# 模拟赛

Ketsui,Scape

2016 年 6 月 25 日

# Subtask 1

大家应该都会凸包。

时间复杂度 $O(k\binom{n}{k})$

## Subtask 2

因为是在单位圆上, 所以它的答案肯定是一系列 $sin$ 函数的和

首先把所有点排序, 枚举起点。

考虑 dp, 令 $f[i,j]$ 表示到 $i$ 为止用了 $j$ 段的最大答案

$f[i,j]=min(f[k][j-1]+sin(Ang_{i,k}))$,$Ang_{i,k}$ 表示 $i,k$ 之间的夹角

时间复杂度 $O(n^4)$

# Subtask 2 cont'd

考虑这个 dp 的一些性质

我们来证明这个 dp 具有决策单调性

设 $f[i][p]$ 的决策点是 $j$, 那么可得

$\forall k < j$

$f[j][p-1] + sin(Ang_{j,i}) > f[k][p-1] + sin(Ang_{k,j} + Ang_{j,i})$

# Subtask 2 cont'd

设 $c_1 = Ang_{i,i+1}, c_2 = Ang_{j,i}, c_3 = Ang_{k,j}$ 那原式即为

$sin(c_2) - sin(c_1 + c_2) > f(k, p-1) - f(j, p-1)$

我们来证明 $sin(c_1 + c_2) - sin(c_1 + c_2 + c_3) > sin(c_2) - sin(c_2 + c_3)$

即 $sin(c_1 + c_2) - sin(c_2) > sin(c_1 + c_2 + c_3) - sin(c_2 + c_3)$

和差化积移项整理可得

$2sin(\frac{c_1}{2})[cos(c_2 + \frac{c_1}{2}) - cos(c_2 + c_3 + \frac{c_1}{2})] > 0$

# Subtask 2 cont'd

注意到原点必须在凸多边形内, 那么可得 $c_2 + c_3 + \frac{c_1}{2} < \pi$

那么由 $cos$ 性质可得上式成立

即 $sin(c_1 + c_2) - sin(c_1 + c_2 + c_3) > sin(c_2) - sin(c_2 + c_3) >$
$f(k, p-1) - f(j, p-1)$

即 $f(j, p-1) + sin(c_1 + c_2) > f(k, p-1) + sin(c_1 + c_2 + c_3)$

证毕

然后用常见方法转移即可, 时间复杂度 $O(n^3 logn)$

# Subtask 3

我们可以选择随机 $n/k$ 次起点进行 dp
正确率指数级收敛。

# Vain

对于 $i \in [1, n]$，求出点 $i$ 只能有一条出边的最小生成树 (MST) 的最大边权值。

其实就是要求删除点 $i$ 后的 MST 的最大边权值啦。

$n \leqslant 10^6$

# Subtask 1

跑 $n$ 次 Kruskal 求 MST。

时间复杂度 $O(n^2 \log n)$。

## Subtask 2

首先求出一棵 MST，然后把其他边按权值从小到大加进去，每次加进去以后跑一次 Tarjan 求割点，记录每个点第一次成为非割点的时间。

时间复杂度 $O(m(m-n+\log n))$。

# Subtask 3

考虑线段树分治，不难注意到可以用 LCT 维护 MST，撤销的时候把操作反过来做就可以了。

时间复杂度 $O(n+m)\log^2 n$。

# Subtask 4

从 Subtask 2 的做法上改改，考虑维护割点。

一开始只有一棵 MST，删除点 $i$ 后它的所有儿子所在连通块和它父亲所在连通块会两两分离，那么它成为非割点的时候也就是这些连通块又重新连在一起的时候。

我们注意到处理它儿子所在连通块和父亲所在连通块连通的情形是很简单的，因为我们只需要考虑儿子节点本身和父亲节点本身是否连通即可，记点 $x$ 与点 $fa_{fa_x}$ 的连通性为 $h_x$。

当加入一条非树边 $(x, y)$ 的时候，把 MST 上路径 $(x, lca(x, y))$ 和 $(y, lca(x, y))$ 上的点（注意边界）的 $h_x$ 都标记为已连通，注意到这一操作是可以并查集优化的，因此复杂度是 $O(n \log n)$。

# Subtask 4 cont'd

接下来要处理的只有儿子节点和儿子节点的连通性，注意到影响到这个的只有满足 $lca(x, y) = i$ 的非树边 $(x, y)$，于是每个非树边只需要在 $lca(x, y)$ 处处理一下即可。

总时间复杂度 $O(n \log n)$。

# Death

维护一棵树，要求支持加叶子，劈开一条边在中间加一个节点和询问 $k$ 个点的虚树的边权和。

这么无聊的维护树结构当然是 $SAM$ 辅助相关的。

$n, m \leqslant 5 \times 10^5$

# Subtask 1

考验选手的高级语言语法知识和语文知识。

时间复杂度 $O((n+m)n)$

# Subtask 2

树高是 $\log n$ 的。

时间复杂度 $O((n+m)\log n)$

# Subtask 3

直接求虚树……

LCA 可以用倍增，维护下 dfs 序就好了。

时间复杂度 $O((n+m)\log n)$。

# Subtask 4

老年选手被尛焱轟吊打辣。

直接 LCT，每次对根到它的路径求和以后再把整条路径区间清空。

撤回的时候可以打区间撤回标记。

当然直接维护虚树也是可以的，早知道把这个题出更一般化一点了，

时间复杂度 $O((n+m)\log n)$。