

n 阶汉诺塔移动次数

2017211123 褚逸豪

March 25, 2018

1 符号

我们记 T_n 为根据规则将 n 个圆盘从一根柱子移动到另一根指定的柱子所需的最少移动次数。记三根柱子分别为 A, B, C, 我们要将所有的圆盘从 A 移动到 C。

2 推导递推关系

我们通过分解问题, n 阶汉诺塔问题可以降阶为 $n-1$ 阶汉诺塔问题。因为我们实现任务的最优方法是先将最小的 $n-1$ 个盘片移动到 B, 再将最大的盘片移动到 C, 最后将 B 上的盘片移动到 C。我们可以不停的降阶, 直到问题简化为到边界——0 阶汉诺塔问题, 你什么都不用做。

根据以上关系, 我们轻松的得到 T_n 的递推关系及初始条件

$$\begin{aligned}T_0 &= 0; \\T_n &= 2T_{n-1} + 1, \quad n > 0.\end{aligned}$$

3 do some math tricks

通过高中数学的数列处理技巧, 我们对式子进行如下变形

$$\begin{aligned}T_n &= 2T_{n-1} + 1; \\T_n + 1 &= 2T_{n-1} + 2; \\T_n + 1 &= 2(T_{n-1} + 1); \\T_0 + 1 &= 1; \\T_n + 1 &= 2^n; \\T_n &= 2^n - 1.\end{aligned}$$

至此, 我们已经成功的推导出了 n 阶汉诺塔所需要最少的移动次数—— $2^n - 1$ 。