1、计算极限： $I=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_a (1+u^4)^{\frac{1}{4}}du}{x^3}$

解：由L'Hospital法则可知，$I=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(1+x^4)^{\frac{1}{4}}}{3x^2}$

而 $\dfrac{(1+x^4)^{\frac{1}{4}}}{3x^2}>0$，且 $\dfrac{(1+x^4)^{\frac{1}{4}}}{3x^2}<\dfrac{(2x^4)^{\frac{1}{4}}}{3x^2}<\dfrac{2}{3x}\longrightarrow 0\ (x\to+\infty)$

因此，由夹逼准则可知，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(1+x^4)^{\frac{1}{4}}}{3x^2}=0\Rightarrow I=0$

2. 设函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$，$x\neq 0$，$f(0)=1$，求 $f'(0)$，$f''(0)$

解：由Taylor公式可知，$\sin x=x-\dfrac{x^3}{6}+\cdots$

因此，$f(x)$ 在 $x=0$ 处Taylor展开为 $f(x)=1-\dfrac{x^2}{6}+\cdots$

$\Rightarrow f(0)=1$，$f'(0)=0$，$f''(0)=-\dfrac{1}{6}\times 2!=-\dfrac{1}{3}$

3. 计算极限： $I=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x^3+x^2)^{\frac{1}{3}}-(x^3-x^2)^{\frac{1}{3}}\right]$

解：无穷减无穷，立方差形式，考虑用立方差公式

$$I=\lim_{x\to+\infty}\left[(x^3+x^2)^{\frac{1}{3}}-(x^3-x^2)^{\frac{1}{3}}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2-(x^3-x^2)}{(x^3+x^2)^{\frac{2}{3}}+\left[(x^3+x^2)(x^3-x^2)\right]^{\frac{1}{3}}+(x^3-x^2)^{\frac{2}{3}}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}+x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}+x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{3}}}=\frac{2}{3}$$

4. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{1+x}+ax+bx^2\right)^{\frac{1}{x^2}}=2021$，求 a,b.

解：原式 $\Leftrightarrow\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\ln\left(\sqrt{1+x}+ax+bx^2\right)=\ln 2021$

很自然考虑使用L'Hospital法则，有：

$$\text{左式}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1+x}+ax+bx^2}\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{1+x}}+a+2bx\right)}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}+a+2bx}{2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+ax+bx^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}+a+2bx}{2x}=\ln 2021$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{1+x}}+a+2bx\longrightarrow 0\ (x\to 0)\Rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

代入，由 L'Hospital 法则可知：$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}+a+2bx}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2b-\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}}{2}$

$=\ln 2021$

$$\Longrightarrow b=\frac{1}{8}+\ln 202$$

5、已知 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上可导，且 $\lim_{x\to 0+}f'(x)$ 存在，求证：$\lim_{x\to 0+}f(x)$ 存在。

证明．$\lim_{x\to 0+}f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall 0<x_1<x_2<\delta,\ |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$

$\because f(x)$ 在 $(0,1)$ 上可导．故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上连续

记 $\lim_{x\to 0+}f'(x)=a$．则对 $\forall 1>\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall x\in(0,\delta),\ |f'(x)-a|<\varepsilon$

因此，由 Lagrange 中值定理可知：

$\forall 0<x_1<x_2<\delta,\ \exists\xi\in(x_1,x_2)\quad |f(x_2)-f(x_1)|=|x_2-x_1|\cdot|f'(\xi)|$

$\Rightarrow |f(x_2)-f(x_1)|=|x_2-x_1|\cdot|f'(\xi)|<\delta\cdot(|a|+1)$

取 $\delta<\frac{\varepsilon}{|a|+1}$，可由 Cauchy 收敛准则知，$\lim_{x\to 0+}f(x)$ 存在

6. $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上二阶可导．$f(0)=1$，且当 $x\geq 0$ 时．$f(x)\geq 0,\ f'(x)\leq 0,$ $f''(x)\leq f(x)$，证明：$f'(0)\geq-\sqrt{2}$

证明：任取 $x\in(0,1)$．由 Lagrange 中值定理．$\exists\xi\in(0,1),\ f(x)-1=xf'(\xi)$

$$\Rightarrow -\frac{1}{x}\leq f'(\xi)\leq 0$$

令 $F(x)=(f'(x))^2-(f(x))^2$．同样可知 $F(x)$ 在 $(0,1)$ 可导．且有

$$F'(x)=2f'(x)(f''(x)-f(x))\geq 0\quad(\because f'(x)\leq 0,\ f''(x)\leq f(x))$$

$\Rightarrow F(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增 $\Rightarrow F(\xi)\geq F(0)$

$$\Rightarrow (f'(\xi))^2-(f'(0))^2\geq f^2(\xi)-f^2(0)\geq -1$$

$$\Rightarrow (f'(0))^2\leq 1+(f'(\xi))^2\leq 1+\frac{1}{x^2}\leq 2\Rightarrow f'(0)\geq-\sqrt{2}\quad 证毕$$

7. $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，$(0,1)$ 可导，$f(0)=0$，$f(1)=\frac{1}{3}$，求证：$\exists \xi\in(0,\frac{1}{2})$，$\exists \eta\in(\frac{1}{2},1)$，使得 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$

证明：求导之后出现平方 $(f'(\xi)-\xi^2)$，构造辅助函数中应有 x^3

容易想到 $F(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3$，有 $F(0)=F(1)=0$，且 $F'(x)=f'(x)-x^2$

由 Lagrange 中值定理可知：

$$\exists \xi,\eta,\ \begin{cases} F(\frac{1}{2})-F(0)=F'(\xi)\cdot\frac{1}{2} \ ① \quad ,0<\xi<\frac{1}{2} \\ F(1)-F(\frac{1}{2})=F'(\eta)\cdot\frac{1}{2} \ ② \quad \frac{1}{2}<\eta<1 \end{cases}$$

① + ② 可知 $F(1)-F(0)=\frac{1}{2}(F'(\xi)+F'(\eta)) \Rightarrow F'(\xi)+F'(\eta)=0$

$\Rightarrow f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$ 证毕！

8. $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，$(0,1)$ 可导，$f(1)=0$。证明：$\exists \eta\in(0,1)$ 使得 $2f(\eta)+\eta f'(\eta)=0$

证明：先进行分析：$2f(x)+xf'(x)=0$ 有解

$\Rightarrow \frac{2}{x}+\frac{f'(x)}{f(x)}=0$ 有解

积分后有 $\ln x^2+\ln f(x)=0 \Rightarrow \ln x^2 f(x)=0$

故考虑构造 $F(x)=x^2f(x)$ $\quad F'(x)=x^2f'(x)+2xf(x)$

注意到 $F(0)=F(1)=0$，故由 Rolle 中值定理：

$\exists \eta\in(0,1)$，$F'(\eta)=0 \Rightarrow 2f(\eta)+\eta f'(\eta)=0$ 证毕

9. $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数，$f(0)=0$，$f(1)=1$，$\int_0^1 f(x)\,dx=1$。证明：

(1) $\exists \eta\in(0,1)$，$f'(\eta)=0$

(2) $\exists \eta\in(0,1)$，$f''(\eta)<-2$

证明：(1) 若对 $\forall x\in(0,1)$，$f(x)\le 1$，有 $\int_0^1 f(x)\,dx<\int_0^1 dx=1$ 矛盾！

故 $\exists \varphi_1\in(0,1)$，$f(\varphi_1)>1$

由连续变量介值定理可知，$\exists \varphi_2\in(0,\varphi_1)$，$f(\varphi_2)=1$

故由 Rolle 定理可知，$\exists \eta\in(\varphi_2,1)\subseteq(0,1)$，$f'(\eta)=0$

(2) 法一：由于$f(x)$在$[0,1]$上具有二阶导数 $\Rightarrow f(x)\in C[0,1]$

由最值定理可知，$f(x)$在$[0,1]$上有最大值点φ与最大值$f(\varphi)>1$

由Fermat引理可知，$f'(\varphi)=0$

故由Taylor公式可知：$f(0)=f(\varphi)+f'(\varphi)(0-\varphi)+\dfrac{f''(\eta)}{2!}(0-\varphi)^2$

(其中$\eta\in(0,\varphi)$)

$\Rightarrow f''(\eta)=\dfrac{-2f(\varphi)}{\varphi^2}<\dfrac{-2}{\varphi^2}<-2$，证毕！

法二：令$\varphi(x)=f(x)+x^2$ 则$\exists\eta$ s.t. $f''(\eta)<-2 \Leftrightarrow \exists\eta$ s.t. $\varphi''(x)<0$

注意到：$\varphi(0)=0$，$\varphi(1)=2$，由(1)可知，$\exists\alpha\in(0,1)$，$f(\alpha)=1$

$\Rightarrow\varphi(\alpha)=1+\alpha^2$

故由Lagrange中值定理，存在$\eta_1\in(0,\alpha)$，$\eta_2\in(\alpha,1)$

$\varphi'(\eta_1)=\dfrac{\varphi(\alpha)-\varphi(0)}{\alpha}=\dfrac{1+\alpha^2}{\alpha}$ $\quad\varphi'(\eta_2)=\dfrac{1-\alpha^2}{1-\alpha}=1+\alpha<\dfrac{1+\alpha^2}{\alpha}$

故由Lagrange中值定理，$\exists\eta\in(\eta_1,\eta_2)\subseteq(0,1)$使得

$\varphi''(\eta)=\dfrac{\varphi'(\eta_2)-\varphi'(\eta_1)}{\eta_2-\eta_1}<0 \Rightarrow f''(\eta)<-2$ 证毕

$$\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx = \int\sqrt{a^2(1+\tan^2 t)}\,d\,a\tan t = a^2\int\sec^3 t\,dt$$

$$= a^2\int\sec t\,d\tan t \overset{分部}{=} a^2\tan t\cdot\sec t - a^2\int\tan^2 t\cdot\sec t\,dt$$

$$= a^2\tan t\cdot\sec t - a^2\int(\sec^3 t-\sec t)\,dt$$

$$\Rightarrow \int\sec^3 t\,dt = \frac{1}{2}(\tan t\cdot\sec t+\int\sec t\,dt)$$

$$= \frac{1}{2}\tan t\cdot\sec t+\frac{1}{2}\ln|\sec t+\tan t|+C$$

$$\Rightarrow \int\sqrt{x^2+a^2}\,dx = \left(\frac{1}{2a^2}x\sqrt{x^2+a^2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{a}(x+\sqrt{x^2+a^2})\right|+C\right)\cdot a^2$$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C$$

x^2-a^2 也同理，令 $x=a\cdot\sec t$ 即可

1. $I=\int\frac{3x^2-4x-1}{x^3-2x^2-x+2}\,dx = \int\frac{d(x^3-2x^2-x+2)}{x^3-2x^2-x+2} = \ln(x^3-2x^2-x+2)+C$

2. $I=\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}+x\sqrt{x}}\,dx = \int 2t\cdot\frac{\arctan t}{t+t^3}\,dt = 2\int\frac{\arctan t}{1+t^2}\,dt$

$$= 2\int\arctan t\,d\arctan t = (\arctan t)^2+C$$

3. $I=\int\frac{1+\sin x}{(1+\cos x)\sin x}\,dx\quad (x\in(0,\frac{\pi}{2}))$

$$= \int\frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{(1+\frac{1-t^2}{1+t^2})\cdot\frac{2t}{1+t^2}}\,d\,2\arctan t \quad (万能公式，t=\tan\frac{x}{2})$$

$$= \int\frac{\frac{(t+1)^2}{\frac{4t}{1+t^2}}}{}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int\frac{(t+1)^2}{2t}\,dt = \frac{1}{4}t^2+t+\ln|t|+C$$

$$= \frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln(\tan\frac{x}{2})+C \quad C\in\mathbb{R},\ x\in(0,\frac{\pi}{2})$$

4. $I_1=\int\frac{x^3-2x+1}{(x-2)^{100}}\,dx = \int\frac{(t+2)^3-2(t+2)+1}{t^{100}}\,dt$

$$= \int\frac{t^3+6t^2+10t+5}{t^{100}}\,dt = \int(t^{-97}+6t^{-98}+10t^{-99}+5t^{-100})\,dt$$

$$=-\left(\frac{1}{96}t^{-96}+\frac{6}{97}t^{-97}+\frac{5}{49}t^{-98}+\frac{5}{99}t^{-99}\right)+C$$

$$I_2=\int\frac{x\,dx}{1+\cos x}=\int\frac{x}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx\xlongequal{t=\frac{x}{2}}2\int\frac{t}{\cos^2 t}dt=2\int t\cdot\sec^2 t\,dt$$

$$=2\int t\,d\tan t=2\left(t\tan t-\int\tan t\,dt\right)$$

$$=2t\tan t+2\ln|\cos t|+C$$

5. $$I=\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx\xlongequal{t=\sqrt{x}}\int\frac{\arctan t}{t}\cdot 2t\,dt$$

$$=2\int\arctan t\,dt=2t\arctan t-2\int t\cdot\frac{1}{1+t^2}dt \quad (分部积分)$$

$$=2t\arctan t-\ln(1+t^2)+C=2\sqrt{x}\cdot\arctan\sqrt{x}-\ln(1+x)+C$$

6. $$I=\int\sin(\ln x)\,dx\xlongequal{x=e^t}\int e^t\cdot\sin t\,dt=-e^t\cos t+\int e^t\cos t\,dt$$

$$=e^t\sin t-e^t\cos t-\int e^t\cdot\sin t\,dt$$

$$\Rightarrow\int e^t\sin t\,dt=\frac{1}{2}e^t(\sin t-\cos t)+C.$$

$$\Rightarrow I=\int\sin(\ln x)\,dx=\frac{1}{2}x\left(\sin(\ln x)-\cos(\ln x)\right)+C$$

7. $$I=\int\frac{dx}{(\sin^2x+2\cos^2x)^2}$$

法一. 换元法：令 $x=\tan t$. $I=\int\frac{1}{\left(\frac{t^2}{t^2+1}+\frac{2}{t^2+1}\right)^2}\cdot\frac{dt}{1+t^2}$

$$\Rightarrow I=\int\frac{t^2+1}{(t^2+2)^2}dt$$

$$=\int\frac{1}{t^2+2}dt-\int\frac{1}{(t^2+2)^2}dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}-\int\frac{1}{(t^2+2)^2}dt$$

以下计算 $\int\frac{1}{(t^2+2)^2}dt=J$

$$J=\int\frac{1}{(t^2+2)^2}dt\xlongequal{t=\sqrt{2}\tan\theta}\int\frac{\sqrt{2}}{(2+2\tan^2\theta)^2}d\tan\theta=\int\frac{\sqrt{2}\sec^2\theta}{4\sec^4\theta}d\theta$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\cos^2\theta\,d\theta=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{1+\cos2\theta}{2}d\theta$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\theta + \frac{1}{8\sqrt{2}}\sin 2\theta + C$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{1}{8\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}t}{1+\frac{t^2}{2}} + C = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\arctan\frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}t}{t^2+2}\right) + C$$

综上，我们有 $I = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\arctan\frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}t}{t^2+2}\right) + C$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{8}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{1}{4}\frac{t}{t^2+2} + C$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{8}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{4}\frac{\tan^2 x}{2+\tan^2 x} + C$$

法二：(换元+凑)

$$\int\frac{dx}{(\sin^2 x+2\cos^2 x)^2} \xlongequal{t=\tan x} \int\frac{t^2+1}{(t^2+2)^2}dt = \int\frac{1+\frac{1}{t^2}}{(t+\frac{2}{t})^2}dt$$

$$= \frac{3}{4}\int\frac{d(t-\frac{2}{t})}{(t-\frac{2}{t})^2+8} + \frac{1}{4}\int\frac{d(t+\frac{2}{t})}{(t+\frac{2}{t})^2}$$

(待定系数：令 $1+\frac{1}{t^2} = A(1+\frac{2}{t^2}) + B(1-\frac{2}{t^2})$)

$$= \frac{3}{4}\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{t-\frac{2}{t}}{2\sqrt{2}}\right] - \frac{1}{4(t+\frac{2}{t})} + C$$

$$= \frac{3}{8\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan x - \frac{2}{\tan x}}{2\sqrt{2}} - \frac{\tan x}{4(2+\tan^2 x)} + C.$$

8. 法一：(凑配法)

注意到，$\frac{1+\sin x}{1+\cos x} = \frac{1}{1+\cos x} + \frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}} + \tan\frac{x}{2} = \tan\frac{x}{2} + (\tan\frac{x}{2})'$

因此，$\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x dx = \int(\tan\frac{x}{2} + (\tan\frac{x}{2})')e^x dx = \int d(e^x\tan\frac{x}{2})$

$$= e^x\tan\frac{x}{2} + C$$

法二：(组合积分法)

设 $I = \int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x dx$. $J = \int\frac{1+\sin x}{1-\cos x}e^x dx$ (希望处理掉分母)

$$I+J = 2\int\frac{1+\sin x}{\sin^2 x}e^x dx = 2\int\frac{e^x}{\sin^2 x}dx + 2\int\frac{e^x}{\sin x}dx$$

$$= -2\int e^x d(\cot x) + 2\int\frac{e^x}{\sin x}dx = -2e^x\cot x + 2\int e^x\frac{1+\cos x}{\sin x}dx \quad ①$$

$$I-J = -2\int e^x\frac{\cos x(1+\sin x)}{\sin^2 x}dx = -2\int e^x\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx - 2\int e^x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}dx \quad ②$$

①+②有：$2I = -2e^x\cot x + 2\int\frac{e^x}{\sin x}dx - 2\int e^x\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx$

而 $\int e^x \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = \int e^x \frac{d(\sin x)}{\cos x} = \int e^x d(-\frac{1}{\sin x})$ （凑微分）

$$= -\frac{e^x}{\sin x} - \int \frac{e^x}{\sin x} dx$$

代入后，有：$I = -e^x \cot x + \frac{e^x}{\sin x} + C$

9. $I = \int x e^x \sin x \, dx$

采用对偶法，令 $J = \int x e^x \cos x \, dx$

$$I = \int x e^x \sin x \, dx = -\int x e^x d(\cos x) = -x e^x \cos x + \int (x+1) e^x \cos x \, dx$$

$$= -x e^x \cos x + J + \int e^x \cos x \, dx$$

$$= -x e^x \cos x + J + \frac{1}{2}(e^x \sin x + e^x \cos x)$$

$$J = \int x e^x \cos x \, dx = \int x e^x d(\sin x) = x e^x \sin x - \int (x+1) e^x \sin x \, dx$$

$$= x e^x \sin x - I - \int e^x \sin x \, dx = e^x \cdot x \cdot \sin x - I - \frac{1}{2}(e^x \cdot \sin x - e^x \cos x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I + J = e^x \cdot x \cdot \sin x + \frac{1}{2} e^x (\cos x - \sin x) \\ I - J = -e^x \cdot x \cos x + \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} e^x \cdot x (\sin x - \cos x) + \frac{1}{2} e^x \cos x$$

1. Dirichlet 函数在 $[0,1]$ 上不可积.

$$D(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\in\mathbb{Q}_c\end{cases}$$

对于任一分割 $\Delta\ (0=x_0\le x_1\le\cdots\le x_n=1)$, $\forall\, i=0,1,\cdots,n-1$ $[x_i,x_{i+1}]$ 中

存在 $a\in\mathbb{Q}$, $b\in\mathbb{Q}_c$, $\Rightarrow D(a)=1,\ D(b)=0 \Rightarrow \omega_i=1$

因此. 存在 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$, 使得对 $\forall\Delta$ 为在 $[0,1]$ 上的分割. $\sum_{i=0}^{n}\omega_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=1>\varepsilon_0$

故 $D(x)$ 在 $[0,1]$ 上不可积.

2. Riemann 函数在 $[0,1]$ 上可积.

$$R(x)=\begin{cases}1 & x=0,1\\ \frac{1}{n} & x=\frac{m}{n},\quad \gcd(m,n)=1\\ 0 & x\in\mathbb{Q}_c\end{cases}$$

证明: 对 $\forall$ 给定 $\varepsilon>0$. 至多存在有限个数 $x\in[0,1]$ 使得 $R(x)>\varepsilon$

(这是因为 $x=0,1,\frac{m}{n}$, $(1\le m<n\le[\frac{1}{\varepsilon}]$ 时, $R(x)>\varepsilon$)

设这样的 x 共有 k 个.

在 $[0,1]$ 上作如下分割: 将 $[0,1]$ 均分为 $[\frac{2k}{\varepsilon}]+1$ 节分. $\Delta x_i=\frac{1}{[\frac{2k}{\varepsilon}]+1}$

由于至多 k 个数满足 $R(x)>\varepsilon$, 故至多有 k 个区间. $\omega_i>\varepsilon$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i\le\sum_{\substack{i:\,\exists a\in[x_i,x_{i+1}]\\ \text{s.t. } R(a)>\varepsilon}}\omega_i\Delta x_i+\sum_{i:\,\text{其他}}\omega_i\Delta x_i$$

$$\le k\cdot 1\cdot\Delta x_i+(n-k)\cdot\varepsilon\Delta x_i\le k\Delta x_i+n\varepsilon\Delta x_i$$

$$=k\cdot\frac{1}{[\frac{2k}{\varepsilon}]+1}+\varepsilon<\frac{3}{2}\varepsilon$$

因此 Riemann 函数在 $[0,1]$ 上可积.

2. (1) 注意到 $\int_0^1 x^2f(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx \Rightarrow \int_0^1(x^2-1)f(x)\,dx=0$

对左式, 由第一积分中值定理可知, $\exists\,\xi\in(0,1)$ s.t. $0=\int_0^1(x^2-1)f(x)dx$

$\Rightarrow f(\xi)\cdot\int_0^1(x^2-1)\,dx=0 \Rightarrow f(\xi)=0$ $\qquad =f(\xi)\cdot\int_0^1(x^2-1)\,dx$

(2) $\int_0^1(x^2-1)f(x)\,dx=0$ 注意到 (x^2-1) 在 $[0,1]$ 上单调

故由第二积分中值定理, 存在 $\eta\in(0,1)$, 使得

$$\int_0^1(x^2-1)f(x)dx=\int_0^\eta(0-1)f(x)\,dx+(1-1)\int_\eta^1 f(x)\,dx=0$$

$\Rightarrow \int_0^\eta f(x)\,dx=0$ 证毕.

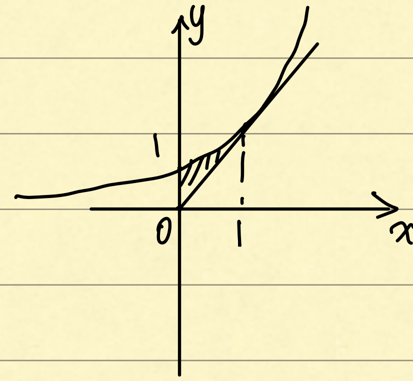
3. $I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\sin x}{1+\cos^2x}dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2x}dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\sin x}{1+\cos^2x}dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{(\pi-t)\sin(\pi-t)}{1+\cos(\pi-t)^2}d(\pi-t)$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\sin x}{1+\cos^2x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\pi-x)\sin x}{1+\cos^2x}dx$

$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos^2x}dx=-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(\cos x)}{1+\cos^2x}=-\pi\arctan(\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\pi\arctan 1$



4. 注意到切线l与曲线C相切于点$(1,e)$

$\Rightarrow V=\pi\left(\int_0^1(e^x)^2dx-\int_0^1(ex)^2dx\right)$

$=\pi\left(\frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1-\frac{1}{3}e^2x^3\Big|_0^1\right)$

$=\pi\left(\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}e^2\right)=\frac{\pi}{6}(e^2-3)$

10. 证明：对任意的正整数n，恒有：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^4dx\le\left(\frac{n^2}{4}-\frac{1}{8}\right)\pi^2$$

证明：对任意正整数$n\in N$均成立.很自然想到归纳法

首先需要处理$\sin nx$这一项，提出n才好处理

由归纳法，我们证明：$|\sin nx|\le n|\sin x|$，$\forall x\in R$

当$n=1$时，显然成立，假设$n=k$时成立，则$n=k+1$时

$|\sin(k+1)x|=|\sin kx\cos x+\cos kx\cdot\sin x|$

$\le|\sin kx|+|\sin x|\le(k+1)|\sin x|$

对原命题，$n=1$时，有 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\,dx=\frac{\pi^2}{8}=\left(\frac{n^2}{4}-\frac{1}{8}\right)\pi^2$

又 $|\sin nx|\le1$，且有 $\sin x\ge\frac{2}{\pi}x\ \left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$

故 $LHS=\int_0^{\frac{\pi}{2n}}x\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^4dx+\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2}}x\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^4dx$

$\le\int_0^{\frac{\pi}{2n}}x\left(\frac{n\sin x}{\sin x}\right)^4dx+\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2}}x\left(\frac{1}{2x/\pi}\right)^4dx$

$=n^4\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2n}}+\left(\frac{\pi}{2}\right)^4\cdot\frac{1}{4}x^4\Big|_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2n^2}{4}-\frac{1}{8}\pi^2$

1. 计算 $I=\int_{-\infty}^{\infty}|t-x|^{\frac{1}{2}}\frac{y}{(x-t)^2+y^2}dt$

注意到 x 与 t 关联，但 t 取值由 $-\infty$ 至 $+\infty$，故 $t-x$ 取值也为 $-\infty\sim+\infty$

换元对结果无影响

解：$I=\int_{-\infty}^{+\infty}|t-x|^{\frac{1}{2}}\frac{y}{(x-t)^2+y^2}dt\xlongequal{t-x=s}\int_{-\infty}^{+\infty}s^{\frac{1}{2}}\frac{y}{s^2+y^2}ds$

$$=2\int_0^{+\infty}s^{\frac{1}{2}}\frac{y}{s^2+y^2}ds$$

由 Cauchy 判别法，$\frac{s^{\frac{1}{2}}\cdot y}{s^2+y^2}<\frac{s^{\frac{1}{2}}y}{s^2}=\frac{y}{s^{\frac{3}{2}}}$

故 $\int_0^{+\infty}\frac{y\cdot s^{\frac{1}{2}}}{s^2+y^2}ds$ 收敛.

$$\int_0^{+\infty}\frac{s^{\frac{1}{2}}\cdot y}{s^2+y^2}ds\xlongequal{v=\sqrt{s/y}}\int_0^{+\infty}\frac{v\cdot y^{\frac{3}{2}}}{y^2\cdot v^4+y^2}\cdot d(v^2\cdot y)$$

$$=2\sqrt{y}\cdot\int_0^{+\infty}\frac{v^2}{1+v^4}dv$$

下面计算 $J=\int_0^{+\infty}\frac{v^2}{1+v^4}dv$

注意到 $\int_1^{+\infty}\frac{v^2}{1+v^4}dv=\int_1^0\frac{w^2}{1+w^4}d\frac{1}{w}=\int_0^1\frac{1}{1+w^4}dw$

$$\Rightarrow J=\int_0^{+\infty}\frac{v^2}{1+v^4}dv=\int_0^1\frac{v^2}{1+v^4}dv+\int_1^{+\infty}\frac{v^2}{1+v^4}dv$$

$$=\int_0^1\frac{1+v^2}{1+v^4}dv=\int_0^1\frac{1+\frac{1}{v^2}}{v^2+\frac{1}{v^2}}dv$$

$$=\int_0^1\frac{d(v-\frac{1}{v})}{(v-\frac{1}{v})^2+2}=\int_{-\infty}^0\frac{dt}{t^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}\Big|_{-\infty}^0$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow I=4\sqrt{y}\,J=\sqrt{2y}\,\pi$$

2. $f(x)=\frac{\sin x}{x}$，$x\neq0$，$f(0)=1$，证明：$\int_0^{+\infty}f(x)dx=\int_0^{+\infty}f^2(x)dx$，且两者均收敛.

证明：注意到 $\lim\limits_{x\to0+}f(x)=1=f(0)$，因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处右连续

又 $\because$ $\int_0^{+\infty}\sin x\,dx$ 有界且 $\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减趋向于 0

故由 Dirichlet 判别法可知，$\int_0^{+\infty}f(x)dx$ 收敛

而由 Cauchy 判别法，$(\frac{\sin x}{x})^2\leq\frac{1}{x^2}$ 故 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx$ 收敛.

又有$0<\sin x\le x$ 在$x\in[0,1)$恒成立，故有$\int_0^1 f^2(x)dx$收敛

进而有 $\int_0^{+\infty} f^2(x)\,dx$ 收敛

而利用分部积分，有 $\int_0^{+\infty} f^2(x)\,dx = \int_0^{+\infty}\sin^2 x\, d(-\frac{1}{x})$

$$= -\frac{\sin^2 x}{x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\frac{d(\sin^2 x)}{x} = \int_0^{+\infty}\frac{d(\sin^2 x)}{x}$$

$$= \int_0^{+\infty}\frac{2\sin x\cos x}{x}dx = \int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x}dx = \int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{2x}d2x$$

$$= \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt \quad (令t=2x)$$

因此有：$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} f^2(x)\,dx$

3. 证明无穷积分 $I=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$ 的值与α无关

证明：由Cauchy判别法，$\frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} < \frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{x^2}$

故 I 收敛

又注意到 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} = \int_1^0\frac{1}{(1+\frac{1}{x^2})(1+\frac{1}{x^\alpha})}d\frac{1}{x} = \int_0^1\frac{x^\alpha}{(x^2+1)(x^\alpha+1)}dx$

$$\Rightarrow I = \int_0^1\frac{1+x^\alpha}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}dx = \int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$