第三章刚体

华中科技大学大学物理 A

2025 年 3 月 21 日

1 notes

1.1 刚体的平动和转动

def 刚体：物体上各点的相对位置不变，受力时大小和形状都保持不变.

def 刚体平动: 任两点连线运动时平行，各质点运动状态完全相同.
于是用质心来代表整体运动. 质心可能既无质量、又未受力. 质心计算：

$$\vec{r_c} = \frac{\sum m_i \vec{r_i}}{\sum m_i} = \frac{\int \vec{r} dm}{M}$$

可在分量上计算质心坐标值. 刚体密度均匀、形状对称，则质心即为几何对称中心. 注意质心 $\neq$ 重心，重心只有在重力场中才存在.
质心速度 $\vec{v_c} = \frac{\sum m_i \vec{v_i}}{M}$，质心加速度 $\vec{a_c} = \frac{\sum m_i \vec{a_i}}{M}$，质心运动定理：$\vec{F_{合外}} = M\vec{a_c}$

例：求半径为 R 的半圆形均匀铁丝质心.

$$\lambda = \frac{m}{\pi R} \quad dm = \lambda d\theta R = \frac{m}{\pi} d\theta$$

$$x_c = \frac{\int x dm}{m} = \frac{\int_0^\pi R\cos\theta m d\theta}{\pi m} = 0 \quad y_c = \frac{\int y dm}{m} = \frac{\int_0^\pi R\sin\theta m d\theta}{\pi m} = \frac{2}{\pi} R$$

故质心 $(0, \frac{2}{\pi}R)$

def 定轴转动：转轴位置、方向固定不变.
角位置 $\vec{\theta}$，角速度 $\vec{\omega}$，角加速度 $\vec{\alpha}$.
角量与线量:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\boxed{\vec{a_\tau} = \vec{\alpha} \times \vec{r}} \quad \vec{a_n} = \vec{\omega} \times \vec{v}$$

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}$$

1.2 刚体定轴转动定律

$\vec{F} = \vec{F_{//}} + \vec{F_\perp}$，定轴转动时只需考虑 $\vec{F_\perp}$(垂直于转轴的分力) 的力矩 M_z
力 F 相对于转轴 (z) 的力矩:

$$\vec{M_z} = \vec{r} \times \vec{F_\perp} \quad M_z = F_\perp r \sin\theta$$

其中 $r\sin\theta$ 即为力臂.

刚体上质元的角动量 $\vec{L_i}=\vec{R_i}\times m_i\vec{v_i}=m_i(z_i\vec{k}-r_i\vec{n}\times r_i\omega\vec{\tau_i})=m_i\omega r_i(z_i\vec{k}\times\vec{\tau_i}+r_i\vec{k})$, 则 $M_z=\vec{M}\cdot\vec{k}=\frac{d\sum\vec{L_i}}{dt}\cdot\vec{k}=\frac{d(\sum m_ir_i^2\omega)}{dt}=\alpha\sum m_ir_i^2$

let:$J=\sum m_ir_i^2$(转动惯量)，则

$$\boxed{\vec{M}=J\vec{\alpha}}$$

这是**刚体定轴转动定律**. 角动量的 z 分量为刚体对 z 轴的角动量,$\boxed{L=J\omega}$

J 反应刚体的转动惯性. 总质量一定，质量分布离轴越远，J 越大.

1.3 转动惯量的计算

$$\boxed{J=\sum m_ir_i^2=\int r^2dm}$$

单位 $kg\cdot m^2$. 实际计算时考虑 $dm=\lambda dl$,$dm=\sigma dS$,$dm=\rho dV$.

常见刚体的转动惯量

均匀圆环或圆筒

$$J_c=mR^2$$

均匀圆盘或圆柱绕盘心转动

$$J_c=\frac{1}{2}mR^2$$

均匀圆盘或圆柱绕一端转动

$$J_c=\frac{1}{2}mR^2+mR^2$$

均匀杆绕一端转动

$$J_c=\frac{1}{3}mL^2$$

均匀杆绕中点转动

$$J_c=\frac{1}{12}mL^2$$

薄球壳

$$J_c=\frac{2}{3}mR^2$$

球体

$$J_c=\frac{2}{5}mR^2$$

圆筒（厚度不忽略）

$$J_c=\frac{m}{2}(R_1^2+R_2^2)$$

平行轴定理

$$\boxed{J=J_c+md^2}$$

如何选取质量元？看离转轴的距离！

1.4 刚体转动的功和能

刚体的转动动能

$$E_k = \frac{1}{2}J\omega^2$$

力矩的功

$$A = \int_{\theta 1}^{\theta 2} \vec{M} \cdot d\vec{\theta}$$

于是有动能定理:

$$A = \frac{1}{2}J\omega_2^2 - \frac{1}{2}J\omega_1^2$$

刚体的重力势能：将全部质量集中在质心

1.5 刚体角动量

$$\boxed{L = J\omega}$$

刚体绕定轴的角动量定理

$$\vec{M}dt = d\vec{L}$$

1.6 进动

def 进动: 高速自旋物体的转轴在空间转动

产生原因：重力的力矩

$$|d\vec{L}| = L\sin\theta d\varphi \quad M = \frac{|d\vec{L}|}{dt} = L\sin\theta\omega_p$$

故进动角速度为:

$$\boxed{\omega_p = \frac{M}{L\sin\theta} = \frac{M}{J\omega\sin\theta}}$$

例如来复线 (子弹飞行姿态控制) 等