

NOI模拟赛1 题解

saffah

2015 年 5 月 29 日

1 研究小组

1.1 $n = 1$ 的算法

只需输出所有的 a 的最大值即可。

1.2 $n = 2$ 的算法

枚举第一个课题的负能量值。假设这个值确定了则显然应该将人们尽可能分到第一个课题中，也就是将对第一个课题的讨厌程度不超过这个值的人全部分到第一个课题中，其余人分到第二个课题中。

直接这么做的时间是 $O(n^2)$ ，将所有人按照对第一个课题的讨厌程度排序就能简单地优化成 $O(n \log n)$ 。

1.3 $n = 3$ 的算法

这个问题也有通用做法（且不依赖数据随机），时间是 $O(n \log n)$ 。因为稍有复杂且不在本题正解范围内，请自行思考。

1.4 标准算法

对于两个人 A 和 B ，如果 A 对每个课题的讨厌程度都大于 B ，那么将 A 删除不会影响答案。因为 B 一定要分到某个课题中去，根据贪心策略我们把 A 分到和 B 一组不会使解变得更差。

由于数据是随机的，剩下的人不会很多。只需对剩下的人做 $O(n^m)$ 的显然的暴力算法即可。

2 道路修建

2.1 暴力算法

期望得分30分。

2.2 不暴力的算法

考虑 q 很小的情况：我们对于每次询问二分答案，然后把不超过这个答案的边全都连起来看看这 k 个点是否连通。使用并查集，我们可以做到 $O(qm \log m \alpha(n) + \sum k \alpha(n))$ 的时间。

这个算法的瓶颈是每次二分后都要重构一遍并查集。考虑把所有版本的并查集全部记录下来。使用可持久化并查集可以做到 $O(m \log^2 n + \sum k \log m \log^2 n)$ 的时间。

注意到我们不需要撤消操作，只需要访问历史版本，所以直接使用按秩合并的并查集就可以了。时间是 $O(m \log n + \sum k \log m \log n)$ 。

以上各种做法视实现方式期望得分65~100分。

2.3 标准算法

如果所有的问题满足 $k = 2$ ，那么这就是经典的NOIP题目货车运输，大家都会做。

对于 $k > 2$ 的情况，可以证明答案就是 $k - 1$ 个 $k = 2$ 的问题的答案取最大值。证明是很显然的。

时间复杂度 $O(m \log n + \sum k \log n)$ 。

3 命名系统

3.1 暴力算法

直接处理出所有人的全名，然后枚举每个子串统计出现次数，找出符合题意的最长串。

根据实现方法的暴力程度不同期望得分10~55分。

3.2 不太暴力的算法

对于 $n \leq 500, L \leq 1000$ 的情况，我们依然可以暴力处理出所有人的全名，且全名总长不会超过 nL 。

考虑二分答案，问题转化为是否存在出现了至少 m 次且长度为 k 的子串。我们可以对所有长度为 k 的子串计算哈希值后处理。总的时间复杂度是 $O(nL \log L)$ 。

3.3 标准算法

对于更大的情况，我们无法存下所有的全名，然而所有人的名字满足包含了父亲的名字作为后缀。只需将所有人的名字都反过来，就能用Trie存下所有的名字。

存下以后还是二分答案就可以了。检验的方法还是在Trie上计算哈希值，与之前的方法相同。时间复杂度 $O(L \log L)$ 。