线性代数第六次辅学 - 二次型

二次型的定义

n 个元 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的二次齐次多项式

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} 2a_{ij} x_i x_j \\ &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \\ &\quad + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n + 2a_{23}x_2x_3 + \cdots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n \end{aligned}$$

称为域 $\mathbf{F}$ 上的 n 元二次型（简称二次型）。

先考虑实域上的情况。若令 $a_{ij} = a_{ji}$（$1 \le i < j \le n$），则二次型可表示为

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = X^{\mathrm{T}} A X$$

其中 $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^n$，$A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为实对称矩阵，并称对称矩阵 A 为二次型 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 的相伴矩阵。

> 二次型写作 $f(x) = X^{\mathrm{T}} A X$。当我们对变量做一个可逆线性代换（换坐标）
>
> $$X = CY \quad (C \text{ 可逆})$$
>
> 代入得到
>
> $$f(x) = (CY)^{\mathrm{T}} A (CY) = Y^{\mathrm{T}} (C^{\mathrm{T}} A C) Y$$
>
> 因此：**同一个二次型在不同坐标系下，其相伴矩阵会变为 $C^{\mathrm{T}} A C$。**
> 这类变换叫做**合同变换**，对应的关系叫**矩阵合同**。

等价、相似、合同

1. 矩阵等价

矩阵等价定义
设矩阵 A, B 均是 $m \times n$ 矩阵。若存在可逆矩阵 $P \in M_m, Q \in M_n$ 使得

$$PAQ = B,$$

则称矩阵 A, B **等价**。

矩阵等价的充分必要条件是：$r(A)=r(B)$。

> 备注：等价常对应“行变换 + 列变换”，主要用于一般矩阵的秩/线性方程组；二次型问题里最核心的是合同。

2. 矩阵相似

矩阵相似定义
设矩阵 A,B 是两个 n 阶方阵，若存在 n 阶可逆矩阵 P 使得

$$P^{-1}AP=B,$$

则称矩阵 A 与矩阵 B **相似**，记作 $A\sim B$。

相似的典型不变量：特征值（含重数）、特征多项式、最小多项式、$\det$、tr 等。

3. 矩阵合同

矩阵合同定义
设矩阵 A,B 为 n 阶矩阵，若存在可逆矩阵 C 使得

$$C^{\mathrm{T}}AC=B,$$

则称矩阵 A 与矩阵 B **合同**。

> 对实对称矩阵 A,B，A 与 B 合同 $\Longleftrightarrow$ 它们的正、负惯性指数分别相同。

4. 相似与合同的关系

- **一般情况下：相似 $\neq$ 合同**
  相似保特征值；合同一般不保特征值（但保惯性指数）。
- **当变换矩阵是正交矩阵时，两者会“重合”**
  若 Q 正交，则 $Q^{\mathrm{T}}=Q^{-1}$，于是

  $$Q^{\mathrm{T}}AQ=Q^{-1}AQ,$$

  这既是合同变换，也是相似变换。
  所以：**正交相似 = 正交合同**

化二次型为标准型

1. 配方法
2. 和变换
3. 正交替换

例1 计算二次型 $X^{\mathrm{T}}AX=x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3$ 的标准形。

方法一：配方法

配方法的要领是：第一次将所有含 x_1 的项集中到一起，进行配方，从而消掉含 x_1 的交叉项，第二次将含 x_2 的项集中到一起进行配方……直到消去所有的交叉项。

解：将含有 x_1 的项集中起来进行配方：

$$\begin{aligned}X^{\mathrm{T}}AX &= x_1^2+2x_1(x_2-2x_3)+5x_2^2+5x_3^2\\ &=(x_1+x_2-2x_3)^2-(x_2-2x_3)^2+5x_2^2+5x_3^2\\ &=(x_1+x_2-2x_3)^2+4x_2^2+x_3^2+4x_2x_3\\ &=(x_1+x_2-2x_3)^2+(2x_2+x_3)^2\\ &=y_1^2+y_2^2.\end{aligned}$$

其中，非退化线性替换为：

$$\begin{cases}x_1+x_2-2x_3=y_1\\ 2x_2+x_3=y_2\\ x_3=y_3\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x_1=y_1-\dfrac{1}{2}y_2+\dfrac{5}{2}y_3\\ x_2=\dfrac{1}{2}y_2-\dfrac{1}{2}y_3\\ x_3=y_3\end{cases}\quad\square$$

方法二：合同变换法

解：对二次型的矩阵与单位矩阵构成的分块矩阵，进行合同变换（行变换后同步列变换）：

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&-2&1&0&0\\1&5&0&0&1&0\\-2&0&5&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{-r_1+r_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&-2&1&0&0\\0&4&2&-1&1&0\\-2&0&5&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{-c_1+c_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-2&1&-1&0\\0&4&2&-1&1&0\\-2&2&5&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{2r_1+r_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-2&1&-1&0\\0&4&2&-1&1&0\\0&2&1&2&-2&1\end{array}\right]\xrightarrow{2c_1+c_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-1&2\\0&4&2&-1&1&-2\\0&2&1&2&-2&5\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}r_2+r_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-1&2\\0&4&2&-1&1&-2\\0&0&0&2&-2&5\end{array}\right]\xrightarrow{-\frac{1}{2}c_2+c_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-1&\frac{5}{2}\\0&4&0&-1&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0&2&-2&5\end{array}\right]$$

因此二次型的标准形为：

$$X^{\mathrm{T}}AX=y_1^2+4y_2^2$$

对应的非退化线性替换矩阵为：

$$C=\begin{bmatrix}1&-1&\dfrac{5}{2}\\0&1&-\dfrac{1}{2}\\0&0&1\end{bmatrix}\quad\square$$

例2 将 $2x_1x_2-4x_1x_3+10x_2x_3$ 化为标准型

不含平方项，先作可逆线性变换消去交叉项 x_1x_2。

令

$$\begin{cases}x_1=y_1+y_2\\x_2=y_1-y_2\\x_3=y_3\end{cases}$$

代入化简，配方

$$\begin{aligned}f&=2(y_1+y_2)(y_1-y_2)-4(y_1+y_2)y_3+10(y_1-y_2)y_3\\&=2(y_1^2-y_2^2)-4y_1y_3-4y_2y_3+10y_1y_3-10y_2y_3\\&=2y_1^2-2y_2^2+6y_1y_3-14y_2y_3\end{aligned}$$

$$f=2\left(y_1+\frac{3}{2}y_3\right)^2-2\left(y_2+\frac{7}{2}y_3\right)^2+20y_3^2$$

令

$$\begin{cases}z_1=y_1+\frac{3}{2}y_3\\z_2=y_2+\frac{7}{2}y_3\\z_3=y_3\end{cases}$$

得标准形

$$f=2z_1^2-2z_2^2+20z_3^2$$

由 y 与 z 的关系得

$$\begin{cases}y_1=z_1-\frac{3}{2}z_3\\y_2=z_2-\frac{7}{2}z_3\\y_3=z_3\end{cases}$$

代入 $x=Ty$ 得

$$\begin{cases}x_1=z_1+z_2-5z_3\\x_2=z_1-z_2+2z_3\\x_3=z_3\end{cases}$$

1.正定矩阵的定义

设A为n阶实对称矩阵，$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为实二次型，
① 若对任意非零向量$X\in R^n$，都有$f=X^TAX>0$，则称f是正定的，称A为正定矩阵；

② 若对任意非零向量$X \in R^n$，都有$f = X^TAX < 0$，则称f是负定的，称A为负定矩阵；
③ 若存在非零向量$X, Y \in R^n$，使$X^TAX > 0, Y^TAY < 0$，则称f是不定的，称A为不定矩阵；

2. 关于标准形正定性的判断：

对于n元实二次型，$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + \cdots + d_nx_n^2$
① f正定 $\iff$ $d_i > 0\ (i = 1, 2, \cdots, n)$
② f负定 $\iff$ $d_i < 0\ (i = 1, 2, \cdots, n)$
③ f不定 $\iff$ 存在某个$d_s > 0$，也存在某个$d_t < 0$.

eg：$f = x^2 + 4y^2 + 16z^2$ $\rightarrow$正定二次型
$f = -x_1^2 - 3x_2^2$ $\rightarrow$负定二次型

3.正交变换不改变正定性

正交变换（也称合同变换）和可逆的线性变换不会改变矩阵的正定性、负定性和不定性.
$\Rightarrow$启示：判断二次型的正定性，可化为标准形判定

4. 顺序主子式

在n阶矩阵A中由第1行，第2行，...第k行和第1列，第2列，...第k列组成的k阶子式，称为k阶顺序主子式，记为Δ_k.

eg：设$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$，则$A$有4个顺序主子式，分别为
$\Delta_1 = 1$，$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1$，$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$，$\Delta_4 = |A| = 8$

5. 赫尔维茨定理：

n阶实对称矩阵A为正定矩阵的充要条件是A的n个顺序主子式全为正.

6. 正定二次型的判定方法

方法一：（定义法）A为正定矩阵 $\iff \begin{cases} ①\ A^T = A \\ ②\ \forall X \neq 0,\ 有X^TAX > 0 \end{cases}$

方法二：（特征值法）A为正定矩阵 $\iff \begin{cases} ①\ A^T = A \\ ②\ \lambda_i > 0\ (i = 1, 2, \cdots, n) \end{cases}$

方法三：（顺序主子式法）

A为正定矩阵 $\iff$ A的所有顺序主子式均大于0

例题选讲

大题

1. （2023-2024学年线性代数（H）期末）
   设 $f(x,y,z)=5x^2+y^2+tz^2+4xy-2yz-2xz$。当 t 取何值时，f 是正定、半正定、不定的？并求不定时的正负惯性指数。

答案
令

$$A=\begin{pmatrix}5&2&-1\\2&1&-1\\-1&-1&t\end{pmatrix},\quad \Delta_1=5,\ \Delta_2=1,\ \Delta_3=\det A=t-2.$$

- 正定：$t>2$
- 半正定：$t=2$
- 不定：$t<2$，惯性指数 $(p,q)=(2,1)$

2. （2019-2020学年线性代数（H）期末）
   已知二次型 $X^{\mathrm{T}}AX=ax_1^2+ax_2^2+ax_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$ 的秩为 2。
   (1) 求实数 a；
   (2) 用正交变换 $X=QY$ 化为标准形，给出 Q，并求正、负惯性指数。

答案

$$A=\begin{pmatrix}a&1&1\\1&a&-1\\1&-1&a\end{pmatrix},\quad \det A=(a-2)(a+1)^2.$$

$r(A)=2\Rightarrow a=2$（$a=-1$ 时秩为 1）。

当 $a=2$，取

$$e_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad e_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix},\quad e_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},\quad Q=(e_1,e_2,e_3).$$

则

$$Q^{\mathrm{T}}AQ=\mathrm{diag}(3,3,0),$$

标准形 $3y_1^2+3y_2^2$。
惯性指数：正 $p=2$，负 $q=0$（零惯性指数 1）。

3. （2018-2019学年线性代数（H）期末）

   设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3\ (b>0)$，矩阵 A 的特征值之和为 1，特征值之积为 -12 。

   (1) 求 a,b；

   (2) 正交变换化标准形并写 Q；

   (3) 判断是否正定。

答案

$$A=\begin{pmatrix}a&0&b\\0&2&0\\b&0&-2\end{pmatrix},\quad \mathrm{tr}(A)=a=1.$$

$$\det A=2\det\begin{pmatrix}a&b\\b&-2\end{pmatrix}=2(-2a-b^2)=-12\Rightarrow b^2=4\Rightarrow b=2.$$

取

$$u_1=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},\quad u_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad u_3=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix},\quad Q=(u_1,u_2,u_3),$$

则

$$Q^{\mathrm T}AQ=\mathrm{diag}(2,2,-3),$$

标准形 $2y_1^2+2y_2^2-3y_3^2$。
不正定（有负特征值 -3）。

判断正误

1. 设 A,B 为 n 阶正定矩阵。证明：$A+B$ 的最大特征值大于 A 的最大特征值。
   答案：对。 取 A 的最大特征值单位特征向量 v：
   $\lambda_{\max}(A+B)\ge v^{\mathrm T}(A+B)v=\lambda_{\max}(A)+v^{\mathrm T}Bv>\lambda_{\max}(A)$。
2. 设 λ_1,μ_1 分别是实对称矩阵 A,B 的最小特征值。证明：$A+B$ 的最小特征值 $\ge\lambda_1+\mu_1$。
   答案：对。 任意单位向量 x：$x^{\mathrm T}(A+B)x\ge\lambda_1+\mu_1$，再取最小。
3. 设 A 半正定，C 可逆。证明：$C^{\mathrm T}AC$ 也半正定。
   答案：对。 任意 x：$x^{\mathrm T}C^{\mathrm T}ACx=(Cx)^{\mathrm T}A(Cx)\ge 0$。
4. 设 A 实对称，B 正定。证明：存在可逆 C，使 $C^{\mathrm T}AC$ 与 $C^{\mathrm T}BC$ 都对角。
   答案：对。 取 $B=LL^{\mathrm T}$，令 $A_1=L^{-1}AL^{-\mathrm T}$，再正交对角化 A_1。
5. 判断正误：对任意 $x\in\mathbb{R}^n$ 与任意 $\lambda\in\mathbb{R}$，$E+\lambda xx^{\mathrm T}$ 为正定。
   答案：错。 取 $\lambda<-\dfrac{1}{|x|^2}$，则有特征值 $1+\lambda|x|^2<0$。

6. 判断正误：A 为 m 阶正定矩阵，C 为 $m \times n$，$r(C) = m$，则 $C^{\mathrm{T}}AC$ 也正定。

答案：错。 若 $n > m$，则 $r(C^{\mathrm{T}}AC) \leq m < n$，奇异不可能正定。