

Walk's Solution

Philipsweng

1 题目大意

给你一个有障碍点的网格图。你从 $(0,0)$ 出发到 (N,N) ,每一步只能向上或向右走。你的路线既不能穿过对角线,也不能路过障碍。求方案数。

2 解法

2.1 解法一(30分)

30%的数据满足 $N \leq 5000$,所以我们可以直接Dp.

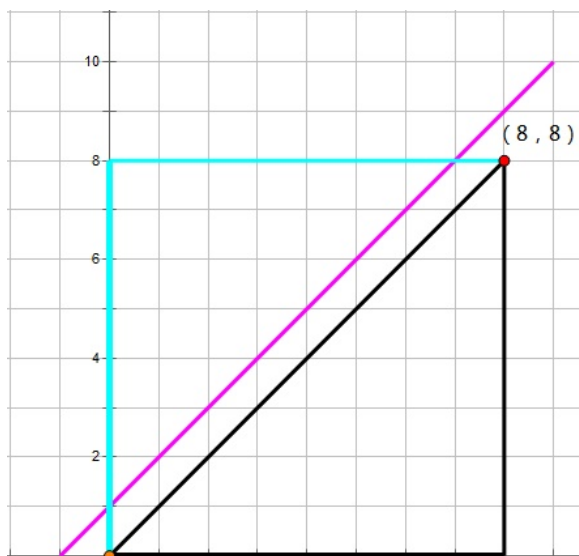
设 $F_{i,j}$ 表示从 $(0,0)$ 走到 (i,j) ,路线合法的方案数。

那么 $F_{i,j} = F_{i-1,j} + F_{i,j-1}$

并且当 $i < j$ 或 (i,j) 是障碍的时候, $F_{i,j} = 0$ 即可。

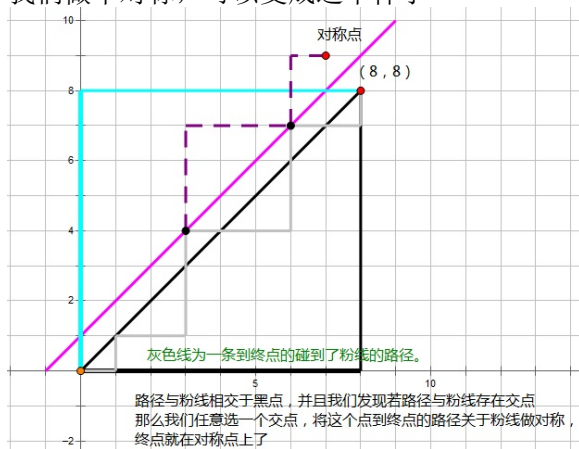
2.2 解法二(50分)

对于另外20%的数据满足 $C = 0$,也就是说我们只需要计算不穿过对角线的方案数即可。

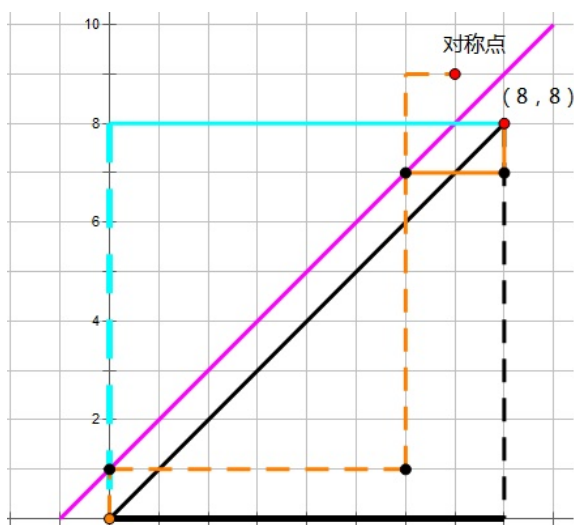


其实相当于我们从橙色点走到另外一个点，不穿过对角线相当于我们不能碰到粉色的直线($y = x + 1$)

我们做个对称，可以变成这个样子



并且从原点走到对称点的一条路径必然会碰到粉线，且可以对称回一条到终点的路线。



那么不穿过对角线的方案数= 无限制地走到终点的方案数-无限制地走到对称点的方案数。

而且我们知道从 $(0,0)$ 走到 (x,y) 的无限制方案数就= C_{x+y}^x

那么我们可以先预处理出 $0 \rightarrow 2 * N$ 的阶乘以及他们的逆元，即可 $O(1)$ 地计算出答案了。

结合算法一即可拿到50分。

2.3 解法三(70分)

还有一档20分满足 $C = 1$,也就是说我们只有一个障碍点。

我们继续先考虑补集，也就是说计算经过障碍点但不穿过对角线的路径方案，最后减一下就能得出答案。

设障碍点为 (x,y) ,那么很显然的是 $(0,0) \rightarrow (x,y), (x,y) \rightarrow (N,N)$ 这两条路径的交集只会是 (x,y) 这个点。

那么事实上经过障碍点但不穿过对角线的路径方案= $(0,0) \rightarrow (x,y)$ 的方案数* $(x,y) \rightarrow (N,N)$ 的方案数。

复杂度也是 $O(1)$ 的。

结合算法一，二即可拿到70分。

2.4 解法四(100分)

对于100%的数据， $N \leq 100000, C \leq 1000$

C 比较小, 这启示我们从障碍点入手。

事实上也是需要这样的。

我们将所有的障碍点以及 (N, N) 视为关键点。

先讲所有的关键点按 x 坐标从小到大排序。

设 F_i 表示我们从 $(0, 0)$ 走到第 i 个关键点, 除当前点以外不经过任何关键点的方案数。

同样的我们也要用补集的思想, 也就是说先计算出会经过其他关键点的方案数, 设 G_i 为这个方案数。

假设一条这样的路径为 $(P_1, P_2, P_3, \dots, P_j, \dots, P_i)$, 其中 P_j 是我们经过的第一个关键点。

我们枚举这个 P_j

那么 $G_i = \sum_{j=1}^{i-1} F_j * Ways_{P_j \rightarrow P_i}$, P_j 必须能走到 P_i

$Ways_{P_j \rightarrow P_i}$ 表示从 P_j 走到 P_i 不穿过对角线的方案数。

根据解法三, 这个转移方程显然是对的。

最后 $F_i = Ways_{(0,0) \rightarrow P_i} - G_i$

那么对于一个关键点我们就能用 $O(C)$ 的算法解决, 最后整个算法的时间复杂度就是 $O(C^2)$, 可以通过所有的数据。