer fester Wert, meist der Wert Null, eingeschaltet. Solche Regler werden auch als „Ein/Aus-Regler“ bezeichnet.

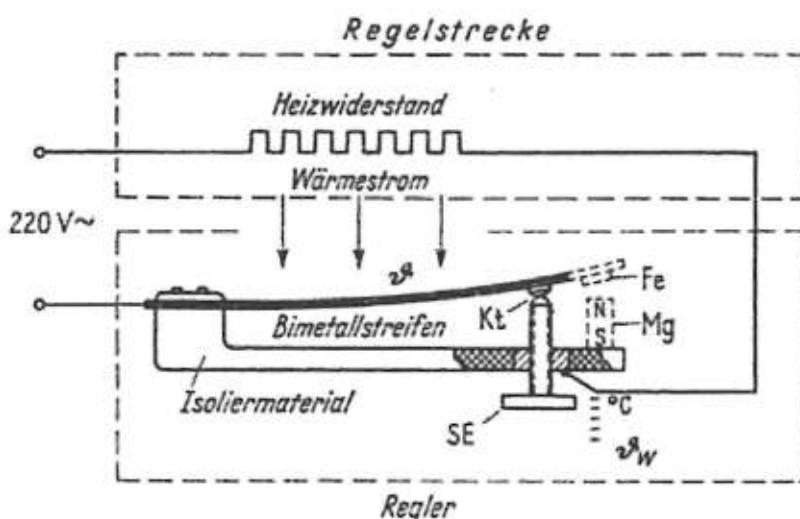
Die Arbeitsweise des Zweipunktreglers kann am besten am konkreten Beispiel eines Bimetall-Temperaturreglers erklärt werden.

Ein solcher Regler besitzt als Messgerät für die Temperatur einen Bimetallstreifen, wie im Bild unten dargestellt. Dieser Streifen ist bei Raumtemperatur etwa eben, krümmt sich aber zunehmend mit steigender Temperatur. Die Krümmung ist darauf zurückzuführen, dass der Metallstreifen aus zwei aufeinandergeschweißten Blechen mit stark unterschiedlichen Wärmeausdehnungskoeffizienten besteht. Zu jeder Temperatur eines solchen Streifens gehört also eine bestimmte Durchbiegung.



## Zweipunktregler ohne Hilfsenergie

Damit ist ein Messglied für die Temperatur gegeben; es fehlt noch ein Glied zur Sollwertvorgabe sowie der Soll-Istwert-Vergleicher. Die zwei entsprechenden Funktionen lassen sich durch Anbringen einer einstellbaren Kontaktschraube und eines elektrischen Kontaktes am Bimetallstreifen wie im folgenden Bild realisieren.



## Zweipunktregler ohne Hilfsenergie

Mit der die Führungsgröße  $\vartheta_w$  bestimmenden Kontaktschraube SE spannen wir den Streifen so weit vor, dass er die der Solltemperatur, z.B. 40°C, zugehörige Krümmung aufweist. Dann öffnet sich der Kontakt Kt bei dieser Temperatur. Der Heizwiderstand, der mit dem Kontakt in Reihe geschaltet ist, wird ausgeschaltet. Sinkt infolgedessen die Temperatur, so geht die Krümmung des Streifens wieder zurück. Der Kontakt schließt, der Heizwiderstand wird wieder eingeschaltet, und die Temperatur steigt wieder. Dieser Ablauf wiederholt sich periodisch. Durch den Bimetallstreifen haben wir die Temperatur in einen Weg umgeformt. Der Führungsgröße  $\vartheta_w$  der Temperatur wird durch die Kontaktschraube SE, die hier den Sollwerteinsteller darstellt, ebenfalls in Form eines Weges vorgegeben. Die Differenz dieser beiden Wege wird durch den Kontakt festgestellt. Der Kontakt bildet hier also gleichzeitig den Vergleicher und das Stellglied.

Bisher noch nicht betrachtet wurde die Hysterese. Diese wird mittels eines Permanentmagneten im Zusammenspiel mit dem metallischen Ende der Kontaktfeder realisiert. Erst wenn bei Erwärmung die Zugkraft des Bimetalls die Zugkraft des Magneten übersteigt, öffnet sich der Kontakt schlagartig. In Analogie schließt – umgekehrt der Schalter beim Abkühlen des Bimetalls früher als ohne Magnet.

