# 第三章刚体

华中科技大学大学物理 A

2025 年 3 月 15 日

## 1 notes

### 1.1 刚体的平动和转动

def 刚体：物体上各点的相对位置不变，受力时大小和形状都保持不变.

def 刚体平动: 任两点连线运动时平行，各质点运动状态完全相同.
于是用质心来代表整体运动. 质心可能既无质量、又未受力. 质心计算：

$$\vec{r_c} = \frac{\sum m_i \vec{r_i}}{\sum m_i} = \frac{\int \vec{r} dm}{M}$$

可在分量上计算质心坐标值. 刚体密度均匀、形状对称，则质心即为几何对称中心. 注意质心 $\neq$ 重心，重心只有在重力场中才存在.
质心速度 $\vec{v_c} = \frac{\sum m_i \vec{v_i}}{M}$，质心加速度 $\vec{a_c} = \frac{\sum m_i \vec{a_i}}{M}$，质心运动定理：$\vec{F_{合外}} = M\vec{a_c}$

例：求半径为 $R$ 的半圆形均匀铁丝质心.

$$\lambda = \frac{m}{\pi R} \quad dm = \lambda d\theta R = \frac{m}{\pi} d\theta$$

$$x_c = \frac{\int x dm}{m} = \frac{\int_0^\pi R\cos\theta m d\theta}{\pi m} = 0 \quad y_c = \frac{\int y dm}{m} = \frac{\int_0^\pi R\sin\theta m d\theta}{\pi m} = \frac{2}{\pi} R$$

故质心 $(0, \frac{2}{\pi}R)$

def 定轴转动：转轴位置、方向固定不变.
角位置 $\vec{\theta}$，角速度 $\vec{\omega}$，角加速度 $\vec{\alpha}$.
角量与线量:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\boxed{\vec{a_\tau} = \vec{\alpha} \times \vec{r}} \quad \vec{a_n} = \vec{\omega} \times \vec{v}$$

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}$$

### 1.2 刚体定轴转动定律

$\vec{F} = \vec{F_{//}} + \vec{F_\perp}$，定轴转动时只需考虑 $\vec{F_\perp}$(垂直于转轴的分力) 的力矩 $M_z$
力 $F$ 相对于转轴 ($z$) 的力矩:

$$\vec{M_z} = \vec{r} \times \vec{F_\perp} \quad M_z = F_\perp r \sin\theta$$

其中 $r\sin\theta$ 即为力臂.

刚体上质元的角动量 $\vec{L_i}=\vec{R_i}\times m_i\vec{v_i}=m_i(z_i\vec{k}-r_i\vec{n}\times r_i\omega\vec{\tau_i})=m_i\omega r_i(z_i\vec{k}\times\vec{\tau_i}+r_i\vec{k})$, 则 $M_z=\vec{M}\cdot\vec{k}=\frac{d\sum\vec{L_i}}{dt}\cdot\vec{k}=\frac{d(\sum m_i r_i^2\omega)}{dt}=\alpha\sum m_i r_i^2$

let:$J=\sum m_i r_i^2$(转动惯量)，则

$$\boxed{\vec{M}=J\vec{\alpha}}$$

这是**刚体定轴转动定律**. 角动量的 $z$ 分量为刚体对 $z$ 轴的角动量,$\boxed{L=J\omega}$
$J$ 反应刚体的转动惯性. 总质量一定，质量分布离轴越远，$J$ 越大.

## 1.3 转动惯量的计算