

基于二维灰度直方图最佳一维投影的 图像分割方法

李立源 龚 坚 陈维南

(东南大学自动化研究所 南京 210018)

摘 要

分析了图像二维灰度直方图上聚类集的形状特征,证明了其存在最佳一维投影。利用此最佳一维投影代替一维灰度直方图进行阈值分割,将会大大降低误判的概率。理论分析和实验表明,新方法比现有直接利用一维灰度直方图和直接利用二维灰度直方图进行阈值分割的方法均优越。

关键词: 图象处理,图象分割,阈值化。

1 引言

图象分割是图象处理和前期视觉中的基本技术,是大多数图象分析及视觉系统的重要组成部分^[1,2]。图象分割就是把图象中的物体与背景分开,主要有阈值化和区域增长两大类方法。前者利用灰度频率分布信息(直方图)进行分割,后者利用局部空间信息实现分割。阈值化因其实现简单、计算量小、性能较稳定而成为图象分割中的最基本和应用最广泛的分割技术^[1,2]。传统的图象阈值化方法大都根据一维灰度直方图进行阈值分割^[2]。由于一维灰度直方图不能反映图象的局部空间信息,当图象的信噪比递减时,传统方法将产生很多分割错误^[3-6]。近年来,已有一些方法开始利用图象的二维灰度直方图——象素的灰度值分布及其邻域平均灰度值分布所构成的直方图——来进行阈值分割^[3-6]。由于二维灰度直方图不仅反映了灰度分布信息,而且还反映了邻域空间相关信息,因此新方法的效果明显好于传统方法。但是,这些方法都是传统方法在二维灰度直方图上的简单推广,对二维灰度直方图所反映的信息及其表达特征还缺乏理论分析,因此在某些方面还不尽合理,以致在某些情况下还会失效^[3]。此外,这些方法简单地将一维寻优推广为二维寻优,导致运算量按指数增长,耗时太长,难以实用^[3-6]。若能继承并发扬以上两种方法的优点,克服各自的不足,达到利用二维信息,实行一维搜索,无疑会大大提高图象阈值分割的性能。

2 二维灰度直方图上的灰度聚类分布特征

设图象的灰度分为 L 级, 则象素邻域平均灰度也分为 L 级. 在各象素点处, 其灰度值与其邻域平均灰度值形成一灰度二元组. 设灰度二元组 (i, j) 出现的频数为 f_{ij} , 其中 i, j 分别对应灰度值和邻域平均灰度值. 则定义相应的联合概率密度为

$$p_{ij} = f_{ij}/N, i, j = 0, \dots, L-1,$$

其中 N 为图象中象素的总数, 并且 $\sum_{i=0}^{L-1} \sum_{j=0}^{L-1} p_{ij} = 1$.

若以 i, j 为自变量, p_{ij} 为应变量, 就可构成二维灰度直方图^[3].

图象信号一般可表示为径白噪声污染的光强信号, 其数学模型为

$$f(x, y) = f^*(x, y) + \omega(x, y). \quad (1)$$

其中 $f^*(x, y)$ 是象素 (x, y) 处的真实灰度值; $\omega(x, y)$ 为高斯噪声, $\omega(x, y) \sim N(0, \sigma)$.

象素 (x, y) 处的 $n \times n$ 邻域平均灰度值为

$$g(x, y) = \frac{1}{n^2} \sum_{s=-\lfloor n/2 \rfloor}^{\lfloor n/2 \rfloor} \sum_{t=-\lfloor n/2 \rfloor}^{\lfloor n/2 \rfloor} f(x+s, y+t), \quad (2)$$

其中一般取 n 为奇数, $\lfloor \cdot \rfloor$ 表示取整. 将式(1)代入式(2), 并令

$$\bar{f}^*(x, y) = \frac{1}{n^2} \sum_{s=-\lfloor n/2 \rfloor}^{\lfloor n/2 \rfloor} \sum_{t=-\lfloor n/2 \rfloor}^{\lfloor n/2 \rfloor} f^*(x+s, y+t), \quad (3)$$

$$\bar{\omega}(x, y) = \frac{1}{n^2} \sum_{s=-\lfloor n/2 \rfloor}^{\lfloor n/2 \rfloor} \sum_{t=-\lfloor n/2 \rfloor}^{\lfloor n/2 \rfloor} \omega(x+s, y+t), \quad (4)$$

则有

$$g(x, y) = \bar{f}^*(x, y) + \bar{\omega}(x, y). \quad (5)$$

其中 $\bar{f}^*(x, y)$ 为象素 (x, y) 的真实邻域平均灰度值; $\bar{\omega}(x, y)$ 为邻域平均噪声. 由于 $\bar{\omega}$ 为 ω 的线性组合, 故 $\bar{\omega}(x, y) \sim N(0, \sigma/n)$. 式(4)还表明 $\bar{\omega}(x, y)$ 与 $\omega(x, y)$ 相关.

根据以上分析, 若不考虑 i, j 的边界效应, 二维灰度分布的概率密度为

$$p_{ij} = \frac{1}{N} \sum_x \sum_y \frac{1}{2\pi\sigma_i\sigma_j\sqrt{1-r_{ij}^2}} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-r_{ij}^2)} \left[\frac{[i-f^*(x, y)]^2}{\sigma_i^2} - \frac{2r_{ij}[i-f^*(x, y)][j-\bar{f}^*(x, y)]}{\sigma_i\sigma_j} + \frac{[j-\bar{f}^*(x, y)]^2}{\sigma_j^2} \right] \right\}. \quad (6)$$

其中 $\sigma_i = \sigma, \sigma_j = \sigma/n$ 分别为二维正态分布噪声投影到两轴上所形成的一维正态分布噪声的均方差; r_{ij} 为相关系数. 就图象中的类来说, 其大部分象素满足 $f^*(x, y) \approx \bar{f}^*(x, y)$, 故类分布的中心一般在二维灰度直方图的对角线上.

为了便于考察二维灰度直方图上类分布的特征, 做如下一般性处理: 设图象中仅含单一聚类且其真实灰度值为 0, 则式(6)成为

$$p_{ij} = \frac{1}{2\pi\sigma_i\sigma_j\sqrt{1-r_{ij}^2}} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-r_{ij}^2)} \left[\frac{i^2}{\sigma_i^2} - \frac{2r_{ij} \cdot i \cdot j}{\sigma_i\sigma_j} + \frac{j^2}{\sigma_j^2} \right] \right\}, \quad (7)$$

此聚类按标准二维正态分布表达。

对于标准二维正态分布,存在以下性质。

性质 1. 对于式(7)所示之标准二维正态分布,当将坐标系旋转 θ 角,即引入如下变换

$$\begin{cases} u = i \cdot \cos \theta + j \cdot \sin \theta, \\ v = -i \cdot \sin \theta + j \cdot \cos \theta, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} \omega_u = \omega \cdot \cos \theta + \bar{\omega} \cdot \sin \theta, \\ \omega_v = -\omega \cdot \sin \theta + \bar{\omega} \cdot \cos \theta \end{cases} \quad (8)$$

后,可化为如下形式:

$$p_{uv} = \frac{1}{2\pi\sigma_u\sigma_v\sqrt{1-r_{uv}^2}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r_{uv}^2)}\left[\frac{u^2}{\sigma_u^2} - \frac{2r_{uv} \cdot uv}{\sigma_u\sigma_v} + \frac{v^2}{\sigma_v^2}\right]\right\}. \quad (9)$$

其中 u, v 为旋转后的坐标系变量; σ_u, σ_v 分别为原二维分布向新坐标轴投影后所形成的一维正态分布随机变量 ω_u, ω_v 的均方差,并满足:

$$\begin{cases} \sigma_u^2 = \sigma_i^2 \cdot \cos^2 \theta + \sigma_j^2 \cdot \sin^2 \theta + 2r_{ij}\sigma_i\sigma_j \sin \theta \cos \theta, \\ \sigma_v^2 = \sigma_i^2 \cdot \sin^2 \theta + \sigma_j^2 \cdot \cos^2 \theta - 2r_{ij}\sigma_i\sigma_j \sin \theta \cos \theta, \end{cases} \quad (10)$$

r_{uv} 为相关系数,则有

$$r_{uv} = \frac{1}{\sigma_u\sigma_v} \cdot [(\sigma_j^2 - \sigma_i^2) \sin \theta \cos \theta + r_{ij}\sigma_i\sigma_j(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)]. \quad (11)$$

证明. 由概率论可知,对于两随机变量 ξ, η 有

$$\begin{cases} D(C\xi) = C \cdot D(\xi), \\ D(\xi \pm \eta) = D(\xi) + D(\eta) \pm 2K_{\xi\eta}. \end{cases} \quad (12)$$

其中 C 为常量; $K_{\xi\eta}$ 为相关矩,对于零均值随机变量 ξ, η 有

$$K_{\xi\eta} = E(\xi\eta), \quad (13)$$

$$\begin{cases} K_{\xi\eta} = r_{\xi\eta} \cdot \sigma_\xi\sigma_\eta, \\ E[(C_1\xi) \cdot (C_2\eta)] = C_1C_2K_{\xi\eta}, \end{cases} \quad C_1, C_2 \text{ 为常量}. \quad (14)$$

对式(8)应用式(12)–(14),即可得式(10)。

由式(8)还可得

$$\omega_u\omega_v = -\omega^2 \sin \theta \cos \theta + \bar{\omega}^2 \sin \theta \cos \theta + \omega\bar{\omega}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta),$$

两边取均值,因 $E(\omega\bar{\omega}) = K_{\xi\eta}$, $E(\omega_u\omega_v) = K_{uv}$, $E(\omega^2) = \sigma_i^2$, $E(\bar{\omega}^2) = \sigma_j^2$, 并利用式(14)即可得(11)式。

将式(10),(11)代入式(9)并作适当代数变换,即可得式(7)。

证毕。

性质 2. 对于式(7)所示标准二维正态分布,当坐标系旋转角度 θ 满足

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{2r_{ij}\sigma_i\sigma_j} \cdot [(\sigma_j^2 - \sigma_i^2) \pm \sqrt{(\sigma_j^2 - \sigma_i^2)^2 + 4r_{ij}^2\sigma_i^2\sigma_j^2}] \quad (15)$$

时, σ_u, σ_v 分别取极大和极小值,且 $r_{uv} = 0$ 。

证明. 根据式(10),求 $\frac{\partial(\sigma_u^2)}{\partial\theta}$ 或 $\frac{\partial(\sigma_v^2)}{\partial\theta}$, 并使其等于 0, 均可得方程:

$$r_{ij}\sigma_i\sigma_j\sin^2\theta + (\sigma_i^2 - \sigma_j^2)\sin\theta\cos\theta - r_{ij}\sigma_i\sigma_j\cos^2\theta = 0. \quad (16)$$

解此方程即可得式(15),且式(16)即为式(11)的分子,故 $r_{uv} = 0$ 。

由式(10),(11)可得

$$(1 - r_{ij}^2)\sigma_i^2\sigma_j^2 = (1 - r_{uv}^2)\sigma_u^2\sigma_v^2. \quad (17)$$

当 σ_u, σ_v 达极值时, $r_{uv} = 0$, 因 $|r_{ij}| \leq 1$, 若 σ_u, σ_v 均达极大, 只要 p_{ij} 的等高线不是圆, 就有

$$\sigma_u^2\sigma_v^2 > \sigma_i^2\sigma_j^2 > (1 - r_{ij}^2)\sigma_i^2\sigma_j^2.$$

上式与式(17)矛盾, 故 σ_u, σ_v 不能同时达极大. 同理亦不能同时达极小. 证毕.

根据以上性质, 可以导出以下定理.

定理. 对于二维灰度直方图, 当坐标系旋转角度 θ 满足

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{2} [\sqrt{(n^2 - 1)^2 + 4} - (n^2 - 1)] \quad (18)$$

时, 其在 v 轴上的投影为其最佳一维投影, 该投影的类分布方差为

$$\sigma_v^2 = \sigma^2 \cdot \left[1 - \frac{2}{n^2 (\sqrt{(n^2 - 1)^2 + 4} - (n^2 - 1))} \right]. \quad (19)$$

证明. 考察式(4), 令

$$\zeta(x, y) = \bar{\omega}(x, y) - \omega(x, y), \quad (20)$$

则

$$\zeta(x, y) = \sum_{s=-\lfloor n/2 \rfloor}^{\lfloor n/2 \rfloor} \sum_{t=-\lfloor n/2 \rfloor}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{n^2} \cdot \omega(x+s, y+t) - \frac{n^2-1}{n^2} \cdot \omega(x, y). \quad (21)$$

其中 s, t 不同时为 0. 由此, $\zeta(x, y)$ 为 n^2 项独立同正态分布随机变量的线性组合, 故

$$D(\zeta) = \sum_{q=1}^{n^2-1} \frac{1}{n^4} \cdot \sigma^2 + \frac{(n^2-1)^2}{n^4} \cdot \sigma^2 = \frac{n^2-1}{n^2} \cdot \sigma^2. \quad (22)$$

对式(20)应用式(12), 并代入式(22), 有

$$K_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma^2}{n^2} + \sigma^2 - \frac{n^2-1}{n^2} \cdot \sigma^2 \right) = \frac{1}{n^2} \cdot \sigma^2, \quad (23)$$

$$r_{ij} = \frac{K_{ij}}{\sigma_i \sigma_j} = \frac{1}{n}. \quad (24)$$

将 $\sigma_i = \sigma$, $\sigma_j = \sigma/n$ 及上式代入式(15), 就有

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{2} \cdot [-(n^2 - 1) \pm \sqrt{(n^2 - 1)^2 + 4}].$$

若取“—”号, 则 $\operatorname{tg} \theta < 1$. 另由式(10)可得

$$\frac{\partial^2 \sigma_v^2}{\partial \theta^2} = 2[(\sigma_i^2 - \sigma_j^2)(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + 4r_{ij}\sigma_i\sigma_j \sin \theta \cos \theta].$$

因 $\sigma_i > \sigma_j$, $r_{ij} > 0$, $0 \leq \theta \leq 45^\circ$, 故 $\frac{\partial^2 \sigma_v^2}{\partial \theta^2} > 0$. σ_v 取极小, 说明二维灰度直方图沿式(18)之 $\operatorname{tg} \theta$ 方向投影, 投影上类的发散程度最小, 类元素的聚集程度最紧密, 故相应投影为其最佳一维投影.

将 $\sigma_i = \sigma$, $\sigma_j = \sigma/n$, $r_{ij} = 1/n$ 及式(18)代入式(10), 做适当代数变换, 即可得式(19). 证毕.

由式(18)还可知, 当 n 增大时, $\operatorname{tg} \theta$ 向 0 逼近, 说明二维灰度直方图的最佳一维投影向邻域平均灰度直方图逼近.

二维灰度直方图的有关特征可从图 1 所示实例中观察到。图 1(a) 为 300×300 的图像, 明、暗部分灰度值分别为 120 和 60, 各占 50% 幅面, 迭加噪声服从 $N(0, 25)$; 图 1(b) 为相应二维灰度直方图, 一维灰度直方图及二维灰度直方图的最佳一维投影, 这里 $n=3$ 。实例表明, 因噪声作用而在一维灰度直方图中相混淆的两个聚类, 在二维灰度直方图的最佳一维投影中已被很好地分开了。

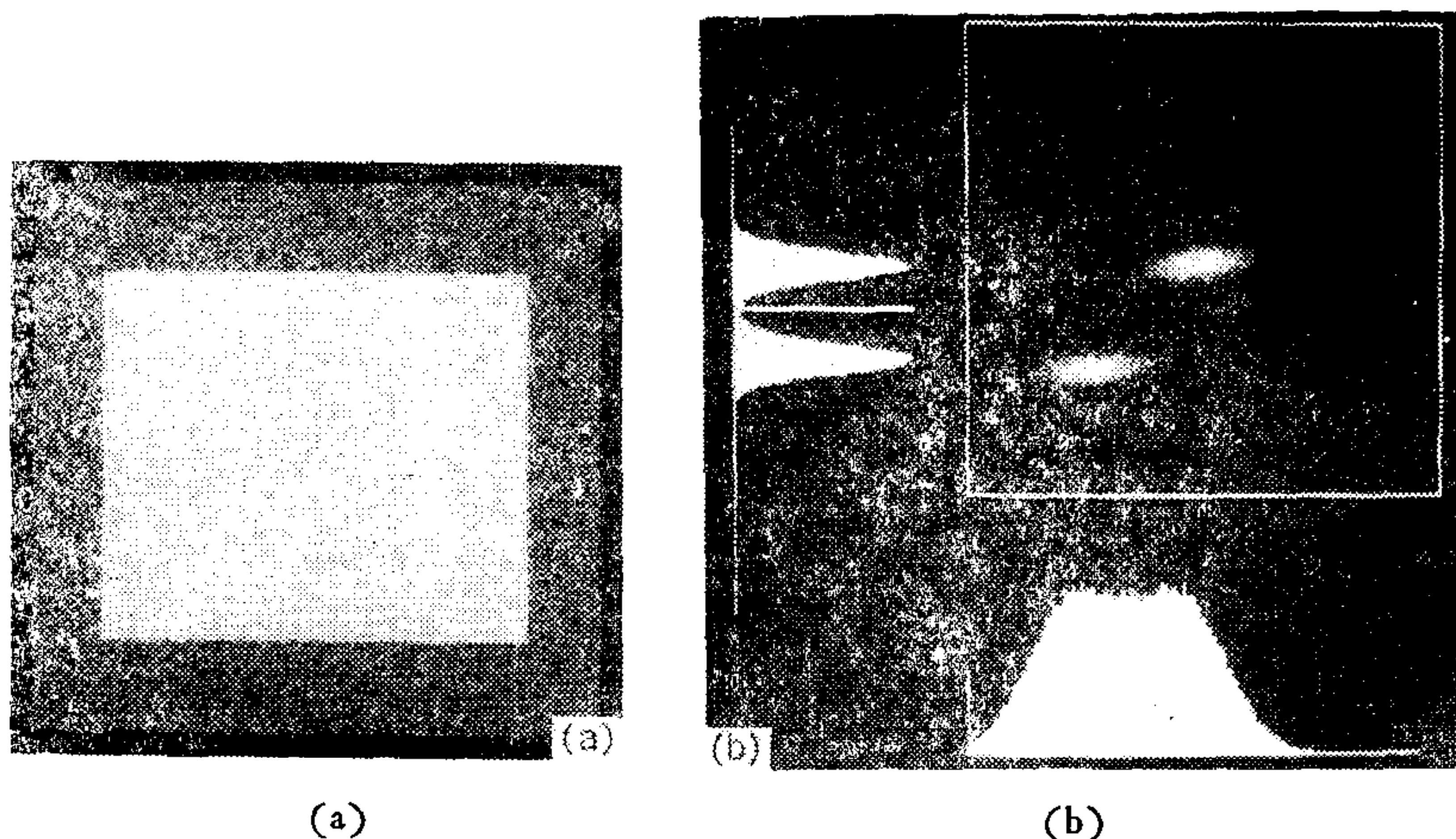


图 1 二维灰度直方图上聚类分布的特征

3 基于二维灰度直方图最佳一维投影的阈值分割方法

根据上节分析, 新方法可表述如下:

- 1) 由原始图像形成二维灰度直方图;
- 2) 作二维灰度直方图的最佳一维投影, 由二维灰度直方图上点 (i, j) 计算

$$v_{ij} = -i \cdot \sin \theta + j \cdot \cos \theta,$$

即 p_{ij} 在 v 轴上的 v_{ij} 处累加, $\sin \theta, \cos \theta$ 由式(18)决定;

- 3) 对投影直方图, 应用传统的基于一维直方图的阈值选择法, 如 Otsu 法、熵法、矩不变法等, 可得到一阈值 t^* ;

- 4) 在二维灰度直方图上, 沿直线

$$t^* = -i \cdot \sin \theta + j \cdot \cos \theta$$

作阈值分割, 即对于象素 (x, y) , 有

$$f_t(x, y) = \begin{cases} c_0, & g(x, y) \leq b_0 + b_1 \cdot f(x, y), \\ c_1, & g(x, y) > b_0 + b_1 \cdot f(x, y). \end{cases}$$

其中 $b_0 = t^* / \cos \theta$, $b_1 = \tan \theta$, 分割时为常数; $f_t(x, y)$ 为分割结果图象。

新方法的优点可通过对比说明: 基于二维灰度直方图的方法采用阈值向量 (s, t) 实现分割^[3-6], 其优于传统方法的主要原因是利用了邻域平均灰度分布的噪声压抑能力 ($\bar{\omega} \sim N(0, \sigma/n)$)。而二维灰度直方图的最佳一维投影对类分布噪声的抑制程度还略优于邻域平均灰度分布。由式(19)经简单代数变换可证 $\sigma_v < \sigma/n$, 故新方法的分割效果略优于基于二维灰度直方图的方法。其次, 新方法在一维空间寻优, 运算量与传统方法相

当。因此,新方法达到了二维分割的精度,一维分割的速度,总体性能明显优于现有诸方法。

4 实验结果

图 2 (a)–(e) 分别为采用一维 Otsu、一维熵、二维 Otsu、二维熵及新方法 对 图 1(a) 的分割结果。表 1 为各方法的错判率和运算时间的比较。图 3(a) 为摄入的一幅汉字图像,背景和汉字的平均灰度分别为 79 和 160,迭加噪声服从 $N(0,25)$ 。图 3(b)–(f) 分别为一维 Otsu、一维熵、二维 Otsu、二维熵及新方法的分割结果。实验结果验证了理论分析是正确的。对其它低信噪比的真实图像所做的实验结果与上述结论也是一致的。因为篇幅所限,此处从略¹⁾。以上实例均是采用 C 语言在 486 微机上完成的,新方法中 n 取 3。

表 1 对图 1(a) 分割结果的比较

分割方法	一维 Otsu	一维熵	二维 Otsu	二维熵	新方法
误分割率	11.59%	11.59%	1.35%	11.56%	0.4%
运算时间	2s	2s	2h	3.5h	7s

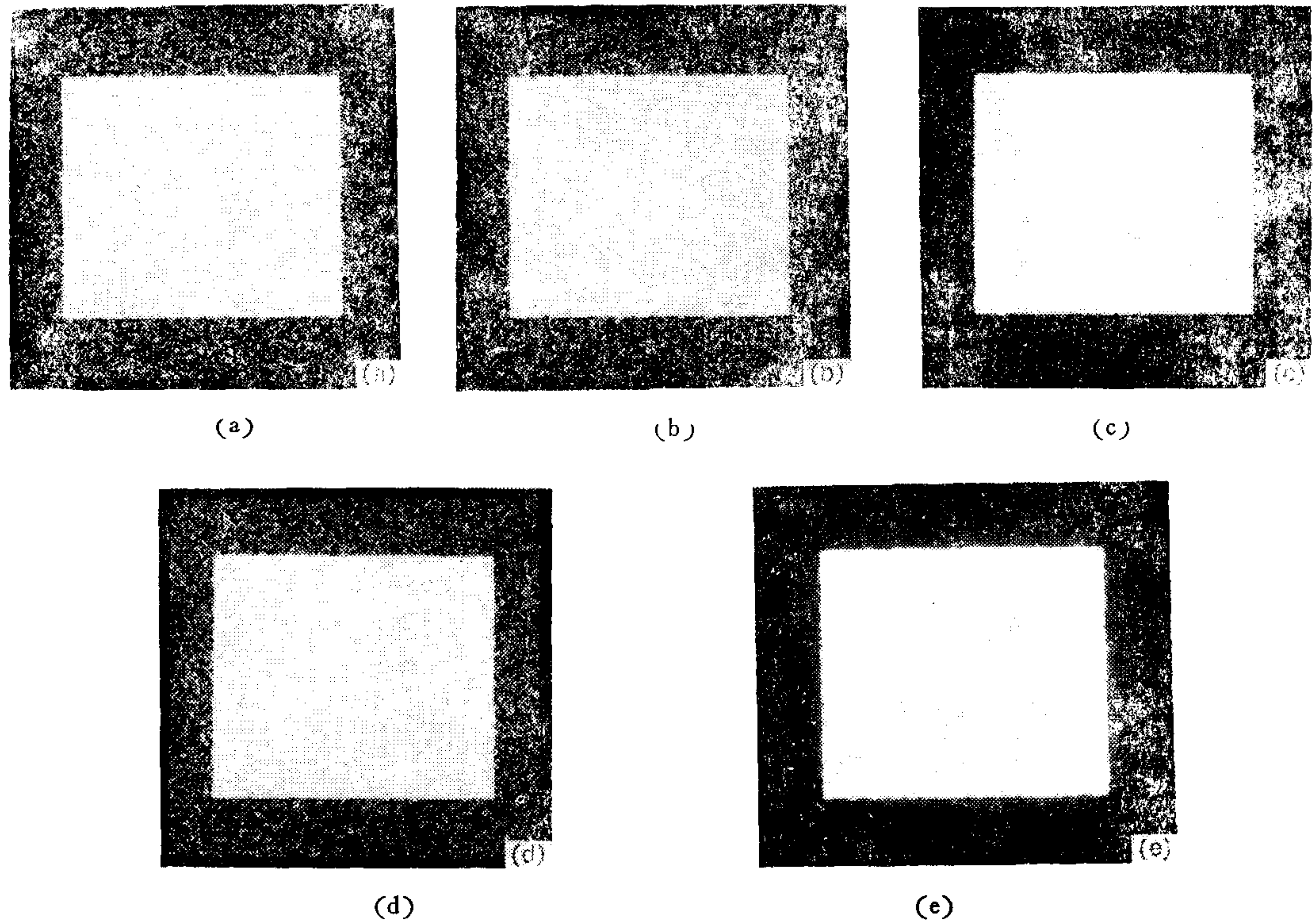


图 2 图 1(a) 的一些分割结果

1) 龚坚. 前期视觉中一些方法的研究. 东南大学硕士论文,1994,16—23.

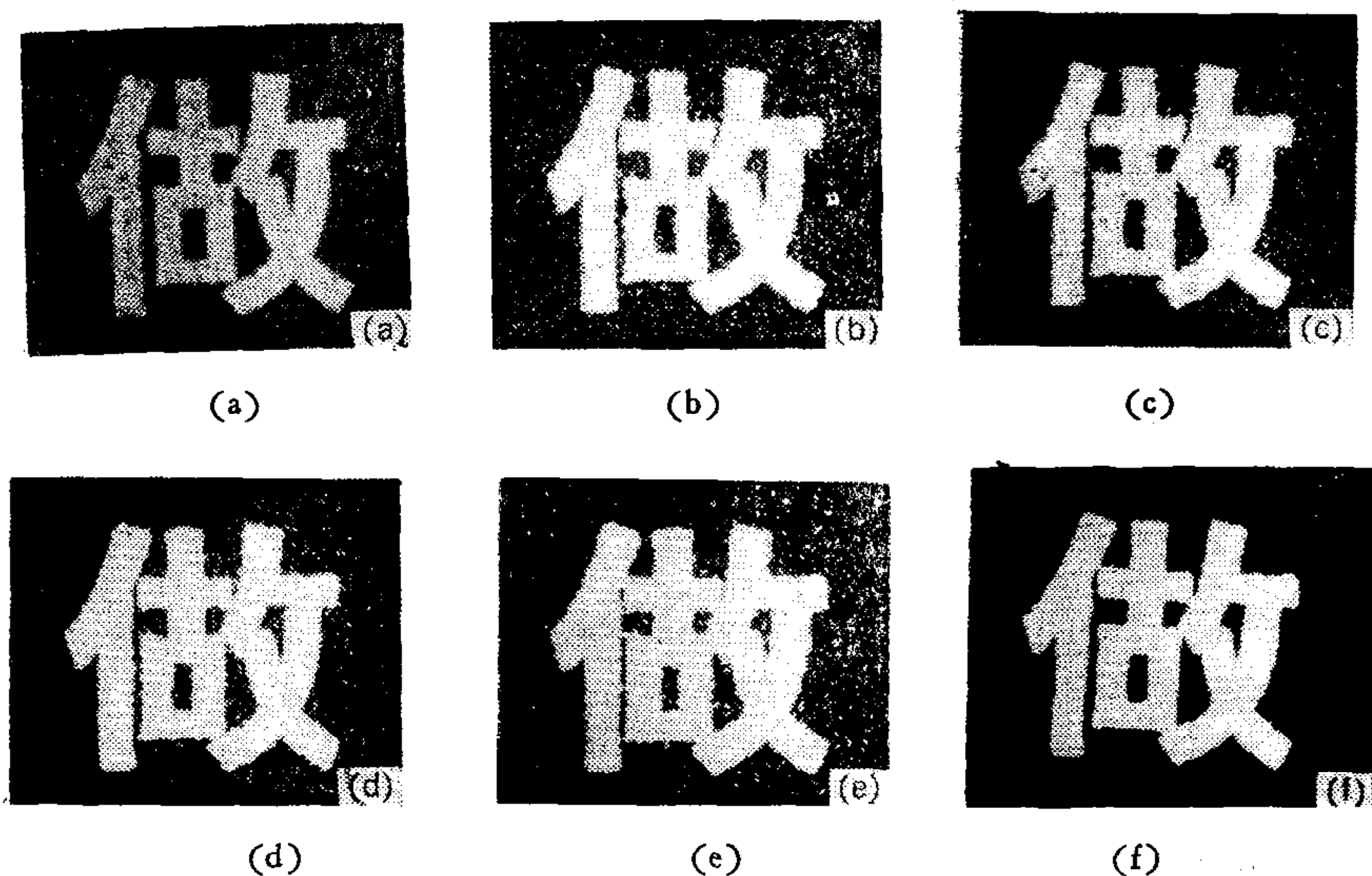


图3 对一幅经噪声污染的实际图象的分割结果比较

5 结论

理论分析和实例表明,基于二维灰度直方图最佳一维投影的阈值分割方法,达到了二维分割的精度、一维分割的速度,明显提高了图象分割的性能指标。新方法在“刺绣画稿自动生成系统”的应用中,对低信噪比的刺绣实物图象的分割效果明显优于现有的其他方法^[7]。

参 考 文 献

- [1] 傅京逊等. 机器人学: 控制·传感技术·视觉·智能. 北京: 中国科学技术出版社.
- [2] Sahoo P K et al. A survey of thresholding techniques. *Comput. Vision Graphics Image Process.*, 1988, **41**: 233--260.
- [3] Abutale A S. Automatic thresholding of gray-level pictures using two-dimensional entropy, *Comput. Vision Graphics Image Process.*, 1989, **47**: 22—32.
- [4] Brink A D. Thresholding of digital images using two-dimensional entropies. *Pattern Recognition*, 1992, **25**: 803—808.
- [5] 刘健庄, 栗文清. 灰度图象的二维 Otsu 自动阈值分割法. *自动化学报*, 1993, **19**(1): 101—105.
- [6] Chen W T et al. A fast two-dimensional entropic thresholding algorithm. *Pattern Recognition*, 1994, **27**: 885—893.
- [7] 李立源, 陈维南. 刺绣画稿自动生成系统. *东南大学学报*, 1996, **26**(2): 1—10.

THE GRAY-LEVEL IMAGE THRESHOLDING METHOD BASED ON THE OPTIMAL ONE- DIMENSIONAL PROJECTION OF TWO- DIMENSIONAL HISTOGRAM

LI LIYUAN GONG JIAN CHEN WEINAN

(Research Institute of Automation, Southeast University, Nanjing 210018)

ABSTRACT

The features of the clusters on 2-dimensional histogram of images are analyzed firstly in this paper. It is shown that there is an optimal 1-dimensional projection of the 2-dimensional histogram. If we use this optimal projection to replace the 1-dimensional histogram in the threshold division of an image, the probability of error caused by noise can be reduced greatly. Theoretic analysis and experiments show that this new method is much better than the methods that merely make use of histograms of the image.

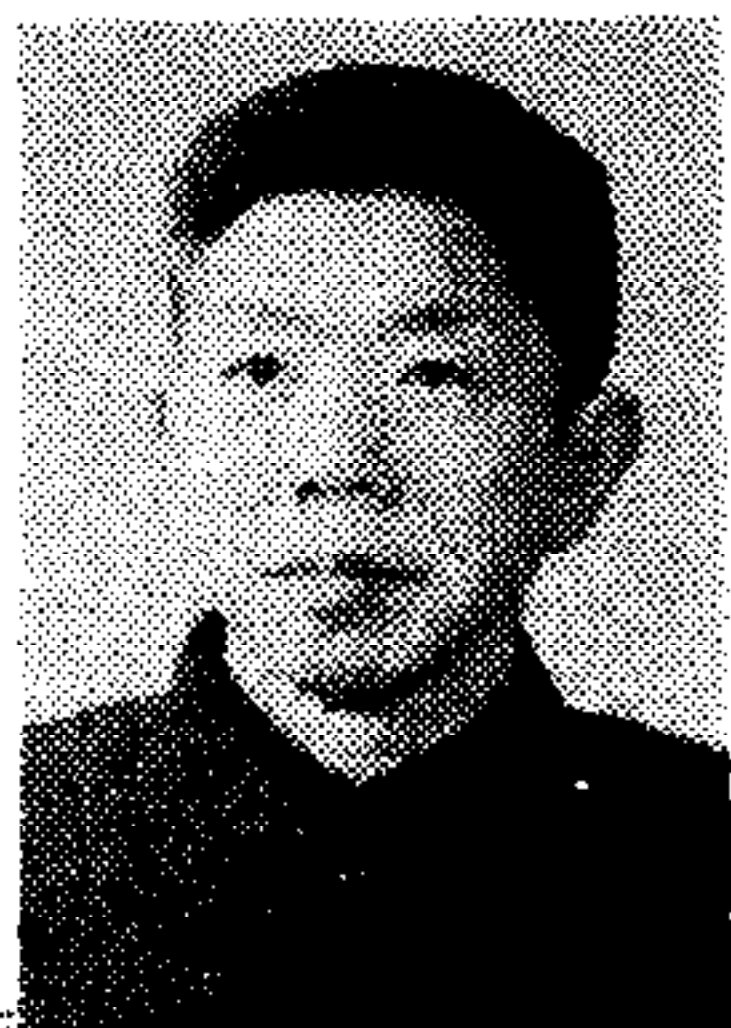
Key words: Image processing, image segmentation, thresholding.



李立源 1963年生。1981年考入南京工学院自动控制系，1985年获学士学位，1988年于该校自动化研究所获工学硕士学位。现任东南大学自动化研究所副教授，从事人工智能、模式识别、计算机视觉、CAD方面的教学、科研和科技开发工作。已发表论文二十余篇。



龚 坚 1972年生于江苏无锡。1989年转入该校东南大学无线电系，1991年获学士学位。1994年于该校自动化研究所获工学硕士学位。现于该所攻读博士学位。目前主要从事图象处理、计算机视觉方面的研究。



陈维南 1960年毕业于南京工学院动力系。现任东南大学教授、博士生导师，自动控制系主任兼自动化研究所所长，江苏省自动化学会理事长。目前主要从事计算机视觉、图象处理、智能控制等方面的研究。专著有计算机控制技术，已发表论文四十余篇。