第二章牛顿运动定律

华中科技大学大学物理 A

2025.2.26

1 notes

1.1 牛顿运动定律

牛顿第二定律 $\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}$，若质量不随时间变化[1]，或 $v<<c$ 则 $\vec{F}=m\vec{a}$
常在分量上用牛顿第二定律.

$$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d(m\vec{v})}{dt}=m\frac{d\vec{v}}{dt}+\vec{v}\frac{dm}{dt}$$

万有引力 $\vec{F}=-\frac{GMm}{r^2}\vec{e_r}$

质点系的牛顿第二定律（无质点或质量进出的情况）
对于单个质点:

$$\vec{F_i}+\vec{f_i}=\frac{d\vec{p_i}}{dt}=\frac{d(m_i\vec{v_i})}{dt}$$

累加得：

$$\vec{F_{合}}=\frac{d\vec{p_{合}}}{dt}$$

若每一质点速度相等，则 $\vec{p_{合}}=m\vec{v}$，当 $v<<c$ 时，质点系有 $\vec{F_{合}}=m\vec{a}$
若 $\vec{F_{合}}$ 为变力，则 $\vec{F_{合}}=m\vec{a}$ 为一微分方程.

1.2 惯性力

惯性力：加速系的运动学效应等效为动力学效应. 惯性力是假想的力. 达朗贝尔原理：将动力学问题化作静力学问题处理.

在**加速平动参考系**中，有惯性力：

$$\vec{F}=-m\vec{a_0}$$

惯性离心力：

$$\vec{f}=mr\omega^2\vec{e_r}=-m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

注意叉乘.

[1]相对论中质量随速度变化

Coriolis force:

$$\boxed{\vec{f_c} = 2m\vec{v'} \times \vec{\omega}}$$

其中 $\vec{v'}$ 为物体相对于转动参考系的速度，$\vec{\omega}$ 为转动参考系相对惯性系转动的角速度.
科里奥利力的特征：仅在转动参考系中运动时出现；角速度较小时，科里奥利力比惯性离心力影响更大；垂直相对速度，不会改变相对速度大小.
科里奥利力的例子：

- 傅科摆；
- 北半球河流右岸陡峭，南半球左岸陡峭
- 赤道附近信风在北半球东北风，南半球东南风
- 北半球逆时针漩涡
- 南北半球均落体偏东

2 Exercises

2.1 课堂例题

例 1：一质量为 m 的物体在重力的作用下以大小为 v_0 的初速度沿与水平方向成 α 角的方向向上抛出，空气阻力与物体动量成正比，比例系数为 $k(k>0)$，求物体运动轨迹. $\boxed{\text{建系}}$

建立 xOy 坐标系，分别在 x, y 方向上应用牛顿第二定律：

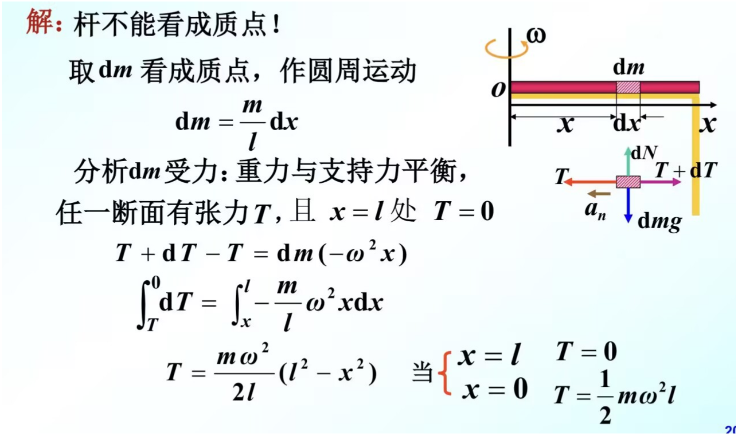
$$\begin{cases} -kmv_x = m\frac{dv_x}{dt} \\ -mg - kmv_y = m\frac{dv_y}{dt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -kv_x = \frac{dv_x}{dt} \\ -g - kv_y = \frac{dv_y}{dt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = v_0\cos\alpha e^{-kt} = \frac{dx}{dt} \\ v_y = \frac{1}{k}[(g + kv_0\sin\alpha)e^{-kt} - g] = \frac{dy}{dt} \end{cases}$$

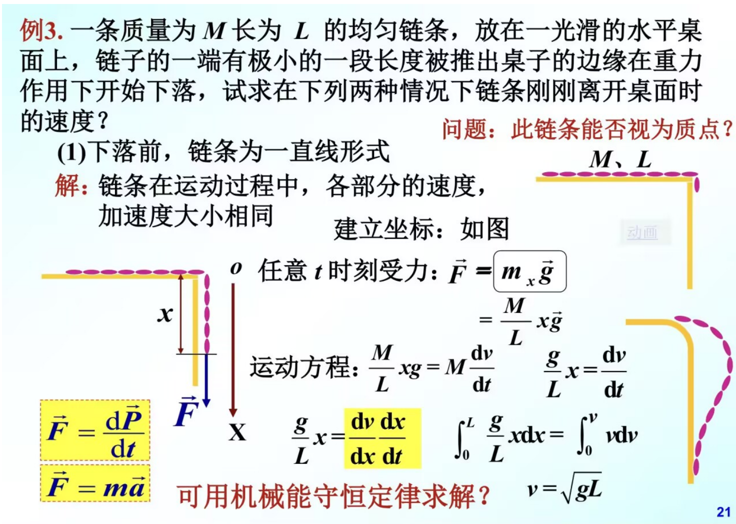
$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{v_0\cos\alpha}{k}(1 - e^{-kt}) \\ y = \frac{1}{k^2}(g + kv_0\sin\alpha)(1 - e^{-kt}) - \frac{gt}{k} \end{cases}$$

<u>复习微分方程的解法！</u>

例 2 质量为 m 长为 l 的均质杆，绕端点 O 以角速度 ω 在光滑水平面上匀速转动，求杆中张力分布.

例 3

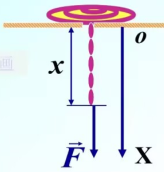

解：杆不能看成质点！
取 dm 看成质点，作圆周运动
$dm=\frac{m}{l}dx$
分析 dm 受力：重力与支持力平衡，
任一断面有张力 T，且 $x=l$ 处 $T=0$
$T+dT-T=dm(-\omega^2 x)$
$\int_T^0 dT=\int_x^l -\frac{m}{l}\omega^2 x dx$
$T=\frac{m\omega^2}{2l}(l^2-x^2)$
当 $\begin{cases} x=l & T=0 \\ x=0 & T=\frac{1}{2}m\omega^2 l \end{cases}$
ω
o
dm
x
dx
x
dN
T
T+dT
a_n
dmg


例3. 一条质量为 M 长为 L 的均匀链条，放在一光滑的水平桌面上，链子的一端有极小的一段长度被推出桌子的边缘在重力作用下开始下落，试求在下列两种情况下链条刚刚离开桌面时的速度？
问题：此链条能否视为质点？
(1)下落前，链条为一直线形式
解：链条在运动过程中，各部分的速度，加速度大小相同
建立坐标：如图
M、L
动画
o
任意 t 时刻受力：$\vec{F}=\boxed{m_x\vec{g}}$
$=\frac{M}{L}x\vec{g}$
x
运动方程：$\frac{M}{L}xg=M\frac{dv}{dt}$
$\frac{g}{L}x=\frac{dv}{dt}$
$\vec{F}=\frac{d\vec{P}}{dt}$
$\vec{F}$
X
$\frac{g}{L}x=\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}$
$\int_0^L \frac{g}{L}xdx=\int_0^v vdv$
$\vec{F}=m\vec{a}$
可用机械能守恒定律求解？
$v=\sqrt{gL}$
21

例 3 情形 2：

例 4：

（2）在刚刚下落时，链条盘在桌子边缘



建立如图所示的坐标系

链条在任意 t 时刻所受合外力为：

$$\vec{F} = m_x \vec{g} = \underline{\frac{M}{L} x \vec{g}}$$

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}} \qquad \boxed{= \frac{d(m\vec{v})}{dt}}$$

运动方程：$\vec{F} = m_x \dfrac{d\vec{v}}{dt}$ ？

$$m' = M - m_x \qquad v' = 0$$

$$\vec{F} = \frac{d(m_x \vec{v} + m'\vec{v}')}{dt} \qquad \text{即：} \vec{F} = \frac{d(m_x \vec{v})}{dt}$$

$$\cancel{\frac{M}{L}} xg = \frac{d}{dt}(\cancel{\frac{M}{L}} xv)$$

$$xg\,dt = d(xv)$$

两边同乘 xv：$x^2 vg \cdot dt = \dfrac{1}{2} d(x^2 v^2)$

$$\int_0^x x^2 g \cdot dx = \int_0^{(xv)^2} \frac{1}{2} d(x^2 v^2)$$

$$\frac{1}{3} g x^3 = \frac{1}{2} x^2 v^2$$

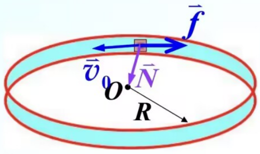
$$v^2 = \frac{2}{3} g x$$

当 $x = L$ 时 $v = \sqrt{\dfrac{2}{3} g L}$

两次求得的速度为何不同？ 机械能守恒？ $\boxed{v = \sqrt{gL}}$

22

课堂练习：光滑桌面上有一个固定的半径为R的圆环带，一个物体贴着环带内侧运动，物体与环带间的滑动摩擦因数为μ，在某一时刻物体经过某定点的速率为 v_0，则 t 时刻物体的速率v =$\boxed{\dfrac{v_0}{1+\dfrac{\mu v_0 t}{R}}}$。



$$N = \frac{mv^2}{R}$$

$$f = -m\frac{dv}{dt} \qquad f = \mu N$$

$$\mu m \frac{v^2}{R} = -m\frac{dv}{dt}$$

$$\int_{v_0}^{v} -\frac{dv}{v^2} = \int_0^t \frac{\mu dt}{R}$$

$$v = \frac{v_0}{1+\dfrac{\mu v_0 t}{R}}$$