

目录

目录	1
第 8 章 有限体积法	2
§8.1 有限体积法的基本概念	2
8.1.1 几个术语	2
8.1.2 控制体积的选择	3
8.1.3 结构与非结构网格	5
§8.2 有限体积法构造	7
8.9-1 方程离散及基本格式	7
8.9-2 物理特性要求	11
8.9-3 迎风型通量格式	14
8.9-3 TVD 格式	18
§8.3 非结构网格上的有限体积法	23
8.3.1 基本方程	23
8.3.2 离散基本思路	24
8.3.3 数值通量近似	25
第 9 章 在水力学问题中的应用	29
§9.1 渗流问题中的应用	29
9.1.1 饱和—非饱和地下水运动基本控制方程	29
9.1.2 方程的离散	31
9.1.3 算例【陈扬 硕士论文】	33
§9.2 二维明渠非恒定流计算	38
9.2.1 水流基本方程	38
9.2.2 控制方程的离散	39
9.2.3 计算实例	53
§9.3 三维紊动分层流计算	64
9.3.1 紊动分层流基本方程	64
9.3.2 紊流模型及控制方程离散	65
9.3.3 压力校正法	66
9.3.3 边界条件	69
9.3.4 盐度引起的负浮力流动	71

第8章 有限体积法

有限差分方法是从描述各种物理现象的基本微分方程出发构造离散方程的,前文已经对其作了翔实、周密的论述。该部分将从基础算法入手分析介绍在计算流体力学界广为应用的有限体积法。基于有限体积法的实用算法在计算流体力学、计算传热学等领域得到了飞速发展^[1-3]。在水力学诸多问题,如水流物质输运模拟,水工水力学模拟以及溃坝洪水波演进等水流模拟中也得到了广泛应用。

§ 8.1 有限体积法的基本概念

有限体积法,又称为有限容积法,它正是从物理量守恒这一基本要求出发提出的。这也是其受计算流体力学界广为称道和喜欢之处。其以守恒型的方程为出发点,通过对流体运动的有限子区域的积分离散来构造离散方程。有限体积法有两种导出方式,一是控制容积积分法,另一个是控制容积平衡法。不管采用哪种方式导出的离散化方程,都描述了有限各控制容积物理量的守恒性,所以有限体积法是守恒定律的一种最自然的表现形式。

该方法适用于任意类型的单元网格,便于应用来模拟具有复杂边界形状区域的流体运动;只要单元边上相邻单元估计的通量是一致的,就能保证方法的守恒性;有限体积法各项近似都含有明确的物理意义;同时,它可以吸收有限元分片近似的思想以及有限差分方法的思想来发展高精度算法。由于物理概念清晰,容易编程;有限体积法成为了工程界最流行的数值计算手段。

8.1.1 几个术语

在进行数值计算时,要把计算区域划分成一系列互不重叠的离散小区域,然后在该小区域上离散控制方程求解待求物理量。在有限差分法中只涉及到网格节点的概念,而有限体积法因为物理解释需要,形成了以下几个常用几何要素的相关名词。

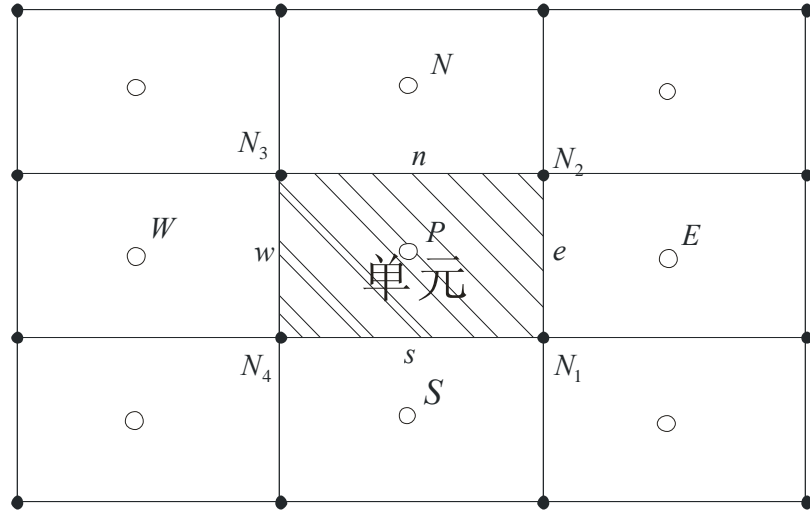


图 8-1 单元中心有限体积法中典型的矩形网格

如图 8-1 所示，为单元中心格式（cell-centered scheme）有限体积法中典型的矩形网格关系。其包含以下几个要素：

控制体积（control volume）：图中阴影部分，方程积分离散时的小体积单元（二维为面积单元）。

单元（cell）：控制体积的中心，常用形心来表示，为待求物理量的几何位置。图中用空心圆来表示，如点 P、W、E、N、S 等。常用单元来代表整个控制体积。以下如若不作特殊说明，则用“单元”来代表控制体积。

网格线（grid lines）：用来分割计算区域内各控制体积的交错曲线簇，如图中折线 N_1N_2 、 N_2N_3 、 N_3N_4 、 N_4N_1 等

网格节点（nodes）：网格线之间的交点，图中用黑圆点来表示，如 N_1 、 N_2 、 N_3 、 N_4 等

单元界面（cell faces）：相邻两个控制体积间的公共面（二维则可以认为是公共边，这样看起来就和网格线一致了，但是要注意这不是同一个概念），图中用小写字母 e 、 n 、 w 、 s 表示。通常定义 e 、 n 、 w 、 s 几何位置位于交界面的形心点，二维则认为在公共边的中心点。

8.1.2 控制体积的选择

当你开始用有限体积法模拟流体流动时，而且划分好网格后，你必须选定控制体积的形成方式。目前，常用的有两种方法：单元中心方式（cell-centered）和顶点中心方式（vertex-centered）。另外一些学者还发展了由两种方式综合形成的混合方式。根据问题的特点和要求，不同的变量可以采用不同的控制体积，因此又产生了交错网格和同位网格的称谓，这里不再深入介绍，读者根据需要可以参考相关文献[1-3]。

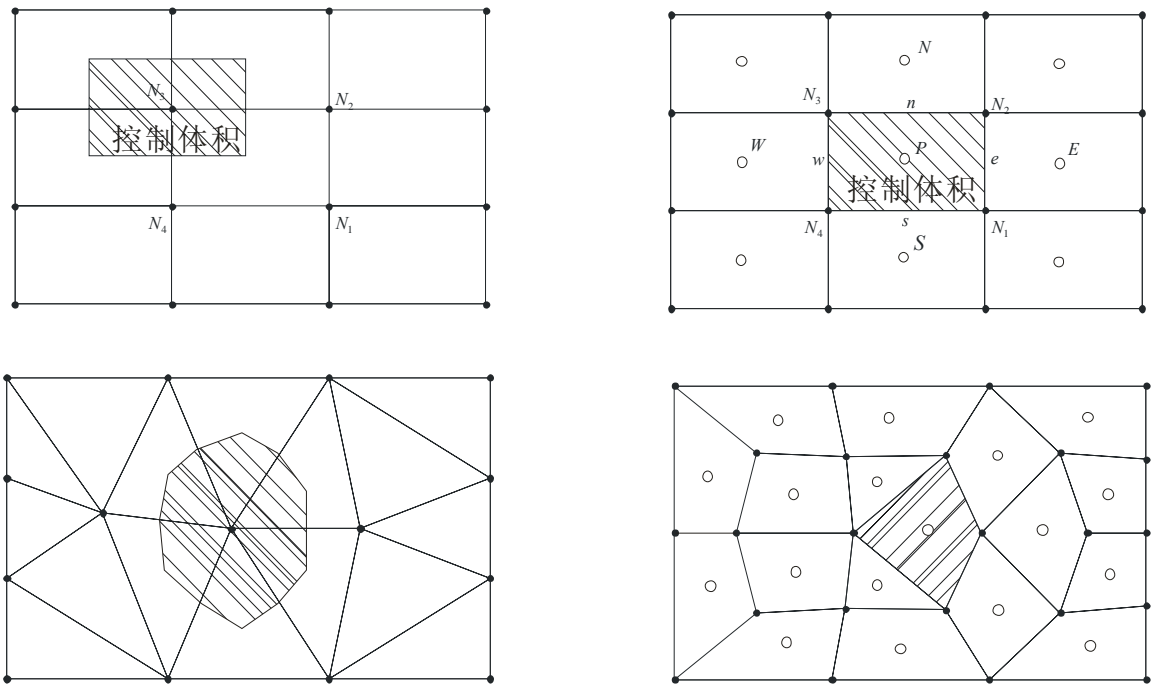
前面我们我们在讨论有限体积法的术语时，已经看到了单元中心控制体积的形成方式。这里再作一个说明并对两者作简单的比较。图 8-2 为两种控制体积选择方式示意图。阴影部

分表示单元的控制体积。空心圆点表示单元，实心圆点表示网格节点，在顶点中心方式中，单元和网格节点重合。

一维网格



二维网格



(a) 单元顶点方式

(b) 单元中心方式

图 8-2 控制体积选择方式示意图

(1) 单元中心方式

单元位于控制体积的中心，即将单一的网格单元作为控制体积，网格单元互不重叠。目前用非结构网格做流动计算多使用单元中心格式,它有利于处理陆地和给定流量边界条件。

(2) 单元顶点方式

以网格节点为中心，它的形成有多种方式。其常用的构成方式是由以该节点为顶点的格子的形心以及各共顶点的网格线中心点的一系列连接线段所构成一个多边形控制体积。也可以由环绕该节点的一组格子组成控制体。

因此计算同样多的变量，单元中心方式变量布置简单直观，易于处理边界条件和保持离

散的守恒性，而且需要的网格数要比单元顶点方式少得多，可节省计算时间。

8.1.3 结构与非结构网格

1 结构网格

结构网格,指的是一类具有一定的分布特征,可以用相应的行列关系来顺序描述的网格。常用的矩形网格、曲线网格以及块结构网格等。

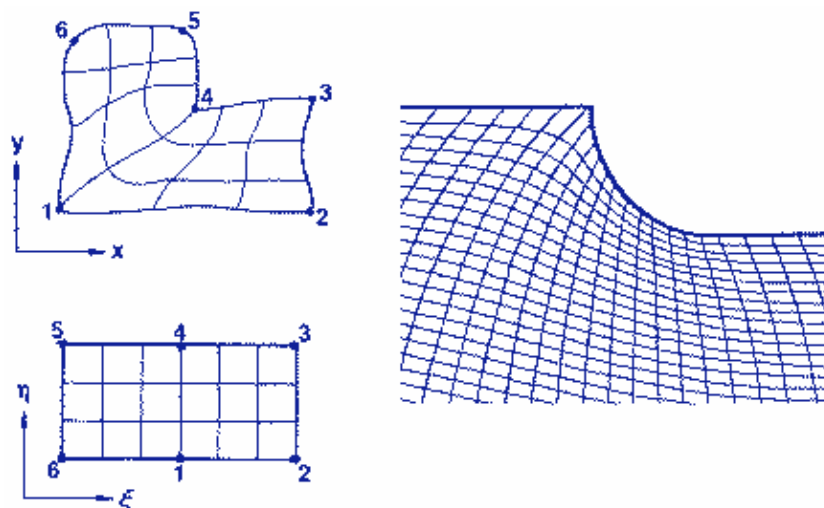


图 8-3 结构网格

矩形网格是 FDM 或 FVM 最为常用的网格系统。它不对原始的控制方程（直角坐标）作任何坐标变换，在边界处采用简单的阶梯形网格近似复杂的边界。或者，用规则矩形网格覆盖整个包括陆边界在内的计算区域，对陆边界及陆域处的网格作特殊的技术处理，如所谓的冻结法，即令某些控制体积“冻结”，或者说，“堵塞”某些控制体积，则剩下的“活动”的控制体积可形成所需要的不规则区域^[1]，“冻结”亦即令该控制体积中的因变量在运算过程中始终保持不变。常采用大数值源项和大粘性系数法实现冻结区内流速恒为零。尽管这类对规则网格作特殊的技术处理的方法对边界概化过于严重，边界计算值过于粗糙，陆边界附近会形成虚假的曲折水流。但是，其网格生成方便，计算方法简单等优点使该方法得到了大量的应用。

在计算天然水域时，利用规则矩形网格阶梯近似边界不仅改变了原始物理边界附近的流态，而且增加了边界条件设置的复杂性；计算精度因此也大受影响，尤其在近边界高梯度区域。自然地，研究人员引入广义曲线坐标变换的思想。即在物理计算区域内构筑曲线网格，使得网格曲线与所求解区域的边界相重合，而后利用坐标变换将复杂的物理域变换到规则的计算空间内；在规则计算区域上离散求解变换后的控制方程，将得到的解投影至原物理区域得到数值解；或者在曲线网格上直接应用原始因变量求解。除将复杂的物理空间变换成为易于求解的规则网格之外，曲线坐标变换方法还能式计算网格点与物理域的活动网格节点相对应，从而可适应非恒定流动边界的模拟。目前常用的生成曲线网格的方法有微分方法和代数方法。微分方法常用求解椭圆型方程或双曲型方程实现。其中，尤以 Thompson 为代表提出的利用 Poisson 方程生成贴体曲线网格的方法最为著名和流行。该类型方法可通过调整源项控制网格的分布，在梯度大的区域人工或自动加密网格。因此，该方法提出后，得到了广泛的发展和应用。

曲线网格应用遗留众多需要解决的问题。首先，大多数网格的生成方法只提供了离散点的变换，而不给出解析函数形式的变换关系。使用不光滑的网格时，对变换关系的差分近似会造成了很大的数值误差，甚至会导致不切实际的值。其次，如果网格严重偏离正交性，就会极大损坏原有的迭代方法的收敛速率。再次，因变量的选择也须谨慎考虑。在曲线网格中，可取原始笛卡尔坐标系变量或曲线坐标系中沿网格方向的协变量两种作为因变量。

满足正交性的网格具有优良的特性。在正交曲线坐标系下，变换后的某些项消失；控制方程更为简洁；数值稳定性和解的精度高；计算量和收敛速度也有了很大的改善。

但是，正交曲线网格极大的受制于边界的几何形状，对于天然水域，由于边界极其复杂，很难生成完全正交的曲线网格，特别对于三维问题，正交曲线网格几乎是不可能实现的。因此，在实际工程水流计算上较少采用。

正是由于复杂边界下生成正交坐标系的困难，而非正交曲线网格不仅相对较容易生成，而且可随意调节网格的疏密，在高梯度区域人工或自动加密网格。因此，研究人员退而求其次，放弃完全正交性的要求，转而寻求非正交曲线网格生成和数值处理。如生成边界正交曲线网格，或生成尽量接近正交的曲线网格，以及探求非正交的光滑或不光滑或网格的求解方法[2]等。为充分利用网格正交性的优点，常希望尽可能生成接近正交的网格，至少在接近边界高梯度区域，以恢复数值近似损失的精度。为此，Sorenson[11]开发了一种能控制网格疏密和角点的边界正交曲线网格生成的微分方法。

2 非结构网格

八十年代以来，为了更好地拟合自然边界，非正交网格上的数值计算开发和应用得到了飞速的发展。

为了更好的说明非结构网格，可以先看图 8-4。

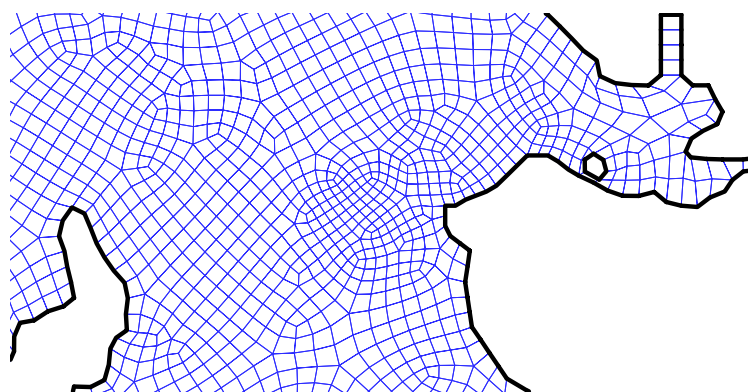


图 8-4 非结构网格

从图中可以看出，非结构网格中单元格分布不再规则一致，其位置很难再凭借行列索引关系确定。非结构网格可以采用任意形状的单元格，单元边的数目也无限制，弥补了结构化网格不能够解决任意形状和任意连通区域的网格剖分的缺欠。实用上，为简化编程以及贴合边界要求，一般应用四面体、六面体（二维为三角形、四边形）等已经足够拟合天然水域边界。非结构网格最重要的一个特征是控制方程离散得到的代数方程的系数矩阵不再是结构网格下有规律的对角结构；若用对角形式存储，其带宽只能通过适当的布置单元编号顺序来减少。非结构网格原则上可应用于任何类型的数值方法，包括 FDM，但 FEM 和非结构网格上的 FVM 算法更成熟，应用更广。

非结构网格最早用于 FEM，但流体流动是高度非线性问题，而且 FEM 计算量较大，这些问题使得基于 FEM 的非结构网格技术未能在对流问题为主的地面水流（如浅水流动，水波运动等）计算上得到重视。八十年代以来，基于 FVM 的非结构网格技术在空气动力学得到了广泛的发展和应用。九十年代开始一些专家学者根据浅水流动特征，将这些算法引入到计算浅水动力学中，并在模拟涌潮，溃坝等水力计算难题上取得了成功[5]。

与此同时，粘性流动的非结构网格 FVM 模拟也开始出现。并在 20 世纪 90 年代中后期掀起了研究高潮[6]。作为全球计算流体力学软件供应商和技术服务商的 Fluent 公司已经将最新的非结构网格研究成果集成，实现了研究成果的商业化。

非结构网格能很好地模拟自然边界及水下地形，利于边界调节的实现；便于控制网格密度，易作修改和适应性调整；网格生成有众多富有成效的方法和自适应技术[9]，比曲线网格更易得到高质量的单元格。但是非结构网格应用也带来一系列需要解决的问题：单元格排列不规则，须建立相应的数据结构存储单元格信息；控制方程离散得到的代数方程的系数矩阵是高度稀疏的非对角型矩阵，需要寻求合适的存储方式及解法；隐格式较难实现，粘性项处理困难；数值解后处理工作量大；二阶非结构 FVM 较易实现，若要扩展到高阶格式，则需花费较大的代价。

§ 8.2 有限体积法构造

8.9-1 方程离散及基本格式

1 基本思路

与有限差分法不同，有限体积法是基于守恒型的控制方程。这里以一维对流方程为例，说明有限体积法离散的基本思路。一维对流扩散方程的守恒型微分关系式为

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \frac{\partial J(\Gamma)}{\partial x} = S, \quad J(\Gamma) = f(\Gamma) - D \frac{\partial \Gamma}{\partial x} \quad (8-1)$$

其中， $J(\Gamma)$ 为通量项，包括对流项 $f(\Gamma)$ 和扩散项 $D \frac{\partial \Gamma}{\partial x}$ 。

为推导离散化的方程，我们必须事先对计算区域进行网格划分，然后在各个单元上进行积分平均。假设我们对一维计算域划分得到一个网格系统，如图 8-5 所示的为该网格系统中某单元邻接关系示意图。重点考察单元 P，单元 E 和 W 分别为它的两个相邻单元。虚线为单元界面，图中用小写字母表示，界面 e、w 包围形成的阴影部分即为单元 P 的控制体积。控制体积实际是三维体的的概念，只不过在考虑一维控制体积时，实际上把 y、z 两个坐标方向假设成单位厚度，这样在一维问题中看起来成为了线的概念。

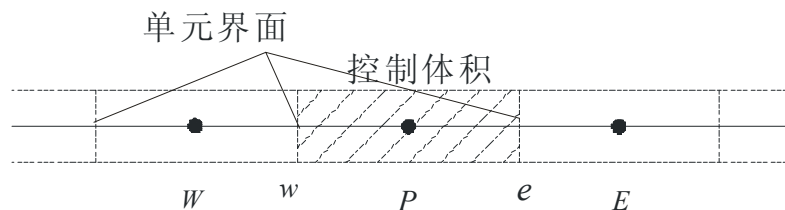


图 8-5 单元邻接关系示意图

如果在单元 P 所在的控制体积上积分控制方程 (8-1)，积分时间间隔从 t_n 到 $t_n + \Delta t$ ，于是可以得到

$$\int_w^e \int_{t_n}^{t_n + \Delta t} \frac{\partial \Gamma}{\partial t} dt dx + \int_{t_n}^{t_n + \Delta t} \int_w^e \frac{\partial J(\Gamma)}{\partial x} dx dt = \bar{S} \Delta t \Delta x \quad (8-2)$$

其中， $\bar{S} = \frac{1}{\Delta t \Delta x} \iint S dt dx$ ，上式左边项的积分顺序按照各项的特性选择。

在离散时间倒数项时，假设单元 P 的值代表整个控制体积的值，即

$$\Gamma_P = \frac{1}{\Delta V} \int_V \Gamma dV$$

相应于该一维问题，有 $\Gamma_P = \frac{1}{\Delta x} \int_w^e \Gamma dx$

故式 (8-2) 中时间倒数项积分可以表示成，

$$\int_w^e \int_{t_n}^{t_n + \Delta t} \frac{\partial \Gamma}{\partial t} dt dx = (\Gamma_P^{n+1} - \Gamma_P^n) \Delta x \quad (8-3)$$

在对流项积分时，需要假定通量或者因变量从 t_n 过渡到 $t_n + \Delta t$ 时间段内的变化关系，这里我们写出一般的时间加权平均的通用表达式：

$$\int_{t_n}^{t_n + \Delta t} \phi dt \approx [(1 - \theta)\phi^n + \theta\phi^{n+1}] \Delta t \quad (8-4)$$

其中，加权系数 $0 \leq \theta \leq 1$ 。

这样，式 (8-2) 中的对流项积分的离散形式可以写成

$$\int_{t_n}^{t_n + \Delta t} \int_w^e \frac{\partial J(\Gamma)}{\partial x} dx dt = [J_e^* - J_w^*] \Delta t \quad (8-5)$$

其中，数值通量 J_e^* 、 J_w^* 分别为 $J_e^*(\Gamma) = (1 - \theta)J_e^n + \theta J_e^{n+1}$ 和 $J_w^*(\Gamma) = (1 - \theta)J_w^n + \theta J_w^{n+1}$ 。

当权系数 $\theta = 0$ 时，导出的离散格式为显格式，当 $0 < \theta \leq 1$ 时为加权隐格式，特别的 $\theta = 1/2$ 为 Crank-Nicholson 格式， $\theta = 1$ 则为全隐格式。

整理得到如下的离散化方程：

$$\Gamma_P^{n+1} = \Gamma_P^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [J_e^* - J_w^*] + \bar{S} \quad (8-6)$$

首先，我们取 $\theta = 0$ ，则有：

$$\Gamma_P^{n+1} = \Gamma_P^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [J_e^n - J_w^n] + \bar{S} \quad (8-7)$$

从中可以看出，新时刻 P 点未知因变量值 Γ_P^{n+1} 和相邻单元新时刻的未知量值 Γ_w^{n+1} 、 Γ_E^{n+1} 无关，可由前一时刻的已知变量值直接求得。因此，一旦确定了边界条件，用显格式就可以通过直接求得新时刻的因变量值，而不需要联立求解方程组。

同样的，取 $0 < \theta \leq 1$ ，代入相应的分量，可以将离散方程归纳成统一的代数方程形式：

$$a_P \Gamma_P^{n+1} = a_E \Gamma_E^{n+1} + a_W \Gamma_W^{n+1} \quad (8-8)$$

类似地，对每个单元积分可得到相应的离散形式的代数方程。最终可以得到一组代数方程。代入边界条件，联立求解代数方程组，从而得到新时刻微分方程的数值解。

2 状态变量分布近似

从前面可以知道，用有限体积法推导离散化方程时，必须确定物理量的局部分布，这是离散过程极为重要的一步，不仅关系到守恒性是否保持，而且关系到算法精度，这是由于不同的状态变量分布对应了不同的离散格式。

最为简单的两种分布如图 8-6 所示，分别为阶梯型（常数）分布（stepwise or piecewise constant）和分段线性分布（piecewise-linear）。

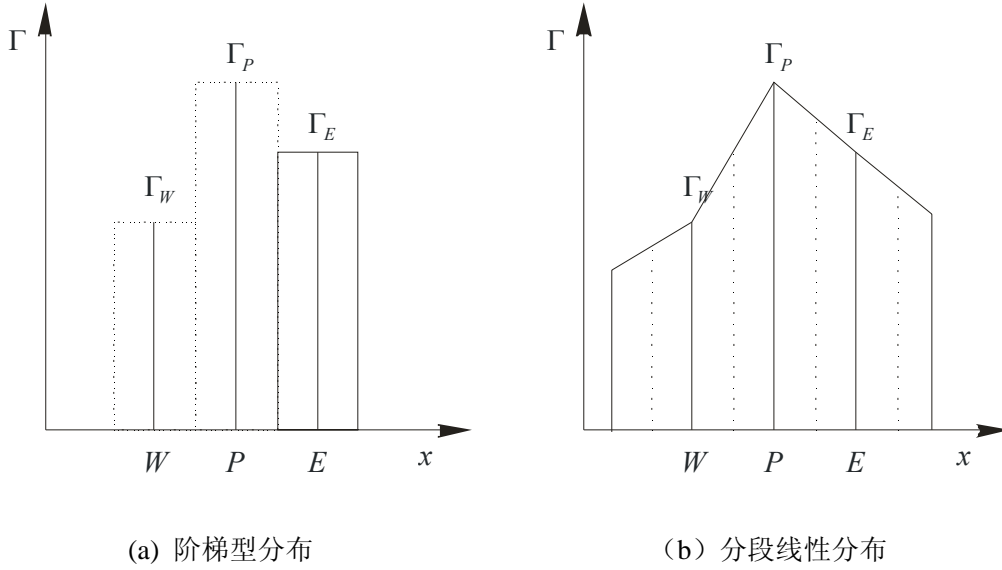


图 8-6 简单分布曲线

对阶梯型分布近似，我们对单元界面 e 处的左（内）右（外）侧状态可以定义如下：

$$\begin{aligned} \Gamma_{e,L} &= \Gamma_P \\ \Gamma_{e,R} &= \Gamma_E \end{aligned}, \quad (8-9)$$

式中，L、R 分别代表单元界面的左（内）侧和右（外）侧。

对分段线性分布，单元界面 e 处的左右侧状态可写成：

$$\begin{aligned} \Gamma_{e,L} &= \Gamma_P + \frac{1}{2} \delta \Gamma_e \\ \Gamma_{e,R} &= \Gamma_E - \frac{1}{2} \delta \Gamma_e \end{aligned} \quad (8-10)$$

式中， $\delta \Gamma_e = \Gamma_E - \Gamma_P$

值得指出的是，在用有限体积法计算时，和有限差分法一样，方程的解是用单元节点上离散点值构成的，而不关心单元间的状态变量是怎么变化的，也就是不关心解的分布。这和有限单元法中一旦选定了分布曲线，就确定了状态变量的分布函数是不同的。尽管我们在离散方程的时候要假定单元分布曲线，但是这只是为了推导公式时计算积分近似而采用的一些辅助关系式。一旦离散化方程推导出来了，就可以不用再管这些分布曲线近似。这种观点使我们在采用何种分布曲线近似方法有完全的自由。在积分离散时，根据数值模拟的需要，对控制方程中的每一项都可以采用不同的分布曲线来近似单元界面上的状态变量，而不必要追求近似假设的一致性。例如，我们用一阶迎风格式离散对流扩散方程时，对流项中因变量是用阶梯型分布近似，而扩散项中也取为阶梯分布的话，则根本导不出离散式，至少要有二阶的分段线性分布才行。上面已经提到，分布曲线近似关系到算法的精度，实际上，有限体积法中，每一种不同的状态变量分布近似，体现了不同的离散格式的几何构造方法。如对流问题中，一阶迎风格式为阶梯型分布，中心格式采用的分段线性分布，更为高阶的格式则需要更多的单元加入，形成复杂的状态变量分布近似关系，例如对流项二次迎风插值 QUICK，分段抛物插值 PPM 等。

3 基本格式

这一小节，我们给出有限体积法中的迎风格式和中心格式的具体形式。考察如下双曲守恒律方程，

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \frac{\partial f(\Gamma)}{\partial x} = 0 \quad (8-11)$$

如图 8-5 所示，利用有限体积法可建立如下的具有守恒形式的显格式离散方程。

$$\Gamma_P^{n+1} = \Gamma_P - \frac{\Delta t}{\Delta x} [f_e^* - f_w^*] \quad (8-12)$$

首先我们推求显式迎风格式的界面状态变量的表达式，令 $a(\Gamma) = \frac{\partial f}{\partial \Gamma}$ ，则有

$$\Gamma_P^{n+1} = \Gamma_P - \frac{\Delta t}{\Delta x} [a_e \Gamma_e - a_w \Gamma_w] \quad (8-13)$$

根据有限差分法中的迎风格式物理机制的介绍，我们可以得到如下的界面取值公式：对单元界面 e，有：

$$a_e > 0, \quad \Gamma_e = \Gamma_{e,L} = \Gamma_P \quad (8-14)$$

$$a_e < 0, \quad \Gamma_e = \Gamma_{e,R} = \Gamma_E \quad (8-15)$$

同样可以得到单元界面 w 的状态变量。实际上，他就相当于恒取上游单元的状态变量值。

而中心格式，则不考虑对流过程的物理本质，直接采用分段线性分布插值得到。其单元界面 e，w 的表达式可以写成：

$$\Gamma_e = \frac{1}{2}(\Gamma_{e,L} + \Gamma_{e,R}) = \frac{1}{2}(\Gamma_P + \Gamma_E) \quad (8-16)$$

$$\Gamma_w = \frac{1}{2}(\Gamma_{w,L} + \Gamma_{w,R}) = \frac{1}{2}(\Gamma_P + \Gamma_W) \quad (8-17)$$

利用这些交界面表达式可以得到具体的离散化的代数方程，这里不在叙述。在这里，我们还可以看出，有限体积法离散的思路和有限差分法的有着本质的区别，有限差分法是应用 Taylor 展开式近似微分控制方程中的导数，而有限体积法则是通过积分将导数项化成交界面的状态变量的表达式，然后，代入根据局部分布近似导出的交界面值得到完整的离散化的代数方程。

对于中心格式和一阶迎风格式的特点和有限差分法的一致。中心格式精度较高，具有二阶精度，但是不能反映对流传输机制。对非线性问题，常会出现非线性不稳定，为了消除该影响，需要添加人工粘性。一阶迎风格式稳定性好，但是数值耗散大。值得强调的是，一阶迎风格式离散思想中蕴涵的物理本质，即波动传波的信息主要来自上游方向，是我们构造高分辨率格式的基础。

8.9-2 物理特性要求

1 守恒性

如果对一个离散方程在定义域的任一有限空间内作求和的运算(相当于连续问题中对微分方程作积分)，所得的表达式满足该区域上物理量守恒的关系时，则称该离散格式具有守恒特征。

我们知道，根据流体运动的不同特征，可以采用拉格朗日 (Lagrange) 法和欧拉 (Euler) 法来描述流体的运动。其中欧拉法着眼于研究固定空间位置上各流体质点运动要素的空间变化情况，在推导流体运动的控制方程时，欧拉法被广为采用。让我们回顾一下连续方程的推导过程，首先在流场中划定一个固定的空间区域作为流体运动的控制体积，考察流体流入、流出该控制体积的情况，利用质量守恒原理，可导出流体运动的连续性方程。其他描述流体中物质(能量)运输的控制方程也可根据各自的守恒律推导出来。在数值计算中，物理量的守恒性也必须得到保证，否则会导致非物理解的产生。因此守恒性成了数值求解过程中非常重要的一个方面。

有限体积法正是从物理量守恒这一基本要求出发提出的。它有两种导出方式[3]，一是控制容积积分法，另一个是控制容积平衡法。不管采用哪种方式导出的离散化方程，都描述了有限各控制容积物理量的守恒性。就像微分方程是表示关于无穷小控制体积内物理量的守恒一样，帕坦卡^[1] (S.V. Patankar) 非常生动的对此作了注解：如果把我们想象成处于微积分以前的时期，控制容积方程就会成为我们表达守恒原理的唯一途径。有限体积法的离散化方程满足了单个控制体积的平衡，当然在整个计算区域内，诸如质量、动量等物理量的积分守恒也就都能精确得到满足。无论在数值计算中采用巨大数目的细网格和少数的粗网格，数值解也照样显示准确的积分平衡。有限体积法的离散思想自动满足守恒定律，如质量守恒，动量守恒，能量守恒等等。所以有限体积法是守恒定律的一种最自然的表现形式。

为了得到守恒型的离散方程，需要满足一定的条件。这里仍以前文导出的全离散的守恒型显格式离散方程 (8-12) 为例。一般对 $l+k+1$ 个单元 (称为节点模板)，守恒型数值通量 J_e^*

$$J_e^* = J(\Gamma_{e,-l}^1, \dots, \Gamma_{e,0}, \dots, \Gamma_{e,k+1}; \Delta t / \Delta x), \quad k, l \geq 0 \quad (8-18)$$

它必需满足以下相容性条件:

$$J^*(\Gamma) = J^*(\Gamma, \dots, \Gamma, \dots, \Gamma; \Delta t / \Delta x) \quad (8-19)$$

守恒格式可以自动算出激波并给出其正确的位置, 因此这种数值方法称为激波捕获法 (shock-capturing method)。如果使用非守恒格式, 则需要有关位置使用局部 Rankine—Hugoniot 条件, 以获得准确的激波位置, 这种方法称为激波拟合法 (shock-fitting method)。

2 迎风性

在有限差分法部分中的基本理论部分, 我们已经深入的讨论了双曲型方程(对流)的特征线概念。特征值体现了微分方程的解(或者说扰动、信息)的传播方向。它既有很强的数学意义, 更反映了问题的物理机制, 表达了波动、能量等的传播方向。这启示我们在理论分析和数值方法的设计上, 应该充分考虑这一物理特性, 与之相适应, 而不可反其道而行之。根据特征(信息)传播方向, 设计得到的数值方法可统称为特征型或迎风型格式。例如前文提到的传统的一阶迎风格式, 尽管非常简单, 却是蕴含了最原始的迎风设计思想, 即在计算单元界面处的数值通量时, 应根据特征传播的方向性, 对于向右传播的分量, 应该使用左边的单元值来计算(因为影响来自左边); 对于向左传播的分量, 应该使用右边的值来计算(因为影响来自右边)。

当前, 这种根据信息传播方向设计数值格式的迎风思想已经成为了流体数值计算发展的重要基石, 它不断地启发研究人员构造出各种各样的离散格式, 如特征迎风格式, 矢通量分裂格式, 通量差分裂格式等。并在这些基于迎风思想的格式基础上, 发展了分门别类的高阶、高分辨率格式, 如 MUSCL 格式、QUICK 格式、ENO (WENO) 格式等等。

3 TVD 性

先讨论双曲守恒律方程 (8-11), 已知其初始值, 可以求得该方程初值问题的解, 则其解 Γ 及其导数 $\frac{\partial \Gamma}{\partial x}$ 是已知的。该方程具有一个非常重要的性质: $\left| \frac{\partial \Gamma}{\partial x} \right|$ 在整个 x 轴上的积分不随时间演进而增大, 该积分量被称为总变差 TV (Total Variation), Lax 给出了它的定义:

$$TV = \int \left| \frac{\partial \Gamma}{\partial x} \right| dx \quad (8-20)$$

对一个物理上有意义的解, TV 不随时间的演进而增加。进行数值计算时, 总变差可以写成

$$TV \equiv \sum_i |u_{i+1} - u_i| \quad (8-21)$$

对任意 n 时刻，总变差均满足以下关系式

$$TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n) \quad (8-22)$$

则我们说该数值算法是总变差减小的 (Total Variation Diminishing, TVD)。从前面的讨论可以看出，如果数值解准确的描述了给定流场的物理特性，该格式就应当满足 TVD。我们称满足总变差减小的数值格式为 TVD 格式。

像激波等具有间断的实际流动问题，并不在间断附近出现波动。可是，许多数值格式求得的数值解都会在间断处产生波动。这些波动完全是因为数学处理不当而产生的。根据前面的讨论，我们可以直观的去判断那些产生数值波动的数值格式都不不具有 TVD 性，因此也不是 TVD 格式。如前面介绍的一阶迎风格式则具有 TVD 性。但是中心格式 (Lax-Wendroff) 和二阶迎风格式都会在间断点处导致虚假数值波动，所以不具有 TVD 性，也就是说不是 TVD 格式。TVD 格式和添加人工粘性的方法是不同的，因为人工粘性只是去压制数值波动而不一定能符合 TVD 要求，它只是相当于过滤波动的功能。

那该如何来准确地判断一个离散格式是否是 TVD 格式。下面给出一个充分条件。

我们可以把式 (8-12) 改写为如下的变差形式

$$\Gamma_p^{n+1} = \Gamma_p - C_w \delta \Gamma_w + D_e \delta \Gamma_e \quad (8-23)$$

Harten 证明了计算格式具有 TVD 性的充分条件，具体如下

$$\begin{cases} C_w \geq 0, & D_e \geq 0 \\ 0 \leq C_w + D_e \leq 1 \end{cases} \quad (8-24)$$

下面我们根据 TVD 格式的充分条件来验证我们前面作出的直观判断。为简单起见，假设

$f(\Gamma) = u\Gamma$ ， $u > 0$ 为常数。

(1) 一阶迎风格式

$$\Gamma_p^{n+1} = \Gamma_p - c(\Gamma_p - \Gamma_w), \quad c = u \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (8-25)$$

其数值通量

$$f_e^* = \frac{1}{2} [f(\Gamma_p^n) + f(\Gamma_E^n)] - \frac{1}{2} u (\Gamma_E^n - \Gamma_P^n) \quad (8-26)$$

满足相容性条件，即 $f_e^*(\Gamma) = f(\Gamma)$

该格式已经是变差形式。在 CFL 条件下，即 $c = u \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ ，其系数 $C_w = c > 0$ ； $D_e = 0$ ；

且 $0 \leq C_w + D_e = c \leq 1$ 。根据前面提到的充分条件，可以得出该格式是 TVD 格式。

(2) Lax-Wendroff 格式

$$\Gamma_P^{n+1} = \Gamma_P - \frac{c}{2}(\Gamma_E - \Gamma_W) + \frac{c^2}{2}(\Gamma_E - 2\Gamma_P + \Gamma_W) \quad (8-27)$$

其数值通量为

$$f_e^* = \frac{1}{2}[f(\Gamma_P^n) + f(\Gamma_E^n)] - \frac{1}{2}cA_e^n(\Gamma_E^n - \Gamma_P^n) \quad (8-28)$$

也是相容的。

将式 (8-27) 写成变差形式，得到

$$\Gamma_P^{n+1} = \Gamma_P - \frac{1}{2}(c + c^2)\delta\Gamma_w^n + \frac{1}{2}(c^2 - c)\delta\Gamma_e^n \quad (8-29)$$

在 CFL 条件下， $D_e = \frac{1}{2}(c^2 - c) \leq 0$ ，不满足 TVD 条件。

既要利用格式的高阶精度，又能使格式具有 TVD 性质，从而求得高精度的物理上有意义的解，是研究人员的目标，为此，过去的二十几年中，各种二阶（甚至更高阶）的 TVD 格式得到了大量的发展。这类高阶 TVD 格式开发应用成为了计算流体力学界最前沿的研究。

8.9-3 迎风型通量格式

对于双曲型问题，不同特征分量传播的方向不同。考虑传播方向的影响从物理上分析更为合理。我们对传统的一阶迎风格式已经作了介绍。这里我们将介绍 20 世纪 80 年代发展起来的通量向量分裂格式 (Flux Vector Splitting)，通量差分裂格式 (Flux Difference Splitting) 以及 Godunov 法和近似黎曼解算子法 (Approximate Riemann Solvers)。

1 矩阵分裂

实际流动的控制方程是一个非线性系统，各个变量之间相互耦合。我们这里考虑一维的双曲型方程组

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0 \quad (8-30)$$

式中, U 为守恒型的物理量, $F(U)$ 为物理通量, $A(U) = \frac{\partial F(U)}{\partial U}$ 为通量函数 F 的 Jacobian 矩阵。由于方程组的双曲性, $A(U)$ 的特征值均为实数, 且具有线性无关的特征向量完备集。

根据双曲性定义, $F(U)$ 可以对角化。设 T 为相似矩阵, 根据相似变换, 有对角矩阵 Λ

$$\Lambda = T^{-1}A(U)T \quad (8-31)$$

T 的各列由 $A(U)$ 的右特征向量组成。该对角矩阵 Λ 就是特征矩阵, 其对角线上的元素即为其特征值 λ_k , 即

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_m \end{bmatrix}, \text{ 记为 } \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m)$$

计算实践表明, 利用矩阵 $A(U)$ 的特征值来分裂矩阵是很有意义的。通常是将矩阵特征值分裂成两项和的形式, 即

$$\lambda_k = \lambda_k^+ + \lambda_k^-, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (8-32)$$

其中 $\lambda_k^+ = \frac{1}{2}(\lambda_k + |\lambda_k|)$ 表示数值为正的 eigenvalue, $\lambda_k^- = \frac{1}{2}(\lambda_k - |\lambda_k|)$ 为数值为负的特征值。这种分裂方法实际上是按照物理上的信息传播方向进行分裂, 从而便于按波传播方向取相应的离散格式, 利用分裂后的量 λ_k^\pm 可以构造相应的对角矩阵 Λ^+ 和 Λ^- :

$$\Lambda^\pm = \text{diag}(\lambda_1^\pm, \lambda_2^\pm, \cdots, \lambda_m^\pm) \quad (8-33)$$

相应的矩阵 A^+ 和 A^- 可以写成:

$$A^\pm = T\Lambda^\pm T^{-1} \quad (8-34)$$

根据 λ_k^\pm 的定义, 关系式 $A = A^+ + A^-$ 成立。

2 通量向量分裂格式 (FVS)

Steger 和 Warming 根据矩阵分裂方法, 于 1981 年首次提出了一种通量向量分裂格式。最早该格式应用于空气动力学计算上, 20 世纪 90 年代, 开始扩展到计算水力学领域。

空气动力学上, 欧拉方程中的通量项满足下述的齐次关系式,

$$F(U) = AU \quad (8-35)$$

因此，根据关系式 $A = A^+ + A^-$ 可以得到

$$F(U) = A^+U + A^-U = F^+ + F^- \quad (8-36)$$

这里，上标 ‘+’ 和 ‘-’ 分别相应于正、负特征值。 $F^+ = A^+U$ 代表向右传播的信息，只影响右边的点， $F^- = A^-U$ 代表向左传播的信息，只影响左边的点。这样我们可以写出相应的通量向量分裂格式为

$$U_P^{n+1} = U_P - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_P^+ - F_W^+ + F_E^- - F_P^-) \quad (8-37)$$

尽管上述通量向量分裂格式的基本原理十分简单，但当某“特征值为 0 时，很难把它当作向右还是向左传播处理。如果简单把它看作为 0，则计算时会出现其他问题(不稳定、不收敛、给出错误的弱解)这种特殊情况的处理导致了大量不同通量向量分裂格式的出现。最著名的有 Steger 和 Warming (1981) 通量向量分裂格式，Van Leer (1982) 通量向量分裂格式。读者想进一步了解可阅读相关文献。

在把通量向量格式应用到水力学中时，仍需要注意方程组的特性。因为水流运动的控制方程——圣维南 (Saint Venant) 方程组的通量项不具有齐次性，需要补充一个冗余的能量方程得到具有齐次通量的方程组，然后就可以按照前面的方法建立离散化方程。

3 通量差分裂格式 (FDS)

通量向量分裂格式是将通量函数按不同特征方向进行分裂，然后积分离散。与通量向量分裂格式不同，通量差分裂格式是对任意区间上通量函数的差进行分裂的。

在通量差分裂中，我们力图寻找矩阵 $\tilde{A}(U_L, U_R)$ ，使得在交界面处守恒物理量的差 $\Delta U_e = U_R - U_L$ 和通量差 $\Delta F_e = F_R - F_L$ 之间拥有一个满足守恒条件的线性关系式，即

$$\Delta F_e = \tilde{A}_e \Delta U_e \quad (8-38)$$

这里，矩阵 $\tilde{A} = \tilde{A}(U_L, U_R)$ 为常数矩阵，称为 Jacobian 矩阵 A 的 Roe 平均矩阵，它具有以下性质：

- (1) $F_R - F_L = \tilde{A}_e (U_R - U_L)$
- (2) $\tilde{A}_e(U) = \tilde{A}_e(U, U)$
- (3) \tilde{A}_e 有实的特征根和完备的线性无关的特征向量组

引入该矩阵的目的是让原来的非线性偏微分方程对于简单的间断等价于下面的可以直接求解的线性方程

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \tilde{A} \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (8-39)$$

上述的几条性质被称为 U 特性。其中，第一条性质针对的是满足 Rankine- Hugoniot 条件的间断解；第二条性质属于一种光滑性要求，即如果空间分布为常数时，线性方程（8-39）完全等价于 $\Delta F_e = \tilde{A}_e \Delta U_e$ ；第三条性质是为了保证问题的双曲性不变。设非线性问题间断的移动速度为 s ，于是 Rankine-Hugoniot 条件可以表示为

$$F_R - F_L = s(U_R - U_L) \quad (8-40)$$

代入第一条性质，有

$$\tilde{A}_e(U_R - U_L) = s(U_R - U_L) \quad (8-41)$$

因此，原非线性偏微分方程的精确解确实是 \tilde{A}_e 的特征矢量； s 为 \tilde{A}_e 的特征值，也就是说，原方程的简单间断解与线性方程（8-39）的解是等价的。

将 \tilde{A} 分裂成两正部和负部，有

$$\tilde{A} = \tilde{A}^+ + \tilde{A}^- \quad (8-42)$$

从而有

$$\delta F = \tilde{A}^+ \delta U + \tilde{A}^- \delta U \quad (8-43)$$

这里 δ 表示差分。上式右边第一项代表向右传播的扰动，只对右边的点发生影响。右边第二项代表向左传播的扰动，只对左边的点发生影响。以此构造的 Roe 格式为

$$U_P^{n+1} = U_P^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[(\tilde{A}^- \delta U)_e^n + (\tilde{A}^+ \delta U)_w^n \right] \quad (8-44)$$

这里 $\delta U_e = U_E - U_P$ ，考虑到

$$\tilde{A}^- = \frac{1}{2}(\tilde{A}_R - |\tilde{A}_R|), \quad \tilde{A}^+ = \frac{1}{2}(\tilde{A}_R + |\tilde{A}_R|)$$

$$\tilde{A}_e(U_E - U_P) = F_E - F_P, \quad \tilde{A}_w(U_P - U_W) = F_P - F_W$$

因此，Roe 格式也可以写成

$$U_P^{n+1} = U_P^n - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_E - F_W) + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\tilde{A}|_e (U_E - U_P) - \tilde{A}|_w (U_P - U_W) \right] \quad (8-45)$$

写成守恒形式，则相应的数值通量为

$$F_e^* = \frac{1}{2}(F_P + F_E) + \frac{1}{2} \tilde{A}|_e (U_E - U_P) \quad (8-46)$$

4 Godunov 格式和近似黎曼解法

在分段常数分布近似下，单元界面处的左右状态分别为： U_L 和 U_R 。如果左右状态不

同，则该界面处构成了一个局部黎曼问题。假设所考虑问题的时间间隔 Δt 足够小，其余单元的信息尚未传播到所考察的界面。在单元界面处可以按以下局部黎曼问题

$$U(x, t_n) = \begin{cases} U_L, & x < x_e \\ U_R, & x > x_e \end{cases} \quad (8-47)$$

求得界面处的状态变量值 $U_e^* = U_e(x, t_n + \Delta t)$ ，代入通量函数表达式，得到通量表达式

$$F_e^*(U_L, U_R) = F_e^*(U_e^*) \quad (8-48)$$

这就是著名的 Godunov 格式。

它是一阶精度的格式，Van Leer 利用分段线性近似代替分段常数近似导出了二阶精度的 Godunov 格式。

Godunov 格式需要求解黎曼问题的精确解，计算工作量比较大，难以推广到多维问题求解。因此，往往使用近似黎曼解。首先，将方程线性化，

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \tilde{A} \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (8-49)$$

这里 \tilde{A} 为 Jacobian 矩阵 $A(U_L)$ 和 $A(U_R)$ 的某种平均，如 Roe 平均。对于上述线性方程的黎曼问题可以直接求得，以通量函数为例，上述黎曼问题的解为

$$\begin{aligned} F_e^*(U_L, U_R) &= F(U_L) + (\tilde{A}^- \delta U)_e \\ &= F(U_R) - (\tilde{A}^+ \delta U)_e \\ &= \frac{F(U_L) + F(U_R)}{2} - \frac{1}{2} (\tilde{A} |\delta U|)_e \end{aligned} \quad (8-50)$$

如果使用前面一节提到的 Roe 平均，则得到前面所述的 Roe 格式。Osher 采用了积分平均的方法

$$\tilde{A}(U_L, U_R) = \int_{U_L}^{U_R} |A(U)| dU \quad (8-51)$$

相应地，Osher 格式的数值通量为

$$F_e^*(U_L, U_R) = \frac{F(U_L) + F(U_R)}{2} - \frac{1}{2} \int_{U_L}^{U_R} |A(U)| dU \quad (8-52)$$

8.9-3 TVD 格式

在前文讨论中，我们已经知道，满足 TVD 特性的格式求出的数值解才是真正符合实际的物理解。然而，一阶迎风格式尽管具有 TVD 性，但是数值耗散过大，将本来应该很陡峭的激波给抹得很平。为了在解光滑的区域获得较高精度的解，并且在激波等间断区域获得没有数值振荡或者是数值振荡可以令人接受的较陡峭的数值解，人们开始研究高分辨格式

(High Resolution schemes)。1983 年 Harten 在他的论文中提出了高分辨率和总变差减少的概念，首先证明了计算格式具有 TVD 性质的充分条件，具体构造了修正通量的高分辨率（二阶）TVD 格式。他的成果在数值算法的研究上具有十分重要的意义，为构造和分析高分辨率格式提供了有力的工具。随后，各种各样的 TVD 格式如雨后春笋般的涌现出来，因其具有对间断的自动高分辨识别能力，而得到了广泛的应用。这种格式具有两个特点：（1）

对标量非线性方程及常系数双曲型方程组，格式的解是总变差递减的（Total Variation Diminishing）；（2）与守恒律和熵不等式是相容的。TVD 格式提高了对激波的捕捉能力，但其不足之处在极值点上格式只有一阶逼近精度。

1 高阶 TVD 格式的构造

常用构造高分辨率 TVD 格式的途径有：Harten 的通量修正法，反扩散通量方法，Van Leer 的 MUSCL 方法，张涵信的 NND 格式等等。根据原始格式的形式以及反扩散通量（数值耗散项）采用差分格式的差，我们又可以把 TVD 格式分成两大类：一是迎风型（Upwind）格式，它是由迎风格式加带限制器的修正项构成的，而且数值耗散项是用迎风加权形式来构造的；另一个是对称（Symmetric）TVD 格式，它由中心格式（如 Lax-Wendroff 格式，McCormack 格式）加带限制器的修正项构成的，其数值耗散项是中心加权的。虽然迎风格式也可以表示成中心格式加上数值耗散项的形式，但是该数值耗散和特征传播方向有关，是迎风加权的。

我们还是以双曲型守恒律方程（8-11）为例，我们可以得到具有守恒形式的显格式离散方程（8-12）。对一阶迎风格式，其数值通量为

$$f_e^* = \frac{1}{2} [f(\Gamma_P^n) + f(\Gamma_E^n)] - \frac{1}{2} u (\Gamma_E^n - \Gamma_P^n) \quad (8-53)$$

对中心差分的 Lax-Wendroff 格式，其数值通量为

$$f_e^* = \frac{1}{2} [f(\Gamma_P^n) + f(\Gamma_E^n)] - \frac{1}{2} c A_e^n (\Gamma_E^n - \Gamma_P^n) \quad (8-54)$$

一阶迎风格式内含的数值粘性（又称耗散）很大，激波分辨率差，在解均匀的区域精度低，而中心差分的 Lax-Wendroff 格式在解均匀的区域精度高，但在间断附近出现伪振荡。我们想结合两者的优点构造出具有高分辨率的 TVD 格式。这里简单介绍 Harten 构造高分辨率 TVD 格式。它通过修正通量，消除一阶迎风格式中过大的人工粘性，从而使计算格式在光滑区域达到二阶精度。

我们知道，一阶迎风格式实际上求解的是如下相容方程：

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \frac{\partial f(\Gamma)}{\partial x} = \Delta x \frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma \frac{\partial \Gamma}{\partial x} \right) \quad (8-55)$$

也就是说，方程（8-11）的一阶精度的迎分格式实际上等价于对式（8-55）的二阶精度离散。

为了复原原始方程的特性，修正通量项 f 使有

$$\tilde{f} = f + g \quad (8-56)$$

$$g = \Delta x \frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma \frac{\partial \Gamma}{\partial x} \right) + O((\Delta x)^2) \quad (8-57)$$

那么，如果我们采用一阶迎分格式离散下面的方程

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{f}(\Gamma)}{\partial x} = \frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \frac{\partial (f(\Gamma) + g(\Gamma))}{\partial x} = 0 \quad (8-58)$$

实际上就相当于消去了方程（8-11）用一阶迎风格式离散引入的人工粘性项，从而使我们对方程（8-11）的二阶精度离散。这样的 g 被称为反扩散通量，上述方法应用实际

上就是所谓的人工压缩法的体现。为了达到获取高分辨率物理解的目的，通常要求构造的通量函数 g 能使修正通量后方程的一阶迎分格式是 TVD 的，而且除在极值点外，格式应该有二阶精度。上面的过程虽然有点绕，但是很值得读者去揣摩。

根据这一思想，Harten 提出了修正通量法的 TVD 格式，其数值通量写成如下形式：

$$f_e^* = \frac{1}{2}[\tilde{f}_P + \tilde{f}_E] - \frac{1}{2}\psi(\tilde{a})\delta\Gamma_e^n \quad (8-59)$$

其中， f 为修正后的数值通量；

$$\tilde{f}_P = f_P + g_P$$

$$\tilde{a}_e = a_e + \alpha_e$$

$$g_P = \min \text{mod}[\gamma(\alpha_e)\delta\Gamma_e, \gamma(\alpha_w)\delta\Gamma_w]$$

$$\gamma(z) = \frac{1}{2}[\psi(z) - \lambda z^2], \quad \lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

$$\psi(z) = \begin{cases} |z| & |z| \geq \delta \\ \frac{1}{2}(\varepsilon + \frac{z^2}{\varepsilon}) & |z| \leq \delta \end{cases}$$

$$a_e = \frac{\Delta f_e}{\Delta\Gamma_e} = \frac{f_E - f_P}{\Gamma_E - \Gamma_P},$$

$$\alpha_e = \begin{cases} \frac{\Delta g_e}{\Delta\Gamma_e} = \frac{g_E - g_P}{\Gamma_E - \Gamma_P} & \Gamma_E \neq \Gamma_P \\ 0 & \Gamma_E = \Gamma_P \end{cases}$$

$$\min \text{mod}(x, y) = \frac{1}{2}(\text{sign}(x) + \text{sign}(y)) \min\{|x|, |y|\}$$

对于限制函数，其形式也是多种多样，我们将放在下一小节讨论。

Harten 的 TVD 格式是空间二阶精度的，而且能在极值点处自动退化为一阶精度以准确地捕捉间断。通常二阶 TVD 格式都具有这种特性，故二阶 TVD 格式是非线性的，即使对常系数方程也是如此。

2 通量限制函数

为了使离散化方程满足 TVD 性，同时又能自动高分辨率的捕捉间断解，我们找到了一个非线性函数 $\varphi(r)$ ，这个函数被称为通量限制器（flux limiter）。引入通量限制器，实际上是对格式进行数值耗散的自适应调节，也就是能够自适应地进行格式数值效应（耗散、色散）的调节，保持格式的单调性，以达到真正对解的间断和大梯度的地方给出尖锐的图像。即如果未知函数的离散近似解有很大的梯度或振幅趋势，它可以适时地加强数值粘性，达到比较合理的程度；反之，在比较平缓的时候可以降低数值耗散，甚至局部引入反耗散机制，从而达到间断数值解的高分辨率。

一般地说，对于通量限制器的要求为

$$\varphi(r) = \begin{cases} \geq 0 & r \geq 0 \\ = 0 & r < 0 \\ = 1 & r = 1 \end{cases} \quad (8-60)$$

为了保持单调和 TVD 性，要求

$$\begin{cases} 0 \leq \varphi(r) \leq 2r \\ 0 \leq \left(\varphi(r), \frac{\varphi(r)}{r} \right) \leq 2 \end{cases} \quad (8-61)$$

同时为了对向前、向后梯度同等处理，常要求 $\varphi(r)$ 具有对称性，即满足

$$\frac{\varphi(r)}{r} = \varphi\left(\frac{1}{r}\right) \quad (8-62)$$

总之，当 $\varphi(r)$ 满足式(4-31)，且 $r > 0$ 时，它的图形落在图 8-7 中的阴影区域内，就可保证格式是二阶 TVD 格式。在允许区域内（即图 8-7 中的阴影区域）选取不同的非线性限制函数 $\varphi(r)$ ，就建立起不同性能的格式。

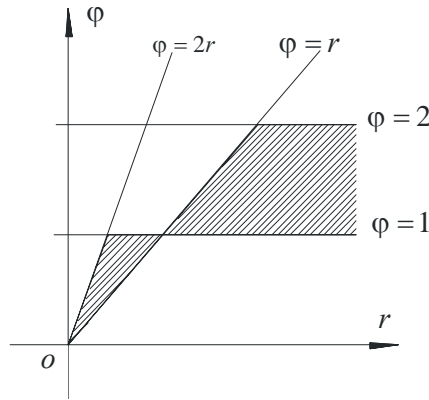


图 8-7 限制器 $\varphi(r)$ 的要求

下面，我们介绍几种二阶 TVD 格式常用的限制器：

(1) Roe minmod (1970 年)

$$\varphi(r) = \min \text{mod}[0, \min(1, r)] = \begin{cases} 0, & \text{当 } r \leq 0, \\ r, & \text{当 } 0 < r < 1, \\ 1, & \text{当 } 1 \leq r, \end{cases} \quad (8-65)$$

(2) Roe Superbee (1985 年)

$$\varphi(r) = \max[0, \min(2r, 1), \min(r, 2)] = \begin{cases} 0, & \text{当 } r \leq 0 \\ 2r, & \text{当 } 0 < r \leq \frac{1}{2} \\ 1, & \text{当 } \frac{1}{2} < r \leq 1 \\ r, & \text{当 } 1 < r \leq 2 \\ 2, & \text{当 } 2 < r \end{cases} \quad (8-66)$$

(3) Van Leer monotonic(1974 年)

$$\varphi(r) = \frac{|r| + r}{|r| + 1} = \begin{cases} 0, & \text{当 } r \leq 0 \\ \frac{2r}{r+1}, & \text{当 } r > 0 \end{cases} \quad (8-63)$$

该限制器是单调递增的且具有对称特性。

(4) Van Leer MUSCL

$$\varphi(r) = \max(0, \min(2, 2r, 0.5(1+r))) \quad (8-64)$$

(5) Chakravarthy - Osher (1983 年)

$$\varphi(r) = \max[0, \min(r, \psi)] = \begin{cases} 0, & \text{当 } r \leq 0 \\ r, & \text{当 } 0 < r \leq \psi \\ \psi, & \text{当 } \psi < r \end{cases} \quad (8-67)$$

其中 ψ 取 $1 < \psi \leq 2$ 。该限制器不满足对称性条件。

许多理论分析和数值实验已经证明了 Superbee 限制函数在数值耗散效应上是最弱的，Var Leer 次之，Minmod 而是最强的。但是 Superbee 数值色散性最强，Minmod 数值色散性最弱。因此，通常 Superbee 给出一个较陡的剖面图，Minmod 产生一个相对平坦的剖面图，Var Leer 的居中。使用时我们可以根据不同需要来选择它们。

对于非线性守恒方程常采用双参数 $\varphi(r^-, r^+)$ 的限制器：

$$\varphi(r^-, r^+)_{j+\frac{1}{2}} = \varphi\left(r_{j+\frac{1}{2}}^-, r_{j+\frac{1}{2}}^+\right) \quad (8-68)$$

其中 $r_{j+\frac{1}{2}}^- = \frac{\Delta u_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta u_{j+\frac{1}{2}}}$, $r_{j+\frac{1}{2}}^+ = \frac{\Delta u_{j+\frac{3}{2}}}{\Delta u_{j+\frac{1}{2}}}$ ，这里 $\varphi(r^-, r^+)$ 具有中心对称的形式。双参数限制器

可使自适应耗散效果调节起来更灵活，并带有开关的作用，具有复杂灵敏的形式，例如：

Yee minmod 型：

$$\varphi(r^-, r^+) = \min \text{mod}(1, r^-) + \min \text{mod}(1, r^+) - 1 \quad (8-69)$$

Yee MUSCL 型：

$$\varphi(r^-, r^+) = \max(0, \min(2, 2r^-, 2r^+, 0.5(r^- + r^+))) \quad (8-70)$$

§ 8.3 非结构网格上的有限体积法

前面主要对有限体积法基本概念和离散格式作了介绍。在这节中，我们将介绍二维非结构网格上的有限体积法，以便于应用它来模拟自然中复杂区域内的流动及物质输运现象。本节只对算法的空间离散进行讨论，因为时间的离散和有限差分法一致，因此，不在专门介绍。

8.3.1 基本方程

浅水方程和 N-S 方程是水动力学计算上常用的控制方程，另外作为物质输运的对流扩散方程也是我们要面对的。为了统一起见，将方程写成为如下的向量形式的守恒型方程

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{S} \quad (8-71)$$

其中， \mathbf{U} 为守恒量向量， $\mathbf{F} = [\mathbf{F}_x, \mathbf{F}_y]$ 为通量向量， \mathbf{S} 为源项向量
对二维浅水方程和物质输运方程的方程系统，有

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} h \\ hu \\ hv \\ hc \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_x = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{gh^2}{2} \\ huv \\ huC_i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_y = \begin{pmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{gh^2}{2} \\ hvC_i \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ gh(S_{0x} - S_{fx}) \\ gh(S_{0y} - S_{fy}) \\ \sum D_i (\nabla h C_i)_n L^j + S_i - A \cdot K_{Ci} h C_i \end{pmatrix}$$

其中， h 为水深， u 、 v 分别为 x 和 y 向的平均流， \mathbf{F}_x 为 x 向通量向量， \mathbf{F}_y 为 y 向通量向量，

\mathbf{S} 为源项向量， $S_{0x} = -\frac{\partial z_b}{\partial x}$ ，为 x 向的水底底坡； $S_{0y} = -\frac{\partial z_b}{\partial y}$ ，为 y 向的水底底坡；

$$S_{fx} = \frac{\rho u \sqrt{u^2 + v^2}}{h C^2} = \frac{\rho n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}}, \quad \text{为 } x \text{ 向的摩阻底坡；}$$

$$S_{fy} = \frac{\rho v \sqrt{u^2 + v^2}}{h C^2} = \frac{\rho n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}}, \quad \text{为 } y \text{ 向的摩阻底坡}$$

C_i 为污染物 (COD, NBOD, CBOD, NH₃-N, DO 及水温) 的垂线平均浓度， D_{ix} 、 D_{iy} 分别为 x 向和 y 向各污染物的扩散系数， K_G 是各污染物综合降阶系数， S_i 为各污染物源汇项。

N-S 方程求解时，更为普遍的是采用以下守恒型方程

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} \phi = \nabla \cdot D \text{grad} \phi + S_\phi \quad (8-72)$$

其中， ρ 为流体密度； ϕ 通用变量，如速度 \mathbf{u} 等； D 为扩散系数； S_ϕ 为源项

记 $\mathbf{F}(\phi) = \rho \mathbf{u} \phi - D \text{grad} \phi$ ，则上式又可写成

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\phi) + S_\phi \quad (8-73)$$

和前面式 (8-72) 的形式相比，只是把粘性项（扩散通量）并入到对流通量中。这样，对系统方程 ϕ 等价于 \mathbf{U} 的第 i 个分量 U_i ， $\mathbf{F}(\phi)$ 等价于通量向量 \mathbf{F} 第 i 个的分量 F_i 。这样可以统一成守恒律方程组 (8-71) 的形式，只是通量项和原来相比，多了扩散通量项。

8.3.2 离散基本思路

如图 8-8，为有限体积法中某相邻两单元网格示意图。P、E 为控制体积中心，单元 P、E 交界面为 e 。辅助点 P'、E' 连线通过中心线，作用见后文叙述。

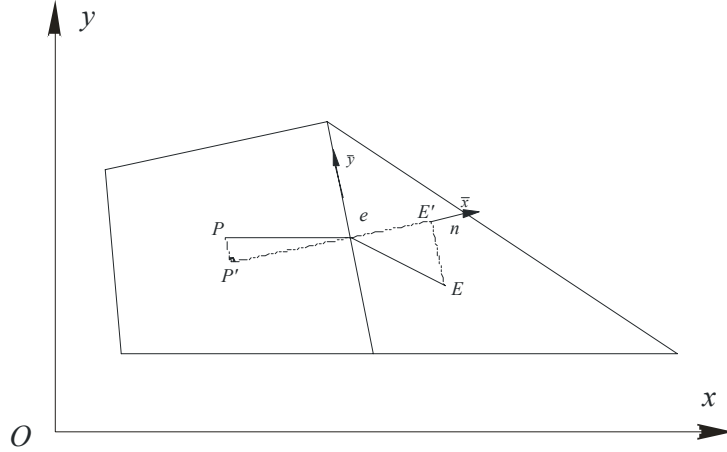


图 8-8 二维非结构网格控制体积

先对方程在任意控制体积 CV（其边界为 A ）作体积分，利用高斯定理将体积分化成面积分。可得到有限体积法（FVM）的基本方程，写成：

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \mathbf{U} dV = - \int_A \mathbf{F}(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{n} dA + \int_V S dV \quad (8-74)$$

式中， \mathbf{n} 为单元边界 A 的外法向单位向量， dA 为面积分微元， dV 为体积分微元， $\mathbf{F}(\phi) \cdot \mathbf{n}$ 为法向数值通量。

对控制体单元取平均后，可得到有限体积法的半离散化方程为

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = - \frac{1}{\Delta V} \sum_{j=1}^m \mathbf{F}_{n,j} A_j + \bar{S} \quad (8-75)$$

其中 ΔV 为单元体积， m 为单元面总数， A_j 为单元面 j 的面积， \bar{S} 为单元的源项平均值，

单元面 j 的法向通量为 $\mathbf{F}_{n,j} = \mathbf{F}_j(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{n}$ ，包括对流通量 \mathbf{F}_n^c 和扩散通量 \mathbf{F}_n^d 。

如果方程中 \mathbf{F}_x 及 \mathbf{F}_y 具有旋转不变性，因此 $\mathbf{F}_x(\mathbf{U})$ 与 $\mathbf{F}_y(\mathbf{U})$ 在法向上的投影，可以转换为先投影 \mathbf{U} 到法向上，即满足关系：

$$\mathbf{T}(\theta)\mathbf{F}_n(\mathbf{U}) = \mathbf{F}(\mathbf{T}(\theta)\mathbf{U}) = \mathbf{F}(\bar{\mathbf{U}}) \quad (8-76)$$

$$\text{或, } \mathbf{F}_n(\mathbf{U}) = \mathbf{T}(\theta)^{-1}\mathbf{F}(\bar{\mathbf{U}}) \quad (8-77)$$

式中， $\bar{\mathbf{U}} = \mathbf{T}(\theta)^{-1}\mathbf{U}$ ，即将 \mathbf{U} 投影到外法向 \mathbf{n} 得到的矢量，其分量分别沿控制体边界的法向和切向；其中水深不变，而流速分别变换为法向 \mathbf{n} 和切向 $\boldsymbol{\tau}$ 的流速。所以，先将 \mathbf{U} 投影到法向 \mathbf{n} 得到 $\bar{\mathbf{U}}$ ，即 $\bar{\mathbf{U}} = \mathbf{T}(\theta)^{-1}\mathbf{U}$ ，再将 $\bar{\mathbf{U}}$ 代入 \mathbf{F} 得到 $\mathbf{F}(\bar{\mathbf{U}})$ ；再由式(8-77)可进一步得到 $\mathbf{F}_n(\mathbf{U})$ 。这样，将原来的二维问题转化为一维问题，即只需计算 $\mathbf{F}(\bar{\mathbf{U}})$ ，大大简化了计算提高了效率。式(8-76)和(8-77)中 $\mathbf{T}(\theta)$ 的是坐标旋转角 θ 的变换矩阵， $\mathbf{T}(\theta)^{-1}$ 是 $\mathbf{T}(\theta)$ 的逆矩阵，如下所示：

$$\mathbf{T}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (8-78)$$

$$\mathbf{T}(\theta)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (8-79)$$

将式(8-77)代入式(8-75)就可得到经旋转变换后的有限体积法半离散化方程式

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = -\frac{1}{\Delta V} \sum_{j=1}^m \mathbf{T}(\theta)^{-1} \mathbf{F}_j(\bar{\mathbf{U}}) A_j + \bar{\mathbf{S}} \quad (8-80)$$

方程（8-75）和（8-80）是等价的，都是有限体积法离散的基本方程，不管方程采用那一方程形式，最终都要求估算法向数值通量。只不过后一方程为我们提供了一条把二维问题法向通量计算转化为求解一维局部坐标系下的黎曼问题的变换途径，使得确定数值通量更为便捷。

8.3.3 数值通量近似

下面将分别讨论数值通量的近似。

1 对流通量

在有限体积法中，估算界面处数值通量有两种不同的思路：一种是传统的思想（如

Patankar 提出的方法), 先假设物理量的分布曲线, 插值求得界面状态变量值, 并把该值代入通量表达式求得数值通量, 它隐含了界面处的变量是连续的要求。另外一种则是基于间断的思想, 函数值在所有单元界面处都是间断, 也就是说不连续的。根据这一思想, 在每个单元界面处均可以形成一个黎曼问题, 然后求解该黎曼问题得到单元界面的数值通量。黎曼问题是解决不连续物理问题的数学描述方程, 是设计高解析度数值方法的核心。

(1) 传统方法

在水流运动及其内部物质输运的控制方程, 我们都可以把对流项写成如下表达式:

$$F_e^c = \int_A \mathbf{F}(\phi) \cdot \mathbf{n} dA = (\rho \mathbf{u}_n)_e \phi_e \quad (8-81)$$

式中, 对浅水方程而言 ρ 代表水深 h 。质量通量项 $(\rho \mathbf{u}_n)_e$ 根据相应界面状态变量的插值方法求得。

单元界面处状态变量的值 ϕ_e 则取决于采用对流项的离散格式, 常见的格式有:

一阶迎风格式

$$\phi_e = \phi_u \quad (8-82)$$

式中, 下标 u 代表迎风单元。

一阶迎风格式数值耗散过大。为此, 可采用重构技巧构造二阶迎风格式, 其界面值 ϕ_e 由迎风单元直接线性插值得到,

$$\phi_e = \phi_u + (\mathbf{grad} \phi)_u \cdot \mathbf{dr} \quad (8-83)$$

式中, 下标 u 代表迎风单元; \mathbf{dr} 为从迎风单元中心至单元面的距离矢量。

(2) 解黎曼问题法

解黎曼问题法, 把单元界面两侧状态按间断思想来处理, 体现了数值求解离散化的本质, 使有限体积法的适用性和有效性大为增强。

首先建立局部 $\bar{x} - \bar{y}$ 坐标系中沿 \bar{x} 轴 (即边界的外法向) 的一个一维黎曼问题。其目的在于求解如下的黎曼问题以得到界面处的数值通量:

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\bar{U})}{\partial \bar{x}} = 0 \quad (8-84)$$

其中

$$\bar{U}(\bar{x}, 0) = \begin{cases} \bar{U}_L; & \bar{x} < 0 \\ \bar{U}_R; & \bar{x} > 0 \end{cases} \quad (8-85)$$

式中 \bar{x} 为单元交界面上法向量 \mathbf{n} 的坐标 (图 8-8), 此坐标系中以交界面中央点为原点。 \bar{U} 是 \mathbf{q} 在法向的投影, \bar{U}_L 及 \bar{U}_R 分别为单元交界面左 (内) 右 (外) 两侧的因变量。假设初始值 $\bar{U}(t=0)$ 已知, 那么求解该黎曼问题, 可以得到 $t=0^+$ 时刻 $\bar{x}=0$ (界面) 处的

$\mathbf{F}(\bar{U}_L, \bar{U}_R)$ 。通过旋转逆变换可以给出原始坐标系 $x-y$ 下的法向数值通量 \mathbf{F}_{LR} 。

上述求解该问题的思路是由 Godunov 提出来的。他最初采用黎曼问题准确解来估算，Roe 等提出的各类近似黎曼解法极大地推动了该算法思想的发展和完善。但是对于该黎曼问题的数值通量采用何种形式来近似则完全没有必要去作什么限制，可以采用前面介绍的各种格式如 TVD 格式，FVS 格式等等，只不过在数值精度、稳定性以及对间断的分辨率上差别会各有千秋罢了。

2 扩散通量

我们知道，对流通量间断问题给定已经有多种方法，但是对扩散通量的处理并不熟悉。实用上，通常对扩散项只采用二阶中心格式离散，而不管对流项采用何种数值近似算法。或者直接把它归并到源项中计算。

下面介绍一种实现非结构网格下二阶精度的数值近似方式【6】。

(1) 辅助点

对非正交的网格而言，其中心连线 PE 一般不通过单元面中心 e。利用单元中心变量值估算导数，在采用线性分布假设求解时精度退化。为了使算法在极不规则的网格下，也能保证解的精度，需要引进了添加辅助点的方法，改进扩散通量计算。

如图 8-8，建立辅助点 P'、E'，它们满足：

$$\mathbf{r}_{P'} - \mathbf{r}_P = \mathbf{r}_{PP'} = (\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_P) - L_{P'e} \mathbf{n} \quad (8-86)$$

$$\mathbf{r}_{E'} - \mathbf{r}_E = \mathbf{r}_{EE'} = (\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_E) - L_{E'e} \mathbf{n} \quad (8-87)$$

其中， $\mathbf{r}_{P'}$ 表示 P' 点的向量，其它类同；这里取长度 $L_{P'e} = \mathbf{r}_{Pe} \cdot \mathbf{n}$ ， $L_{E'e} = -\mathbf{r}_{Ee} \cdot \mathbf{n}$ ，

即有 $L_{P'E'} = |\mathbf{r}_{E'} - \mathbf{r}_{P'}|$ 。

线性插值的权值 ω 定义为 $\omega = L_{P'e} / L_{P'E'}$ 。 $\phi_{E'}$ 、 $\phi_{P'}$ 可用一阶 Taylor 展开式近似，即

$$\phi_{P'} = \phi_P + (\text{grad}\phi)_P \cdot (\mathbf{r}_{P'} - \mathbf{r}_P) \quad (8-88)$$

$$\phi_{E'} = \phi_E + (\text{grad}\phi)_E \cdot (\mathbf{r}_{E'} - \mathbf{r}_E) \quad (8-89)$$

这样处理，可适用于任意形状的控制体单元。其中的单元中心梯度由 Gauss 定理计算

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right)_P = \frac{\alpha}{\Delta V} \sum_j \phi_j A_j^i \quad (8-90)$$

其中， ϕ_j 可直接用线性插值求得，但是对高度扭曲的畸变网格会引入网格误差。 α 为限制因子 ($0 \leq \alpha \leq 1$)，保证重构不导致局部极值。

(2) 扩散通量近似

由中心差分近似，可得积分后的扩散通量

$$F_e^d = \int_A \Gamma \text{grad}\phi \cdot \mathbf{n} dA \approx (\Gamma \text{grad}\phi \cdot \mathbf{n})_e A_e \quad (8-91)$$

为求得法向扩散通量，须对法向梯度作离散。原始的直接采用界面单元相邻点作中心差

分近似，在不规则网格下不能达到理想的精度。为此，不同的作者提出了不同的实现方法，这里，介绍基于辅助点法（Auxiliary point method）构造扩散通量的近似。在高扭曲度的网格下，也能保证模型的整体计算精度不受网格拉伸畸变和剪切畸变的影响。由于只有法向通量对控制体积的净通量起作用，因而法向扩散通量可表达成：

$$F_e^d = \Gamma_e A_e \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_e \approx \Gamma_e A_e \frac{\phi_{E'} - \phi_{P'}}{L_{P'E'}} \quad (8-92)$$

从而，将式（3-9）、（3-10）代入式（3-16），得到单元面“e”的扩散通量的最终表达式为：

$$F_e^d = \Gamma_e A_e \frac{\phi_E - \phi_P}{L_{P'E'}} + \Gamma_e A_e \frac{(\text{grad}\phi)_E \cdot (\mathbf{r}_{E'} - \mathbf{r}_E) - (\text{grad}\phi)_P \cdot (\mathbf{r}_{P'} - \mathbf{r}_P)}{L_{P'E'}} \quad (8-93)$$

如果 $\phi_{E'}$ 、 $\phi_{P'}$ 估值准确，即梯度估算精度足够高，那么式（8-93）估算的通量具有二阶精度。

计算时，为保证计算的收敛性能，同时又保持计算的简便性。如果采用隐格式离散方程，则可以对式右端第一项按隐式处理，而第二项非正交项则作为显式计算，归入源项。当整个模拟计算趋于收敛时，非正交项的估值准确度逐步提高。

依据上述近似，评判网格的质量不再是单元网格边线之间的正交好坏，重要的是单元面的法向向量和单元中心点连线之间夹角的大小。但是采用式（8-90）估算的梯度引入的误差在极高扭曲度仍会显现，成了整个计算精度的瓶颈。为保证计算精度，在二维计算中，可采用 Lehnhauser and Scafer 提出的基于 Taylor 展开式的二阶精度插值算法（TSE）加以克服。但是该方法在三维中较难实现。

3 源项

对非常数源项，采用线性化处理：

$$Q_P^\phi = \int_V S_\phi dV = \int_V (S_{\phi,c} + S_{\phi,P} \phi_P) dV \approx (S_{\phi,c} + S_{\phi,P} \phi_P) \Delta V \quad (8-94)$$

其中， $S_{\phi,c}$ 源项的常数部分， $S_{\phi,P}$ 为 ϕ_P 的系数。该近似独立于控制单元的形状，为二阶近似。关于源项的线性化原则和技巧，读者可以参看 Patankar 的专著（中译本为《传热与流体流动的数值计算》），里面有非常详尽而精彩的论述。

第9章 在水力学问题中的应用

§ 9.1 渗流问题中的应用

9.1.1 饱和—非饱和地下水运动基本控制方程

土壤、沙层、砾石层等松散岩石以及具有裂隙的坚硬岩石均属于多孔介质,多孔介质的渗流属于饱和和非饱和渗流,研究它的运动规律对工程有重要意义。

首先建立一个描述整体区域的正交笛卡儿坐标系 (x, y, z) , z 垂直向上。对于任意一种透水介质, 设其空间三个正交主方向的透水系数为 $(k_{\xi_x}, k_{\xi_y}, k_{\xi_z})$, 下标 (ξ_x, ξ_y, ξ_z) 组成空间任意局部正交坐标系。在局部坐标系 (ξ_x, ξ_y, ξ_z) 下, 地下水流动的达西定律可表示为

$$\begin{bmatrix} u_{\xi_x} \\ u_{\xi_y} \\ u_{\xi_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_{\xi_x} & 0 & 0 \\ 0 & -k_{\xi_y} & 0 \\ 0 & 0 & -k_{\xi_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{\xi_x} \\ \psi_{\xi_y} \\ \psi_{\xi_z} \end{bmatrix} \quad (9-1)$$

式中, $u_{\xi_x}, u_{\xi_y}, u_{\xi_z}$ 分别为 (ξ_x, ξ_y, ξ_z) 方向的流速分量; ψ 为总土水势, $\psi = \psi_g + \psi_p + \psi_m$; $\psi_{\xi_x}, \psi_{\xi_y}, \psi_{\xi_z}$ 为总土水势对于局部坐标 (ξ_x, ξ_y, ξ_z) 的导数。下面将公式(9-1) 转化为整体坐标系 (x, y, z) 下的形式。根据 Jacobian 变化, 总土水势梯度的转换关系为

$$\begin{bmatrix} \psi_{\xi_x} \\ \psi_{\xi_y} \\ \psi_{\xi_z} \end{bmatrix} = [J] \begin{bmatrix} \psi_x \\ \psi_y \\ \psi_z \end{bmatrix} \quad (9-2)$$

式中, ψ_x, ψ_y, ψ_z 为总土水势关于整体坐标 (x, y, z) 的导数, $[J]$ 为 Jacobian 矩阵, 可表示为

$$[J] = \begin{bmatrix} n(x, \xi_x) & n(y, \xi_x) & n(z, \xi_x) \\ n(x, \xi_y) & n(y, \xi_y) & n(z, \xi_y) \\ n(x, \xi_z) & n(y, \xi_z) & n(z, \xi_z) \end{bmatrix} \quad (9-3)$$

这里 $n(i, \xi_j)$ 为两坐标轴间的方向余弦。流速的转换关系为

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = [J]^T \begin{bmatrix} u_{\xi_x} \\ u_{\xi_y} \\ u_{\xi_z} \end{bmatrix} \quad (9-4)$$

其中, u_x, u_y, u_z 分别为在整体坐标系 (x, y, z) 方向的流速分量, $[J]^T$ 为 Jacobian 矩阵的转置矩阵。将 (9-3), (9-4) 代入 (9-2) 可得

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = [J]^T \begin{bmatrix} -k_{\xi_x} & 0 & 0 \\ 0 & -k_{\xi_y} & 0 \\ 0 & 0 & -k_{\xi_z} \end{bmatrix} [J] \begin{bmatrix} \psi_x \\ \psi_y \\ \psi_z \end{bmatrix} \quad (9-5)$$

从 (9-5) 中可知在整体坐标系 (x, y, z) 下的透水系数 $[(k_0)_{ij}]$ 可表示为

$$[(k_0)_{ij}] = [J]^T \begin{bmatrix} -k_{\xi_x} & 0 & 0 \\ 0 & -k_{\xi_y} & 0 \\ 0 & 0 & -k_{\xi_z} \end{bmatrix} [J] \quad (9-6)$$

利用连续条件, 可以得到在整体坐标系 (x, y, z) 下非均质非定常渗流方程为

$$\{c(\psi) + \alpha S_s\} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[k_{ij} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right] \quad (9-7)$$

方程 (9-7) 为饱和-非饱和地下水流动的基本控制方程。 t 为时间, n 为透水介质的孔隙率, θ 为含水率, S_s 为比储流系数 ($= dn/d\psi$), $c(\psi)$ 为比水分容量 ($= d\theta/d\psi$), α 为系数 ($\alpha=1$, 饱和区; $\alpha=0$, 非饱和区), k_{ij} 为渗透系数, 可表示为

$$k_{ij} = (k_0)_{ij} k_r \quad (9-8)$$

这里, $(k_0)_{ij}$ 为式 (9-8) 定义的整体笛卡儿坐标下的介质在饱和状态下的渗透系数,

只与土质的特性有关, 与孔隙压力状态无关; k_r 为相对渗透系数, 是孔隙压力水头和含水率的函数^[58]。在通常的状况下一般考虑的是垂向二维问题。因此饱和-非饱和地下水控制方程简化为:

$$\{c(\psi) + \alpha S_s\} \frac{\partial \psi}{\partial t} = k_{ij} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right)$$

9.1.2 方程的离散

记 $C = \{c(\psi) + \alpha S_s\} / k_{ij}$ ，则方程化为

$$C \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) \quad (9-10)$$

假设控制体 $ABCD$ ，如图 9-1 所示：

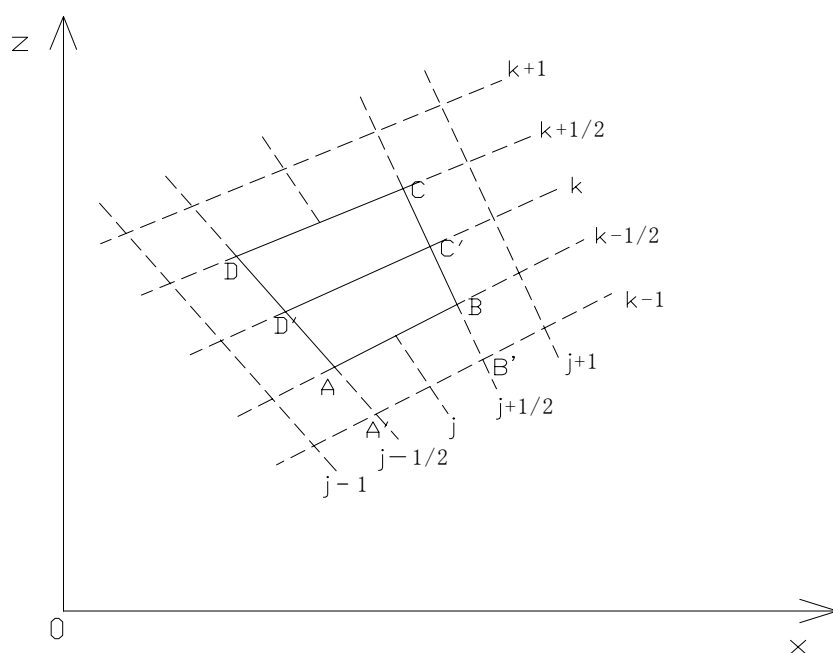


图 9-1 单元有限体积离散示意图

则方程的右边项可化简为：

$$\int_{ABCD} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) dx dz = \int_{ABCD} H \square n ds \quad (9-11)$$

式中， $H \square n ds = \frac{\partial \psi}{\partial x} dz - \frac{\partial \psi}{\partial z} dx$

将 $\Delta z_{AB} = z_B - z_A$, $\Delta x_{AB} = x_B - x_A$ 代入上式，则式 (9-11) 化为

$$\begin{aligned}
\int_{ABCD} H \square nds &= \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \right]_{j,k-1/2} \Delta z_{AB} - \left[\frac{\partial \psi}{\partial z} \right]_{j,k-1/2} \Delta x_{AB} \\
&+ \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \right]_{j+1/2,k} \Delta z_{BC} - \left[\frac{\partial \psi}{\partial z} \right]_{j+1/2,k} \Delta x_{BC} \\
&+ \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \right]_{j,k+1/2} \Delta z_{CD} - \left[\frac{\partial \psi}{\partial z} \right]_{j,k+1/2} \Delta x_{CD} \\
&+ \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \right]_{j-1/2,k} \Delta z_{DA} - \left[\frac{\partial \psi}{\partial z} \right]_{j-1/2,k} \Delta x_{DA}
\end{aligned} \tag{9-12}$$

$\left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \right]_{j,k-1/2}$ 等的计算方法有很多种, 这里 $\left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \right]_{j,k-1/2}$ 以图 2 中区域 $B'BC'D'AA'B'$

平均值来估算。利用格林公式, 可得

$$\left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \right]_{j,k-1/2} = \left(\frac{1}{S_{A'B'C'D'}} \right) \iint \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dx dz = \left(\frac{1}{S_{A'B'C'D'}} \right) \int \psi dz \tag{9-13}$$

$$\left[\frac{\partial \psi}{\partial z} \right]_{j,k-1/2} = \left(\frac{1}{S_{A'B'C'D'}} \right) \iint \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right) dx dz = \left(\frac{1}{S_{A'B'C'D'}} \right) \int \psi dx \tag{9-14}$$

同时,

$$\int_{ABCD} \psi dx \approx \psi_{j,k-1} \Delta z_{AB} + \psi_B \Delta z_{BC} + \psi_{j,k} \Delta z_{CD} + \psi_A \Delta z_{DA}$$

同样的方法来处理 $\int_{A'B'C'D'} \psi dx$ 。

如果网格曲率较小,

$$\begin{aligned}
\Delta z_{A'B'} &\approx -\Delta z_{C'D'} \approx \Delta z_{AB}, \Delta z_{B'C'} \approx -\Delta z_{D'A'} \approx \Delta z_{k-1,k}, \\
S_{AB} &= S_{A'B'C'D'} = \Delta x_{AB} \Delta z_{k-1,k} - \Delta z_{AB} \Delta x_{k-1,k}
\end{aligned} \tag{9-15}$$

因此, 式 (3.44) 变为

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \right]_{j,k-1/2} &= \frac{\Delta z_{AB} (\psi_{j,k-1} - \psi_{j,k}) + \Delta z_{k-1,k} (\psi_B - \psi_A)}{S_{AB}}, \\
\left[\frac{\partial \psi}{\partial z} \right]_{j,k-1/2} &= \frac{-[\Delta x_{AB} (\psi_{j,k-1} - \psi_{j,k}) + \Delta x_{k-1,k} (\psi_B - \psi_A)]}{S_{AB}}
\end{aligned} \tag{9-16}$$

$\left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \right]_{j+1/2,k}$ 等可得到同样的表达式，则式（9-12）可写成

$$\begin{aligned} \int_{ABCD} H \square ds = & Q_{AB}(\psi_{j,k-1} - \psi_{j,k}) + P_{AB}(\psi_B - \psi_A) + Q_{BC}(\psi_{j+1,k} - \psi_{j,k}) + P_{BC}(\psi_C - \psi_B) \\ & + Q_{CD}(\psi_{j,k+1} - \psi_{j,k}) + P_{CD}(\psi_D - \psi_C) + Q_{DA}(\psi_{j-1,k} - \psi_{j,k}) + P_{DA}(\psi_A - \psi_D) \end{aligned} \quad (9-17)$$

式中

$$\begin{aligned} Q_{AB} &= (\Delta x_{AB}^2 + \Delta z_{AB}^2) / S_{AB}, P_{AB} = (\Delta x_{AB} \Delta x_{k-1,k} + \Delta z_{AB} \Delta z_{k-1,k}) / S_{AB} \\ Q_{BC} &= (\Delta x_{BC}^2 + \Delta z_{BC}^2) / S_{BC}, P_{BC} = (\Delta x_{BC} \Delta x_{j+1,j} + \Delta z_{BC} \Delta z_{j+1,j}) / S_{BC} \\ Q_{CD} &= (\Delta x_{CD}^2 + \Delta z_{CD}^2) / S_{CD}, P_{CD} = (\Delta x_{CD} \Delta x_{k+1,k} + \Delta z_{CD} \Delta z_{k+1,k}) / S_{CD} \\ Q_{DA} &= (\Delta x_{DA}^2 + \Delta z_{DA}^2) / S_{DA}, P_{DA} = (\Delta x_{DA} \Delta x_{j-1,j} + \Delta z_{DA} \Delta z_{j-1,j}) / S_{DA} \end{aligned}$$

式（9-17）中， ψ_A, x_A, z_A 用周围四个结点值来平均，因此

$$\psi_A = 0.25(\psi_{j,k} + \psi_{j-1,k} + \psi_{j-1,k-1} + \psi_{j,k-1})$$

其余各点的值做同样的处理。

代入式（9-17）得到式（9-10）的离散方程

$$\begin{aligned} & 0.25(P_{CD} - P_{DA})\psi_{j-1,k+1} + [Q_{CD} + 0.25(P_{BC} - P_{DA})]\psi_{j,k+1} \\ & + 0.25(P_{BC} - P_{CD})\psi_{j+1,k+1} + [Q_{DA} + 0.25(P_{CD} - P_{AB})]\psi_{j+1,k} \\ & - (Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CD} + Q_{DA})\psi_{j,k} + [Q_{BC} + 0.25(P_{AB} - P_{CD})]\psi_{j+1,k} \\ & + 0.25(P_{DA} - P_{AB})\psi_{j-1,k-1} + [Q_{AB} + 0.25(P_{DA} - P_{BC})]\psi_{j,k-1} \\ & + 0.25(P_{AB} - P_{BC})\psi_{j+1,k-1} = C(\psi_{j,k}^{n+1} - \psi_{j,k}^n) / \Delta t \end{aligned} \quad (9-18)$$

9.1.3 算例【陈扬 硕士论文】

某固体废弃物填埋场，长 450m，高 100m，坡度 30°。假设固体废弃物是均质的，饱和渗透系数 1.79×10^{-4} ，孔隙率 0.45，非饱和带的渗透系数如图 9-2 所示：

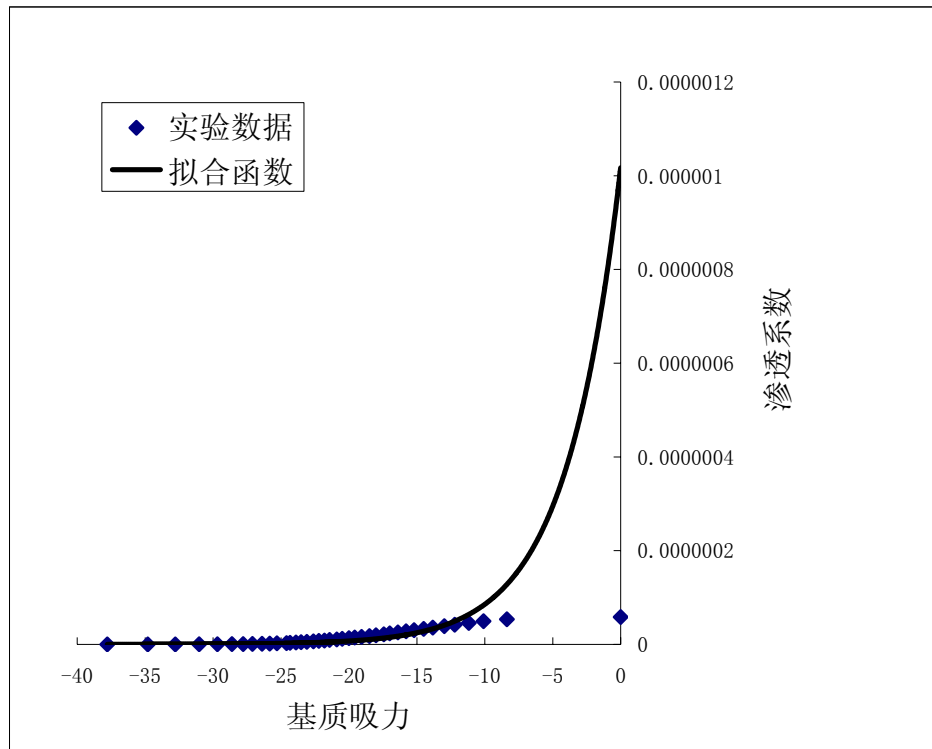


图 9-2 渗透系数与基质吸力的关系

初始时刻为非饱和时刻，计算区域网格图如图 9-3 所示，假定降雨历时 24 小时，计算填埋场内部的总压力等值线图。

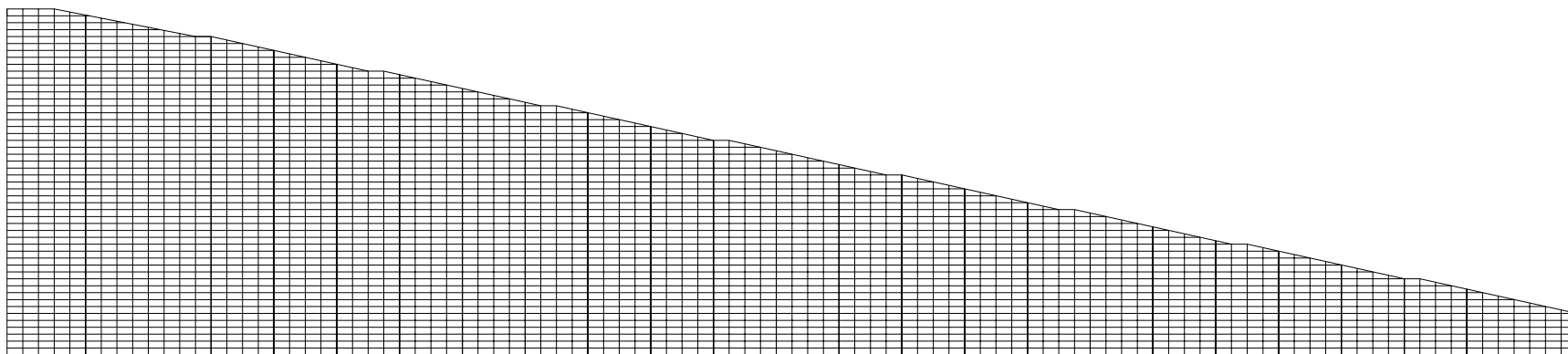


图 9-3 计算网格

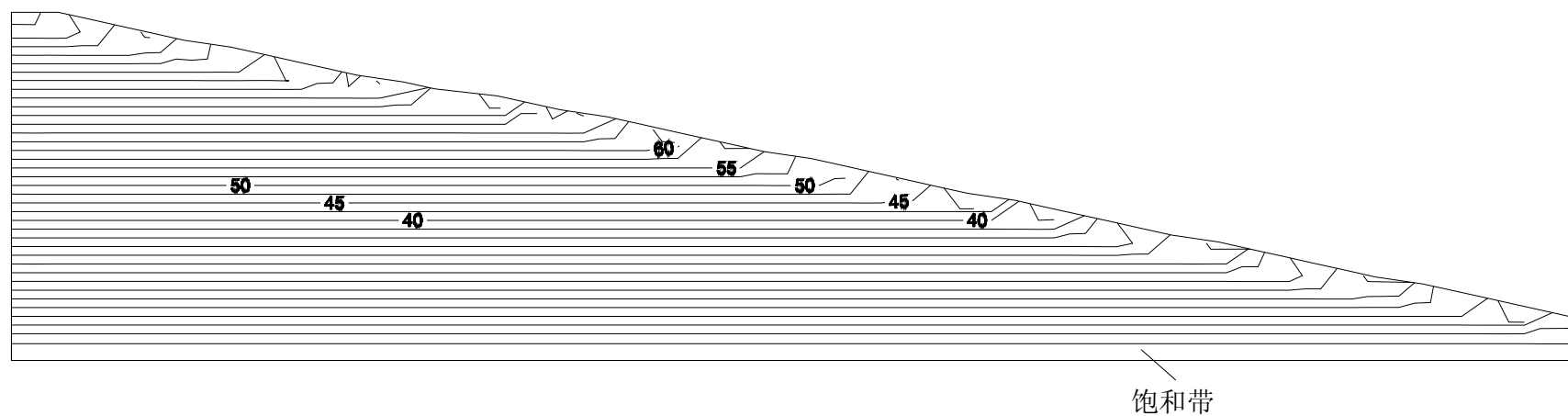


图 9-4 填埋场总压力等值线图 ($t=0.5$ 天)

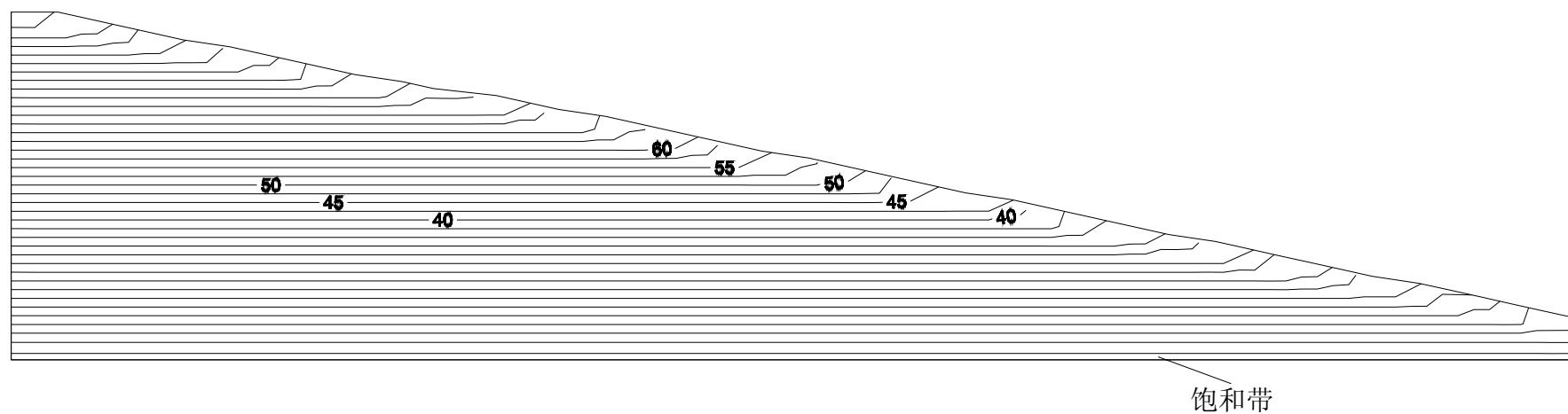


图 9-5 填埋场总压力等值线图 ($t=1.5$ 天)

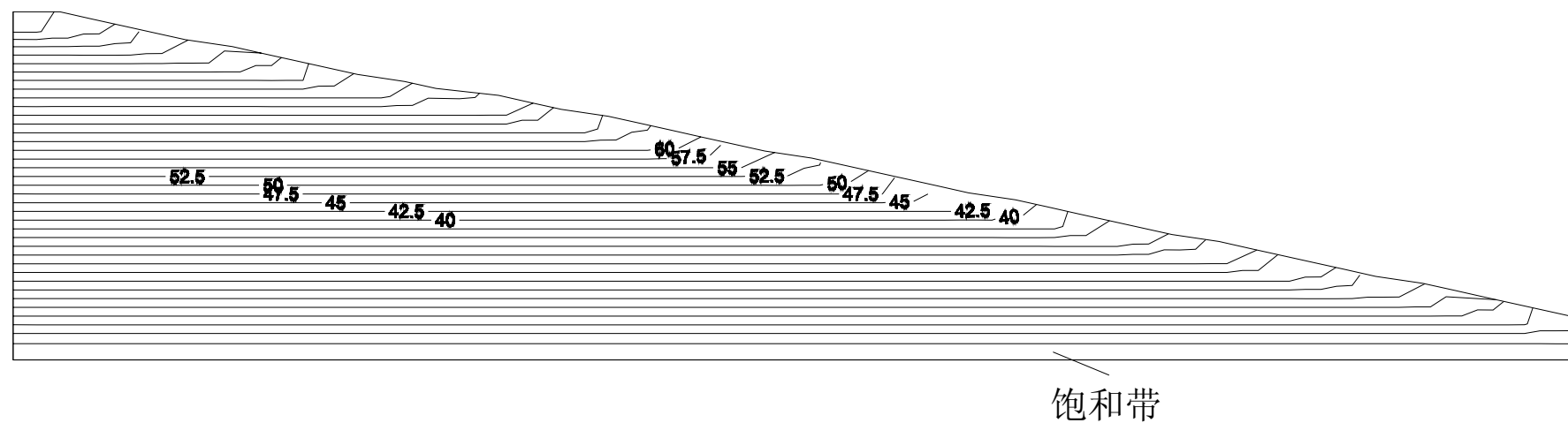


图 9-6 填埋场总压力等值线图 ($t=4$ 天)

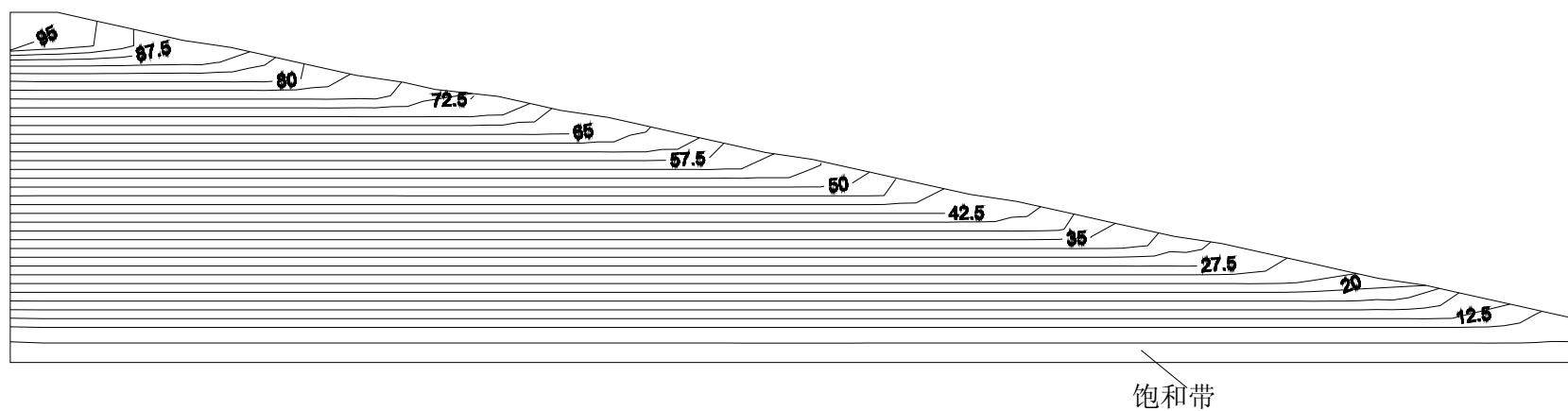


图 9-7 填埋场总压力等值线图 ($t=6$ 天)

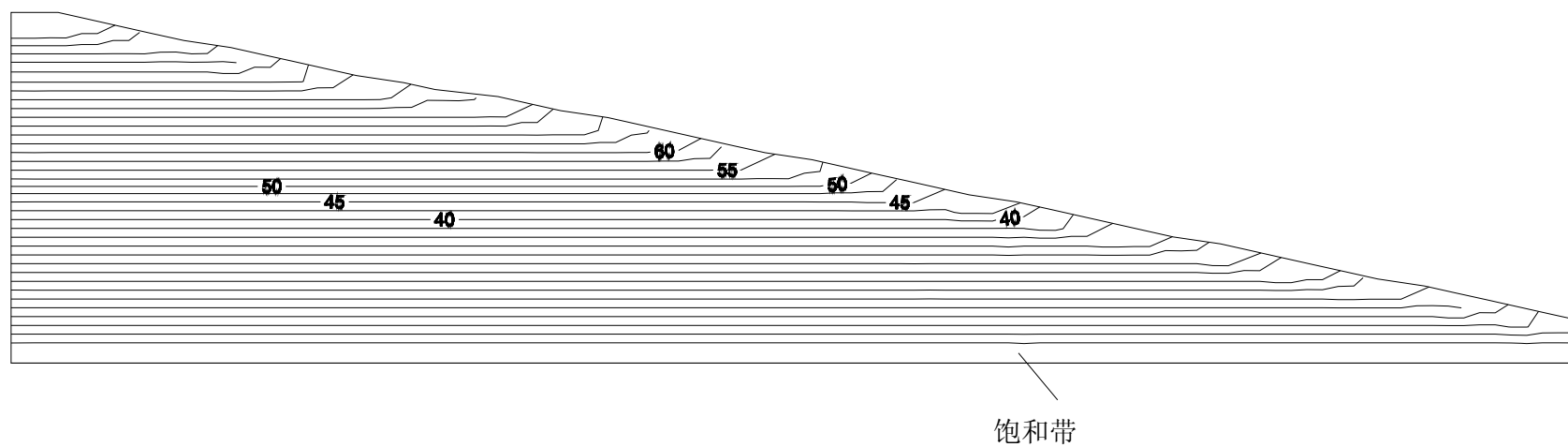


图 9-8 填埋场总压力等值线图 ($t=9$ 天)

由计算结果可以看出, 渗滤液的产生量与降雨量有着密切的关系, 降雨量提供了渗滤液水量得主要来源。渗滤液的产生量滞后于降雨量, 如在降雨停止后 5 天, 饱和带高度达到最大值。

计算示例表明, 有限体积法比应用广泛的有限单元法原理更加简单, 计算花费大为降低。

§ 9.2 二维明渠非恒定流计算

9.2.1 水流基本方程

二维浅水方程的守恒形式可表达为:

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial(hu^2 + gh^2/2)}{\partial x} + \frac{\partial(huv)}{\partial y} &= gh(s_{0x} - s_{fx}) \\ \frac{\partial hv}{\partial t} + \frac{\partial(huv)}{\partial x} + \frac{\partial(hv^2 + gh^2/2)}{\partial y} &= gh(s_{0y} - s_{fy})\end{aligned}\quad (9-19)$$

式中: h 为水深;

u , v 分别为 x 和 y 向垂线平均水平流速分量;

g 为重力加速度;

s_{0x} 和 s_{fx} 分别是 x 向的水底底坡和摩阻坡度;

s_{0y} 和 s_{fy} 分别是 y 向的水底底坡和摩阻坡度;

上述方程组, 可表示为程(8-71)的形式

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{S} \quad (9-20)$$

式中,

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} h \\ hu \\ hv \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_x = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{gh^2}{2} \\ huv \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_y = \begin{pmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{gh^2}{2} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ gh(S_{0x} - S_{fx}) \\ gh(S_{0y} - S_{fy}) \end{pmatrix}$$

9.2.2 控制方程的离散

根据前面的非结构网格上有限体积法离散的基本思路, 可把二维问题中跨单元边界的水量、动量、物质输运量等通量的计算转化为求解局部一维黎曼问题 (8-84)。利用第八章 8.3.3 节中解黎曼问题法近似对流通量的思路离散控制方程。正如前文提到的该黎曼问题可以有多种近似求法, 例如 FDS、FVS, 以及 Osher 格式等一阶的高分辨率格式以及高阶的高分辨率 TVD 格式。

下面将分别介绍 Osher 格式和 TVD—MUSCL 格式求解黎曼问题。

1 Osher 格式

(1) 水力学黎曼问题

我们知道, 据 8.3.3 节所述的求解黎曼问题方法, 在相邻的二维控制体界面处建立的水力模型是局部 $\bar{x} - \bar{y}$ 坐标系中沿 \bar{x} 轴 (即外法向) 的一个一维黎曼问题 (8-84)。

对浅水方程, 方程(8-84)的特征方程为

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0 \quad (9-21)$$

式中 \mathbf{I} 为单位矩阵, \mathbf{A} 为 Jacobian 矩阵, 定义为 $\mathbf{A} = d\mathbf{F}/d\bar{\mathbf{U}}$, 由式 (9-20) 确定其值。 $\bar{\mathbf{U}}$ 是 \mathbf{U} 在法向的投影, 可写为 $\bar{\mathbf{U}} = (h, h\bar{u}, h\bar{v})^T$, 即 $U_1 = h$, $U_2 = h\bar{u}$, $U_3 = h\bar{v}$, 其中 \bar{u} , \bar{v} 分别为法向和切向流速, 为书写方便将其上的横线符号省略。通量 \mathbf{F} 各项与 \mathbf{U} 的对应分别为:

$$f_1 = U_2, \quad f_2 = \frac{U_2^2}{U_1} + \frac{g}{2} U_1^2, \quad f_3 = \frac{U_2 \cdot U_3}{U_1}, \quad (9-22)$$

矩阵 \mathbf{J} 表示如下:

$$\mathbf{A} = \frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial U_1} & \frac{\partial F_1}{\partial U_2} & \frac{\partial F_1}{\partial U_3} \\ \frac{\partial F_2}{\partial U_1} & \frac{\partial F_2}{\partial U_2} & \frac{\partial F_2}{\partial U_3} \\ \frac{\partial F_3}{\partial U_1} & \frac{\partial F_3}{\partial U_2} & \frac{\partial F_3}{\partial U_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c^2 - u^2 & 2u & 0 \\ -uv & v & u \end{bmatrix} \quad (9-23)$$

式中 $c = \sqrt{gh}$ ，式(9-21)中的特征值为 $\lambda_1 = u - c$ ； $\lambda_2 = u$ ； $\lambda_3 = u + c$ 。特征向量 \mathbf{r}_k 也可由 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{r}_k = \lambda_k \mathbf{r}_k$ 得，分别为

$$\mathbf{r}_1 = (1, u - c, v)^T \quad \mathbf{r}_2 = (0, 0, 1)^T \quad \mathbf{r}_3 = (1, u + c, v)^T \quad (9-24)$$

对每个特征值 λ_k ，由式：

$$\frac{dx(t)}{dt} = \lambda_k$$

定义的线族 Γ_k ($k=1,2,3$) 称为特征线。

沿特征线的黎曼不变量 $\psi_k(\mathbf{U})$ 的定义为：若函数 $\psi_k(\mathbf{U})$ 满足关系式：

$$\nabla \psi_k(\bar{\mathbf{U}}) \cdot \mathbf{r}_k(\bar{\mathbf{U}}) = 0 \quad (9-25)$$

则称 $\psi_k(\bar{\mathbf{U}})$ 为 k 位黎曼不变量。

式中， $\nabla \psi_k = \left(\frac{\partial \psi_k}{\partial U_1}, \frac{\partial \psi_k}{\partial U_2}, \frac{\partial \psi_k}{\partial U_3} \right)$ ，是行向量。

由(9-25)式可得沿每一特征线 Γ_k 有三个方程式成立，也即存在一个独立变量(称为黎曼变量)，由于其沿特征线 Γ_k 保持常数，所以也被称作黎曼不变量。

沿特征线 Γ_k ($\frac{dx(t)}{dt} = \lambda_k$) 的黎曼不变量 $\psi_k(\mathbf{U})$ 可由方程(9-25)求得如下：

$$\begin{aligned} \lambda_1: \quad & \psi_1^{(1)} = u + 2c; \quad \psi_1^{(2)} = v \\ \lambda_2: \quad & \psi_2^{(1)} = u; \quad \psi_2^{(2)} = H \\ \lambda_3: \quad & \psi_3^{(1)} = u - 2c; \quad \psi_3^{(2)} = v \end{aligned} \quad (9-26)$$

式中，上标(1)，(2)分别表示每一个特征向量上两个黎曼不变量。沿着相应的特征线，其黎曼不变量保持定值。

(2) Osher 格式解黎曼问题

根据通量向量分裂的思想，通量 $\mathbf{F}(\bar{\mathbf{U}})$ 可分成沿正向特征线传播和沿负向特征线传播的通量，

$$\mathbf{F}(\bar{\mathbf{U}}) = \mathbf{A}^+ \mathbf{U} + \mathbf{A}^- \mathbf{U} = \mathbf{F}^+ + \mathbf{F}^- \quad (9-27)$$

由于 $\mathbf{F}^\pm(\mathbf{U})$ 可看作是沿正负特征方向传播的部分通量，式中，“+”表沿正向特征线传播的通量，“-”表沿负向特征线传播的通量。则数值通量可以写成，

$$\mathbf{F}_{LR}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R) = \mathbf{F}^+(\mathbf{U}_L) + \mathbf{F}^-(\mathbf{U}_R) \quad (9-28)$$

或者

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{LR}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R) &= \mathbf{F}(\mathbf{U}_L) + \Delta \mathbf{F}_{LR}^- \\ &= \mathbf{F}(\mathbf{U}_R) - \Delta \mathbf{F}_{LR}^+ \\ &= \frac{1}{2} [\mathbf{F}(\mathbf{U}_L) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_R) - (\Delta \mathbf{F}_{LR}^+ - \Delta \mathbf{F}_{LR}^-)] \end{aligned} \quad (9-29)$$

式中，“ L ”表示被分析控制体边界的左侧，“ R ”表示被分析控制体边界的右侧。

$$\Delta \mathbf{F}^- = \mathbf{F}_{LR}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_L) = \int_{\mathbf{U}_L}^{\bar{\mathbf{U}}_R} \mathbf{A}^-(\mathbf{U}) d\mathbf{U} \quad (9-30)$$

$$\Delta \mathbf{F}^+ = \mathbf{F}(\mathbf{U}_R) - \mathbf{F}_{LR}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R) = \int_{\mathbf{U}_L}^{\bar{\mathbf{U}}_R} \mathbf{A}^+(\mathbf{U}) d\mathbf{U} \quad (9-31)$$

因此，只要求得两个积分 $\int_{\mathbf{U}_L}^{\bar{\mathbf{U}}_R} \mathbf{A}^-(\mathbf{U}) d\mathbf{U}$ 或 $\int_{\mathbf{U}_L}^{\bar{\mathbf{U}}_R} \mathbf{A}^+(\mathbf{U}) d\mathbf{U}$ ，跨越控制体边界的数值通量向量 $\mathbf{F}_{LR}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R)$ 就可以求得。

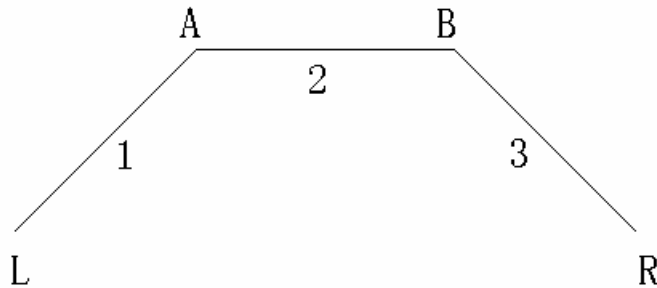


图 9-9 Osher 格式积分路径

Osher 在求解 $\int_{\mathbf{U}_L}^{\bar{\mathbf{U}}_R} \mathbf{A}^-(\mathbf{U}) d\mathbf{U}$ 或 $\int_{\mathbf{U}_L}^{\bar{\mathbf{U}}_R} \mathbf{A}^+(\mathbf{U}) d\mathbf{U}$ 的积分式时，采用图 9-3 所示的由三段特征线构成的积分路径，即分段光滑的弧 LABR；其含义是：在 \mathbf{U} 的状态空

间（或称相空间）中， \mathbf{U}_L 与 \mathbf{U}_R 是通过相互衔接的三段特征线 $\frac{dx}{dt} = \lambda_k$ 过渡的。
沿每段弧线的积分可以写成：

$$\int_{\mathbf{U}[0]}^{\mathbf{U}[\xi]} \mathbf{A}^{\pm}(\mathbf{U}) d\mathbf{U} = \int_0^{\xi} \mathbf{A}^{\pm}(\mathbf{U}) \frac{d\mathbf{U}}{d\xi} d\xi = \int_0^{\xi} \mathbf{A}^{\pm}(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{r}(\mathbf{U}) d\xi = \int_0^{\xi} \lambda^{\pm}(\mathbf{U}) \mathbf{r}(\mathbf{U}) d\xi \quad (9-32)$$

式中， $\mathbf{r}(\mathbf{U}) = \frac{d\mathbf{U}}{d\xi}$ ， $d\xi$ 是沿特征线的微分单元，积分上下限 $\mathbf{U}[\xi]$ ， $\mathbf{U}[0]$ 分别

代表第 k 段弧线 Γ_k 两 endpoint， ξ 为弧线的长度，如图 9-9 所示，

曲线 LA， $\mathbf{U}[0] = \mathbf{U}_L$ ， $\mathbf{U}[\xi] = \mathbf{U}_A$ ；

曲线 AB， $\mathbf{U}[0] = \mathbf{U}_A$ ， $\mathbf{U}[\xi] = \mathbf{U}_B$ ；(9-33)

曲线 BR， $\mathbf{U}[0] = \mathbf{U}_B$ ， $\mathbf{U}[\xi] = \mathbf{U}_R$ 。

其中的 \mathbf{U}_A ， \mathbf{U}_B 通过黎曼不变量方程求得，

曲线 LA： $u_L + 2c_L = u_A + 2c_A$ ； $v_L = v_A$

曲线 AB： $u_A = u_B$ ； $H_A = H_B$ (9-34)

曲线 BR： $u_R - 2c_R = u_B - 2c_B$ ； $v_R = v_B$

从中可解出，

$$u_A = u_B = \frac{\psi_L + \psi_R}{2}； h_A = h_B = \frac{1}{g} \left(\frac{\psi_L - \psi_R}{4} \right)^2 \quad (9-35)$$

式中， $\psi_L = u_L + 2c_L$ ； $\psi_R = u_R - 2c_R$ 。

对每一段积分曲线 Γ_k ，根据特征值 λ_k 的符号，可以得到黎曼问题的近似解为，

$$\mathbf{F}_{LR}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R) = \begin{cases} \mathbf{F}(\mathbf{U}[\xi]) - \mathbf{F}(\mathbf{U}[s]) + \mathbf{F}(\mathbf{U}[0]) & \lambda_k(\mathbf{U}[0]) > 0, \lambda_k(\mathbf{U}[\xi]) < 0 \\ \mathbf{F}(\mathbf{U}[s]) & \lambda_k(\mathbf{U}[0]) < 0, \lambda_k(\mathbf{U}[\xi]) > 0 \\ \mathbf{F}(\mathbf{U}[0]) & \lambda_k(\mathbf{U}[0]) \geq 0, \lambda_k(\mathbf{U}[\xi]) \geq 0 \\ \mathbf{F}(\mathbf{U}[\xi]) & \lambda_k(\mathbf{U}[0]) \leq 0, \lambda_k(\mathbf{U}[\xi]) \leq 0 \end{cases} \quad (9-36)$$

式中， λ_k ， $\mathbf{U}[0]$ ， $\mathbf{U}[\xi]$ 的定义见前； $\mathbf{U}[s]$ 代表临界点处的 \mathbf{U} 值，点 s 表示临界

点, $\lambda_k(\mathbf{U}[\xi])=0$ 。经过 s 点 λ_k 改变符号, 临界点只存在于 LA 和 BR 弧线段上,

相应的 \mathbf{U} 值为 \mathbf{U}_s^1 , \mathbf{U}_s^3 。其分量为,

$$\begin{aligned} u_s^1 &= \frac{1}{3}\psi_L, \quad u_s^3 = \frac{1}{3}\psi_R \\ h_s^1 &= \frac{1}{g}(u_s^1)^2, \quad h_s^3 = \frac{1}{g}(u_s^3)^2 \end{aligned} \quad (9-37)$$

这样, 可以求得通过单元的某个边的法向数值通量 \mathbf{F}_{LR} , 方程 (9-20) 即可求解。

根据式 (9-36) 可能有 16 种解。列于表 9-1。

表 9-1 浅水方程的 Osher 的近似解

\mathbf{F}_{LR}	$u_L < c_L$ $u_R > -c_R$	$u_L > c_L$ $u_R > -c_R$	$u_L < c_L$ $u_R < -c_R$	$u_L > c_L$ $u_R < -c_R$
$c_A < u_A$	$\mathbf{F}(\mathbf{U}_s^1)$	$\mathbf{F}(\mathbf{U}_L)$	$\mathbf{F}(\mathbf{U}_s^1) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_s^3) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_R)$	$\mathbf{F}(\mathbf{U}_L) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_s^3) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_R)$
$0 < u_A < c_A$	$\mathbf{F}(\mathbf{U}_A)$	$\mathbf{F}(\mathbf{U}_L) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_s^1) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_A)$	$\mathbf{F}(\mathbf{U}_A) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_s^3) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_R)$	$\mathbf{F}(\mathbf{U}_L) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_s^1) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_A) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_s^3) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_R)$
$-c_B < u_A < 0$	$\mathbf{F}(\mathbf{U}_B)$	$\mathbf{F}(\mathbf{U}_L) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_s^1) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_B)$	$\mathbf{F}(\mathbf{U}_B) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_s^3) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_R)$	$\mathbf{F}(\mathbf{U}_L) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_s^1) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_B) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_s^3) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_R)$
$u_A < -c_B$	$\mathbf{F}(\mathbf{U}_s^3)$	$\mathbf{F}(\mathbf{U}_L) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_s^1) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_s^3)$	$\mathbf{F}(\mathbf{U}_R)$	$\mathbf{F}(\mathbf{U}_L) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_s^1) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_R)$

表 9-1 中，第五列 ($u_L > c_L$, $u_R < -c_R$) 的四种流动条件在天然条件下不太可能发生。第二列 ($u_L > c_L$, $u_R > -c_R$) 的第二种 ($0 < u_A < c_A$) 和第三种 ($-c_B < u_A < 0$) 流动条件是缓流，第一种 ($c_A < u_A$) 和第四种 ($u_A < -c_B$) 流动条件为急流。第三列 ($u_L < c_L$, $u_R < -c_R$) 的第三种流动条件 ($-c_B < u_A < 0$) 和第四列的第二种流动条件 ($0 < u_A < c_A$) 也是在天然条件下不太可能发生的流动。第三列 ($u_L < c_L$, $u_R < -c_R$) 的第一种 ($c_A < u_A$) 和第四列 ($u_L > c_L$, $u_R < -c_R$) 的第四种流动条件 ($u_A < -c_B$) 为急流。

2 TVD-MUSCL 格式【王志刚 硕士论文】

1959 年 Godunov 提出了一个著名的差分格式,较好地考虑了物理流动特性,利用“黎曼间断解”问题的精确解来计算网格边上的物理量。然而,这一方法在接触间断附近(如溃坝涌波)的解不够好且只有一阶精度, Van Leer 率先延拓 Godunov 方法得到 MUSCL 格式,开始了对高阶 Godunov 格式的研究。一些高精度 Godunov 类型方法已广泛地被用来处理含源项的浅水方程,试验和数值模拟均证明过此类格式的精确性和有效性。

MUSCL 类型格式由于其“几何”意义明确,易于推广到多维问题中和使用非结构网格,应用范围日益广泛。此类格式的思路就是如何确定界面两侧邻近状态 \mathbf{U}_L 和 \mathbf{U}_R 来解黎曼间断问题,关键就在于选取合适的插值公式并对单元的坡度作适当的限制以提高格式对间断解的处理能力。

$\tilde{\mathbf{A}}$ 是某种意义下雅可比矩阵 \mathbf{A} 的平均矩阵,依赖于 \mathbf{U}_L 和 \mathbf{U}_R 。

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R) \quad (9-38)$$

从方程 (9-12) 出发,用一阶 Godunov 型格式计算通量 $\mathbf{F}(\bar{\mathbf{U}})$

$$\mathbf{F}(\bar{\mathbf{U}})_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{2}[\mathbf{F}_R + \mathbf{F}_L - \left| \mathbf{A}_{i+\frac{1}{2}} \right| (\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L)] \cdot \mathbf{n}_{i+\frac{1}{2},j} \quad (9-39)$$

根据 Roe 的黎曼间断问题的解法,解得:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \frac{\partial(\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})}{\partial \mathbf{U}} = \begin{bmatrix} 0 & n_x & n_y \\ (c^2 - \tilde{u}^2)n_x - \tilde{u}\tilde{v}n_y & 2\tilde{u}n_x + \tilde{v}n_y & \tilde{u}n_y \\ -\tilde{u}\tilde{v}n_x + (c^2 - \tilde{v}^2)n_y & \tilde{v}n_x & \tilde{u}n_x + 2\tilde{v}n_y \end{bmatrix} \quad (9-40)$$

$\tilde{\mathbf{A}}$ 相应的右特征值 a^k 为

$$a^1 = \tilde{u}n_x + \tilde{v}n_y + c, \quad a^2 = \tilde{u}n_x + \tilde{v}n_y, \quad a^3 = \tilde{u}n_x + \tilde{v}n_y - c \quad (9-41)$$

$\tilde{\mathbf{A}}$ 相应的右特征向量 \mathbf{e}^k 为

$$\tilde{\mathbf{e}}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{u} + \tilde{c}n_x \\ \tilde{v} + \tilde{c}n_y \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{e}}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\tilde{c}n_y \\ \tilde{c}n_x \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{e}}^3 = \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{u} - \tilde{c}n_x \\ \tilde{v} - \tilde{c}n_y \end{bmatrix} \quad (9-42)$$

$$\tilde{u} = \frac{u_R\sqrt{h_R} + u_L\sqrt{h_L}}{\sqrt{h_R} + \sqrt{h_L}}, \quad \tilde{v} = \frac{v_R\sqrt{h_R} + v_L\sqrt{h_L}}{\sqrt{h_R} + \sqrt{h_L}}, \quad \tilde{c} = \sqrt{\frac{g(h_R + h_L)}{2}} \quad (9-43)$$

用雅可比矩阵 \mathbf{A} 的平均常系数矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}$ 来代替 \mathbf{A} ，以便求解界面法向输出通量 $\mathbf{F}(\bar{\mathbf{U}})$ 。因此，式 (9-38) 可写为

$$\mathbf{F}(\bar{\mathbf{U}})_{i+1/2,j} = \frac{1}{2}[\mathbf{F}_R + \mathbf{F}_L - \sum_{k=1}^3 \tilde{e}^k \psi(\tilde{a}_{i+1/2}^k) \tilde{a}_{i+1/2}^k] \cdot \mathbf{n}_{i+1/2,j} \quad (9-44)$$

ψ 为熵函数，以满足间断处的熵条件。其形式为：

$$\psi(z) = \begin{cases} |z| & |z| \geq \varepsilon \\ \frac{(z^2 + \varepsilon^2)}{2\varepsilon} & |z| < \varepsilon \end{cases} \quad (9-45)$$

ε 为一小正数

$$\varepsilon_{i+1/2,j} = \max[0, a_{i+1/2,j} - a_{i,j}, a_{i+1,j} - a_{i+1/2,j}] \quad (9-32)$$

$a_{i+1/2,j}$ 为特征列向量

$$a_{i+1/2,j} = \mathbf{L}_{i+1/2,j} (\mathbf{U}_{i+1,j} - \mathbf{U}_{i,j}) \quad (9-46)$$

此时

$$\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L = \sum_{k=1}^3 \tilde{\alpha}^k \mathbf{e}^k \quad (9-47)$$

令 $\Delta = (\)_R - (\)_L$

$$\tilde{\alpha}^{1,3} = \frac{\Delta h}{2} \pm \frac{1}{2\tilde{c}} [\Delta(hu)n_x + \Delta(hv)n_y - \bar{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{n}} \Delta h] \quad (9-48)$$

$$\tilde{\alpha}^2 = \frac{1}{\tilde{c}} \{ [\Delta(hv) - \tilde{v} \Delta h] n_x - [\Delta(hu) - \tilde{u} \Delta h] n_y \} \quad (9-49)$$

采用 MUSCL 方法在对界面中间状态变量进行插值时对坡度加以限制，便可得到高阶精度 TVD 格式。加入限制后的插值公式

$$\mathbf{U}_R = \mathbf{U}_{i+1,j}^n - \frac{1}{2}(\delta \mathbf{U})_{i+1,j}^n \quad (9-50)$$

$$\mathbf{U}_L = \mathbf{U}_{i,j}^n + \frac{1}{2}(\delta \mathbf{U})_{i,j}^n \quad (9-51)$$

$$(\delta \mathbf{U})_{i,j}^n = (\mathbf{U}_{i,j}^n - \mathbf{U}_{i-1,j}^n) \cdot \varphi \left(\frac{\mathbf{U}_{i+1,j}^n - \mathbf{U}_{i,j}^n}{\mathbf{U}_{i,j}^n - \mathbf{U}_{i-1,j}^n} \right) \quad (9-52)$$

为了能在激波附近得到光滑间断解，需采用恰当的限制器 φ ，目的是为了能在激波附近

得到光滑间断解，防止解在激波附近出现非物理数值振荡，最常引入的是 **min mod** 限制器。

若 φ 满足对称性条件，状态变量 \mathbf{U}_L 和 \mathbf{U}_R 在控制体内线性分布。内插出界面状态后，由一阶 TVD 数值通量公式便得二阶 TVD 格式的通量

$$\mathbf{F}(\bar{\mathbf{U}}) = \mathbf{F}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R) \quad (9-53)$$

2 边界条件处理

处理边界条件的基本要求为：计算问题在数学上适定，在物理上合理；尽量不影响内点数值解的精度和稳定性，否则会成为误差扰动源。

浅水流计算中常用因变量为水深和流量，故而边界条件主要有三种形式：

- (1) 给定水位过程；
- (2) 给定流量过程；
- (3) 给定水位流量关系。

当然，这种物理边界条件是域内外流场相互作用的结果，具有近似性。

以上介绍的法向数值通量计算方法只适用于计算域内部单元界面。当单元边为计算域的边界或为实体边界（如工程建筑物）时，数值通量计算就变成了边界黎曼问题。这种条件下， U_L 为计算域内已知状态，而 U_R 是未知状态。一般可根据局部流态（急流或缓流）适当选定法向输出特征的相容关系，并利用给定的物理边界条件和边界内侧的已知流动状态 U_L ，联解确定除边界外侧的未知状态 U_R ；然后与内部单元计算完全相同地确定跨外部边界的法向数值通量。

有限体积法具有以下种不同形态的边界：

(1) 开边界

开边界可分为缓流开边界和急流开边界。对于急流开边界，其处理情况很简单，因为其下游水力要素完全由上游决定，故不论是水位、流量或水位流量关系，必须同时给定在入流边界上。对于开边界的特征值符号、相容关系和边界条件类型的相关公式总结见下表 9-2。

以讨论缓流开边界的情况为例，未知状态的确定方法如下所示：

- (1) 给定水位 h_R

h_R 为已知的水位值，根据相容关系 $u_R + 2\sqrt{gh_R} = u_L + 2\sqrt{gh_L}$ 得到

$$u_R = u_L + 2\sqrt{g}(\sqrt{h_L} - \sqrt{h_R}), \quad v_R = v_L;$$

- (2) 给定单宽流量 Q_R

Q_R 为已知的流量值，可以求解方程组 $\begin{cases} Q_R = h_R u_R \\ u_R = u_L + 2\sqrt{g}(\sqrt{h_L} - \sqrt{h_R}) \end{cases}$ 得到相应

的 h_R 和 u_R 值，以及 $v_R = v_L$ ；

(3) 给定边界处的水位流量关系

已知边界处的水位流量关系 $Q_R = f(h_R)$ ，可以求解方程组

$\begin{cases} Q_R = f(h_R) \\ u_R = u_L + 2\sqrt{g}(\sqrt{h_L} - \sqrt{h_R}) \end{cases}$ 可以得到相应的 h_R 和 u_R 值， $v_R = v_L$ 。

表 9-2 浅水方程组有限体积法边界处理

流态类型	入流开边界		出流开边界	
	缓流	急流	缓流	急流
特征值符号	$\lambda_1(U_L) < 0$	$\lambda_1(U_L) < 0$	$\lambda_1(U_L) < 0$	$\lambda_1(U_L) > 0$
	$\lambda_2(U_L) < 0$	$\lambda_2(U_L) < 0$	$\lambda_2(U_L) > 0$	$\lambda_2(U_L) > 0$
	$\lambda_3(U_L) > 0$	$\lambda_3(U_L) > 0$	$\lambda_3(U_L) > 0$	$\lambda_3(U_L) > 0$
相容关系	$u_R + 2c_R = u_L + 2c_L$		$u_R + 2c_R = u_L + 2c_L$ $v_R = v_L$	$q_R = q_L$
个数	1	0	2	3
边界条件类型	水位 h_R 或单宽流量 Q_R 或水位—流量关系，此外附加 $v_R = v_L$ 或 $v_R = 0$	必须给定 q_R 三个分量或相关信息	水位 h_R 或单宽流量 Q_R 或水位—流量关系	
个数	2	3	1	0

注：表 9-2 中缓流开边界相容关系是忽略非齐次项 S_o 和 S_f 的结果，如果需要考虑这种影响，要加入非齐次项沿特征线的积分项。此外，已有数值试验证明应用给定的精确物理边界条件以取代某个相容关系也是可行的。

(2) 陆地边界

单元体的交界面为陆地边界（又称闭边界），表示边界处无水流通过。此种情况包括三个相容关系，如下：

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}gh_L^2 + h_L|u_L|u_L &= \frac{1}{2}gh_R^2 + h_R|u_R|u_R \\ v_R &= 0, \quad u_R = 0 \end{aligned}$$

陆地边界状态可表示为：

$$u_R = -u_L \quad v_R = v_L \quad h_R = h_L$$

当局部弗劳德数 $F_r = u/\sqrt{gh}$ 较大时, 浅水方程组的静水压力假设在固壁处不再成立, 应采用考虑法向动量平衡的动水压力公式。

(3) 内边界

计算域内有时会存在水工建筑物, 如堰、闸、堤、桥墩和涵洞等。当单元边界与之相重合时, 单元边上的法向数值通量的计算就属于内边界问题。对物理边界上法向通量的计算要根据各种物理边界类型的不同区别对待。

(4) 动边界的干湿处理法

动边界是水平计算域中有水与无水区域的界线。水陆边界的外移是由于内侧水位高于外侧地面, 而内缩则由于内侧水位低于同侧地面。在动边界附近通常水深较小, 法向流动的非恒定性和非均匀性强, 动边界数值模拟中存在困难。如果不追踪动边界, 就把可能最大的区域作为固定计算区域, 不管有水无水都同样进行计算。

本模型采用有限体积法常用的处理方法是假定所有单元至少都存在一个极小的水深, 这样便可和其他单元同样计算。当计算域中存在随洪水或潮流涨落变化的陆地动边界时, 假设在有水区域之外的干床区域存在一个极薄的水层, 这就将一个动边界问题变为固定边界问题来处理。具体计算时规定一个很小的临界水深 (如 1mm) 作为陆地边界水深, 如果某单元及其所有毗邻单元的水深均低于该值, 则视为陆地, 这样计算便可以在整个固定区域内进行, 遇到某个单元及其四周均为陆地单元时跳过不计算。此时, 动边界所在单元必与陆地单元相临, 不必去确定其具体位置。数值解具有单元平均的含义, 动边界这个奇点也因积分处理而消失。

如果采用 TVD 格式, 因其具有单调性, 在满足数值稳定性的柯朗条件下, 除了物理规律 (即方程的非其次项和边界条件) 所决定的变化外, 数值解不会产生虚假振荡。这使得格式不但适用于计算间断解, 也有利于处理动边界。因为格式具有的无振荡性可保证数值解在小水深 (可取一很小的数值, 如 1 或 0.1cm) 情况下不会出现负水深而导致计算失稳。

(5) 边界切向流速的确定

根据特征理论, 入流边界处应给定切向流速, 而出流边界处它应由计算确定。但是入流边界切向流速因无实测资料而难以给定, 通常只有假设为零, 而出流的切向流速虽然可以计算得到, 但对域外而言该边界成了入流边界又需要假设其为零。因此, 不论入流出流, 通常都需要假设切向流速为零。但是如果边界水面扩散或收缩, 水深与流速沿边界分别不均匀, 切向流速实际是不为零的。硬性定其为零会导致边界对输出波产生虚假反射, 在边界附近数值解产生虚假振荡, 其影响可能会深入内部。因此, 边界线要选在流场均匀且与流线近似正交的地方¹。

3 地形处理

能否对地形的有效处理是验证模型能否解决实际工程问题的关键,尤其是间断地形(坡度很大)的处理。需要对干湿边界作特殊处理。

(1) 特殊单元水力模型

1. 相邻单元水位低于另一个的底高,由高单元进入低单元的通量可按跌水处理。可归结为解一平底渠道上的瞬时溃坝问题。但当地形坡度太大采取局部平底概化时,会导致浅水单元的计算流速放大很多,需采取适当的补救措施。
2. 相邻单元之一的水位低于另一个的底高,由低单元进入高单元时,当低单元水位低于高单元底高时按固壁处理图 9-4 (a),反之则按宽顶堰公式计算(图 9-4 (b))。

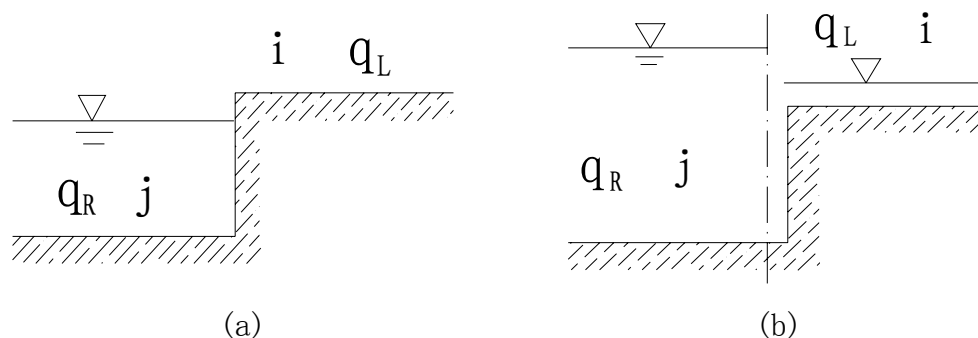


图 9-10

但当地形坡度过大或出现类似垂直台阶的地形时,浅水方程并不适用。主要是因为:(1)此情形局部非静水压强显著,浅水方程未考虑到这一情况;(2)数值算法中很难实现类似此地形的处理。此外,当出现非恒定流时,水位、流量在每一个计算时间步长内变化很大,此时,用宽顶堰公式计算的解与实际差别较大,除采用较小的 Δt 来减小误差外,应用SGM法是一个有效的方法。

(2) 水面坡降法 (SGM) 【Zhou J G et al. Numerical solutions of the shallow water equations with discontinuous bed topography. Int. Numer. Meth. Fluids. 38: 769~788, 2002】

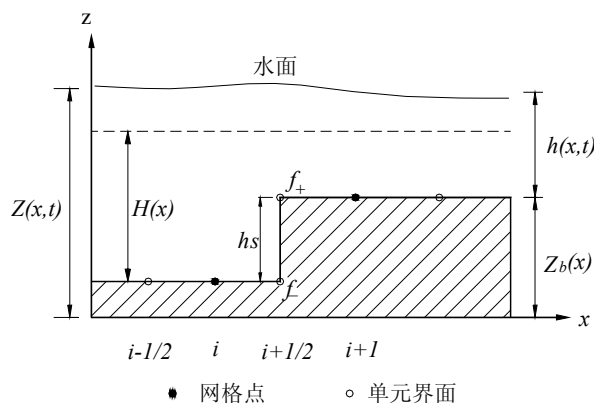


图 9-11 单元阶梯概化图

为了模拟河床中的不连续地形（例如垂直台阶地形），在计算单元通量时应考虑精确的数值方法。不失一般性，此处用一维问题来说明。在单元界面处采用分段线性假设，用 z_b^- 和 z_b^+ 来表示同一单元界面处的两个河底高程，在单元界面 $i+1/2$ 左边（图 9-11 中点 f_- ）用 $z_{bi+1/2}^-$ 代替 z_b ，在单元界面 $i+1/2$ 右边（图 9-11 中点 f_+ ）用 $z_{bi+1/2}^+$ 代替 z_b 。很明显，在不连续地形中，单元界面高程可由 z_b^- 和 z_b^+ 精确表示；在没有不连续地形时， $z_b^- = z_b^+$ 。因此，网格点 i 处高程 z_b 可由下式表示

$$z_{bi} = \frac{z_{bi+1/2}^- + z_{bi-1/2}^+}{2} \quad (9-54)$$

运用高阶精度 Godunov 类型格式（例如 MUSCL 格式），对于每个守恒变量的数据重构是非常必要的。在阶梯单元界面处用 SGM 重构数据。SGM 方法中水位 z 可由下式表示

$$z(x,t) = h(x,t) + z_b(x) \quad (9-55)$$

其中， $h(x,t)$ 为单元水深； $z_b(x)$ 为单元底高程。

运用分段线性重构法，水位 z 可表示为

$$z = z_i + (x - x_i) \delta z_i \quad (9-56)$$

其中， δz_i 为 z 的梯度，由下式定义：

$$\delta z_i = G\left(\frac{z_{i+1} - z_i}{x_{i+1} - x_i}, \frac{z_i - z_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right) \quad (9-57)$$

G 为坡度限制器，前文中的限制器。增加坡度限制可消除间断处的非物理振荡以对间断解的有效捕捉。

网格点水深为

$$h_i = z_i - z_{bi} \quad (9-58)$$

单元界面 $(i-1/2)$ 左、右边水深可由下列两式精确算出

$$h_{i-1/2}^L = g(z_{i-1} + \frac{1}{2}\Delta x_{i-1}\delta z_{i-1} - z_{bi-1/2}) \quad (9-59)$$

$$h_{i-1/2}^R = g(z_i - \frac{1}{2}\Delta x_i\delta z_i - z_{bi-1/2}) \quad (9-60)$$

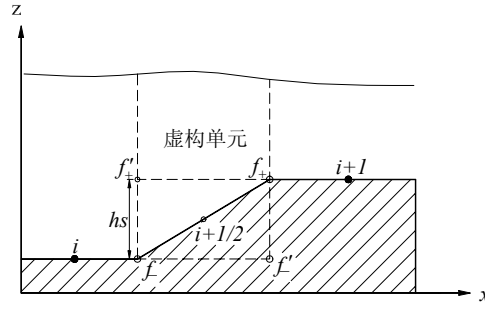


图 9-12

对于垂直台阶单元界面处，见图 9-12 中的虚构单元，界面 $i+1/2$ 由虚构单元 f 代替，其两侧界面为 f_- 和 f_+ ，则

$$h_{f_-}^L = g(z_i + \frac{1}{2}\Delta x_i\delta z_i - z_{bf_-}) \quad (9-61)$$

$$h_{f_-}^R = g(z_f + \frac{1}{2}\Delta x_f\delta z_f - z_{bf_-}) \quad (9-62)$$

如果移动虚构单元，则

$$\Delta x_f = (x_{f_+} - x_{f_-}) \rightarrow 0 \quad (9-63)$$

由 (9-63) 得

$$f_+ \rightarrow f_+^* \quad (9-64)$$

$$\lim_{f_+ \rightarrow f_+^*} (n_f - \frac{1}{2}\Delta x_f\delta z_f - z_{bf_-}) = z_{i+1} - \frac{1}{2}\Delta x_{i+1}\delta z_{i+1} - z_{bf_-} \quad (9-65)$$

用上式 (9-65) 代替式 (9-62)，得

$$h_{f-}^R = g(h_{i+1} - \frac{1}{2}\Delta x_{i+1}\delta z_{i+1} - z_{bf-}) \quad (9-66)$$

注意到当 $\Delta x_f = 0$ 时 $z_{bf-} = z_{bi+1/2}^-$ ，上面的式子最终可写成如下形式

$$h_{i+1/2}^L = g(z_i + \frac{1}{2}\Delta x_i\delta z_i - z_{bi+1/2}^-) \quad (9-67)$$

$$h_{i+1/2}^R = g(z_{i+1} - \frac{1}{2}\Delta x_{i+1}\delta z_{i+1} - z_{bi+1/2}^-) \quad (9-68)$$

同样，当考虑单元 $i+1$ 时，单元界面 $(i+1/2)$ 处左、右两边的 h 值如下

$$h_{i+1/2}^L = g(z_i + \frac{1}{2}\Delta x_i\delta z_i - z_{bi+1/2}^+) \quad (9-69)$$

$$h_{i+1/2}^R = g(z_{i+1} - \frac{1}{2}\Delta x_{i+1}\delta z_{i+1} - z_{bi+1/2}^+) \quad (9-70)$$

因此，可用 SGM 法重构数据，得到单元界面处的 $(hu)_L$ 、 $(hu)_R$ 和 $(hv)_L$ 、 $(hv)_R$ ，即相邻单元界面处中间状态变量 \mathbf{U}_L 和 \mathbf{U}_R 便可求出，再运用各种算法估算界面数值通量。

9.2.3 计算实例

1 溃坝水流计算

(1) 一维瞬时溃坝模型

这里结合学者 Garcia 和 Kahawita 于 1986 年对一维无摩擦溃坝问题的试验，利用二维 FVM 模型对该问题进行了模拟计算。上述两位学者的试验情况是这样的：设有一坡降为零的单宽矩形槽，该槽长 300m，槽中间设有一挡板。初始条件为上游水位 5m，下游 0.3m。然后，突然抽取挡板来模拟大坝全溃的情形。因为对该问题可求出具体解析解，我们可将模型模拟计算的结果与解析解进行对比，从而达到验证该模型是否具有计算间断解优点的目的。

下图描绘出大坝溃决 10 秒后整个水槽中本模型模拟计算出的水面曲线与解析解对应的水面曲线的对比情况。本溃坝问题的重要参数的模拟值与精确值如表 9-3 所示。

表 9-3 一维溃坝问题精确解与计算值之比较

	激波流速 (m/s)	激波水深 (m)	坝址处流量 (m ² /s)	坝址处流速 (m/s)	坝址处水深 (m)
精确解	7.37	1.68	10.37	4.67	9.22
计算值	7.09	1.61	10.35	4.60	9.25

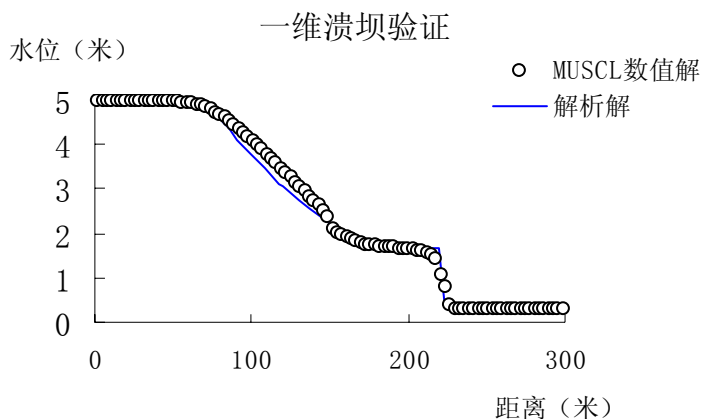


图 9-13 一维溃坝问题解析解与数值解比较

由计算成果表明，在溃坝波前间断处，MUSCL 格式显示出了良好的激波捕捉能力，激波流速和激波水深的相对误差分别为 3.8% 和 4.2%；对于坝址水深和坝址流速更是显示出该格式的优良特性，坝址处流速和水深的相对误差分别仅为 1.5% 和 1.4%。

采用限制器有效地消除了二阶格式的波前数值振荡，但从图中看出，该二阶格式在波前水面连续处存在一定的耗散，这是由于格式本身隐含带有耗散，再采用 minmod 扩散性限制器 (diffusive limiter) 必然会使计算产生过大的人工耗散，可采用压缩性的限制器 (如 Van Albada 限制器)。不同的限制器会对解的收敛特性和解的结果产生较大影响。

为了更好的验证 MUSCL 格式的性能，在上例的基础上有一长 1000 米的明渠，其中间设有一坝。坝上游水位 10 米，下游水位 2 米，空间步长 10 米，时间步长 0.1 秒。某时刻大坝全溃，下图是大坝溃后 30 秒的计算成果。

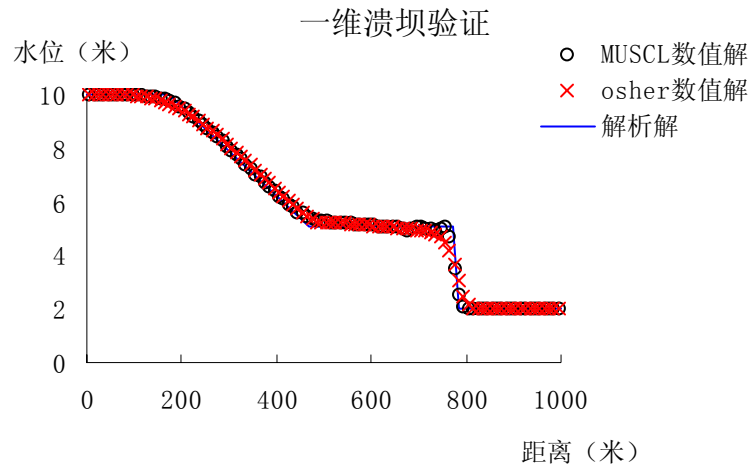


图 9-14 一维溃坝问题解析解与数值解比较

从图中可清楚看出，本文采用的二阶 MUSCL 格式与一阶 Osher 格式相比，更能给出波前陡峭的形状，更有效捕捉间断波，且采用恰当的限制器（如压缩性限制器）基本消除波前振荡，数值耗散比 Osher 格式要小，尤其在坝址附近不连续波面处。更符合理论值，充分显示了本文格式模拟溃坝洪水波间断面的形状和位置的优良性能。

（2）二维瞬时局部溃坝模型

1990 年 Fennema 和 Chaudhry 为研究溃坝问题作了如下试验：在长 200 米、宽 200 米且坡度为零的矩形区域中间设有一坝，初始时刻坝上游水位 10.0 米，坝下游水位 5.0 米。某一时刻大坝突然开有一宽度为 75 米的非对称缺口(图 4.6)，此情况模拟二维坝体局部瞬间全溃的情况。

为了能够有效的模拟溃坝断波，并保证显格式在计算初始时刻不失稳，本例计算步长 Δt 选取 0.01s，空间步长 Δx 选取 5m，考虑到上、下游水位之比 $\alpha = h_d / h_u = 0.5$ ， h_u 为坝址上游水深， h_d 为坝址下游水深。糙率 n 选取 0.03。以下是 $t = 7.2s$ 时溃坝下游自由水面分布图、等水深图及沿程各处流速分布图。

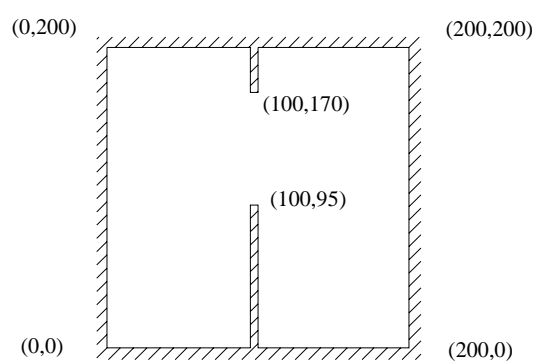


图 9-15 二维溃坝几何平面图

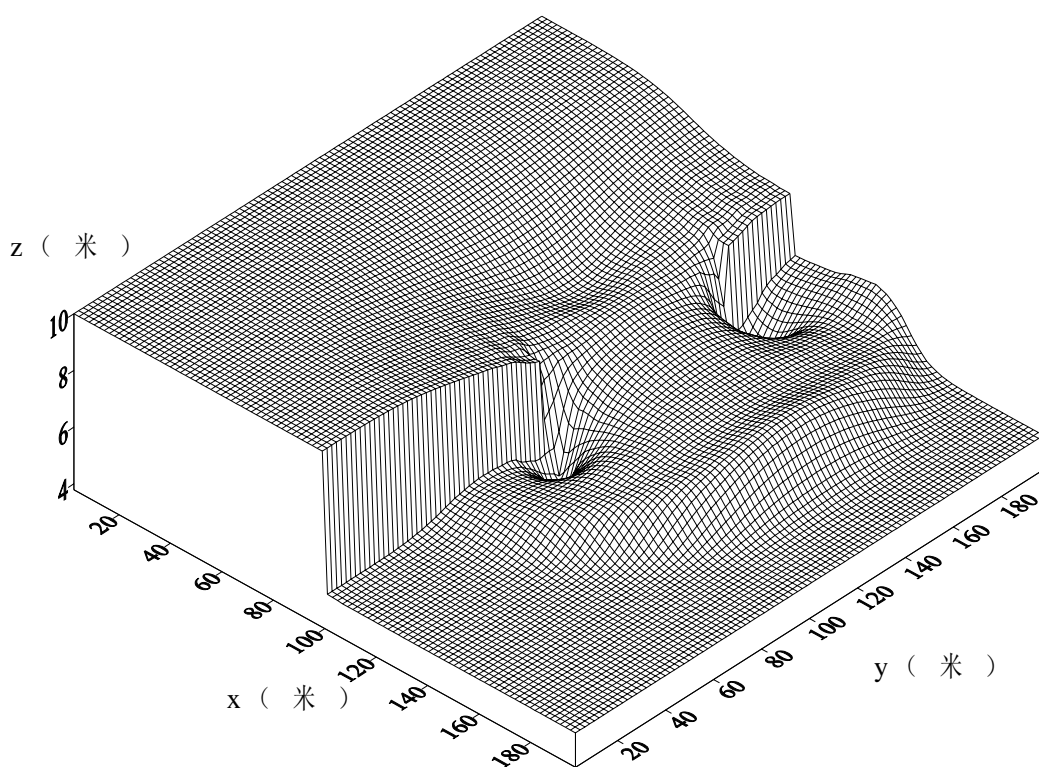


图 9-16 自由水面分布图

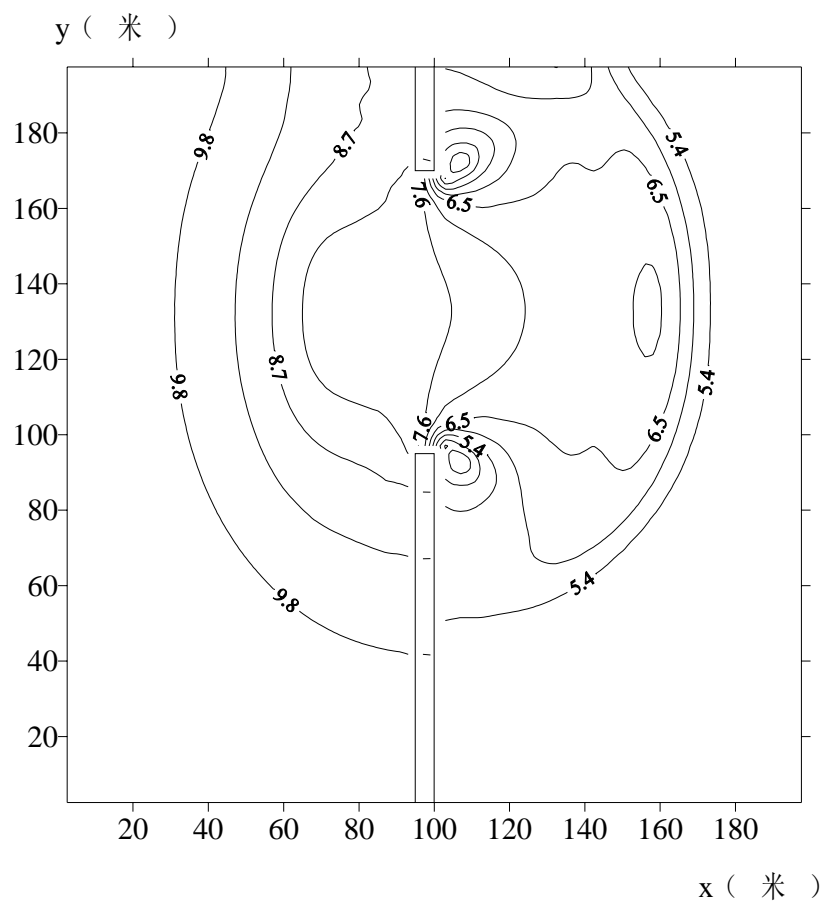


图 9-17 等水位图

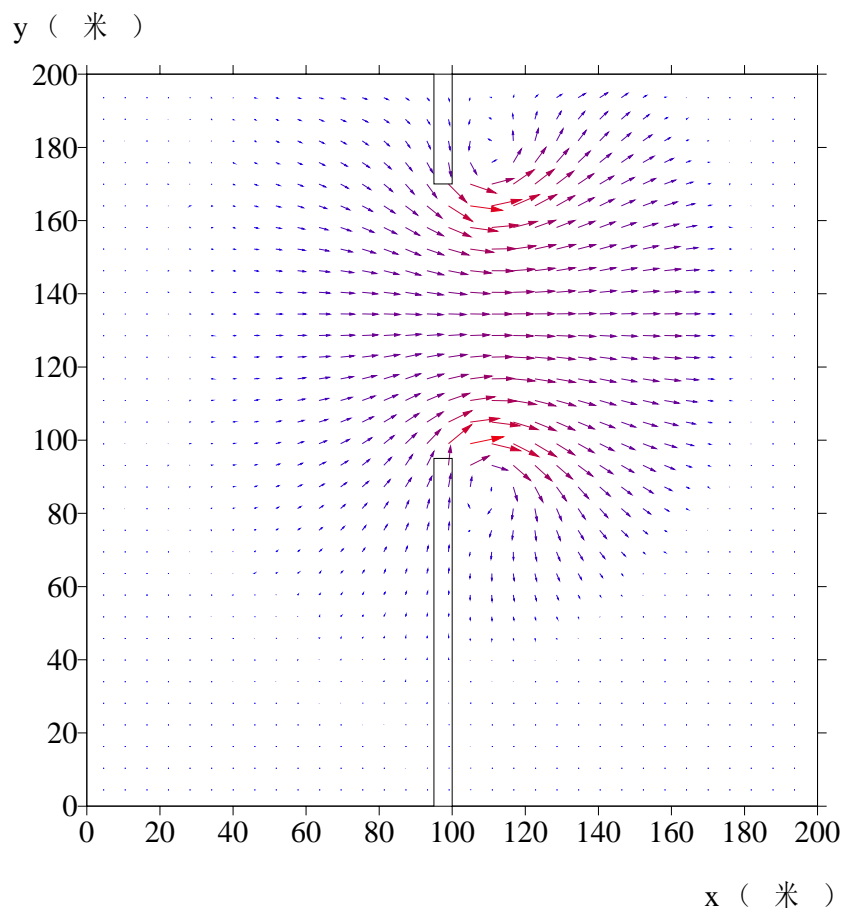


图 9-18 沿程流速分布图

由图 4.7 可知，缺口处溃坝泄流时向下游纵、横传播，并有负波向上游传播。溃坝波所到岸边形成雍高，由于溃坝缺口非对称，受岸边雍水影响及流速较大的缘故，在坝址处两边形成两个非对称的旋涡。波前以断波的形式传播，间断处有雍水，符合实际物理现象。同时可分析得：因 $\alpha = 0.5$ 较大（ α 大于某一临界值 α_c ），受下游水深的影响，坝址处将形成不连续波流（下图）。

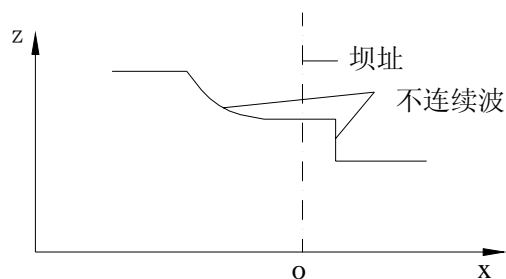


图 9-19 溃坝水面线

将 1990 年 Fennema 和 Chaudhry 的试验成果以及 1993 年 Alcrudo 和

Garcia-Navarro 的报告结果与我们的计算结果相比较，计算得出的水位分布与速度场和实测结果吻合的较好。计算出的坝址峰顶流量与理论值也较接近，瞬间局部溃坝峰顶流量可由“统一公式”得出：

$$q_m = \lambda \sqrt{g b H^{3/2}} \quad (9-71)$$

式中， λ 为流量参数。

2 温排水计算

(1) 二维温度对流扩散方程

守恒形式的二维温度对流扩散方程，

$$\frac{\partial(h\Delta T)}{\partial t} + \frac{\partial(hu\Delta T)}{\partial x} + \frac{\partial(hv\Delta T)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(D_{ix}h\frac{\partial\Delta T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(D_{iy}h\frac{\partial\Delta T}{\partial y}) - \frac{K\Delta T}{\rho C_p} + S_i \quad (9-72)$$

式中： ΔT 为水体增温量； D_{ix} , D_{iy} 分别为 x、y 方向扩散系数；K 为水面综合散热系数； C_p

为水的比热； ρ 为水体密度， S_i 为源汇项。

联立水流基本方程，可得到如下方程组：

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{S} \quad (9-73)$$

式中，

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} h \\ hu \\ hv \\ h\Delta T \end{pmatrix} \quad \mathbf{F}_x = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{gh^2}{2} \\ huv \\ hu\Delta T \end{pmatrix} \quad \mathbf{F}_y = \begin{pmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{gh^2}{2} \\ hv\Delta T \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ gh(S_{0x} - S_{fx}) \\ gh(S_{0y} - S_{fy}) \\ \Sigma D_i (\nabla h \Delta T)_n L^j - \frac{K\Delta T}{\rho C_p} + S_i \end{pmatrix}$$

同样，可以采用上述的离散格式求解。这里不在赘述。

估计水面散热能力就成为关键的课题。其中水面散热系数 K 是一个主要的计算参数。

考察以下关系式：

$$-\frac{dT_s}{dt} \rho c_p V = AK(T_s - T_e) \quad (9-74)$$

$$K = -\frac{dT_s}{dt} - \frac{\rho c_p h}{T_s T_a} \quad (9-75)$$

上两式中， V 、 A 为冷却池的容积及面积（ V/A 即为冷却池的平均深度）；

T_s 为水面水温；

T_e 为平衡水温，理论上是输入与支出相平衡时的水温，一般可用水面上

未受温水排放影响的自然水温 T_a ；

K 为散热系数， $W/m^2 \cdot ^\circ C$ （或 $t \cdot cal/m^2 \cdot ^\circ C \cdot d$ ）。

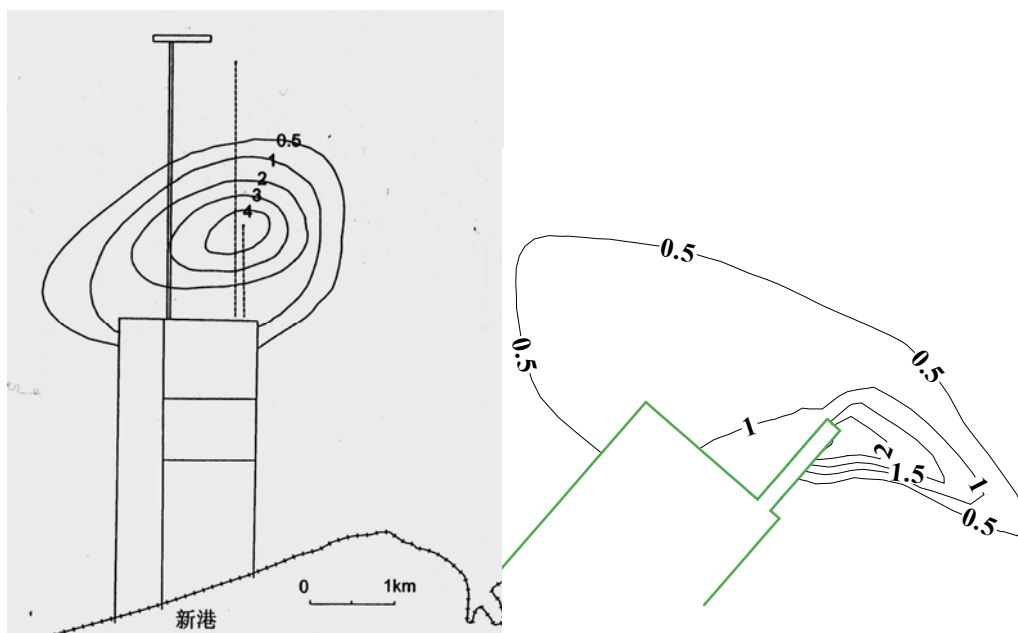
已知水面温度 T_s 及自然水温 T_a ，就可得到 K 。关于 K 的问题有不少研究，国内的实验研究也做得很多。根据河海大学的室内试验及有关单位的室外，有风试验进行比较，一般选用德国的 Gunnerberg 公式；

$$K = 2.2 \times 10^{-7} (T_s + 273.15)^3 + (0.0015 + 0.00112u_x) \times \left[(2501.7 - 2.366T_s) \frac{25509}{(T_s + 239.7)} \times 10^{\frac{7.567T_s}{(T_s + 239.7)}} + 1621 \right] \quad (9-76)$$

室内水盆试验（直径 2.0m，深 0.3m，四周绝缘），又用室内的温水楔模型及室外的水盆试验与原型温水楔验证了上列公式，结果都是满意的。

（2）模型验证图

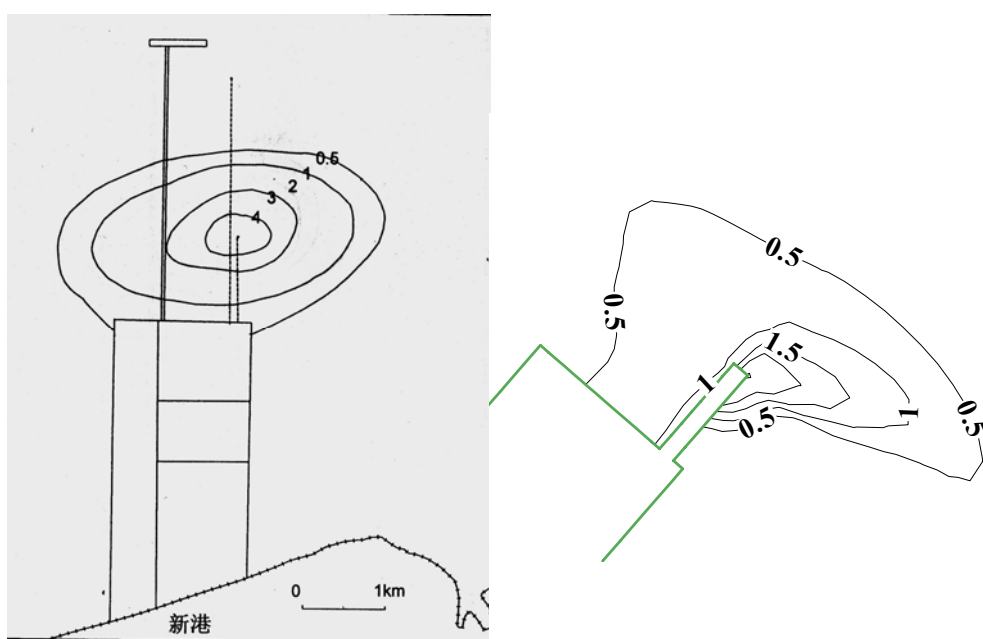
根据上述方程，计算了某电厂热排水影响。电厂规划容量 $4 \times 600MW$ ，电厂循环冷却水采用海水一次直流方案。下面是物理模型和数值模拟计算成果比较。



(1) 物模结果

(2) 数模结果

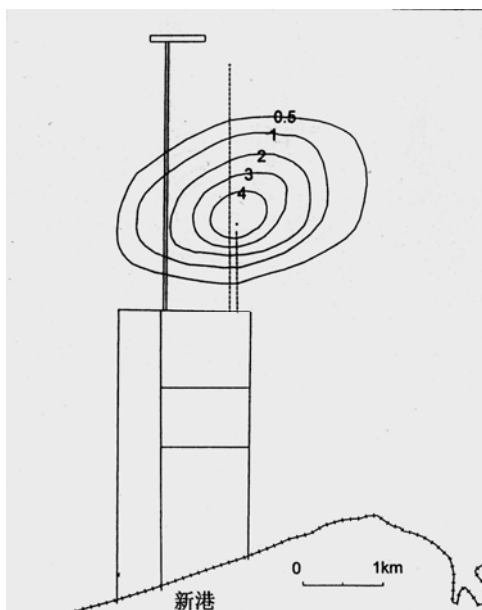
图 9-20 夏季小潮涨急时温升场分布验证图



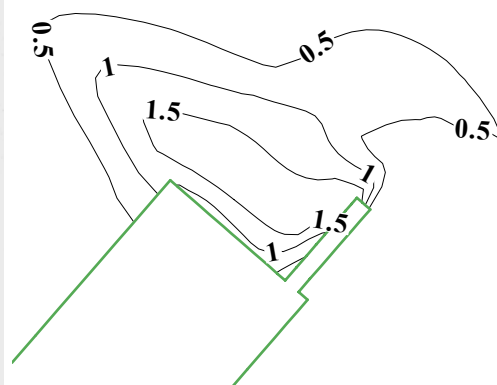
(1) 物模结果

(2) 数模结果

图 9-21 夏季小潮涨憩时温升场分布验证图

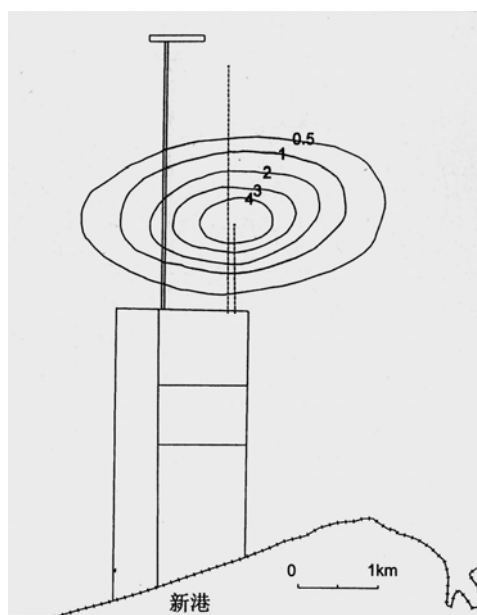


(1) 物模结果

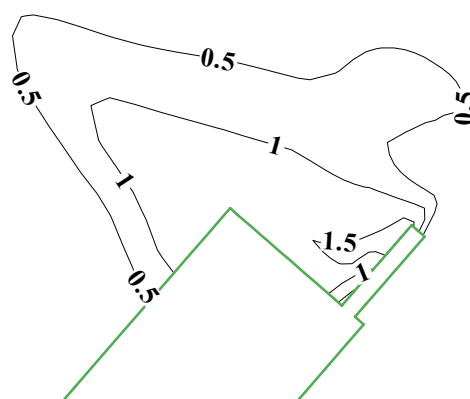


(2) 数模结果

图 9-22 夏季小潮落急时温升场分布验证图



(1) 物模结果



(2) 数模结果

图 9-23 夏季小潮落憩时温升场分布验证图

(2) 等温升包络面积验证情况

工程各工况条件下排水口附近等温升（1℃、0.5℃）的包络面积验证情况见表 9-5。

表 9-5 排水口附近等温升包络面积比较（单位：Km²）

季节	潮型	1℃温升包络面积		0.5℃温升包络面积	
		物模结果	数模结果	物模结果	数模结果
夏季	大潮	6.29	1.18	10.55	5.30
	小潮	3.45	9-17	6.15	10.26
冬季	大潮	8.41	0.92	10.43	5.00
	小潮	9-58	9-95	6.82	11.73

§ 9.3 三维紊动分层流计算

自然界中由于各种各样的原因，常常会引起流体密度的变化，出现分层流。分层流种类繁多，水流中常见的有大体积水域的水体受太阳辐射而形成的热力分层流，热电厂冷却水排入天然受纳水体形成的温度分层流，潮汐河口盐、淡水混合形成的盐度分层流，进入水库区的高含沙水流、水库排淤和污染物质的排放形成的分层流等。这些环境水体中的紊动型态及其中的温、盐等物质输运极其复杂多变。弄清其流动规律及其中的温、盐等物质输运能使我们有效地解决工程问题，如沿海地区兴建应急淡水水库，科学的废水排海（湖、河口）处置技术，热电厂冷却水在河口近岸区的排放等。由于物理模型试验代价较高，而且受场地和特殊工况的限制；同时，数值求解技术的日臻完善和计算机技术的飞速发展，使数值模拟在该研究领域成为最重要的研究手段之一。这里，采用单元中心，非结构同位网格有限体积法对该问题进行数值模拟，以作示例。

9.3.1 紊动分层流基本方程

由 Reynolds 时均法，可得描述紊流时均运动的方程和时均物质输运的方程组：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_j)}{\partial x_j} = 0 \quad (9-78)$$

$$\frac{\partial(\rho U_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_j U_i)}{\partial x_j} = f_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial(\rho R_{ij})}{\partial x_j} \quad (9-79)$$

$$\frac{\partial(\rho T)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_j T)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(D_T \frac{\partial T}{\partial x_j} - \overline{\rho u_j \theta} \right) + q_T \quad (9-80)$$

$$\frac{\partial(\rho \phi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_j \phi)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(D_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_j} - \overline{\rho u_j \phi} \right) + q_\phi \quad (9-81)$$

式中， U_i 和 u_i 分别为 x_i 方向的平均速度分量和脉动速度分量； θ 脉动温度， ϕ 为脉动浓度； R_{ij} 为 Reynolds 应力张量， $\overline{u_j \theta}$ 为热通量项， $\overline{u_j \phi}$ 为浓度通量项。 q_T 和 q_ϕ 分别为相应的源项。

对于密度变化不是很大的分层流动，通常引入 Boussinesq 近似来简化求解。即认为水流的温度和物质浓度的不均匀所引起的密度变化很小，在 N-S 方程求

解时，只在重力项中考虑密度的变化，而视其它项中的密度为常数。这样方程组可简化为

$$\frac{\partial U_j}{\partial x_j} = 0 \quad (9-82)$$

$$\rho_a \frac{DU_i}{Dt} = f_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) - \rho_a \frac{\partial (R_{ij})}{\partial x_j} \quad (9-83)$$

式中： $f_i = -\Delta\rho g_i$ ， $P = p + \rho_a g_i$

$$\rho_a \frac{DT}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(D_T \frac{\partial T}{\partial x_j} - \rho_a \overline{u_j \theta} \right) + q_T \quad (9-84)$$

$$\rho_a \frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(D_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_j} - \rho_a \overline{u_j \phi} \right) + q_\phi \quad (9-85)$$

式中， ρ_a 为环境流体密度。

状态方程为：

$$\Delta\rho = \rho(T, S, \phi \dots) - \rho_a \quad (9-86)$$

式中， T 为温度， S 为盐度， ϕ 为表示其它引起密度变化的标量。

9.3.2 紊流模型及控制方程离散

将控制方程写成通用形式，列入控制方程表 9-1。

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j \phi) = \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho D_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_j}) + S_\phi \quad (9-87)$$

其中： ρ 为流体密度； ϕ 通用变量，如速度、温度、紊动能等； Γ_ϕ 为扩散系数；

S_ϕ 为源项。

紊流模型采用各向异性浮力紊动流显式代数雷诺应力模型（EARSIM），具体模式以及边界条件可以参看文献【赖】。紊流模型常数取值如下： $C_k = 0.24$ ， $C_\epsilon =$

$$0.15, C_{\varepsilon 1}=1.44, C_{\varepsilon 2}=1.92, C_{\varepsilon 3}=0.8, C_3=0.55, \sigma_t=0.9$$

表 4-1 通用方程系数表

方程	因变量	D_ϕ	S_ϕ
x-动量	u	$\nu + \nu_t$	$f_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho R_{ij}^{an} \Big _s + \rho R_{ij} \Big _b \right)$ $i = 1, 2, 3, \text{分别代表 3 个方向}$
y-动量	v	$\nu + \nu_t$	
z-动量	w	$\nu + \nu_t$	
K 方程	k	$\nu + C_k \frac{k^2}{\varepsilon}$	$P_k + P_b - \varepsilon$
ε 方程	ε	$\nu + C_\varepsilon \frac{k^2}{\varepsilon}$	$C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P_k + C_{\varepsilon 3} \frac{\varepsilon}{k} P_b - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k}$
标量方程	T、S 等	$D_T + \nu_t / \sigma_t$	q_ϕ

利用非结构网格技术离散微分方程，选取二阶逆风格式离散。基于辅助点法的通用离散方程的最终形式为

$$a_p \phi_p^{n+1} + \sum_{j=1}^m a_j \phi_{p,j}^{n+1} = Q^\phi \quad (9-88)$$

其中， a_p ， a_j 为离散系数， Q^ϕ 为源项。

求解粘性不可压缩流动，必须处理压力速度耦合问题。下面介绍非结构网格上的压力校正法——SIMPLEC 算法。

9.3.3 压力校正法

过去，为了避免因采用常规离散方法而造成波状压力场和速度场，研究人员成功的开发了交错网格的算法，即采用不同的网格系统来描述不同的变量：速度保有一套网格系统，其它因变量如压力、温度等共用主网格系统。该方法在结构网格计算中得到了广泛的应用。但其很难扩展到非结构网格中。在这一背景下，同位网格技术得以应用发展，该节将阐述非结构同位网格（即速度、压力等变量均使用同一套控制体积）上的压力校正法的实现方式。

1 单元面速度插值

利用动量插值法（momentum interpolation method）可得单元面法向速度 $u_{n,e}^*$

$$u_{n,e}^* = \bar{u}_{n,e}^* + \left(\frac{\Delta V}{a_P} \frac{\delta p}{\delta n} \right)_e - \left(\frac{\Delta V}{a_P} \right)_e \left(\frac{\delta p}{\delta n} \right)_e \quad (9-89)$$

其中，上标“*”代表压力校正之前的变量值，上划线“—”表示由单元面两侧单元中心点值作线性插值。由上式估算的界面流速公式可以防止同位网格上的压力波动。压力法向导数采用下式估算

$$\left(\frac{\delta p}{\delta n} \right)_e = \frac{p_E - p_P}{L_{PE'}} + \frac{(gradp)_E \cdot (\mathbf{r}_{E'} - \mathbf{r}_E) - (gradp)_P \cdot (\mathbf{r}_{P'} - \mathbf{r}_P)}{L_{P'E'}} \quad (9-90)$$

因为引入动量插值主要为了防止同位网格上的压力波动，所以上式右端第二项忽略不会影响计算结果的精度。

2 压力校对方程

由 SIMPLE 算法可得

$$u'_{n,e} = - \left(\frac{\Delta V}{a_P} \right)_e \left(\frac{\delta p'}{\delta n} \right)_e \quad (9-91)$$

上标“'”代表校正值。将上式代入单元面导数近似公式，有

$$u'_{n,e} = - \left(\frac{\Delta V}{a_P} \right)_e \left[\frac{p'_E - p'_P}{L_{PE'}} + \frac{(gradp')_E \cdot (\mathbf{r}_{E'} - \mathbf{r}_E) - (gradp')_P \cdot (\mathbf{r}_{P'} - \mathbf{r}_P)}{L_{P'E'}} \right] \quad (9-92)$$

该式即为单元面速度校正值的计算表达式。

在按上述的速度校正公式进行计算时，对压力校正必须采用亚松弛技术，否则难以保证计算的稳定。此时，压力校正写成

$$p = p^* + \alpha_p p' \quad (9-93)$$

式中， α_p 为压力松弛系数，如果不考虑正交项的影响，在网格正交性较差时，须采用很小的亚松弛技术， α_p 甚至取到 0.05。松弛系数选择地好坏，将对计算的收敛速率产生很大的影响。由于在流体计算中压力场的计算费用在整个计算费用中占很大的比重。因此加速压力场的计算将是很值得的工作。

考虑到在上述的速度校正公式推导过程中，略去了邻点单元速度校正的影响，它虽然不影响计算的最后结果，但是影响中间结果，从而影响计算的收敛速率。为此，Doormal 和 Raithby 提出了考虑邻点单元速度校正影响的 SIMPLEC 算法，该算法由于其易于实现，得到了广泛的应用。由 SIMPLEC 算法：

$$u'_{n,e} = -\beta_e \left(\frac{\Delta V}{a_p} \right)_e \left(\frac{\delta p'}{\delta n} \right)_e \quad (9-94)$$

其中， $\frac{1}{\beta_e} = 1 + (1-\omega) \left(\frac{\sum_{j=1}^m a_j}{a_p} \right)_P + \omega \left(\frac{\sum_{j=1}^m a_j}{a_p} \right)_E$ ，而后代入单元面导数近似公式，有

$$u'_{n,e} = -\beta_e \left(\frac{\Delta V}{a_p} \right)_e \left[\frac{p'_E - p'_P}{L_{P'E'}} + \frac{(\text{grad} p')_E \cdot (\mathbf{r}_{E'} - \mathbf{r}_E) - (\text{grad} p')_P \cdot (\mathbf{r}_{P'} - \mathbf{r}_P)}{L_{P'E'}} \right] \quad (9-95)$$

该式即为单元面速度校正值的计算式。

由连续性条件，有

$$\sum_j F_j^m = \sum_j F_j^{m*} + \sum_j F_j^{m'} = 0 \quad (9-96)$$

代入式(2-92)或(9-95)，式(9-96)就转化为关于 p' 的代数方程，整理后即得压力校正方程。由于单元面导数近似引入了非正交项，压力校正方程不能直接采用隐式法求解。为此，可采用延迟校正技术将非正交项用前一时步值代入作近似计算（即按显式计算）或忽略非正交项。若忽略非正交项的单元面插值速度和速度校正公式，可得到如下 SIMPLEC 算法的压力校正方程

$$a_p^p p' + \sum_{j=1}^m a_j^p p'_{P,j} = Q_{p'} \quad (9-97)$$

其中，系数 $a_j^p = \rho_j A_j \beta_j \left(\frac{\Delta V}{a_p} \right)_j \frac{1}{(L_{P'E'})_j}$ ；

$$Q_{p'} = \sum_j F_j^{m*} ;$$

$$a_p^p = -\sum_j a_j^p .$$

求得 p' 后，可得校正后的压力场 $p = p^* + \alpha_p p'$ 及速度场 $\mathbf{u} = \mathbf{u}^* + \mathbf{u}'$ 。这里，单元中心点速度校正 \mathbf{u}'_p 表达式为：

$$\mathbf{u}'_p = -\frac{\Delta V}{a_p} \left(\frac{\delta p'}{\delta \mathbf{x}} \right)_p \quad (9-98)$$

3 算法实施

依据上文推导，可将非结构同位网格上 SIMPLE（SIMPLEC）算法的实施步骤归结如下：

- （1）预先估计一个压力场 p^* ；
- （2）由动量方程可解出速度场 \mathbf{u}^* 。对初始的速度场 \mathbf{u}^* ；
- （3）由式（9-89） 计算单元面插值速度，代入压力校正方程（9-97）并求解方程得 p' ；
- （4）校正压力场与速度场，获得本层次迭代满足连续性条件的速度及压力场；
- （5）将上述计算得到的新值作为初始场，返回到第 2 步，重复这一过程直至得到收敛的速度场。

9.3.3 边界条件

对实际问题，水流及物质输运问题必须在相应的初始条件和边界条件下才能得到确定的解。初始条件是指水流在初始时刻的运动状态，给定实际值即可。实际紊动水体，边界条件较为复杂，可以是固体壁面，自由表面，也可以是实际水体的一部分。常见的有入流、出流、壁面、对称面及自由面边界。

（1）入流和出流边界

进口的流速、紊动特征量以及温度（盐度）等标量作为本质边界条件给定。

$$u_i|_{inlet} = u_i(t_0) \quad (9-99)$$

$$\phi|_{inlet} = \phi(t_0) \quad (9-100)$$

紊动特征量 k , ε 可按以下式子给定^[112]：

$$k = 0.004U_{in}^2 \quad (9-101)$$

$$\varepsilon = \frac{C_\mu^{3/4} k^{3/2}}{\kappa y} \quad (9-102)$$

式中 U_m 为入流合速度, y 为离最近壁面的距离。

对恒定流计算, 出口通常置于下游充分发展区域内, 在该出口断面假设各物理量沿程变化足够小, 可忽略不计。即给出梯度为零的边界条件。

(2) 固体壁面

在近壁面流速、物质浓度等梯度很大, 为了得到合理的解, 必须布置较密的网格, 这样做很不经济。为克服边界附近网格过密引起的数值计算问题, 工程应用上通常在近壁区构造近壁函数, 把第一个节点布置在旺盛的紊动区内, 而在粘性子层内不布置任何节点。粘性子层内的流动假设服从一定的分布规律。然后, 由局部平衡条件得到壁面剪切应力 (假设常分布) 和紊动能方程的源项以及近壁面的耗散率。最为常用的是对数壁面律和解析式壁函数。这里以对数律壁函数为例说明。壁面附近流速服从对数分布律:

$$\frac{U_p}{U_p^*} = \frac{1}{\kappa} \ln(E \frac{U_p^* \cdot Z_p}{\nu}) \quad (9-103)$$

式中 U_p 为平行于壁面的近壁层合流速。 U_p^* 为摩阻合流速。 Z_p 是近壁面第一层网格节点与壁面的距离。 κ 为 Karman 常数, $\kappa = 0.4$ 。 E 为反映壁面粗糙度的系数, 对光滑壁面, $E = 9.0$ 。

在三维情况下, 近壁处平行于壁面的速度分量有两个 u_p 和 v_p , 壁面合剪应力为:

$$\tau_p = \frac{\rho C_\mu^{1/4} k_p^{1/2} U_p}{\ln(E Z_p^*) / \kappa} \quad (9-104)$$

式中 $U_p = \sqrt{u_p^2 + v_p^2}$

$$Z_p^* = C_\mu^{1/4} k_p^{1/2} Z_p / \nu \quad (9-105)$$

当 $Z_p^* < 11.6$, 壁面合剪应力 τ_p 按层流公式计算

$$\tau_p = \mu \frac{U_p}{Z_p} \quad (9-106)$$

壁面附近的紊动能式中 k 及其耗散率 ε 按下式确定。

$$k = \frac{U_p^{*2}}{C_\mu^{1/2}}, \quad (9-107)$$

$$\varepsilon = \frac{U_p^{*3}}{\kappa Z_p} \quad (9-108)$$

对于物质浓度 ϕ 的边界条件, 一般忽略穿越壁面的通量, 取其法向梯度为零,

即:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x_n} \right|_{wall} = 0 \quad (9-109)$$

(3) 自由表面和对称面

自由水面采用“刚盖假定”, 即把自由面作为一个无摩阻的固定面处理, 略去自由表面上的风应力和与大气层的热交换, 将自由面近似看作对称平面。给定如下:

$$U_n|_{sym} = 0 \quad (9-110)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x_n} \right|_{sym} = 0 \quad (9-111)$$

式中, n 为自由表面的外法向方向; ϕ 可表示与自由表面相切的流速分量, 温度盐度等标量。

9.3.4 盐度引起的负浮力流动

负浮力流动, 又称重力流 (gravity currents) 或密度流 (density currents)。该流动现象非常常见, 如河口的盐水楔, 水库的泥沙异重流, 废水排江排海以及大气中的冷锋运动、沙尘暴等。在斜坡上潜行的重力流可概化为如图 9-1 所示的模型。

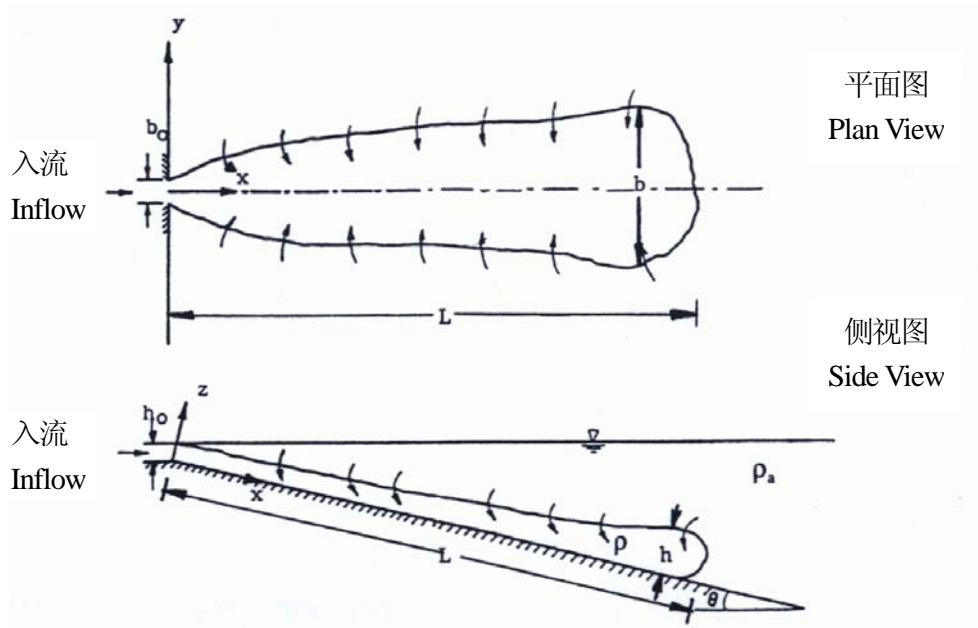


图 9-24 斜坡上潜行的重力流概化模型

利用文献^[115]的资料，计算了三维斜坡上的重力流。盐溶液从宽为 $b_0 = 2\text{ cm}$ ，高为 $h_0 = 0.5\text{ cm}$ 的入口以 $Q_0 = 9.8\text{ cm}^3$ 的流量恒定从 15° 斜坡上排入静止的水体中。盐水的浮力加速度为 $g' = 5.886\text{ cm/s}^2$ 。根据海水的状态方程^[116]，归结成如下计算条件：即含盐度为 8 ‰ 的 20°C 盐水排入 20°C 静止淡水中。计算平面区域为 $200\text{cm} \times 60\text{cm}$ ，剖分计算网格如图 9-2，共 8100 个单元。计算初始流速取为零，出口边界取流速及各物理参数梯度为零，计算时间步长为 0.1 s 。

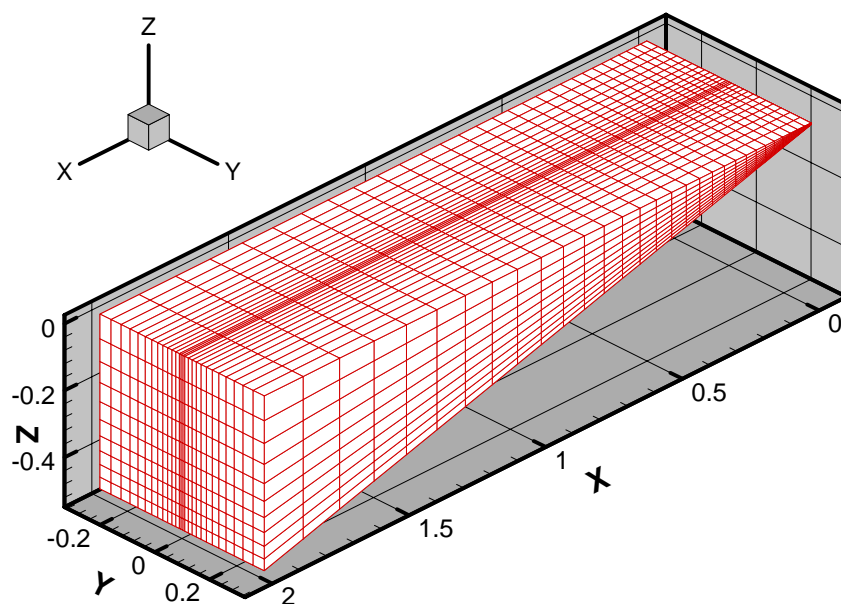


图 9-25 计算网格

如图 9-3 为重力流在斜坡上潜行的长度计算值比较，从图中可以看出，当前的计算长度（Present）、实验数据（Experiment）^[115] 和隐式代数应力/通量模型的结果（IARSM）^[117] 相同。在 $t = 30\text{ s}$ 时切片 $y=0$ 处的流速矢量图和盐度等值线图（图 9-4）中，则可以看出，在上层水体区域，形成一个垂向的环流，不断补充斜坡上潜行的重力流，而且重力流头部略厚于尾部，这些模拟得到的特征已得到了实验的证实。图 9-5 为 $t=125\text{ s}$ 盐度为 0.2 时的等值面俯视图。

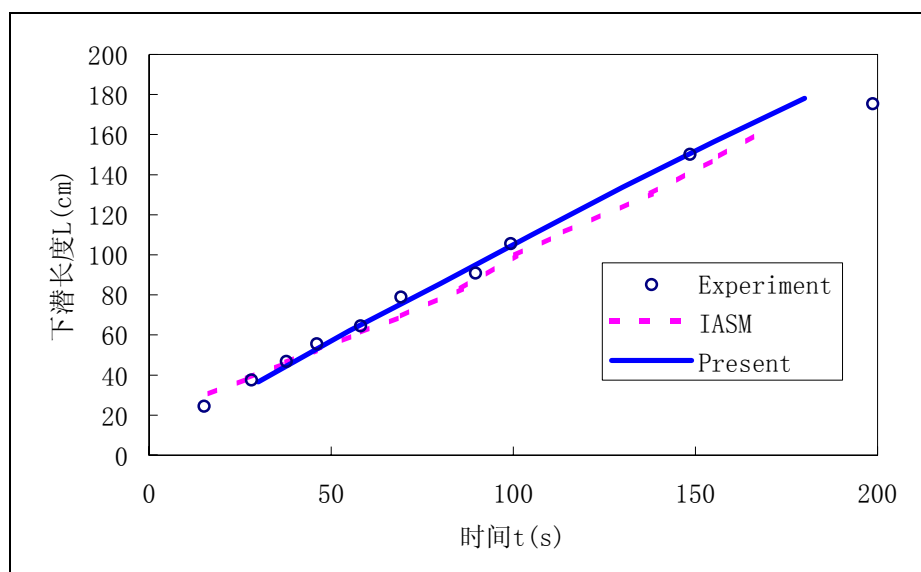
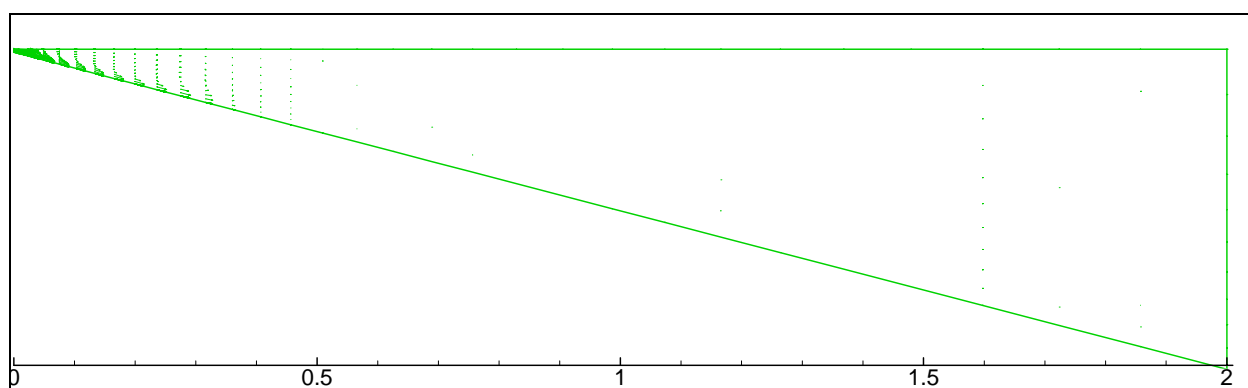


图 9-26 斜坡上潜行长度



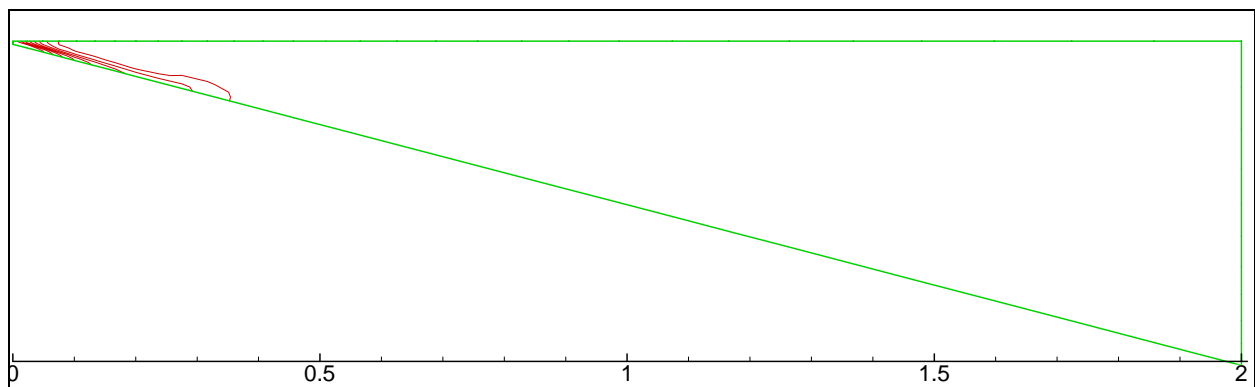


图 9-27 $t = 30 \text{ s}$ 时切片 $y = 0$ 处的流速矢量图和盐度等值线图

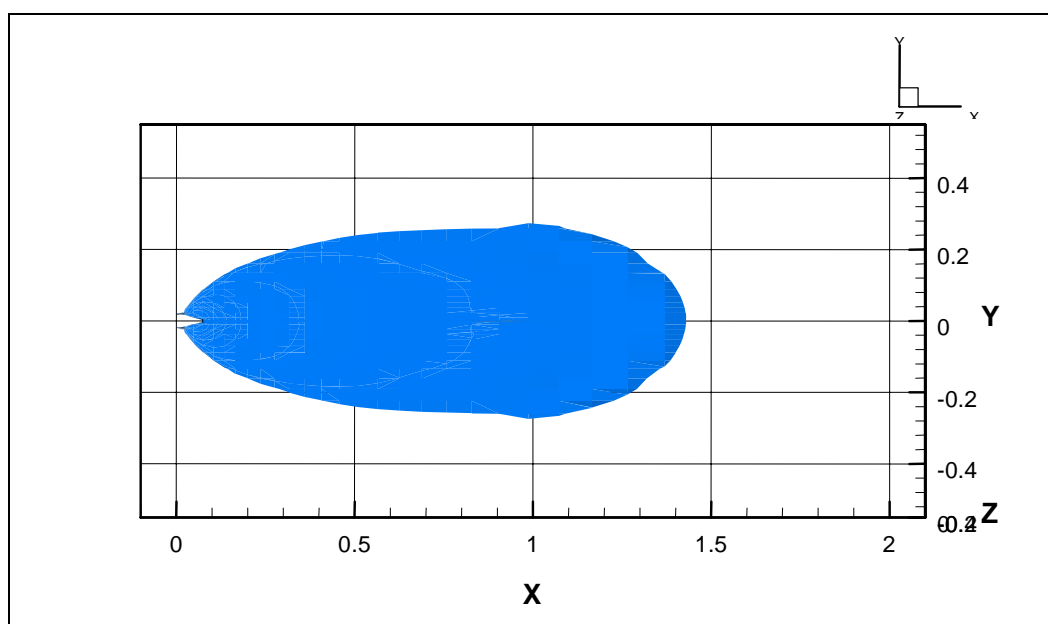


图 9-28 $t = 125 \text{ s}$ 盐度为 0.2 时的等值面俯视图