第二章牛顿运动定律

华中科技大学大学物理 A

2025.2.26

1 notes

1.1 牛顿运动定律

牛顿第二定律 $\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}$，若质量不随时间变化[1]，或 $v<<c$ 则 $\vec{F}=m\vec{a}$
常在分量上用牛顿第二定律.

$$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d(m\vec{v})}{dt}=m\frac{d\vec{v}}{dt}+\vec{v}\frac{dm}{dt}$$

万有引力 $\vec{F}=-\frac{GMm}{r^2}\vec{e_r}$

质点系的牛顿第二定律（无质点或质量进出的情况）
对于单个质点:

$$\vec{F_i}+\vec{f_i}=\frac{d\vec{p_i}}{dt}=\frac{d(m_i\vec{v_i})}{dt}$$

累加得：

$$\vec{F_{合}}=\frac{d\vec{p_{合}}}{dt}$$

若每一质点速度相等，则 $\vec{p_{合}}=m\vec{v}$，当 $v<<c$ 时，质点系有 $\vec{F_{合}}=m\vec{a}$
若 $\vec{F_{合}}$ 为变力，则 $\vec{F_{合}}=m\vec{a}$ 为一微分方程.

1.2 惯性力

惯性力：加速系的运动学效应等效为动力学效应. 惯性力是假想的力. 达朗贝尔原理：将动力学问题化作静力学问题处理.

在**加速平动参考系**中，有惯性力：

$$\vec{F}=-m\vec{a_0}$$

惯性离心力：

$$\vec{f}=mr\omega^2\vec{e_r}=-m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

注意叉乘.

[1]相对论中质量随速度变化

Coriolis force:

$$\boxed{\vec{f_c} = 2m\vec{v'} \times \vec{\omega}}$$

其中 $\vec{v'}$ 为物体相对于转动参考系的速度，$\vec{\omega}$ 为转动参考系相对惯性系转动的角速度.
科里奥利力的特征：仅在转动参考系中运动时出现；角速度较小时，科里奥利力比惯性离心力影响更大；垂直相对速度，不会改变相对速度大小.
科里奥利力的例子：

- 傅科摆；
- 北半球河流右岸陡峭，南半球左岸陡峭
- 赤道附近信风在北半球东北风，南半球东南风
- 北半球逆时针漩涡
- 南北半球均落体偏东

1.3 冲量与动量定理

def 冲量:

$$d\vec{I} = \vec{F}dt \quad \vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt$$

动量定理：

$$d\vec{I} = \vec{F}dt = d\vec{P} \quad \vec{I} = \vec{P_2} - \vec{P_1}$$

动量定理适用于惯性参考系. 非惯性参考系中考虑惯性力的冲量.

def 平均冲力

$$\bar{\vec{F}} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt}{t_2 - t_1} = \frac{P_2 - P_1}{t_2 - t_1}$$

常在分量上用冲量定理.

质点系的动量定理：用合外力和系统总动量.

$\boxed{\text{变质量问题}}$

$$(m + dm)(\vec{v} + d\vec{v}) + (-dm)[\vec{u} + \vec{v} + d\vec{v}] - m\vec{v} = \vec{F}dt$$

$$\Rightarrow m\frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{u}\frac{dm}{dt} = \vec{F}$$

即为**密歇尔斯基方程**. 注意 dm 可能是负的，$\vec{u}$ 是相对速度.
其中 $F_{推力} = u\frac{dm}{dt}$. 对于火箭,$\frac{dm}{dt}$ 为燃料的燃烧速率.
对于自由空间中火箭的直线运动，有：

$$m\frac{dv}{dt} + u\frac{dm}{dt} = 0 \Rightarrow dv = -u\frac{dm}{m} \Rightarrow \int_{v_0}^{v_f} dv = -u\int_{m_0}^{m_f} \frac{dm}{m}$$

所以

$$v_f = v_0 + u\ln\frac{m_0}{m_f}$$

提高 v_f，需要增大 u，增大 $\frac{m_0}{m_f}$.

设质量比 $N=\frac{m_0}{m_f}$, 采用多级火箭，有

$$v_f - v_0 = \sum u\ln N_i = u\ln\prod N_i$$

1.4 角动量定理 角动量守恒定律

def 角动量（动量矩）：

$$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$$

其中 $\vec{p}$ 为线动量. 单位 $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-1}$

def 力矩:

$$\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F}$$

则 $M = Fr\sin\theta = Fr_\perp$

质点作圆周运动时角动量大小 $L = rmv = mr^2\omega$

同一质点对不同定点的角动量大小不同.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p} + \vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v}\times m\vec{v} + \vec{r}\times\vec{F}$$

即$\boxed{\text{角动量定理}}$

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}dt = \vec{L_2} - \vec{L_1}$$

其中 $\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}dt$ 称为冲量矩.

在非惯性参考系中，角动量定理还需考虑惯性力的力矩.

当 $\vec{M}=\vec{0}$ 时，有 $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$ 为常矢量，这是$\boxed{\text{角动量守恒定律}}$.

何时 $\vec{M}=\vec{0}$? 当 $\vec{F}=\vec{0}$ 或 $\vec{r}\parallel\vec{F}$

def 有心力：质点所受力的作用线始终通过某个固定点，因此对力心的力矩为 $\vec{0}$

可以在分量上用角动量守恒定律. 角动量守恒定律是普适的.

质点系的角动量定理和角动量守恒定律：用合外力矩和系统总角动量.

1.5 功和能

def 功：

$$A_{ab} = \int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_a^b F|d\vec{r}|\cos\alpha = \int_a^b F\cos\alpha ds$$

功率 $P=\vec{F}\cdot\vec{v}$，动能定理 $A=\Delta E_k$

1.6 保守力、势能

保守力：对质点做功大小只与初末位置有关，与路径无关，如重力、弹力、万有引力

非保守力做功与路径有关，如摩擦力、粘滞力等

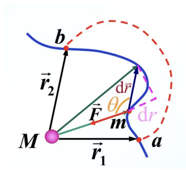
保守力环流为 0:

$$\oint_L \vec{F}\cdot d\vec{r}=0$$

E_p 为势能，则保守力做功等于势能的**负**变化：

$$A_{ab}=\int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{r}=-(E_{p_b}-E_{p_a})$$

弹性势能 $E_p=\frac{1}{2}kx^2$, 重力势能 $E_p=mgy$, 万有引力势能 $E_p=-\frac{GMm}{r}$



对万有引力 $F=\frac{GMm}{r^2}$,$dA=F\cos\theta|d\vec{r}|$, 则位矢长度增量 $dr=|d\vec{r}|\cos(\pi-\theta)=-|d\vec{r}|\cos\theta$，于是 $dA=-G\frac{mM}{r^2}dr$，故 $A_{ab}=\int_a^b -G\frac{mM}{r^2}dr=-[(-\frac{GmM}{r_b})-(-\frac{GmM}{r_a})]$

势能是属于系统的.

由势能求保守力：

$$dA=-dE_p(x,y,z)=-(\frac{\partial E_p}{\partial x}dx+\frac{\partial E_p}{\partial y}dy+\frac{\partial E_p}{\partial z}dz)=F_xdx+F_ydy+F_zdz$$

$$\Rightarrow (F_x+\frac{\partial E_p}{\partial x})dx+(F_y+\frac{\partial E_p}{\partial y})dy+(F_z+\frac{\partial E_p}{\partial z})dz=0$$

$$\Rightarrow F_i=-\frac{\partial E_p}{\partial i}$$

记为：

$$\boxed{\vec{F}=-\nabla E_p}$$

其中 $\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ 是哈密顿算符（梯度算符）

若力 $\vec{F}$ 是保守力，则有

$$\boxed{\frac{\partial F_x}{\partial y}=\frac{\partial F_y}{\partial x}}=-\frac{\partial^2 E_p}{\partial x\partial y}$$

在已知 $\vec{F}$ 分量时，可以此作为必要条件判断是否为保守力.

此外判断保守力的一般方法：1. 做功与路径无关；2. 环流为 0；3. 力是势能的负梯度.

双原子分子势能：$E_p=\frac{A_m}{r^m}-\frac{A_n}{r^n}$, 其中 $m>n$.

1.7 功能原理、机械能守恒定律

质点系的动能定理：

$$A_{外} + A_{内} = \Delta E_k$$

讨论内力的功. 系统内力总是成对出现,$\vec{f_1} = -\vec{f_2}$, 则 $\Delta W = \vec{f_1}\cdot\Delta\vec{r_1} + \vec{f_2}\cdot\Delta\vec{r_2} = \vec{f_2}(\Delta\vec{r_2} - \Delta\vec{r_1}) = \vec{f_2}\cdot\Delta\vec{r_{21}}$ ，故这对力做功为其中一个力沿两物体相对移动路径所做功.

机械能 $E = E_k + E_p$

功能原理：

$$\boxed{A_{外力} + A_{非保守内力} = \Delta E}$$

于是当 $A_{外力} + A_{非保守内力} = 0$ 时有 $E = constant$，这是机械能守恒定律.

2 Exercises

2.1 课堂例题

2.1.1 第一章

例 1：一质量为 m 的物体在重力的作用下以大小为 v_0 的初速度沿与水平方向成 α 角的方向向上抛出，空气阻力与物体动量成正比，比例系数为 $k(k>0)$，求物体运动轨迹. 建系

建立 xOy 坐标系，分别在 x, y 方向上应用牛顿第二定律：

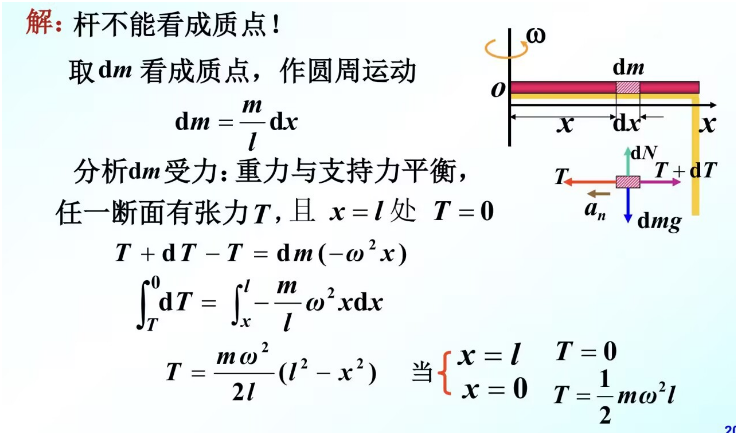
$$\begin{cases} -kmv_x = m\frac{dv_x}{dt} \\ -mg - kmv_y = m\frac{dv_y}{dt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -kv_x = \frac{dv_x}{dt} \\ -g - kv_y = \frac{dv_y}{dt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = v_0\cos\alpha e^{-kt} = \frac{dx}{dt} \\ v_y = \frac{1}{k}[(g + kv_0\sin\alpha)e^{-kt} - g] = \frac{dy}{dt} \end{cases}$$

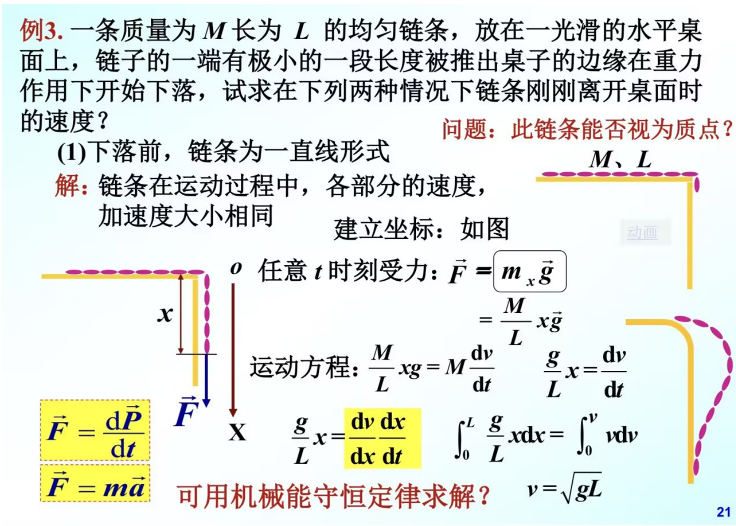
$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{v_0\cos\alpha}{k}(1 - e^{-kt}) \\ y = \frac{1}{k^2}(g + kv_0\sin\alpha)(1 - e^{-kt}) - \frac{gt}{k} \end{cases}$$

复习微分方程的解法！

例 2 质量为 m 长为 l 的均质杆，绕端点 O 以角速度 ω 在光滑水平面上匀速转动，求杆中张力分布.

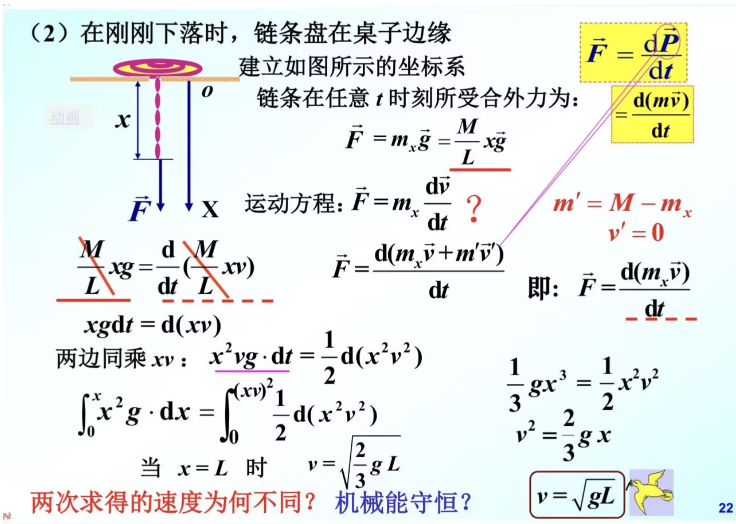
例 3


解：杆不能看成质点！
取dm 看成质点，作圆周运动
$dm=\frac{m}{l}dx$
分析dm受力：重力与支持力平衡，
任一断面有张力T，且 $x=l$处 $T=0$
$T+dT-T=dm(-\omega^2 x)$
$\int_T^0 dT=\int_x^l -\frac{m}{l}\omega^2 x dx$
$T=\frac{m\omega^2}{2l}(l^2-x^2)$
当$\begin{cases} x=l & T=0 \\ x=0 & T=\frac{1}{2}m\omega^2 l \end{cases}$
ω
dm
O
x
dx
x
dN
T
$T+dT$
a_n
dmg


例3. 一条质量为M长为 L 的均匀链条，放在一光滑的水平桌面上，链子的一端有极小的一段长度被推出桌子的边缘在重力作用下开始下落，试求在下列两种情况下链条刚刚离开桌面时的速度？
问题：此链条能否视为质点？
(1)下落前，链条为一直线形式
解：链条在运动过程中，各部分的速度，加速度大小相同
建立坐标：如图
M、L
动画
o
任意t时刻受力：$\vec{F}=\boxed{m_x\vec{g}}$
$=\frac{M}{L}x\vec{g}$
x
运动方程：$\frac{M}{L}xg=M\frac{dv}{dt}$
$\frac{g}{L}x=\frac{dv}{dt}$
$\vec{F}$
X
$\vec{F}=\frac{d\vec{P}}{dt}$
$\frac{g}{L}x=\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}$
$\int_0^L\frac{g}{L}xdx=\int_0^v vdv$
$\vec{F}=m\vec{a}$
可用机械能守恒定律求解？
$v=\sqrt{gL}$
21

例 3 情形 2：

例 4：



例 5：一铅直悬挂的匀质柔软细绳长为 L，下端刚好触及水平桌面，现松开绳的上端，让绳落至桌面上。试证明：任意时刻作用于桌面的压力 N, 等于已落到桌面上的绳重 G 的三倍？

解：dy 下落：

$$Fdt = \Delta P = vdm = \frac{dy}{dt}\frac{m}{L}dy \Rightarrow F = \frac{m}{L}(\frac{dy}{dt})^2 = \frac{m}{L}v^2$$

又 $v^2 = 2gy$, 有：

$$F = 2\frac{y}{L}mg$$

其中 F 为桌面对绳的力. 由牛顿第三定律, 绳对桌面的力也为 F. 又 $G = \frac{y}{L}mg$, 则压力 $N = G + F = 3G$.

不要忘了加 G.

例 6: 水平桌面上盘放着一根不能拉伸的均匀柔软的长绳，单位长度质量为 λ, 用手将绳的一段以恒定速率 v_0 竖直上提. 求提起的绳长为 L 时，手的提力的大小 F.

变质量问题，用密尔歇斯基方程！

解：

$$F - mg = m\frac{dv}{dt} - u\frac{dm}{dt} = v_0\frac{dm}{dt}$$

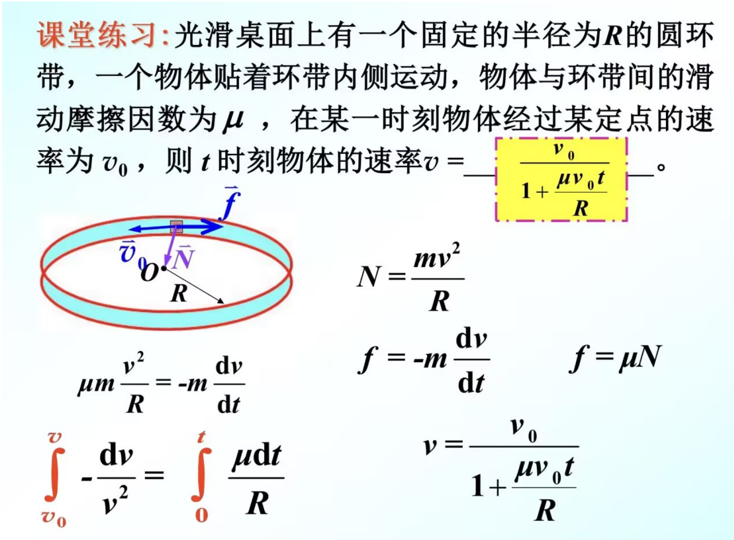
$$m = \lambda L \Rightarrow \frac{dm}{dt} = \lambda\frac{dy}{dt} = \lambda v_0$$

$$\Rightarrow F = mg + v_0^2\lambda = \lambda Lg + \lambda v_0^2$$

另解：设 t 时刻提起的绳长为 y，$t + dt$ 时刻提起的绳长为 $y + dy$

对于长为 $y + dy$ 的绳（看作质点系）：

$$(F - mg)dt = (y + dy)\lambda v_0 - y\lambda v_0 = \lambda v_0 dy$$



$$\Rightarrow F=mg+\lambda v_0\frac{dy}{dt}=\lambda Lg+\lambda v_0^2$$

例 7：长为 l 的铁链平放在桌上，质量线密度为 ρ，用手提起链的一段使之以匀速 v_0 铅直上升，求：从一段离地到全链离地，手的拉力的冲量？

解一：同例 6 可得

$$F=\rho yg+\rho v_0^2$$

$$\Rightarrow I_F=\int_0^{\frac{l}{v_0}}Fdt=\int_0^{\frac{l}{v_0}}(\rho v_0tg+\rho v_0^2)dt=\frac{\rho gl^2}{2v_0}+\rho v_0l$$

解二：动量定理

$$\int_0^t(F-\rho gy)dt=\rho lv_0\Rightarrow I_F=\int_0^tFdt=\frac{\rho gl^2}{2v_0}+\rho v_0l$$

例 8：用角动量守恒定律推导开普勒第二定律.

$$dS=\frac{1}{2}|\vec{r}\times d\vec{r}|\Rightarrow\frac{dS}{dt}=\frac{1}{2}|\vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt}|=\frac{1}{2}|\vec{r}\times\vec{v}|=\frac{\vec{L}}{2m}$$

$\vec{L}$ 为常矢量，则 $\frac{dS}{dt}$ 为常量，且行星的运动为平面运动（$\vec{L}$ 方向不改变）