# Walk's Solution

Philipsweng

## 1 题目大意

给你一个有障碍点的网格图。你从$(0;0)$出发到$(N;N)$,每一步只能向上或向右走。你的路线既不能穿过对角线，也不能路过障碍。求方案数。

## 2 解法

### 2.1 解法一(30分)

30%的数据满足$N \leq 5000$,所以我们可以直接Dp.

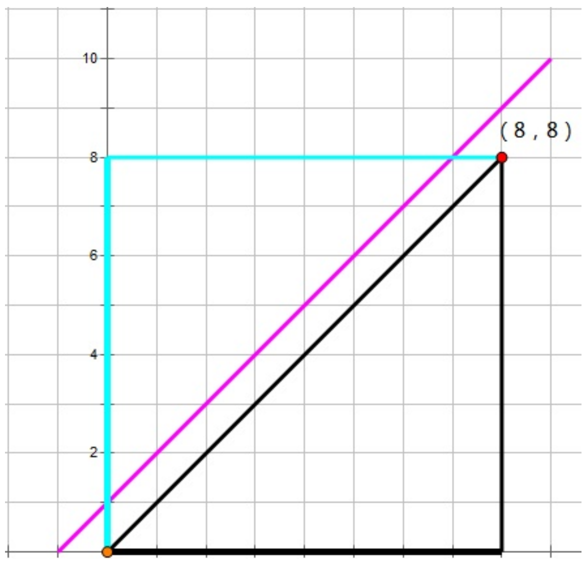
设$F_{i,j}$表示从$(0;0)$走到$(i;j)$，路线合法的方案数。

那么$F_{i,j} = F_{i-1,j} + F_{i,j-1}$

并且当$i < j$或$(i;j)$是障碍的时候,$F_{i,j} = 0$即可。

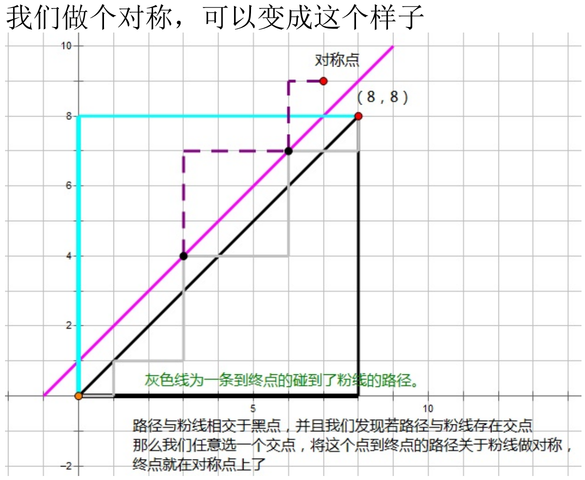
### 2.2 解法二(50分)

对于另外20%的数据满足$C = 0$,也就是说我们只需要计算不穿过对角线的方案数即可。

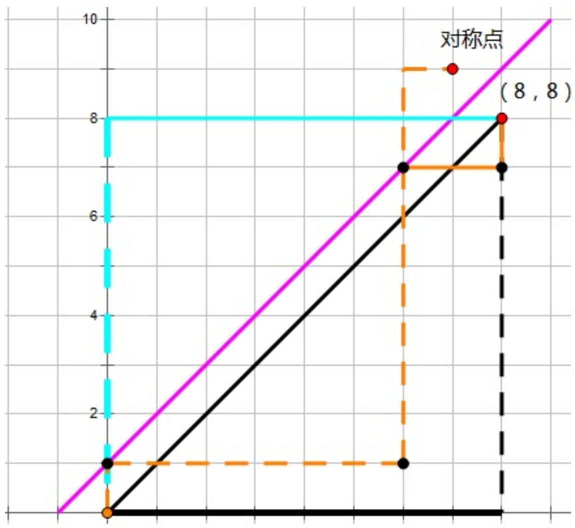



其实相当于我们从橙色点走到另外一个点，不穿过对角线相当于我们不能碰到粉色的直线($y = x + 1$)

我们做个对称，可以变成这个样子




并且从原点走到对称点的一条路径必然会碰到粉线，且可以对称回一条到终点的路线。




那么不穿过对角线的方案数= 无限制地走到终点的方案数-无限制地走到对称点的方案数。

而且我们知道从$(0;0)$走到$(x;y)$的无限制方案数就=$C_{x+y}^{x}$

那么我们可以先预处理出$0\ !\ 2\ N$的阶乘以及他们的逆元，即可$O(1)$地计算出答案了。

结合算法一即可拿到50分。

## 2.3 解法三(70分)

还有一档20分满足$C = 1$,也就是说我们只有一个障碍点。

我们继续先考虑补集，也就是说计算经过障碍点但不穿过对角线的路径方案，最后减一下就能得出答案。

设障碍点为$(x;y)$,那么很显然的是$(0;0)\ !\ (x;y);(x;y)\ !\ (N;N)$这两条路径的交集只会是$(x;y)$这个点。

那么事实上经过障碍点但不穿过对角线的路径方案= $(0;0)\ !\ (x;y)$的方案数* $(x;y)\ !\ (N;N)$的方案数。

复杂度也是$O(1)$的。

结合算法一，二即可拿到70分。

## 2.4 解法四(100分)

对于100%的数据，$N\quad 100000;C\quad 1000$

$C$比较小，这启示我们从障碍点入手。

事实上也是需要这样的。

我们将所有的障碍点以及$(N;N)$视为关键点。

先讲所有的关键点按$x$坐标从小到大排序。

设$F_i$表示我们从$(0;0)$走到第$i$个关键点，除当前点以外不经过任何关键点的方案数。

同样的我们也要用补集的思想，也就是说先计算出会经过其他关键点的方案数,设$G_i$ 为这个方案数。

假设一条这样的路径为$(P_1;P_2;P_3; \quad P_j; \quad P_i)$,其中$P_j$ 是我们经过的第一个关键点。

我们枚举这个$P_j$

那么$G_i = \sum_{j=1}^{i-1} F_j \quad Ways_{P_j \to P_i}; P_j$必须能走到$P_i$

$Ways_{P_j \to P_i}$表示从$P_j$走到$P_i$不穿过对角线的方案数。

根据解法三，这个转移方程显然是对的。

最后$F_i = Ways_{(0,0) \to P_i} \quad G_i$

那么对于一个关键点我们就能用$O(C)$的算法解决，最后整个算法的时间复杂度就是$O(C^2)$,可以通过所有的数据。