

1. 數據點選取策略

本文件使用AI工具生成

核心原則：

- 均勻分佈採樣：在區間 $[-1, 1]$ 內生成等距數據點
- 雙重驗證機制：分離訓練集(1000點)與驗證集(200點)
- 解析解計算：直接通過數學公式生成導數真值

數據規格對照表：

數據類型	數量	採樣方式	用途
訓練集 (x,y)	1000	線性均勻分佈	參數優化
驗證集 (x,y)	200	線性均勻分佈	模型泛化能力評估
導數真值 f'(x)	1000	解析解計算	導數網路訓練目標

科學依據：

- 高密度訓練數據(1000點)可有效捕捉龍格函數的 $\frac{1}{x^2}$ 型奇異性
- 獨立驗證集防止過擬合，驗證集間距($\Delta x=0.01$)足夠解析曲率變化

2. 數學模型假設

神經網路架構：

複製

雙網路並行結構

函數網路：輸入層(1) → 隱藏層(20, ReLU) → 隱藏層(20, ReLU) → 輸出層(1)

導數網路：輸入層(1) → 隱藏層(20, ReLU) → 隱藏層(20, ReLU) → 輸出層(1)

數學表達式： x ，網路輸出為：
對於輸入

$$\hat{f}(x) = W_3^T \cdot \sigma(W_2^T \cdot \sigma(W_1^T x + b_1) + b_2) + b_3$$

其中：

- $\sigma(\cdot)$ 為 ReLU 激活函數
- W_i, b_i 為可訓練參數

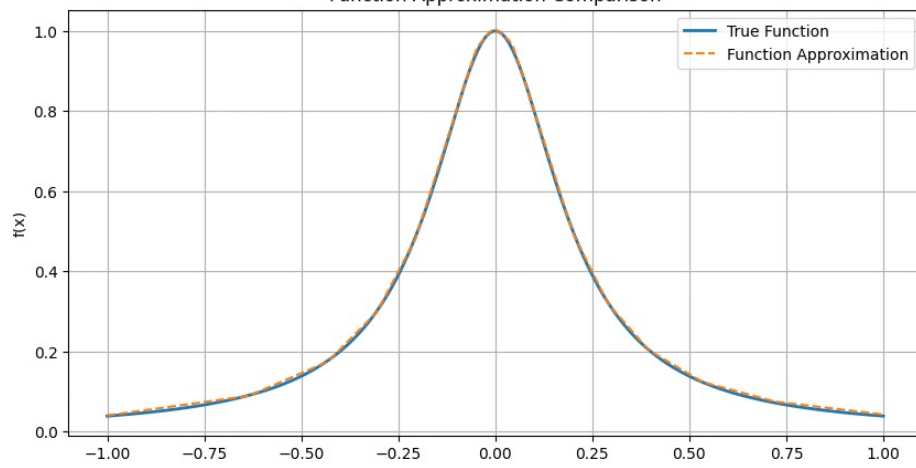
理論假設：

- 神經網路可構造一組自適應基底函數，其線性組合能逼近任意連續函數
- 20神經元的隱藏層提供足夠容量表達龍格函數的

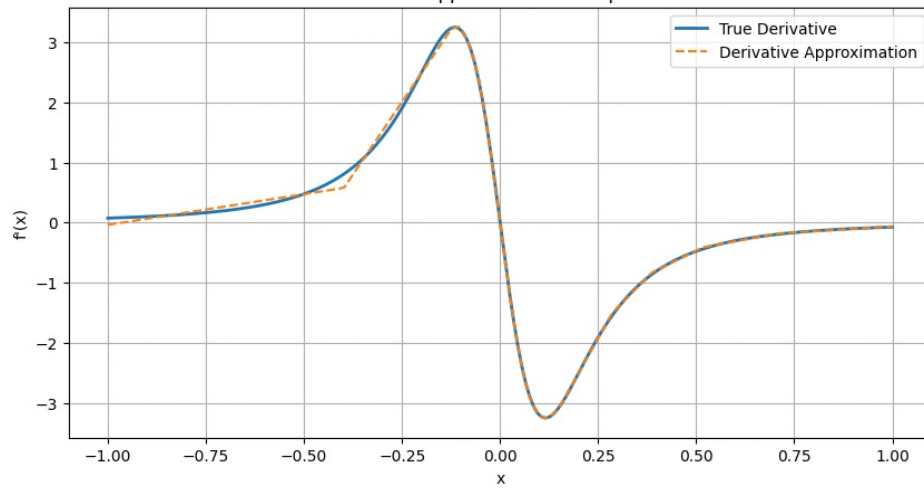
形式

$$\frac{1}{25x^2 + 1}$$

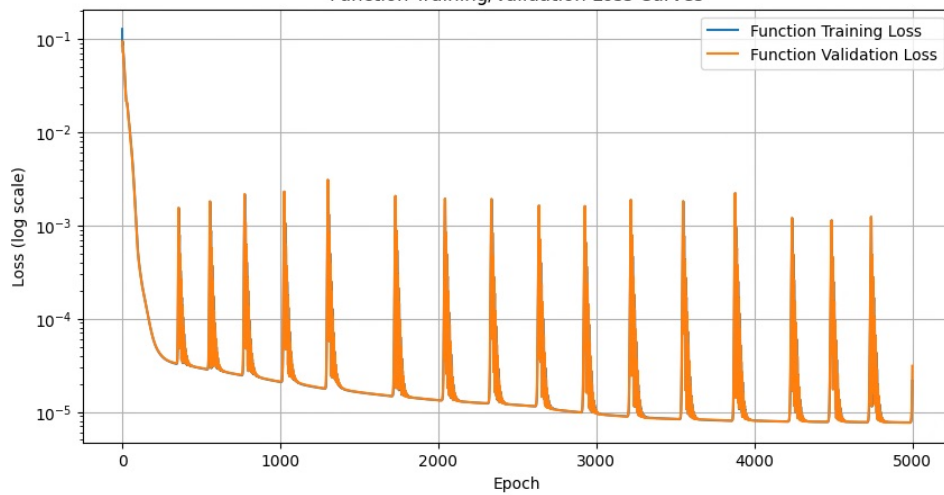
Function Approximation Comparison



Derivative Approximation Comparison



Function Training/Validation Loss Curves



Derivative Training/Validation Loss Curves

