HNOI2016模拟题——题解

matthew99

preface

个人意见：本套试题难度中等，前两题较为简单，第三题可能难度稍微高一点。估计最高分应当在200分以上。~~当然如果是什么都不会的新手的话估计就只能30 + 30 + 10 = 70或者更低了嘿嘿嘿。~~

1 A

求出$dis_{i,j}$表示走i条边到j号点的最短路，这个直接DP就是$O(n(n+m))$，如果你写Floyd或者Dijkstra（除非常数特别小）都会TLE，如果你写SPFA却AC了的话很正常，因为SPFA复杂度就是$O(n(n+m))$（想想为什么），当然如果你加了SLF或者别的优化或者你的SPFA姿势很奇怪的话，祝你好运。

接着我们发现我们可以对每个点单独求和，对每个点求和就是相当于一些直线间每个横坐标对应的最小值，经典做法就是一个维护一个凸壳求出每条直线作为最大值的区间，然后直接统计答案即可。

总时间复杂度为$O(n(n+m))$。

2 B

两个操作相当于在二进制下移动1的位置，显然将二进制下每一位的1都移到最前面答案最优。

为什么我几分钟就AC了？~~因为我造题也只花了几分钟。~~

原来这题是想出的更难的，结果几次都完全打不过暴力，最后没办法只好给大家放水了。

时间复杂度$O(n \log w)$，其中w表示n个数的最大值。

3 C

根据期望的线性性，我们考虑每一个点对答案的贡献。

每一次选择了一个点之后，如果没有结束那么，下一步期望的移动距离就是这个点到其他所有点的距离和除以n，这个用一个DP很容易算出。

我们发现，只要状态确定了，一个点被选择的总次数是确定的，因为无论前一个点是哪一个点，下一个点的概率分布都是相同的，即每个点都是$\frac{1}{n}$。

考虑一个点期望被选择的总次数，我们很容易发现，在1的个数一定的时候，所有权值为1的点和所有权值为0的点期望被选择的总次数相同（想想为什么）。

这样我们可以设$val_{i,j}$表示i个1的时候权值为j的点的期望选择次数，有下列方程。

$$val_{i,0} = \frac{1}{n} + \frac{i}{n}val_{i-1,0} + \frac{n-i-1}{n}val_{i+1,0} + \frac{1}{n}val_{i+1,1} \tag{3.1}$$
$$val_{i,1} = \frac{1}{n} + \frac{i-1}{n}val_{i-1,1} + \frac{1}{n}val_{i-1,0} + \frac{n-i}{n}val_{i+1,1} \tag{3.2}$$

且$val_{0,*} = val_{n,*} = 0$。

注意在$i = 1$的时候，权值为1的点的方程中没有$\frac{1}{n}$这一项，$i = n - 1$的时候权值为0的点也没有这一项，原因就是这个时候就算选到了这个点，这个时候直接结束了所以就没有贡献了。

移项之后我们可以发现根据$val_{i,*}$可以推出$val_{i+1,1}$，根据$val_{i,*}$和$val_{i+1,1}$可以推出$val_{i+1,0}$，因此可以将每一个$val_{k,*}(1 \le k < n)$表示成$aval_{1,0} + bval_{1,1} + c$的形式，最后根据在$n-1$的时候的(3.1)(3.2)二式列出一个二元二次方程，然后解之即可，由于模数固定，可以证明不会出现多解或者无解的情况。

最后答案就是每个点的期望选择次数乘上它每一步的期望移动步数。

时间复杂度$O(n \log n)$，如果线性预处理逆元可以做到$O(n)$。