Unidad 3: Actividades Prácticas

Ejercicios propuestos de máquinas secuenciales

Ejercicio 1

Analizar el comportamiento del dosificador de la Figura 3.23 a través de una máquina secuencial y presentar los resultados en una tabla similar a la 3.5 en la que se muestren el contenido, largo y composición de cada cadena de salida. Comparar el desempeño de este dosificador con el dispositivo similar ya estudiado en el Ejemplo 3.2.

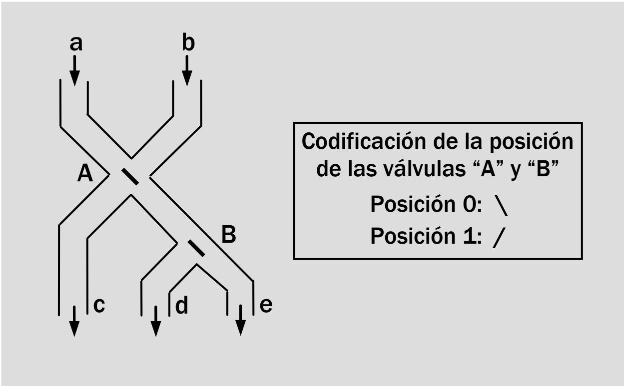

Figura 3.23: Dosificador de elementos **a** y **b**.

Ejercicios propuestos de autómatas finitos

Ejercicio 2

Siendo $\mathbf{\Sigma_E = \{1\}}$, se pide:

a) Diseñar un AFD que reconozca cadenas compuestas por un número *impar* de **1s** (unos).
b) Diseñar un AFD que reconozca palabras compuestas por un número *par* de **1s** (unos).

Ejercicio 3

Siendo $\mathbf{\Sigma_E = \{a,b\}}$, se pide:

a) Diseñar un AFD que reconozca cadenas compuestas por un número *impar* de **a(aes)**.
b) Diseñar un AFD que reconozca palabras compuestas por un número *par* de **a (aes)**.

Ejercicio 4

Diseñar un AFD que reconozca cadenas formadas por 4 bits, para cada una de las siguientes condiciones:

a) El primer bit igual al último
b) El segundo bit igual al tercero
c) Los dos primeros bits iguales a los dos últimos

Ejercicio 5

Construir un AFD que reconozca un lenguaje compuesto por símbolos **a** y **b** ($\Sigma_E = \{a, b\}$), que excluya del mismo todas aquellas cadenas que contengan las subcadenas: **aa** o **bb**. Las palabras a ser reconocidas no deben tener una longitud predeterminada.

Ejercicio 6

Proponer un autómata finito destinado a aceptar cada uno de los siguientes lenguajes y hacer una descripción alternativa según se indica:

a) $L_1 = \{0^i\, 1\, 0^j \;/\; i \geq 1,\, j \geq 1\}$; Determinar su expresión regular.
b) $L_2 = L(\,01(01)^*11(11)^*)$; Determinar su expresión algebraica.

Ejercicio 7

Identifique el lenguaje expresado por cada una de las siguientes expresiones regulares y construya el AFD que lo reconozca (grafo y definición formal).

a) L_1(0 + (11)* 0)
b) L_2(0+ (11) 0*)
c) L_3(0 (11)* + 0)
d) L_4(0* (11) + 0)
e) L_5(0* (11) 0*)

Ejercicio 8

Diseñar un AFD que reconozca el lenguaje **L** $\subseteq$ {**a, b**}*, cuyas cadenas α, sin longitud fija, satisfagan simultáneamente las siguientes condiciones:

a) Toda cadena α comienza con **a** y termina con **b**.
b) La secuencia de caracteres **aaa** no debe ser subcadena de α.

Ejercicio 9

Hacer una propuesta para ampliar el expendedor de golosinas del Ejemplo 3.4 de manera de incorporar un tercer producto (bombón <B>) que tiene un precio de venta de 25 centavos. Las monedas reconocidas son las mismas y el expendedor debe devolver las monedas ingresadas en exceso. Mostrar grafo y definición formal del AFD.

Ejercicios propuestos de minimización de autómatas finitos

Ejercicio 10

Comprobar si los siguientes AFD son equivalentes. Para ello, se deberá minimizar cada autómata, eliminando, en primera instancia, los estados no conexos, si los hubiese, y construir luego los conjuntos cocientes necesarios.

AFD_A = ({0, 1, 2}, {A, B, C, D, E, F, G}, A, {D, F, G}, f_A)
AFD_B = ({0, 1, 2}, {A, B, C, D, E, F, G}, A, {B, C, D, G}, f_B)

f_A	0	1	2
→A	A	B	F
B	B	A	G
C	E	C	B
*D	F	G	B
E	C	B	E
*F	F	G	F
*G	F	F	G

f_B	0	1	2
→A	E	B	F
*B	C	D	B
*C	D	B	B
*D	B	C	C
E	A	D	E
F	F	C	A
*G	C	B	E

Tabla 3.22: Funciones de transición de los AFD del Ejercicio 12.

Ejercicio 11

Determinar cuáles de los cinco AFD presentados son equivalentes entre sí. Minimizar cada autómata, eliminando en primera instancia los estados no conexos, si los hubiese, y luego construir los conjuntos cocientes necesarios.

AFD_A = ({0, 1}, {A, B, C, D, E}, A, {C, E}, f_A)

AFD_B = ({0, 1}, {A, B, C, D, E, F}, A, {F}, f_B)

AFD_C = ({0, 1}, {A, B, C, D, E, F, G}, A, {C, E}, f_C)

AFD_D = ({0, 1}, {A, B, C, D, E, F}, A, {D, E, F}, f_D)

AFD_E = ({0, 1}, {A, B, C, D, E, F, G}, A, {C, D}, f_E)

f_A	0	1
→A	B	C
B	B	D
*C	E	B
D	C	B
*E	C	B

f_B	0	1
→A	B	F
B	C	E
C	D	E
D	B	E
E	F	D
*F	F	B

f_C	0	1
→A	C	B
B	E	B
*C	E	F
D	B	A
*E	C	F
F	F	B
G	G	A

f_D	0	1
→A	F	B
B	E	C
C	D	A
*D	E	C
*E	F	B
*F	D	E

f_E	0	1
→A	C	A
B	F	G
*C	D	E
*D	C	F
E	F	G
F	E	G
G	C	G

Tabla 3.23: Funciones de transición de los AFD del Ejercicio 13.

Ejercicios propuestos de autómatas finitos bidireccionales

Ejercicio 12

Construir un AFDB que acepte números binarios pares escritos en su cinta (recuerde que los números binarios pares terminan con cero).

Ejercicio 13

Construir un AFDB que acepte cadenas escritas en código Morse (**Σ_{Morse} =** {•, –}) que inicien y terminen con el mismo símbolo.

Ejercicios resueltos de autómatas finitos

Ejercicio 14

Diseñar un AFD que acepte una cadena formada por 4 bits, debiendo ser:

a) El primer bit igual al tercero

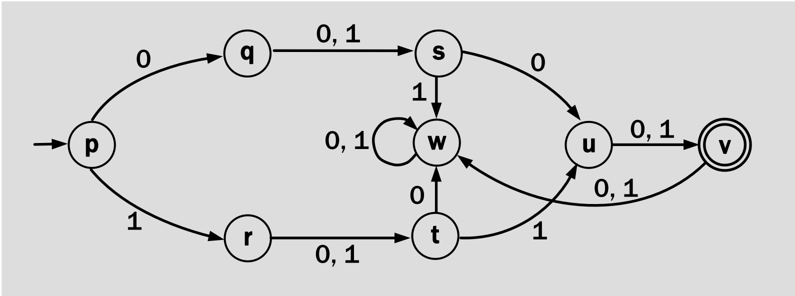

Figura 3.24

AFD = ({0, 1}, {p, q, r, s, t, u, v, w}, p, {v}, *f*)

b) El segundo bit igual al cuarto

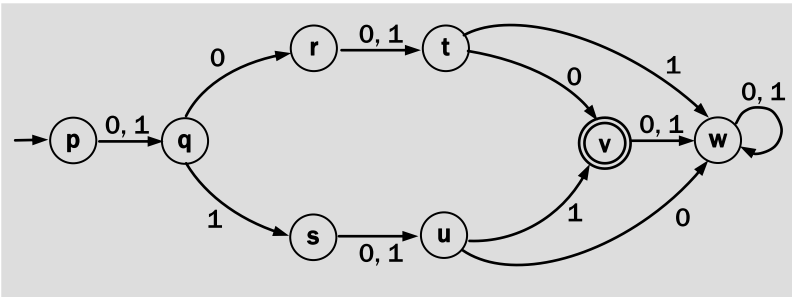

Figura 3.25

AFD = ({0, 1}, {p, q, r, s, t, u, v, w}, p, {v}, *f*)

Ejercicio 15

Diseñar un AFD que acepte cadenas de largo $|\alpha| = 3$ tales que contengan dos símbolos consecutivos iguales, siendo Σ_E = {a,b}.

De acuerdo al enunciado, el lenguaje aceptado por el AFD es:

L = {aab, abb, baa, bba}

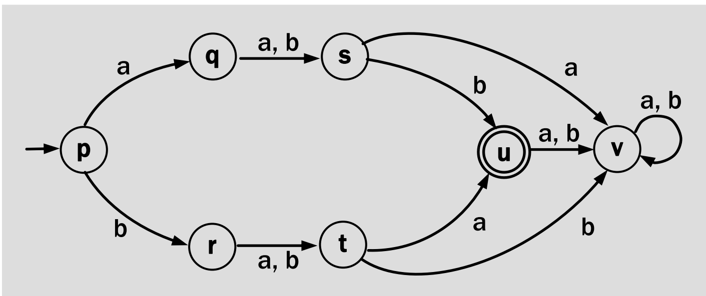

Figura 3.26

AFD = ({a, b}, {p, q, r, s, t, u, v}, p, {u}, *f*)

Ejercicio 16

Siendo el alfabeto de entrada **Σ = {0, 1}**, construir un *AFD* que reconozca un lenguaje formado por cadenas que contengan un número par de símbolos **0**, y sin símbolos **1** sucesivos.

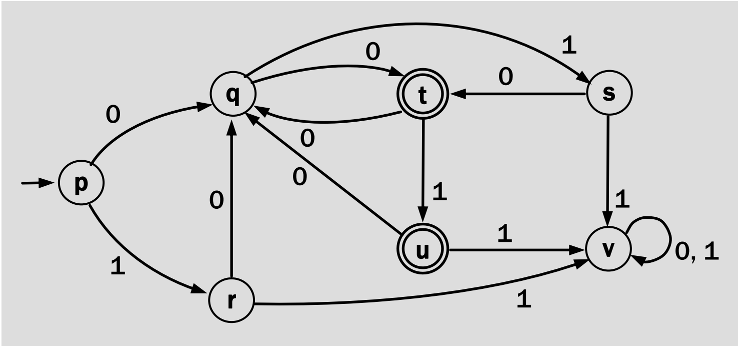

Figura 3.27

AFD = ({0, 1}, {p, q, r, s, t, u, v}, p, {t, u}, f)

Ejercicio 17

Diseñar un AFD que funcione como una central telefónica, que reconozca los números telefónicos de ocho cifras que comienzan con 0600 y terminan en número par.

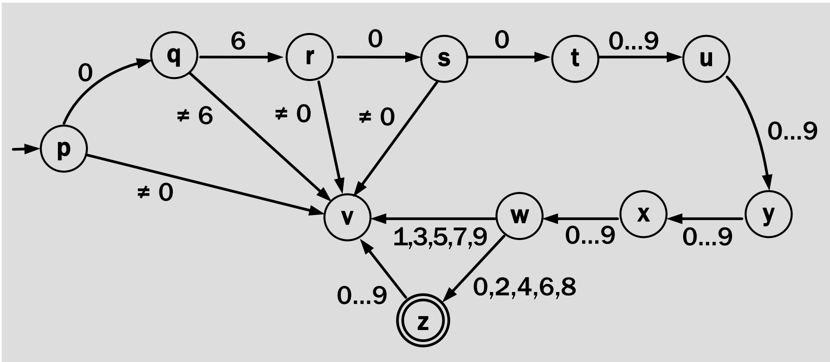

Figura 3.28

AFD = ({0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9},{p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z}, p, {z}, f)

Se sugiere al lector proponer variantes a esta máquina para aceptar otros prefijos (0351, 0800, etc.) con cadenas que terminen en un número par o impar.

Ejercicio 18

Identifique el lenguaje expresado por cada una de las siguientes expresiones regulares y construya el AFD que lo reconozca (grafo y definición formal).

a) L_1(a (b+c) d)
b) L_2(a (b+c)* d)
c) L_3(a* (b+c) d)
d) L_4(a (b+c) d*)
e) L_5(a* (b+c) d*)

a) L_1(a (b+c) d) = L_1 (a) . L_1(b+c) . L_1(d) = {a} . (L_1(b) $\cup$ L_1(c)) . {d}
= {a} . { {b} $\cup$ {c} } . {d} = {a} . {b, c} . {d}
= {ab, ac} . {d} = {abd, acd}

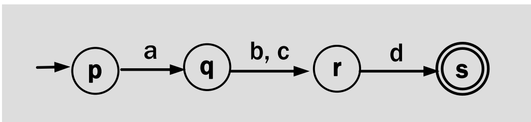

Figura 3.29: Grafo del AFD del Ejercicio 18.a.

AF = ({a, b, c, d}, {p, q, r, s}, p, {s}, f)

b) L_2(a (b+c)* d) = L_2(a) . L_2((b+c)*) . L_2(d) = {a} . [L_2(b+c)]*. {d}
= {a} .[L2(b) $\cup$ L2(c)]*. {d} = {a} . [{b} $\cup$ {c}]* . {d}
= {a} . {b, c}* . {d}
= {a} . [{b,c}0 $\cup$ {b,c}1$\cup${b,c}2$\cup$…] . {d}
= {a} . [{λ} $\cup$ {b,c}$\cup${bb, bc, cb, cc}$\cup$…] . {d}

= {a} .{ λ , b, c, bb, bc, cb, cc, bbb, bcb, bcc, bbc, cbb, …} . d}
= {a, ab, ac, abb, abc, acb, acc, abbb, abcb, abcc, abbc, …}. {d}
= {ad, abd, acd, abbd, abcd, acbd, accd, abbbd, abcbd, abccd, …}

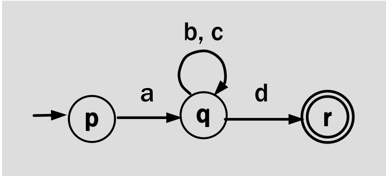

Figura 3.30: Grafo del AFD del Ejercicio 18.b.

AF = ({a, b, c, d}, {p, q, r}, p, {r}, *f*)

c) L_3(a*(b+c) d) = L_3(a*) . L_3(b+c) . L_3 (d)
= [L_3(a)]* . [L_3(b) $\cup$ L_3(c)] . L_3(d)
= {a}*. [{b} $\cup$ {c}] . {d}
= [$\{a\}^0 \cup \{a\}^1 \cup \{a\}^2 \cup \{a\}^3 \cup \{a\}^4 \cup$ …] . {b, c} . {d}
= [{λ} $\cup$ {a} $\cup$ {aa} $\cup$ {aaa} $\cup$ {aaaa}…] . {b, c} . {d}
= {λ, a, aa, aaa, aaaa, …} . {b, c} . {d}
= { b, c, ab, ac, aab, aac, aaab, aaac, aaaab, aaaac, …} .{d}
= {bd, cd, abd, acd, aabd, aacd, aaabd, aaacd, aaaabd, aaaacd, … }

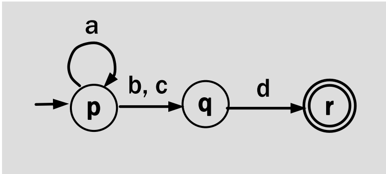

Figura 3.31: Grafo del AFD del Ejercicio 18.c.

AF = ({a, b, c, d}, {p, q, r}, p, {r}, *f*)

d) L_4(a (b+c) d*) = L_4(a) . L_4(b+c) . L_4(d*)
= {a} . [L_4(b) $\cup$ L_4(c)]. [L_4(d)]*
= {a} . [{b}$\cup${c}] . {d}*
= {a} . {b, c} . [$\{d\}^0 \cup \{d\}^1 \cup \{d\}^2 \cup \{d\}^3 \cup \{d\}^4 \cup \{d\}^5 \cup$…]
= {a} . {b, c} . {{λ} $\cup$ {d} $\cup$ {dd} $\cup$ {ddd} $\cup$ {dddd} $\cup$ …}
= {ab, ac} . {λ, d, dd, ddd, dddd, ddddd, …}
= {ab, ac, abd, acd, abdd, acdd, abddd, acddd, abdddd, acdddd, …}

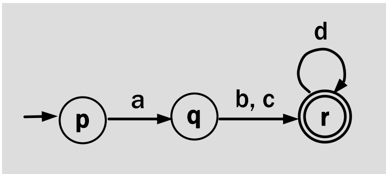

Figura 3.32: Grafo del AFD del Ejercicio 18.d.

AF = ({a, b, c, d}, {p, q, r}, p, {r}, *f*)

e) L_5(a* (b+c) d*) = L_5(a*) . L_5(b+c) . L_5(d*)
= [L_5(a)]*. [L_5(b) $\cup$ L_5(c)] . [L_5(d)]*
= {a}*. [{b} $\cup$ {c}] . {d}*
= [$\{a\}^0 \cup \{a\}^1 \cup \{a\}^2 \cup$…] . {b, c} . [$\{d\}^0 \cup \{d\}^1 \cup \{d\}^2 \cup$…]
= [{λ} $\cup$ {a} $\cup$ {aa} $\cup$…]. {b,c} . [{λ} $\cup$ {d} $\cup$ {dd} $\cup$ …]
= {λ, a, aa, aaa, aaaa,…} . {b,c} . {λ, d, dd, ddd, dddd, …}
= {b, c, ab, ac, aab, aac, aaab, aaac, aaaab, …} . {λ, d, dd, ddd, …}
= { b, c, ab, ac, aab, aac, aaab, aaac, aaaab, aaaac, …,
bd, cd, abd, acd, aabd, aacd, aaabd, aaacd, aaaabd, aaaacd, …,
bdd, cdd, abdd, acdd, aabdd, aacdd, aaabdd, aaacdd, …,
bddd, cddd, abddd, acddd, aabddd, aacddd, aaabddd, …}

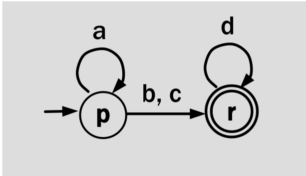

Figura 3.33: Grafo del AFD del Ejercicio 18.e.

AF = ({a, b, c, d}, {p, r}, p, {r}, *f*)

Ejercicios resueltos de minimización de autómatas

Ejercicio 19

Comprobar si los AFD cuyas funciones de transición se presentan en la tabla 3.24 son equivalentes entre sí. Para ello, eliminar en cada uno los estados no conexos (si los hubiese) y luego construir los conjuntos cocientes necesarios para minimizar cada autómata.

f_1	0	1
→p	r	p
q	q	p
*r	r	q

f_2	0	1
→p	q	s
q	q	r
r	s	q
*s	s	q

Tabla 3.24: Funciones de transición de los *AFD* del Ejercicio 19.

Solución

$$AFD_1 = (\{0, 1\}, \{p, q, r\}, p, \{r\}, f_1)$$

El AFD_1 es conexo, por lo que no hay estados que deban eliminarse.

El conjunto cociente inicial es $Q/E_0 = \{\{p, q\}, \{r\}\} = P_1^0 \cup P_2^0$, donde

$P_1^0 = Q - \{r\}$ y $P_2^0 = \{r\}$, es decir $P_1^0 = \{p, q\}$ y $P_2^0 = \{r\}$

A partir de la función de transición $\boldsymbol{f_1}$, puede comprobarse que:

$f_1(p, 0) = r \in P_2^0$ $\quad f_1(q, 0) = q \in P_1^0$
$f_1(p, 1) = q \in P_1^0$ $\quad f_1(q, 1) = r \in P_2^0$

es decir que los elementos de $\mathbf{P_1^0}$ tienen diferente comportamiento ante una entrada **0** igual comportamiento ante una entrada **1**, luego:

$Q/E_1 = \{\{p\}, \{q\}, \{r\}\}$

Los estados **p** y **q** no son equivalentes, luego el AFD_1 ya es mínimo.

$$AFD_2 = (\{0, 1\}, \{p, q, r, s\}, p, \{s\}, f_2)$$

El AFD_2 es conexo, por lo que no hay estados que deban eliminarse.

El conjunto cociente inicial es $Q/E_0 = \{\{p, q, r\}, \{s\}\}$

donde $P_1^0 = \{p, q, r\}$ y $P_2^0 = \{s\}$

A partir de la función de transición $\boldsymbol{f_2}$, puede comprobarse que:

$f_2(p, 0) = q \in P_1^0$ $\quad f_2(q, 0) = q \in P_1^0$ $\quad f_2(r, 0) = s \in P_2^0$
$f_2(p, 1) = s \in P_2^0$ $\quad f_2(q, 1) = r \in P_1^0$ $\quad f_2(r, 1) = q \in P_1^0$

Como se observa, los tres elementos de P_1^0 tienen diferente comportamiento ante una entrada **0** y otra **1**, luego no pueden ser agrupados en una misma clase. Esto implica que:

$$Q/E_1 = \{\{p\}, \{q\}, \{r\}, \{s\}\}$$

Los estados **p**, **q** y **r** no son equivalentes, luego el AFD_2 ya es mínimo.

Los dos autómatas comparados ya son mínimos y tienen diferente cantidad de estados, por lo que se reconoce que no se trata de máquinas equivalentes.

Ejercicio 20

Comprobar si los AFD cuyas funciones de transición se presentan en la tabla 3.25 son equivalentes entre sí. Para ello, eliminar en cada AFD los estados no conexos (si los hubiese) y luego construir los conjuntos cocientes necesarios para minimizar cada autómata.

f_1	1	2
→p	q	r
q	r	p
*r	p	r

f_2	1	2
→A	A	B
B	D	B
C	D	C
*D	B	B

Tabla 3.25: Funciones de transición de los AFD del Ejercicio 20.

Solución

$$AFD_1 = (\{1, 2\}, \{p, q, r\}, p, \{r\}, f_1)$$

El AFD_1 es conexo, por lo que no hay estados que deban eliminarse.

El conjunto cociente inicial es $Q/E_0 = \{\{p, q\}, \{r\}\} = P_1^0 \cup P_2^0$,

donde $P_1^0 = Q - \{r\}$ y $P_2^0 = \{r\}$, es decir $P_1^0 = \{p, q\}$ y $P_2^0 = \{r\}$

A partir de la función de transición $\boldsymbol{f_1}$, puede comprobarse que:

$f_1(p, 1) = q \in P_1^0$ $\quad$ $f_1(q, 1) = r \in P_2^0$
$f_1(p, 2) = r \in P_2^0$ $\quad$ $f_1(q, 2) = p \in P_1^0$

Los elementos de $\mathbf{P_1^0}$ tienen diferente comportamiento ante las entradas **1** y **2**, por lo que se reconoce que no pertenecen a una misma clase:

$$Q/E_1 = \{\{p\}, \{q\}, \{r\}\}$$

Los estados **p** y **q** no son equivalentes, luego el AFD_1 ya es mínimo.

$$AFD_2 = (\{1, 2\}, \{A, B, C, D\}, A, \{D\}, f_2)$$

El AFD_2 es no conexo, por lo que hay que eliminar el estado **C**.

El conjunto cociente inicial es $Q/E_0 = \{\{A, B\}, \{D\}\}$ donde $P_1^0 = \{A, B\}$ y $P_2^0 = \{D\}$

A partir de la función de transición $\boldsymbol{f_2}$, puede comprobarse que:

$f_2(A, 1) = A \in P_1^0$ $\quad$ $f_2(B, 1) = D \in P_2^0$
$f_2(A, 2) = B \in P_1^0$ $\quad$ $f_2(B, 2) = B \in P_1^0$

Aquí puede comprobarse que los estados **B** y **A** tienen distinto comportamiento lo que permite redefinir el conjunto cociente como:

$Q/E_1 = \{\{A\}, \{B\}, \{D\}\}$ donde $P_1^1 = \{A\}$, $P_2^1 = \{D\}$ y $P_3^1 = \{B\}$

Como ya se dijo, el primer autómata no sufrió cambios y en el segundo, una vez eliminado el estado no conexo, quedó minimizado, con sus funciones de transición expresadas como:

f_1	1	2
→p	q	r
q	r	p
*r	p	r

f_2	1	2
→ P_1	P_1	P_3
P_3	P_2	P_3
* P_2	P_3	P_3

Tabla 3.26: Funciones ***f*** de los AFD mínimos del Ejercicio 20.

Ambos autómatas tienen ahora la misma cantidad de estados, lo que no necesariamente significa que se trata de autómatas equivalentes. Esta comprobación suele ser más evidente sobre los grafos, y con este fin ambos son representados en las Figuras 3.34a y 3.34b:

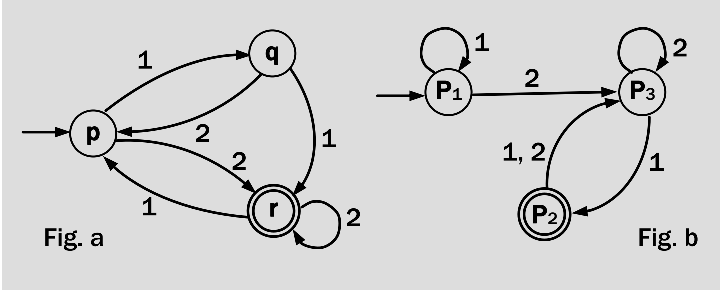

Figura 3.34a y 3.34b: Grafos de los *AFD* mínimos del Ejercicio 20.

Inspeccionando los grafos de los AFD_1 y AFD_2 pueden deducirse las expresiones regulares que representan a las cadenas reconocidas por cada uno, a saber:

***AFD*₁** (Figura 3.34a)

$\delta_1 = 1(21)^*1(2)^*$; $\delta_2 = 2(12)^*(2)^*$

Descripción del lenguaje por enumeración:

$L(AFD_1)$ = {11, 1211, 121211, …, 12112, 121122, … 2, 212, 21212, … 2122, 21222, 212222, … }

***AFD*₂** (Figura 3.34b)

$\beta = (1)^*(2)^+1((1+2)(2)^*1)^*$

Descripción del lenguaje por enumeración:

$L(AFD_2)$ = {21, 121, 11221, 1112221, …12111, 1122111, …}

Las cadenas de menor longitud reconocidas por el AFD_1 (**11** y **2**) son claramente diferentes de la cadena más corta reconocida por el AFD_2 (**21**). Se deja al lector completar la comprobación de que los lenguajes reconocidos por ambos autómatas son diferentes y, por lo tanto, estas máquinas abstractas no son equivalentes.

En el Capítulo 4, se estudiará la manera de conocer la gramática que genera el lenguaje que es reconocido por cierto autómata finito. Esto aportará un criterio de comparación de máquinas apoyado en consideraciones formales y no intuitivas, que demostrará ser de gran utilidad. Sin embargo, cualquiera sea el criterio de comparación de las máquinas, el primer paso es su minimización.

Ejercicios resueltos de autómatas finitos bidireccionales

Ejercicio 21

Construir un AFDB que acepte palabras del alfabeto español que terminen con una vocal.

Solución

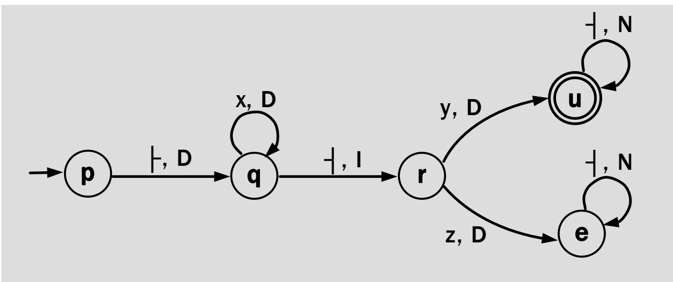

Figura 3.35

$AFDB = (\Sigma_{español}, \Sigma_{español} \cup \{\vdash, \dashv\}, \{p, q, r, u, e\}, p, \{u\}, f)$

Cabe destacar que, con el fin de conseguir una figura clara, se redujo el número de rótulos utilizando los caracteres **x**, **y**, **z** para representar a cualquier letra, cualquier vocal y cualquier consonante del alfabeto español respectivamente.

Es decir: $x \in \Sigma_{español}$

$y \in \{a, e, i, o, u\}$

$z \in \Sigma_{español} - \{a, e, i, o, u\}$

Ejercicio 22

Construir un AFDB que acepte bytes cuya primera mitad sea igual a la segunda.

Solución

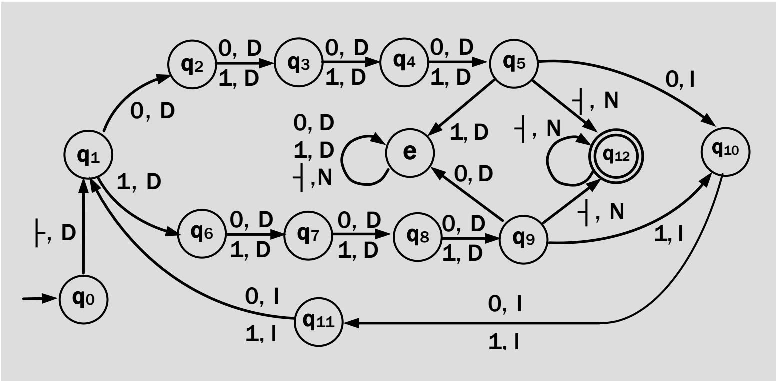

Figura 3.36

AFDB = (Σ_E, Γ, Q, q_0, A, *f*)

Donde:

$\Sigma_E = \{0,1\}$

$\Gamma = \{0, 1, \vdash, \dashv\}$

$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8, q_9, q_{10}, q_{11}, q_{12}, e\}$

$q_0 = q_0$

$A = \{q_{12}\}$

f queda definida por su grafo de la Figura 3.36.

//