

Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Cezary Kaliszyk

Nr albumu: 189400

**Symulacja numeryczna zagadnienia
katapulty grawitacyjnej**

**Praca licencjacka
na kierunku MATEMATYKA
w zakresie MATEMATYKI OGÓLNEJ**

Praca wykonana pod kierunkiem
dra Piotra Muchy
Instytut Matematyki Stosowanej

Maj 2004

Oświadczenie kierującego pracą

Oświadczam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i stwierdzam, że spełnia ona warunki do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data

Podpis kierującego pracą

Oświadczenie autora (autorów) pracy

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data

Podpis autora (autorów) pracy

Streszczenie

Tematem pracy jest analiza modelu katapulty grawitacyjnej. Jest w niej opisana implementacja programu symulującego numerycznie zagadnienie katapulty grawitacyjnej wraz z przykładowymi wynikami. W pracy przedstawiono teoretyczny opis zagadnień poruszania się ciał w przestrzeni wraz z zależnościami torów ruchu od parametrów wejściowych. Przedstawiona jest możliwość wykorzystania zmiany orbity do uzyskania zjawiska katapulty grawitacyjnej. Pozwala ono na uzyskanie prędkości większej od początkowej. Główną częścią pracy jest dołączony do niej program.

Słowa kluczowe

katapulta grawitacyjna, astrofizyka

Dziedzina pracy (kody wg programu Socrates-Erasmus)

11.1 Matematyka

Klasyfikacja tematyczna

85 - Astronomy and astrophysics

85-04 - Explicit machine computation and programs

83 - Relativity and gravitational theory

83-04 - Explicit machine computation and programs

Spis treści

| | |
|--|----|
| Wprowadzenie | 5 |
| 1. Opis teoretyczny | 7 |
| 1.1. Pojęcia | 7 |
| 1.2. Twierdzenie Noether | 8 |
| 1.2.1. Sformułowanie | 8 |
| 1.2.2. Dowód | 8 |
| 1.3. Zasada zachowania momentu pędu | 9 |
| 1.4. Pierwsze prawo Keplera | 9 |
| 1.4.1. Sformułowanie | 9 |
| 1.4.2. Oznaczenia | 9 |
| 1.4.3. Dowód | 9 |
| 1.5. Drugie prawo Keplera | 11 |
| 1.5.1. Sformułowanie | 11 |
| 1.5.2. Dowód | 12 |
| 1.6. Trzecie prawo Keplera | 12 |
| 1.6.1. Sformułowanie | 12 |
| 1.6.2. Dowód | 13 |
| 2. Opis implementacji symulacji numerycznej zagadnienia | 15 |
| 2.1. Schematy całkowania | 15 |
| 2.2. Schemat działania programu | 16 |
| 3. Przykładowe wyniki | 17 |
| Bibliografia | 27 |

Wprowadzenie

Tematem pracy będzie analiza modelu katapulty grawitacyjnej. Rozważane będzie rozpatrywanie układu zaburzonego pod wpływem Słońca.

Kiedy ciało poruszające się w przestrzeni zbliża się do ciężkiego obiektu takiego jak planeta albo gwiazda będzie ono przyspieszane w jego kierunku. Droga po której ciało się porusza może być w ogólności dowolną krzywą stożkową. Rodzaj krzywej i jej parametry zależą od prędkości i kąta ruchu. W pracy przedstawione będzie uzależnienie typu krzywej i jej parametrów od współczynników ruchu.

Interesować nas będą przypadki w których masa jednego z obiektów jest istotnie większa od masy pozostałych, czyli te w których tor poruszania się jest hiperbolą albo parabolą. Wychodząc z pola grawitacyjnego będzie miało tą samą prędkość co przy zbliżaniu się. Jednak ze względu na przyciąganie zmieni się kierunek jego poruszania się.

Rozważmy następnie co się dzieje kiedy ciało (dajmy na to satelita) zbliża się do ciężkiej poruszającej się planety. Teraz, kiedy satelita jest przyspieszany w kierunku planety dodatkowo uzyskuje część z prędkości orbitalnej planety. Satelita straci całą prędkość, którą uzyskał dzięki grawitacji planety, jednak nie straci uzyskanej części prędkości orbitalnej. Zjawisko to nazywamy właśnie katapultą grawitacyjną.

Praca składa się z dwóch części. Pierwsza część jest opisem teoretycznym zagadnienia katapulty grawitacyjnej. Przypomniano w niej podstawowe twierdzenia ruchu ciał astrofizycznych - prawa Keplera wraz z dowodami oraz przedstawiono część rozwiązania zagadnienia dwóch ciał.

W drugiej części przedstawiona jest implementacja programu symulującego numerycznie zachowanie ciał w odpowiednich polach grawitacyjnych. Porównane są zmiany torów ciał w zależności od przyjętych warunków początkowych.

Przedstawiony jest najciekawszy fragment programu, przykładowe dane i wyniki działania programu.

Rozdział 1

Opis teoretyczny

Podstawowymi prawami opisującymi ruch ciał niebieskich są trzy prawa Keplera. Zostały one odkryte przez Johanna Keplera, niemieckiego uczonego, matematyka fizyka i astronoma przełomu XVI i XVII wieku. Dwa pierwsze zostały odkryte w 1609 roku, natomiast trzecie w 1618 roku. Kepler jedynie opisał ruch planet na podstawie obserwacji duńskiego astronoma Tychona Brahe, zostały one wyjaśnione teoretycznie dopiero przez Isaaca Newtona korzystając z jego teorii grawitacji.

Udowodnimy prawa Keplera korzystając jedynie z teorii grawitacji, w tym celu wprowadzimy niezbędne pojęcia i udowodnimy pomocnicze prawa z których będziemy korzystać czyli twierdzenie Noether, zasadę zachowania pędu oraz zasadę zachowania momentu pędu.

1.1. Pojęcia

W dalszym ciągu pracy potrzebne będą następujące pojęcia z geometrii różniczkowej:

Def: Przekształcenie $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_m) : W \rightarrow \mathbb{R}^m$ określone na otwartym podzbiorze W przestrzeni \mathbb{R}^m nazywamy **gładkim** wtedy i tylko wtedy kiedy jest ono klasy C^∞ , czyli Φ jest nieskończenie wiele razy różniczkowalne, czyli funkcje współrzędne Φ_i mają ciągłe pochodne cząstkowe wszystkich rzędów.

Def: Odwzorowanie $\phi : G \rightarrow \mathbb{R}^m$, gdzie $G \subset \mathbb{R}^k$ - zbiór otwarty, nazywamy **dyfeomorfizmem**, jeśli jest ono klasy C^1 , jest nieosobliwe i różniczkowalne, a odwzorowanie odwrotne ϕ^{-1} jest ciągłe.

Def: Podzbiór M przestrzeni afinicznej \mathbb{R}^m nazywamy m -wymiarową **rozmaitością** wtedy i tylko wtedy, kiedy dla każdego punktu $x \in M$ istnieje taki dyfeomorfizm $\Phi : W \rightarrow \Phi(W) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m-n}$ określony na pewnym otoczeniu W punktu x w \mathbb{R}^n , że $M \cap W = \Phi^{-1}(\mathbb{R}^m \times \{0\})$.

Def: Niech $M \subset \mathbb{R}^n$ i $S \subset \mathbb{R}^k$ będą rozmaitościami wymiarów odpowiednio m i s , a $F : M \rightarrow S$ dowolnym przekształceniem ciągłym. F nazywamy **przekształceniem gładkim** wtedy i tylko wtedy, kiedy dla dowolnej parametryzacji $p : U \rightarrow p(U)$, zbioru $p(U)$ otwartego w M i dla dowolnej parametryzacji $q : V \rightarrow q(V)$ zbioru $q(V)$ otwartego w S złożenie $q^{-1} \circ F \circ p : p^{-1}(F^{-1}(q(V))) \rightarrow V \subset \mathbb{R}^s$ określone na zbiorze otwartym w \mathbb{R}^m jest przekształceniem gładkim.

Def: Niech M będzie m -wymiarową rozmaitością w \mathbb{R}^n , a x dowolnym punktem M . Wtedy **przestrzenią styczną** do M w punkcie x nazywamy zbiór $T_x M$ wszystkich wektorów postaci $\gamma'(0)$, gdzie $\gamma : I \rightarrow M$ jest dowolnym przekształceniem gładkim odcinka $I \subset \mathbb{R}$ takim, że $0 \in I$ oraz $\gamma(0) = x$.

1.2. Twierdzenie Noether

Udowodnimy twierdzenie Noether, z którego wnioskiem będą zasada zachowania pędu oraz zasada zachowania momentu pędu potrzebne w dalszej części dowodu praw Keplera.

Niech M będzie rozmaitością gładką, a $L : TM \rightarrow \mathbf{R}$ gładką funkcją na wiązce stycznej do tej rozmaitości TM . Niech ponadto $h : M \rightarrow M$ będzie odwzorowaniem gładkim.

Definicja: Odwzorowanie zachowuje układ Lagrange'a (M, L) , jeśli

$$\forall \mathbf{v} \in TM : L(h_* \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}). \quad (1.1)$$

1.2.1. Sformułowanie

Jeśli jednoparametrowa grupa dyfeomorfizmów $h^s : M \rightarrow M, s \in \mathbf{R}, h^0 = E$ zachowuje układ Lagrange'a, to układ równań Lagrange'a odpowiadający funkcji $L, (M, L)$ ma całkę pierwszą $I : TM \rightarrow \mathbf{R}$ i można ją we współrzędnych lokalnych \mathbf{q} na rozmaitości zapisać:

$$I(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \frac{dh^s(\mathbf{q})}{ds} \Big|_{s=0}. \quad (1.2)$$

1.2.2. Dowód

Weźmy $M = \mathbf{R}^n, \varphi : \mathbf{R} \rightarrow M$. Niech $\mathbf{q} = \varphi t$ będzie rozwiązaniem równań Lagrange'a. Z założenia h_* zachowuje L , więc każde przesunięcie równania $h^s \circ \varphi : \mathbf{R} \rightarrow M$ też spełnia układ dla każdego s . Rozpatrzmy odwzorowanie:

$$\Phi : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n, \quad q = \Phi(s, t) = h^s(\varphi(t)). \quad (1.3)$$

Pochodne względem t będziemy oznaczać kropką, a względem s primem. Z założenia:

$$0 = \frac{\partial L(\Phi, \dot{\Phi})}{\partial s} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \Phi' + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\Phi}'. \quad (1.4)$$

Przy czym pochodne cząstkowe są brane w punkcie:

$$\mathbf{q} = \Phi(s, t), \quad \dot{\mathbf{q}} = \dot{\Phi}(s, t). \quad (1.5)$$

Dla każdego ustalonego s odwzorowanie $\Phi|_s = \text{const}$ spełnia równanie Lagrange'a, czyli:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} (\Phi(s, t), \dot{\Phi}(s, t)) \right) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} (\Phi(s, t), \dot{\Phi}(s, t)). \quad (1.6)$$

Oznaczmy $F(s, t) = \Phi(s, t), \dot{\Phi}(s, t)$ i podstawmy do równania (1.4) $\frac{\partial F}{\partial t}$ zamiast $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}$:

$$0 = \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \mathbf{q}' + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \left(\frac{d}{dt} \mathbf{q}' \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \mathbf{q}' \right) = \frac{dI}{dt}. \quad (1.7)$$

1.3. Zasada zachowania momentu pędu

Pokażemy zasadę zachowania momentu pędu względem osi \mathbf{e}_1 . Ponieważ wybór tej osi nie jest niczym uwarunkowany jest to równoważne zachowaniu momentu pędu względem dowolnej osi.

Obrót wokół osi \mathbf{e}_1 zachowuje układ. Pokażemy że zachowany jest także moment pędu względem tej osi czyli:

$$J_1 = \sum_i ((\mathbf{x}_i \times m_i \dot{\mathbf{x}}_i) \cdot \mathbf{e}_1). \quad (1.8)$$

Zastosujemy w tym celu twierdzenie Noether.

Jeśli jako h^s weźmiemy obrót wokół \mathbf{e}_1 o kąt s , to $\frac{d}{ds} h^s \mathbf{x}_i = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{x}_i$ więc:

$$I = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}_i} (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{x}_i) = \sum_i (\mathbf{m}_i \dot{\mathbf{x}}_i \cdot (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{x}_i)) = \sum_i ((\mathbf{x}_i \times \mathbf{m}_i \dot{\mathbf{x}}_i) \cdot \mathbf{e}_1). \quad (1.9)$$

A ta całka zgodnie z tezą twierdzenia Noether jest zachowana, co kończy dowód.

1.4. Pierwsze prawo Keplera

1.4.1. Sformułowanie

Wszystkie planety krążą po elipsach; w jednym z ognisk elipsy znajduje się słońce.

1.4.2. Oznaczenia

μ - masa zredukowana $\left(\frac{1}{\mu} \equiv \frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}\right)$

J - moment pędu

N - moment siły

dS - powierzchnia zakreślona w czasie dt przez promień wodzący planety.

ω - prędkość kątowa $\left(\omega \equiv \frac{d\varphi}{dt}\right)$

1.4.3. Dowód

Cząstka poruszająca się dookoła stałego punktu pod wpływem sił centralnych zachowuje stały moment pędu dany wzorem:

$$\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mu \dot{\mathbf{r}}. \quad (1.10)$$

Położenie cząstki na płaszczyźnie można określić za pomocą dwóch współrzędnych. Wybierzemy w tym celu wektor jednostkowy o początku w początku układu współrzędnych i skierowany ku cząstce (w tym przypadku planecie) oznaczmy $\hat{\mathbf{r}}$ oraz wektor jednostkowy w płaszczyźnie ruchu prostopadły do $\hat{\mathbf{r}}$, oznaczmy go $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$. Rozłóżmy prędkość $\dot{\mathbf{r}}$ na składowe wzdłuż $\hat{\mathbf{r}}$ oraz wzdłuż $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$. Oznaczmy ponadto $\dot{\varphi} \equiv \omega$:

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\omega\hat{\boldsymbol{\varphi}}, \quad (1.11)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mu(\dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\omega\hat{\boldsymbol{\varphi}}) = \mu r^2 \omega \hat{\mathbf{z}}, \quad (1.12)$$

gdzie $\hat{\mathbf{z}}$ oznacza wektor jednostkowy $\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\varphi}}$, prostopadły do płaszczyzny ruchu. Jednocześnie przyjrzyjmy się równaniu ruchu dla obracającego się układu:

$$\mu\ddot{r} = F_{\text{grawitacyjna}} + F_{\text{odśrodkowa}} = -\frac{GM_1M_2}{r^2} + \mu\omega^2 r. \quad (1.13)$$

Przedstawimy ω w zależności od J korzystając z równania (1.12):

$$\omega^2 = \frac{J^2}{\mu^2 r^4}. \quad (1.14)$$

Teraz możemy zapisać równanie (1.13) w postaci:

$$\mu\ddot{r} = -\frac{GM_1M_2}{r^2} + \frac{J^2}{\mu r^3}. \quad (1.15)$$

Spróbujemy rozwiązać (1.15) względem r jako funkcji kąta φ , $r(\varphi)$. Korzystamy z (1.12):

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \omega = \frac{dr}{d\varphi} \frac{J}{\mu r^2}. \quad (1.16)$$

Różniczkujemy i podstawiamy (1.12) oraz (1.16):

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d^2r}{d\varphi^2} \left(\frac{J}{\mu r^2}\right)^2 + \frac{dr}{d\varphi} \frac{J}{\mu} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r^2}\right) = \frac{d^2r}{d\varphi^2} \left(\frac{J}{\mu r^2}\right)^2 - \frac{2}{r^3} \frac{J}{\mu} \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 \frac{J}{\mu r^2}. \quad (1.17)$$

Będziemy rozpatrywać funkcję $w(\varphi)$ zdefiniowaną następująco:

$$w(\varphi) = \frac{1}{r(\varphi)}. \quad (1.18)$$

Różniczkujemy (1.18):

$$\frac{dw}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} \quad \frac{d^2w}{d\varphi^2} = -\frac{1}{r^2} \frac{d^2r}{d\varphi^2} + \frac{2}{r^3} \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2. \quad (1.19)$$

Łącząc równania (1.17) i (1.19) uzyskamy:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{1}{r^2} \left(\frac{J}{\mu}\right)^2 \frac{d^2w}{d\varphi^2}. \quad (1.20)$$

Więc mogę równanie ruchu (1.15) przekształcić do postaci:

$$-w^2 \frac{J^2}{\mu} \frac{d^2w}{d\varphi^2} = -w^2 GM_1M_2 + w^3 \frac{J^2}{\mu}. \quad (1.21)$$

A to jest równoważne:

$$\frac{d^2w}{d\varphi^2} + w = \frac{\mu GM_1M_2}{J^2}. \quad (1.22)$$

Rozwiązaniem równania ujednolitego:

$$\frac{d^2 w}{d\varphi^2} + w = 0 \quad (1.23)$$

jest:

$$w = A \cos \varphi + B \sin \varphi, \quad (1.24)$$

przy czym składnik $B \sin \varphi$ jest równoważny samemu $A \cos \varphi$ poprzez odpowiednie przesunięcie φ . Poprzez odpowiedni dobór warunków początkowych na φ pozbywam się go.

Ogólnym rozwiązaniem niejednorodnego równania (1.22) jest więc:

$$w = A \cos \varphi + \frac{\mu G M_1 M_2}{J^2}. \quad (1.25)$$

Jest to zapis krzywej stożkowej we współrzędnych biegunowych. Ogólne równanie krzywej stożkowej ma postać:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{se}(1 - e \cos \varphi). \quad (1.26)$$

Gdzie stała e to mimośród, natomiast s to rozmiar krzywej. Można je wyznaczyć:

$$\frac{1}{se} = \frac{\mu G M_1 M_2}{J^2}, \quad \frac{1}{s} = -A. \quad (1.27)$$

Jedyną krzywą eliptyczną zamkniętą jest elipsa co kończy dowód prawa Keplera. Jednocześnie w zależności od wartości mimośrodu można ogólnie wyznaczyć po jakim torze poruszają się ciała.

- $e > 1$ hiperbola
- $e = 1$ parabola
- $1 > e > 0$ elipsa
- $e = 0$ okrąg

Aby wykorzystać efekt katapulty grawitacyjnej interesować nas będzie przypadek $e \geq 1$.

1.5. Drugie prawo Keplera

1.5.1. Sformułowanie

Promień wodzący planety zakreśla w równych odstępach czasu równe pole.

1.5.2. Dowód

Będziemy korzystać z pokazanego wcześniej prawa zachowania momentu pędu:

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \mathbf{N}, \quad (1.28)$$

gdzie \mathbf{N} to moment siły. Dla sił centralnych jest on równy zero więc moment pędu jest stały:

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = 0. \quad (1.29)$$

Całkowity moment pędu układu cząstek względem dowolnie ustalonego punktu początkowego w inercyjnym układzie odniesienia jest równy:

$$\mathbf{J} = \sum_{n=1}^N M_n \mathbf{r}_n \times \mathbf{v}_n. \quad (1.30)$$

Jeśli $N_{\text{zewn}} = 0$ to z (1.29) i (1.30) mamy:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{J}_{\text{całk}} = \mathbf{N}_{\text{zewn}}, \quad \mathbf{J}_{\text{całk}} = \mathbf{J}_{\text{śm}} + \mathbf{R}_{\text{śm}} \times \mathbf{P}. \quad (1.31)$$

Obierając środek masy jako początek układu współrzędnych:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{J}_{\text{śm}} = \mathbf{N}_{\text{zewn}}. \quad (1.32)$$

Wektor powierzchni trójkąta to:

$$\Delta \mathbf{S} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \Delta \mathbf{r}. \quad (1.33)$$

Więc:

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \frac{1}{2M} \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \frac{1}{2M} \mathbf{J}. \quad (1.34)$$

Przy odpowiednim doborze początku układu wektor \mathbf{J} jest stały dla sił centralnych więc stosunek powierzchni zakreślonej do czasu jest stały.

1.6. Trzecie prawo Keplera

1.6.1. Sformułowanie

Kwadraty okresów obiegu różnych planet dookoła słońca są proporcjonalne do sześciątów wielkich półosi elips.

1.6.2. Dowód

Z drugiego prawa mamy:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{J}{2\mu} = \text{const.} \quad (1.35)$$

Całkuję równanie (1.35) po czasie jednego okresu T :

$$S = \frac{JT}{2\mu}. \quad (1.36)$$

Następnie korzystamy z tego że $S = \pi ab$ jest powierzchnią elipsy o półosiach a i b :

$$T = \frac{2S\mu}{J} = \frac{2\pi ab\mu}{J}. \quad (1.37)$$

Dla $\varphi = \pi$ oraz $\varphi = 0$ ogólne równanie krzywej stożkowej (1.26) uprości się do:

$$\frac{1}{r_{\min}} = \frac{1}{se}(1+e), \quad \frac{1}{r_{\max}} = \frac{1}{se}(1-e). \quad (1.38)$$

Równanie (1.25) jest zapisanym we współrzędnych biegunowych równanie krzywej stożkowej. Korzystając z ogólnego równania opisującego krzywą stożkową (1.26) ma ono postać:

$$\frac{1}{se} = \frac{\mu GM_1 M_2}{J^2}, \quad \frac{1}{s} = -A. \quad (1.39)$$

Korzystając z równiań (1.39) i (1.38) możemy wyprowadzić:

$$2a = \frac{se}{1+e} + \frac{se}{1-e} = \frac{2se}{1-e^2} = \frac{2}{1-e^2} \frac{J^2}{GM_1 M_2 \mu}. \quad (1.40)$$

Podnosimy do kwadratu (1.37) i wstawiamy zamiast jednego a równanie (1.40):

$$T^2 = \frac{(\mu 2\pi ab)^2}{a GM_1 M_2 \mu (1-e^2)} = \frac{4\pi^2 ab^2 \mu}{GM_1 M_2 (1-e^2)}. \quad (1.41)$$

Możemy skorzystać z tego że mimośród spełnia:

$$b^2 = a^2(1-e^2). \quad (1.42)$$

Co ostatecznie daje:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(M_1 + M_2)}. \quad (1.43)$$

Wień rzeczywiście kwadrat okresu obiegu jest proporcjonalny do sześciannu wielkiej półosi elipsy.

Rozdział 2

Opis implementacji symulacji numerycznej zagadnienia

Częścią pracy jest dołączony program symulujący zjawisko katapulty grawitacyjnej w sposób numeryczny. Rozpatrywany będzie układ zaburzony pod wpływem Słońca. W tym rozdziale zostanie przedstawiona metoda którą program symuluje zjawisko jak i uzyskane wyniki.

2.1. Schematy całkowania

Jak wiemy równania ruchu dla więcej niż dwóch ciał nie są całkowalne w sposób dokładny, dlatego stosuje się do ich przybliżonego całkowania schematy różniczkowe. Wśród schematów wyróżniamy schematy *otwarte*, czyli takie w których wartość funkcji (w tym przypadku położenie) w $k+1$ kroku zależy tylko od wartości oraz wartości pochodnej w krokach mniejszych.

Najprostszym możliwym schematem, jest *otwarty schemat Eulera*. Wyraża się on wzorem:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + hf_k. \quad (2.1)$$

Najprostszym rozszerzeniem schematu Eulera jest schemat trapezów, w którym zamiast pochodnej w punkcie k brana jest średnia arytmetyczna z pochodnych w punkcie k i $k+1$:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \frac{h}{2}(f_k + f_{k+1}). \quad (2.2)$$

Jednym z bardziej złożonych schematów jest *otwarty schemat Rungego-Kutty*, którego wersję można wyznaczyć dla dowolnej ilości rzędów, dla jednego rzędu jest równoważny z *otwartym schematem Eulera*. Powyżej czterech rzędów zysk na dokładności jest niewspółmierny do złożoności, dlatego w praktyce nie stosuje się go dla większej ilości rzędów:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4), \quad (2.3)$$

$$K_1 = f(\mathbf{x}_k), \quad (2.4)$$

$$K_2 = f(\mathbf{x}_k + \frac{h}{2}K_1), \quad (2.5)$$

$$K_3 = f(\mathbf{x}_k + \frac{h}{2}K_2), \quad (2.6)$$

$$K_4 = f(\mathbf{x}_k + hK_3). \quad (2.7)$$

2.2. Schemat działania programu

Ponieważ program oprócz liczenia przedstawia animację, a narysowanie całego stanu świata jest długotrwałe, dlatego rysowanie odbywa się co ileś przesunięć. Program wykonuje więc jeden duży krok poprzez wykonanie następującego algorytmu *kroki* razy:

```
Dla każdego ciała:
  przyspieszenie := 0
  Dla każdego innego ciała inne:
    składowa_przyspieszenia := G * inne.M / r ^ 2
    przyspieszenie := przyspieszenie + składowa_przyspieszenia
  predkosc := predkosc + przyspieszenie / czas / kroki
  położenie := położenie + predkosc / czas / kroki
```

Załączone obrazki zostały wygenerowane w zależności od skali dla parametru *kroki* równego 50 lub 20.

Ponadto w przykładach zostały wykorzystane rzeczywiste wielkości dla obiektów astronomicznych z układu słonecznego, ich wartości można odczytać z tabeli 2.1:

| | Wielka półś w m | Okres w dniach | Mimośród | Masa w g |
|---------|-----------------------|----------------|----------|------------------------|
| Ziemia | $1.521 \cdot 10^{11}$ | 365.265 | 0.016 | $5.9737 \cdot 10^{27}$ |
| Jowisz | $7.911 \cdot 10^{11}$ | 4332.71 | 0.048 | $1.8986 \cdot 10^{30}$ |
| Słońce | | | | $1.9891 \cdot 10^{33}$ |
| Księżyc | $3.845 \cdot 10^8$ | 29.53 | 0.055 | $7.3477 \cdot 10^{25}$ |

Tabela 2.1: Własności astronomiczne obiektów z układu słonecznego

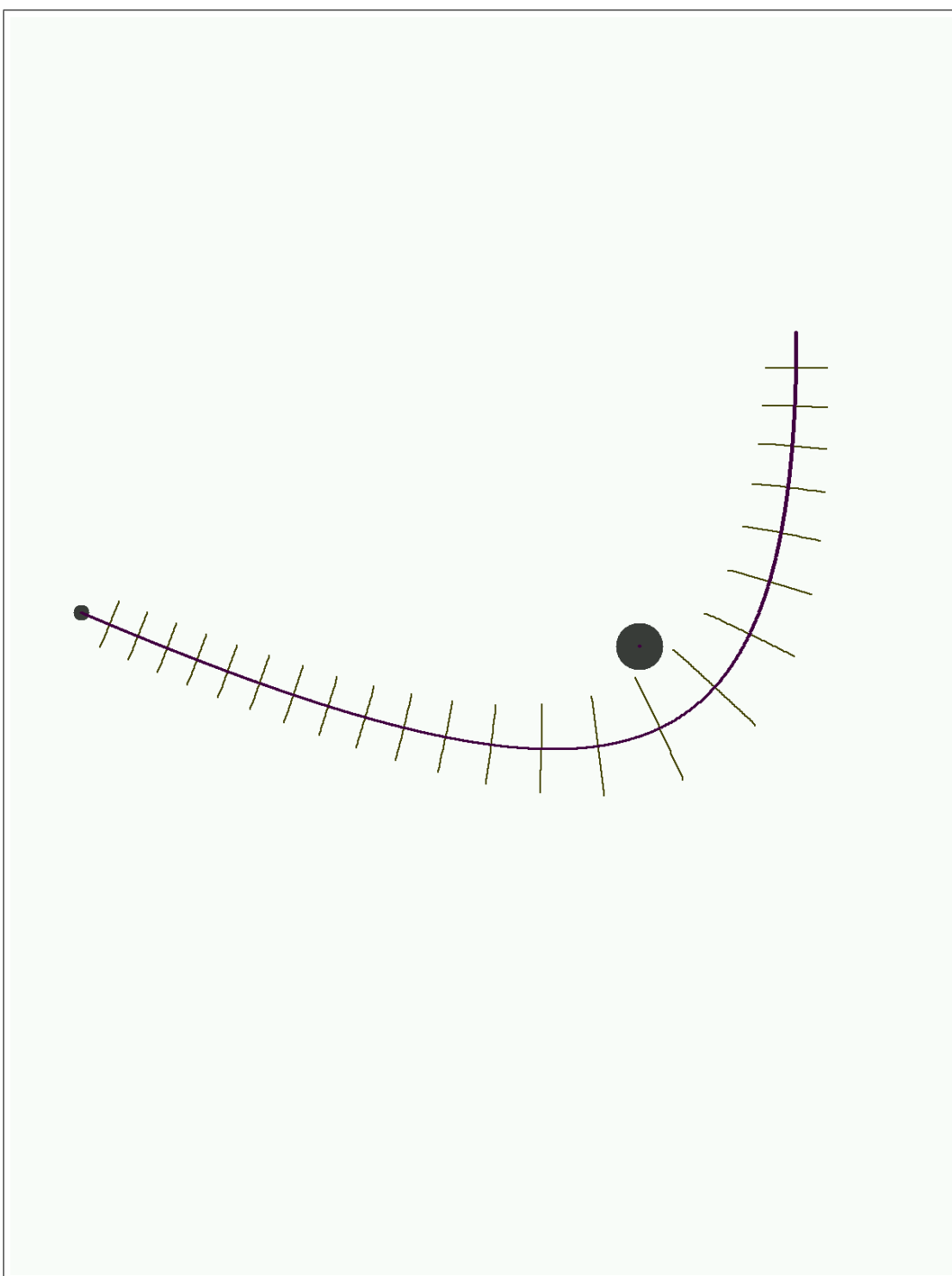
Rozdział 3

Przykładowe wyniki

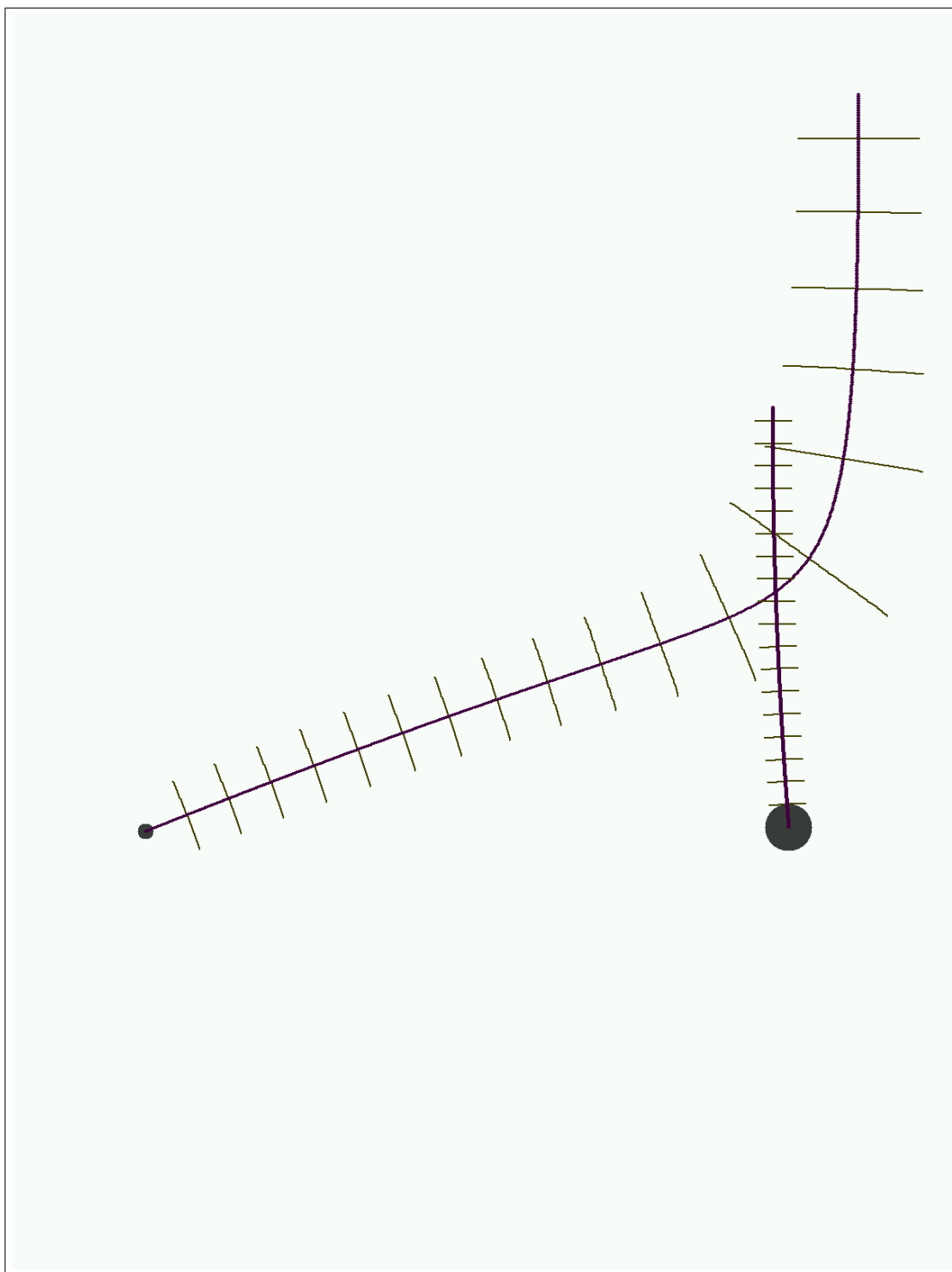
We wszystkich symulacjach początkowe prędkości obiektów zostały dobrane w taki sposób, aby środek masy pozostawał nieruchomy.

Obiekt jest narysowany na końcu symulacji, natomiast początek to początek oznaczenia trajektorii.

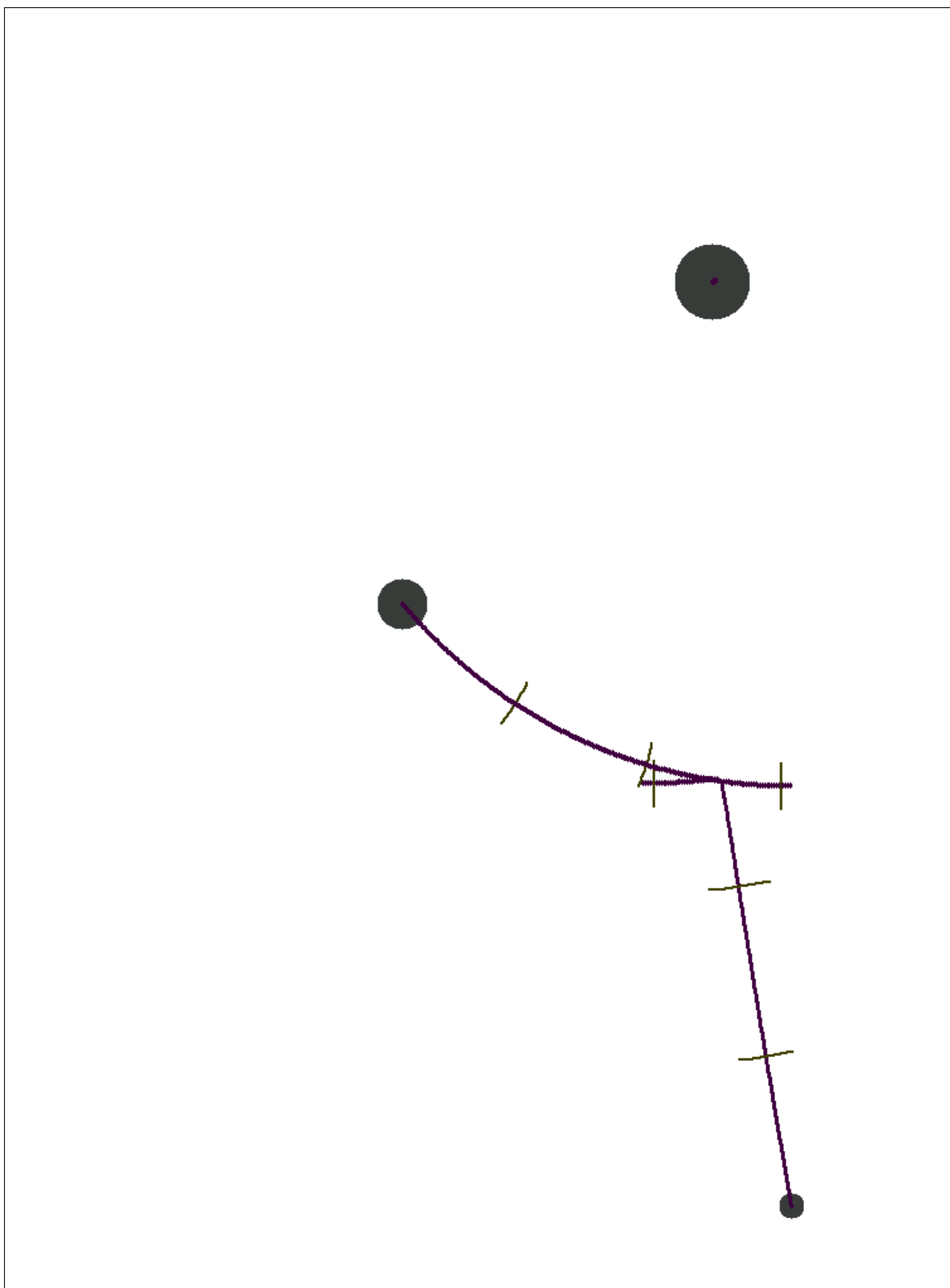
Poprzeczne linie raz na 300 obliczeń są proporcjonalnej długości do prędkości obiektu w danym momencie. W przypadku orbit zamkniętych po których obiekt porusza się więcej niż raz widać poprzeczne linie narysowane w takich samych odległościach jednak z przesunięciem w fazie.



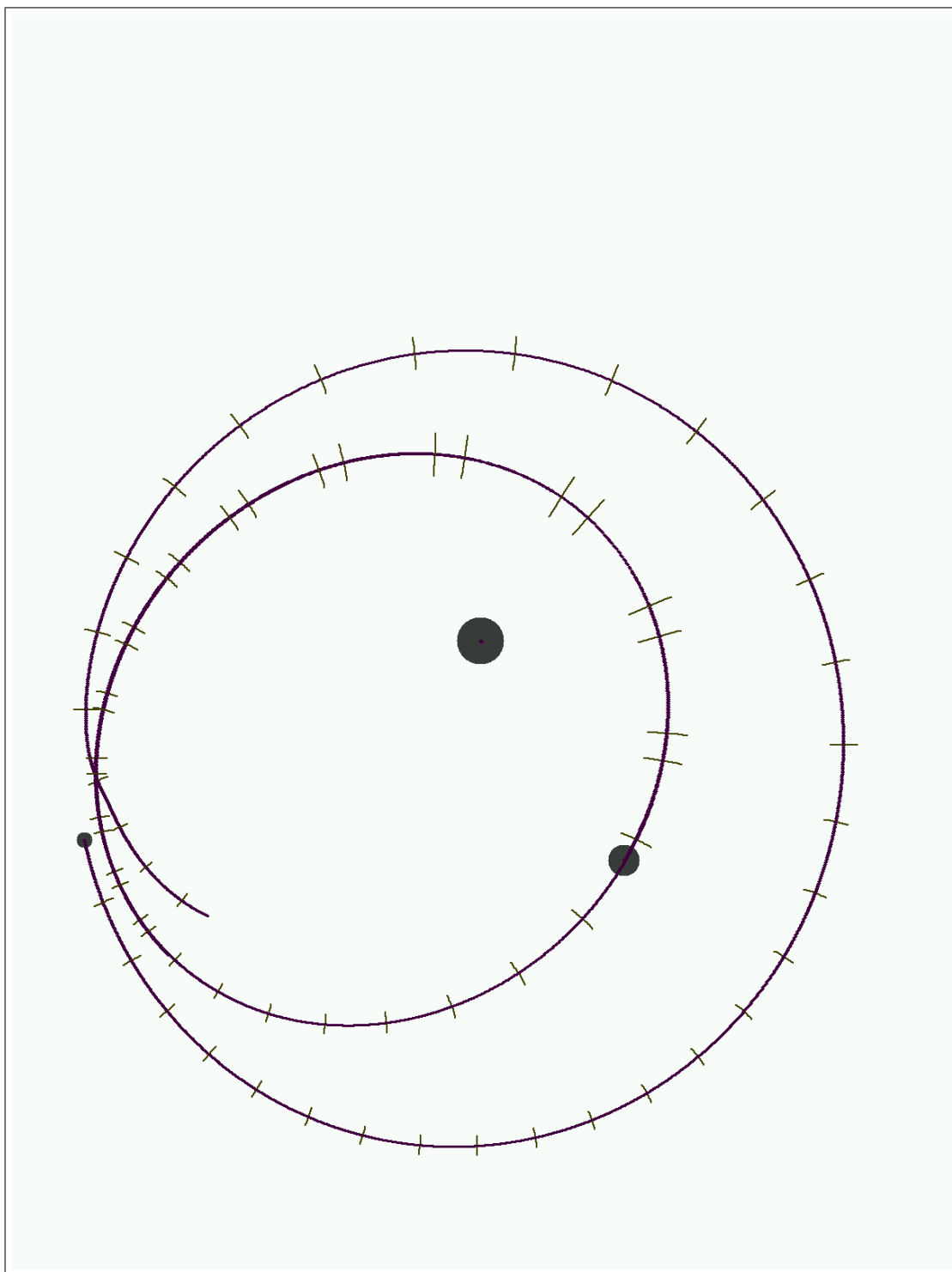
Rysunek 3.1: Widać przechodzenie satelity dookoła słońca po orbicie hiperbolicznej. Podczas zbliżania się satelita uzyskuje większą prędkość dzięki sile grawitacyjnej planety (zwiększająca się długość linii prostopadłych do kierunku ruchu). Cała ta prędkość zostaje utracona podczas oddalania się od słońca.



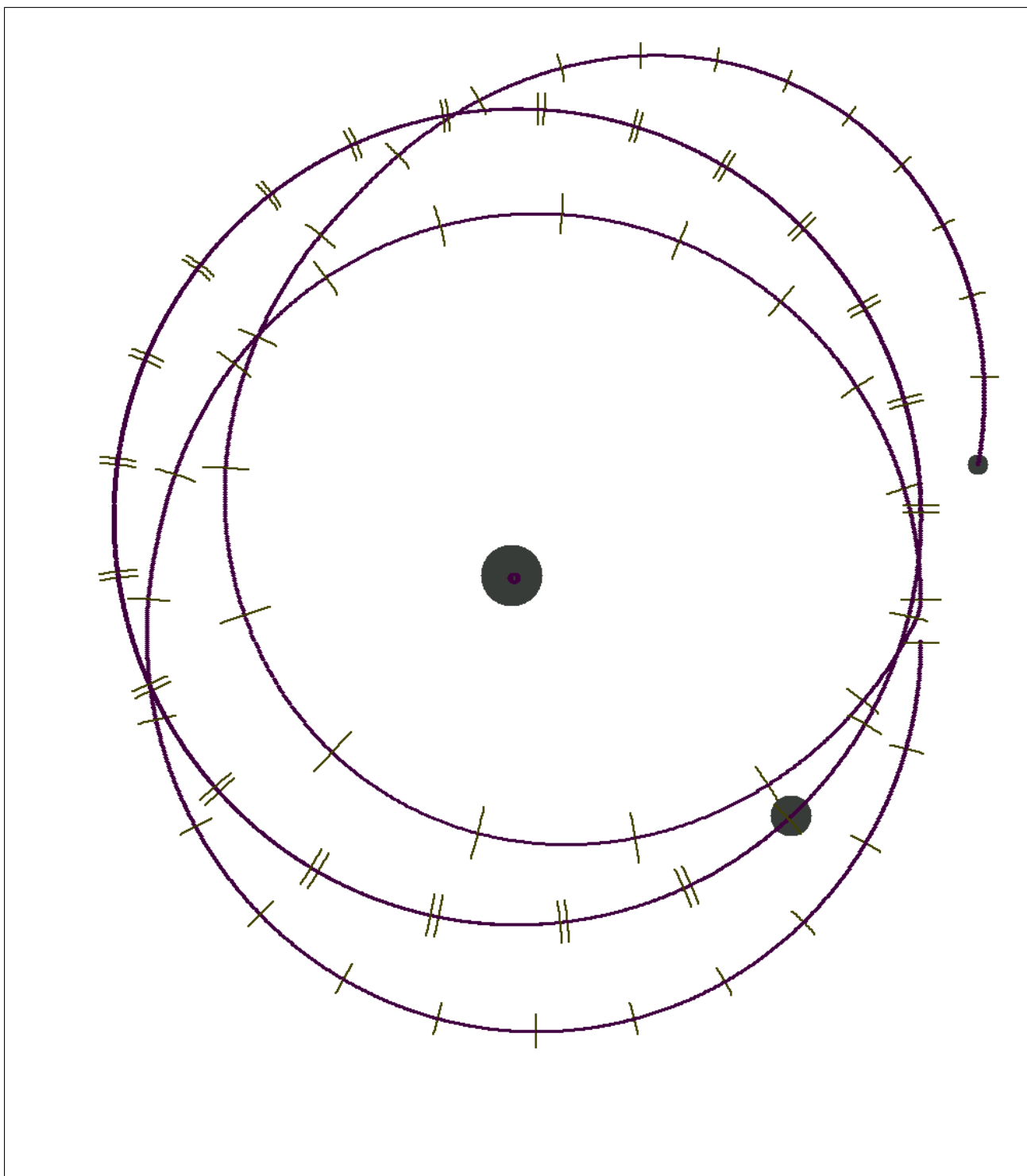
Rysunek 3.2: Widać wpływ poruszania się planety dookoła słońca na zmianę toru ruchu satelity



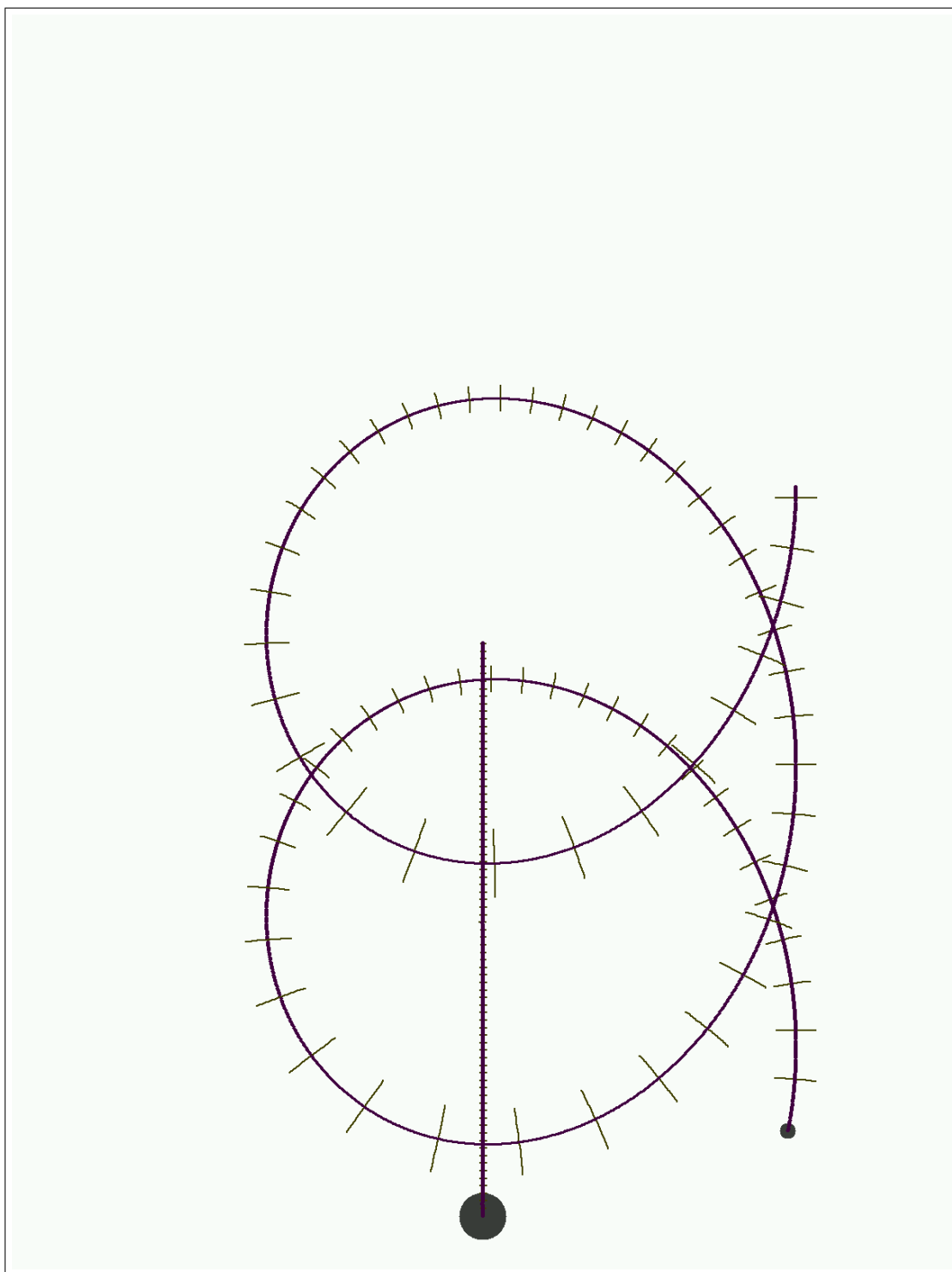
Rysunek 3.3: W skali całego układu widać wpływ poruszania się planety dookoła słońca. Widać możliwość wyrzucenia obiektu poza układ słoneczny, w ten sposób, że satelita poruszający się po torze eliptycznym najpierw przechodzi na tor hiperboliczny z ogniskiem w środku planety, a następnie oddalwszy się od niej porusza się wchodzi na tor hiperboliczny z ogniskiem w słońcu.



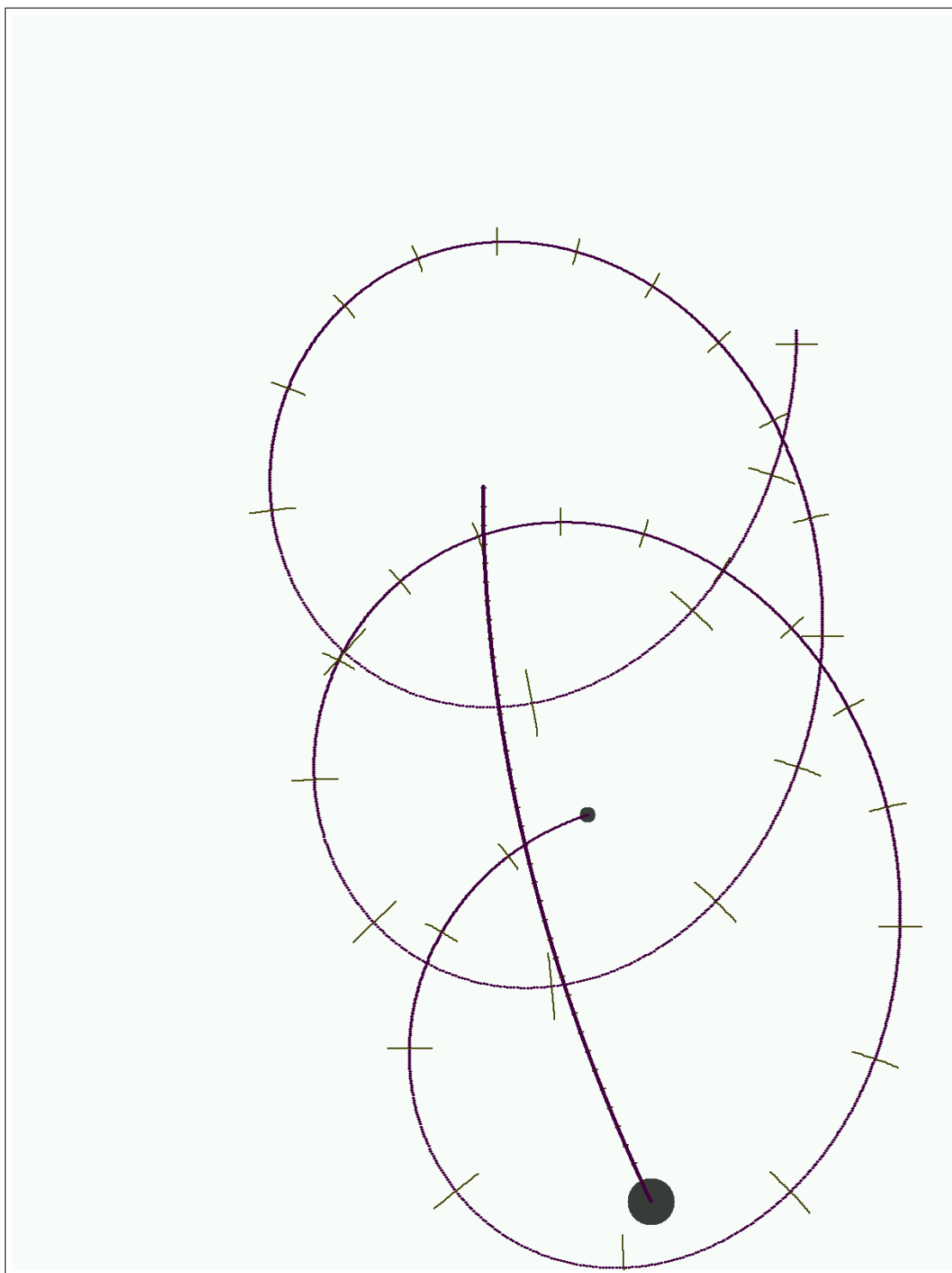
Rysunek 3.4: Pokazane zostały słońce oraz jowisz poruszający się dookoła niego po eliptycznej orbicie. Satelita (jako masę satelity wybrałem masę księżyca) przechodząc koło jowisza zmienia orbitę.



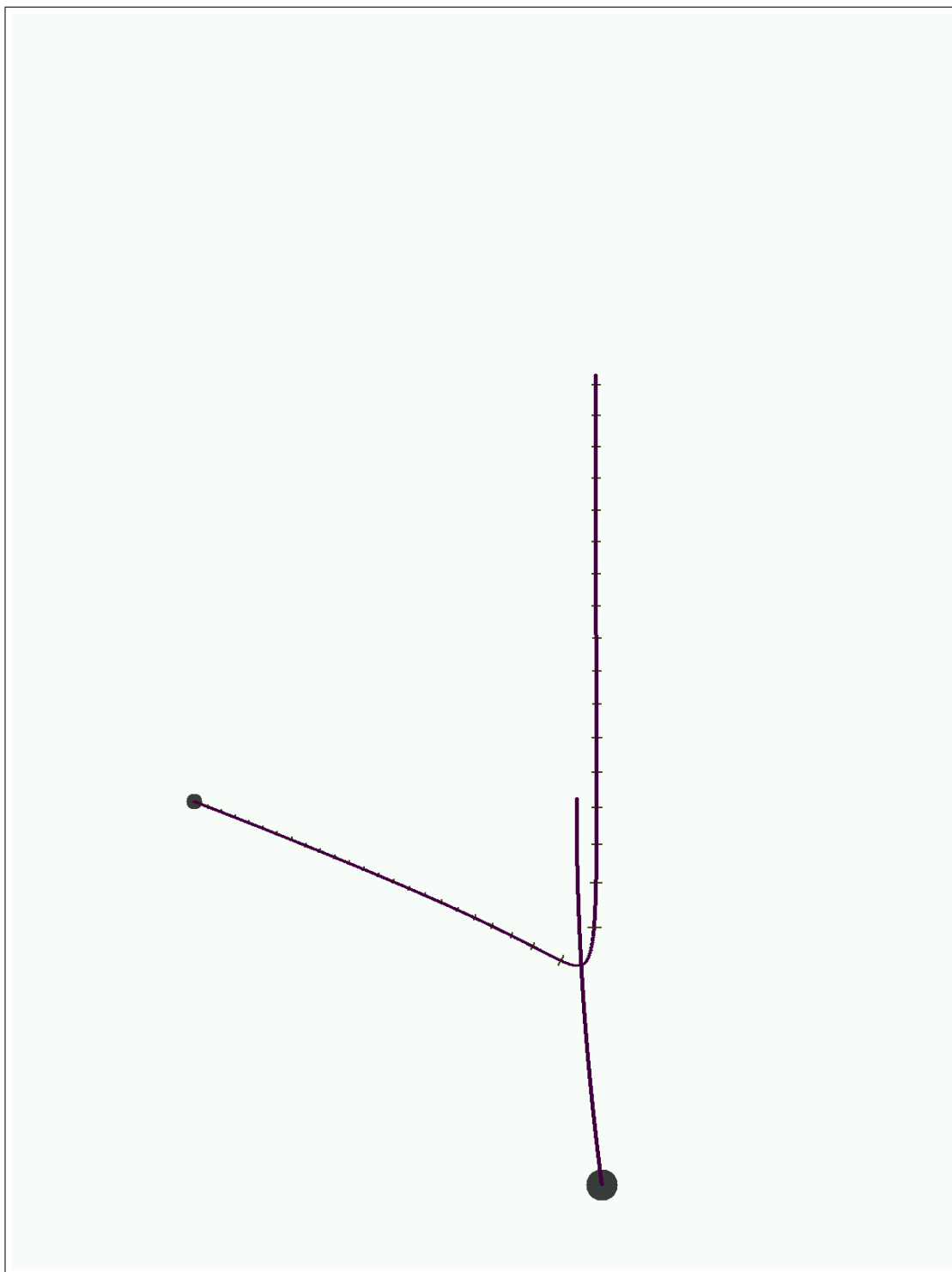
Rysunek 3.5: Widać że orbita księżycy też jest eliptyczna i zamknięta, po zbliżeniu się do jowisza przechodzi na krótko na orbitę hiperboliczną o ognisku w środku planety. Następnie po oddaleniu się wraca na orbitę eliptyczną, która też jest zamknięta.



Rysunek 3.6: Pokazane są epicykle tworzone przez satelitę krążącą po orbicie eliptycznej dookoła poruszającej się planety.



Rysunek 3.7: Widać wpływ poruszania się planety po orbicie eliptycznej wokół słońca na kształt epicykli w torze ruchu satelity.



Rysunek 3.8: Widać efekt katapulty grawitacyjnej. Na początku satelita oraz planeta poruszają się dookoła słońca (poza rysunkiem po prawej) po orbitach eliptycznych. Satelita zbliżając się do planety przechodzi na orbitę hiperboliczną z ogniskiem w planecie, a następnie tor jego ruchu zmienia się tak, że przechodzi na orbitę hiperboliczną z ogniskiem w słońcu. Oddalając się od planety satelita uzyskuje część prędkości orbitalnej, której dużą część następnie traci oddalając się od słońca.

Bibliografia

- [Arn] Vladimir Igorevich Arnold, *Metody matematyczne mechaniki klasycznej*, PWN 1981
- [KKR] Charles Kittel Walter D.Knight Malvin A.Ruderman, *Mechanika*, PWN 1969
- [Pal] Andrzej Palczewski, *Równania Różniczkowe Zwyczajne*, WNT 1999
- [Bir] Andrzej Birkholc, *Analiza matematyczna Funkcje wielu zmiennych*, PWN 2002
- [Kon] Cezary Bowszyc i Jerzy Konarski, *Wstęp do geometrii różniczkowej*, Warszawa 2001