

# 第三章刚体

华中科技大学大学物理 A

2025 年 3 月 17 日

## 1 notes

### 1.1 刚体的平动和转动

def 刚体: 物体上各点的相对位置不变, 受力时大小和形状都保持不变.

def 刚体平动: 任两点连线运动时平行, 各质点运动状态完全相同.

于是用质心来代表整体运动. 质心可能既无质量、又未受力. 质心计算:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\int \vec{r} dm}{M}$$

可在分量上计算质心坐标值. 刚体密度均匀、形状对称, 则质心即为几何对称中心. 注意质心  $\neq$  重心, 重心只有在重力场中才存在.

质心速度  $\vec{v}_c = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{M}$ , 质心加速度  $\vec{a}_c = \frac{\sum m_i \vec{a}_i}{M}$ , 质心运动定理:  $F_{\text{合外}} = M \vec{a}_c$   
例: 求半径为  $R$  的半圆形均匀铁丝质心.

$$\lambda = \frac{m}{\pi R} \quad dm = \lambda d\theta R = \frac{m}{\pi} d\theta$$
$$x_c = \frac{\int x dm}{m} = \frac{\int_0^\pi R \cos \theta m d\theta}{\pi m} = 0 \quad y_c = \frac{\int y dm}{m} = \frac{\int_0^\pi R \sin \theta m d\theta}{\pi m} = \frac{2}{\pi} R$$

故质心  $(0, \frac{2}{\pi} R)$

def 定轴转动: 转轴位置、方向固定不变.

角位置  $\vec{\theta}$ , 角速度  $\vec{\omega}$ , 角加速度  $\vec{\alpha}$ .

角量与线量:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\boxed{\vec{a}_\tau = \vec{\alpha} \times \vec{r}} \quad \vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v}$$

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}$$

### 1.2 刚体定轴转动定律

$\vec{F} = F_{//} + F_{\perp}$ , 定轴转动时只需考虑  $F_{\perp}$  (垂直于转轴的分力) 的力矩  $M_z$   
力  $F$  相对于转轴 ( $z$ ) 的力矩:

$$\vec{M}_z = \vec{r} \times \vec{F}_{\perp} \quad M_z = F_{\perp} r \sin \theta$$

其中  $r \sin \theta$  即为力臂.

刚体上质元的角动量  $\vec{L}_i = \vec{R}_i \times m_i \vec{v}_i = m_i(z_i \vec{k} - r_i \vec{n} \times r_i \omega \vec{\tau}_i) = m_i \omega r_i(z_i \vec{k} \times \vec{\tau}_i + r_i \vec{k})$ , 则  
 $M_z = \vec{M} \cdot \vec{k} = \frac{d \sum \vec{L}_i}{dt} \cdot \vec{k} = \frac{d(\sum m_i r_i^2 \omega)}{dt} = \alpha \sum m_i r_i^2$   
 let:  $J = \sum m_i r_i^2$  (转动惯量), 则

$$\vec{M} = J \vec{\alpha}$$

这是刚体定轴转动定律. 角动量的  $z$  分量为刚体对  $z$  轴的角动量,  $L = J\omega$   
 $J$  反应刚体的转动惯性. 总质量一定, 质量分布离轴越远,  $J$  越大.

### 1.3 转动惯量的计算

$$J = \sum m_i r_i^2 = \int r^2 dm$$

单位  $kg \cdot m^2$ . 实际计算时考虑  $dm = \lambda dl, dm = \sigma dS, dm = \rho dV$ .

常见刚体的转动惯量

均匀圆环或圆筒

$$J_c = mR^2$$

均匀圆盘或圆柱绕盘心转动

$$J_c = \frac{1}{2} mR^2$$

均匀圆盘或圆柱绕一端转动

$$J_c = \frac{1}{2} mR^2 + mR^2$$

均匀杆绕一端转动

$$J_c = \frac{1}{3} mL^2$$

均匀杆绕中点转动

$$J_c = \frac{1}{12} mL^2$$

薄球壳

$$J_c = \frac{2}{3} mR^2$$

球体

$$J_c = \frac{2}{5} mR^2$$

圆筒 (厚度不忽略)

$$J_c = \frac{m}{2} (R_1^2 + R_2^2)$$

平行轴定理

$$J = J_c + md^2$$

如何选取质量元? 看离转轴的距离!