1. 函数列一致收敛的定义：

函数列 $f_n(x)$ 兰态收敛于 $f(x)$，对 $\forall \varepsilon>0$，存在 $N\in N^*$，

$\forall n>N$，$x\in D$，$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ 成立，则称 $f_n(x)$ 在 D 上一致收敛于 $f(x)$

证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sin nx}{n^2}=0$，此即 $f(x)=0$

$\left|\dfrac{\sin nx}{n^2}\right|\le\dfrac{1}{n^2}$，取 $N=\left[\sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon}}\right]+1$，则 $n>N$ 时 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$

$\Rightarrow$ 函数列 $\left\{\dfrac{\sin nx}{n^2}\right\}$ 在 R 上一致收敛

证明：① 连续

2. 当 $x^2+y^2<\delta^2$ 时 $(\delta>0)$

$\dfrac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\le\dfrac{1}{4}\sqrt{x^2+y^2}<\dfrac{\delta}{4}$，取 $\delta=4\varepsilon$，则

$\forall\varepsilon>0$，总存在 $(0,0)$ 的邻域 D，使得 $|f(x,y)-f(0,0)|<\varepsilon$

此即 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续

② 存在偏导数

$xy>0$ 时，$f(x,y)=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$；$xy<0$ 时，$f(x,y)=\dfrac{-xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)=(0,0)}=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-0}{x-0}=0$$

同理可得 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)=(0,0)}=0$

此即 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处存在偏导数

③ 不可微

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)=(0,0)}\cdot x-\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)=(0,0)}y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|xy|}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{|x\cdot kx|}{x^2+y^2}=\frac{k}{k^2+1}$$，与 k 有关，故极限不存在

故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微

扫码使用
夸克扫描王

3. $\Rightarrow f_y(x,y) = e^{x+y+1} + x^2 > 0$

由隐函数存在定理，在$(0,0)$的某邻域内唯一确定y关于x的函数

$$\Rightarrow (1+\frac{\partial y}{\partial x})e^{x+y+1} + 2xy + x^2\frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{2xy+e^{x+y+1}}{x^2+e^{x+y+1}} \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial x}\Big|_{(0,0)} = -1$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}e^{x+y+1} + (1+\frac{\partial y}{\partial x})^2 e^{x+y+1} + 2y + 2x\frac{\partial y}{\partial x} + 2x\frac{\partial y}{\partial x} + x^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{1}{e^{x+y+1}+x^2}\left((1+\frac{\partial y}{\partial x})^2 e^{x+y+1} + 2y + 4x\frac{\partial y}{\partial x}\right)$$

$$= -\frac{1}{e^{x+y+1}+x^2}\left(\frac{e^{x+y+1}(x^2-2xy)^2}{(x^2+e^{x+y+1})^2} + 2y - \frac{4x(2xy+e^{x+y+1})}{x^2+e^{x+y+1}}\right)$$

$$\Big|_{(0,0)} = 0$$

4.(1) 进行代换：$x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$

则 V: $0\le r\le R$, $0\le\theta\le\pi$, $0\le\varphi\le 2\pi$

$$\Rightarrow \iiint_V z^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz = \iiint_V r^2\cos^2\theta\cdot r^2\sin\theta\cdot r\,drd\theta d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\theta\int_0^R r^5\cos^2\theta\sin\theta\,dr$$

$$= \frac{2}{9}\pi R^6$$

(2) 平面 $x-y+z=2$ 的法向量：$(\frac{1}{\sqrt3}, -\frac{1}{\sqrt3}, \frac{1}{\sqrt3})$

由Stokes公式

$$\oint_L (z-y)dx + (x-z)dy + (x-y)dz$$

$$= \iint_D (0+0+2\cdot\frac{1}{\sqrt3})dS = \frac{2}{\sqrt3}S_D = 2\pi$$

L_1：从 $(\pi,0)$ 到 $(0,0)$

(3) 由Green公式

$$\int_{L+L_1} e^x(1-\cos y)dx - e^x(1-\sin y)dy$$

$$= -\iint_D \left(\frac{\partial(-e^x(1-\sin y))}{\partial x} - \frac{\partial(e^x(1-\cos y))}{\partial y}\right)dxdy$$

$$= -\iint_D -e^x dxdy = \int_0^{\pi} e^x dx \int_0^{\sin x} dy = \frac{e^{\pi}+1}{2}$$

$$\int_{L_1} e^x(1-\cos y)dx - e^x(1-\sin y)dy = 0$$

$$\Rightarrow \int_L e^x(1-\cos y)dx - e^x(1-\sin y)dy = \frac{e^{\pi}+1}{2}$$

4) 补充Σ：$x^2+y^2=1$，$z=0$，方向向上　　V：$x^2+y^2+z^2 \le 1$，$z \ge 0$

~~原式~~ $\cancel{\Rightarrow \iint_{S+\Sigma} (2y+2z+1-2y-2z)dxdydz}$

由Guass公式

$$\Rightarrow \iint_{S-\Sigma} 2xy\,dydz + 2yz\,dzdx + (z-2yz-z^2+1)dxdy$$

$$= \iiint_V (2y+2z+1-2y-2z)dxdydz = \frac{2}{3}\pi$$

$$\iint_{\Sigma} 2xy\,dydz + 2yz\,dzdx + (z-2yz-z^2+1)dxdy$$

$$= \iint_{\Sigma} dxdy = \pi$$

$$\Rightarrow \iint_S 2xy\,dydz + 2yz\,dzdx + (z-2yz-z^2+1)dxdy = \frac{5}{3}\pi$$

5. 令 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,\quad 0\le r\le\sqrt5,\ 0\le\theta<2\pi$

$$f(x,y)=r^2\cos\theta\sin\theta+r(\cos\theta-\sin\theta)$$

$$=r^2\cdot\frac12\left(\cancel{\cos\theta}(\cos^2\theta+\sin^2\theta)-(\cos\theta-\sin\theta)^2\right)+r(\cos\theta-\sin\theta)$$

$$=r^2\cdot\frac12\left(1-2\cos^2(\theta+\tfrac{\pi}{4})\right)+\sqrt2 r\cos(\theta+\tfrac{\pi}{4})$$

$$=-r^2\cos^2(\theta+\tfrac{\pi}{4})+\sqrt2 r\cos(\theta+\tfrac{\pi}{4})+\frac{r^2}{2}$$

取最大值时 $\cos(\theta+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt2 r}{2r^2}=\frac{1}{\sqrt2 r}$

1. $r=0$ 时 $f(x,y)=0$

2. $r>0$ 时

① $\frac{1}{\sqrt2}\le r\le\sqrt5$ 时, $f(x,y)\le -r^2\cdot\frac{1}{2r^2}+\sqrt2 r\cdot\frac{1}{\sqrt2 r}+\frac{r^2}{2}$

$$=\frac{r^2+1}{2}\le 3$$

($r=\sqrt5$ 取到, $x=2,y=1$ 或 $x=-1,y=-2$)

$$f(x,y)\ge -r^2-\sqrt2 r+\frac{r^2}{2}$$

$$\ge -\frac52-\sqrt{10}\quad\left(x=-\frac{\sqrt{10}}{2},\ y=\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$$

6. $r=\sqrt[n]{3^n(n+1)}=3$

$x=3$ 时发散, $x=-3$ 时收敛, 收敛域 $[-3,3)$

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n(n+1)}$$

$$xF(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{3^n(n+1)}$$

导函数在D上一致收敛, $x=0$ 时 $F(x)=0$, $x\ne0$ 时

$$\Rightarrow (xF(x))'=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^{n+1}}{3^n(n+1)}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}=\frac{3}{3-x}$$

积分 $\Rightarrow\ xF(x)=-3\ln(3-x)+3\ln3=-3\ln(1-\frac{x}{3})$

$\Rightarrow\ x\ne0$ 时 $F(x)=-\frac{3}{x}\ln(1-\frac{x}{3})$

7. ⇒ $-\pi \le x \le 0$时，$f(x)=f(x+2\pi)=\frac{1}{4}(x+2\pi)\cdot(-x)$，$f(x)$是偶函数

⇒ $a_0=\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi}\frac{1}{4}(-x+2\pi)\cdot(\cancel{*}x)\,dx+\int_{-\pi}^{0}-\frac{1}{4}x(x+2\pi)\,dx\right)$

$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{4}x(2\pi-x)\,dx=\frac{\pi^2}{3}$

$a_n=\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi}\frac{x}{4}(2\pi-x)\cos nx\,dx+\int_{-\pi}^{0}-\frac{x}{4}(2\pi+x)\cos nx\,dx\right)=-\frac{1}{n^2}$

$f(x)$是偶~~数~~函数 ⇒ $b_n=0$

⇒ $f(x)=\frac{\pi^2}{6}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\cos nx$

$f(0)=\frac{\pi^2}{6}-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$，此即 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

8. 证明：$\Rightarrow$ 和函数为 $F(x)=\int_0^1 f(t+x)\,dt$

只需证：$\forall \varepsilon>0$，$\exists N\in N^+$，$\forall x\in[a,b]\ (a,b\in R)$，$|f_n(x)-F(x)|<\varepsilon$

成立

$$f_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}f(x+\frac{k}{n})=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}f(x+\frac{k}{n})\,dt$$

$$F(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}f(x+t)\,dt$$

$$\Rightarrow |f_n(x)-F(x)|=\left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left(f(x+\frac{k}{n})-f(x+t)\right)dt\right|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left|f(x+\frac{k}{n})-f(x+t)\right|dt$$

在有限闭区间 $[a,b]$ 上，由康托定理，$f(x)$ 一致连续

即 $\forall\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，$\forall x_1,x_2$ 满足 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，成立 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$

取 $N=[\frac{1}{\delta}]+1$，则 $|(x+\frac{k}{n})-(x+t)|\leq\frac{1}{n}<\delta$

$\Rightarrow |f(x+\frac{k}{n})-f(x+t)|<\varepsilon$

$\Rightarrow |f_n(x)-F(x)|\leq\sum\limits_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}|f(x+\frac{k}{n})-f(x+t)|\,dt<\varepsilon$

此即 $f_n(x)$ 在 R 上内闭一致连续

5. 令 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,\quad 0\le r\le\sqrt{5},\ 0\le\theta<2\pi$

$$f(x,y)=r^2\cos\theta\sin\theta+r(\cos\theta-\sin\theta)$$

$$=r^2\cdot\frac{1}{2}\left(\cancel{\cos\theta}(\cos^2\theta+\sin^2\theta)-(\cos\theta-\sin\theta)^2\right)+r(\cos\theta-\sin\theta)$$

$$=r^2\cdot\frac{1}{2}\left(1-2\cos^2(\theta+\frac{\pi}{4})\right)+\sqrt{2}r\cos(\theta+\frac{\pi}{4})$$

$$=-r^2\cos^2(\theta+\frac{\pi}{4})+\sqrt{2}r\cos(\theta+\frac{\pi}{4})+\frac{r^2}{2}$$

取最大值时 $\cos(\theta+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}r}{2r^2}=\frac{1}{\sqrt{2}r}$

1. $r=0$ 时 $f(x,y)=0$

2. $r>0$ 时

① $\frac{1}{\sqrt{2}}\le r\le\sqrt{5}$ 时, $f(x,y)\le -r^2\cdot\frac{1}{2r^2}+\sqrt{2}r\cdot\frac{1}{\sqrt{2}r}+\frac{r^2}{2}$

$$=\frac{r^2+1}{2}\le 3$$

($r=\sqrt{5}$ 取到, $x=2,y=1$ 或 $x=-1,y=-2$)

$$f(x,y)\ge -r^2-\sqrt{2}r+\frac{r^2}{2}$$

$$\ge -\frac{5}{2}-\sqrt{10}\quad (x=-\frac{\sqrt{10}}{2},\ y=\frac{\sqrt{10}}{2})$$

6. $r=\sqrt[n]{3^n(n+1)}=3$

$x=3$ 时发散, $x=-3$ 时收敛, 收敛域 $[-3,3)$

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n(n+1)}$$

$$xF(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{3^n(n+1)}$$

导函数在D上一致收敛, $x=0$ 时 $F(x)=0$, $x\ne0$ 时

$$\Rightarrow (xF(x))'=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^{n+1}}{3^n(n+1)}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}=\frac{3}{3-x}$$

~~积分~~ $\Rightarrow xF(x)=-3\ln(3-x)+3\ln3=-3\ln(1-\frac{x}{3})$

$\Rightarrow x\ne0$ 时 $F(x)=-\frac{3}{x}\ln(1-\frac{x}{3})$

故 $F(x)=\begin{cases}0 & (x=0)\\ -\frac{3}{x}\ln(1-\frac{x}{3}) & (x\in[-3,0)\cup(0,3))\end{cases}$