2、计算幂级数的和函数：$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

① 无论通项的系数 a_n 具体形式多么复杂，要点是把 $\begin{cases} n,(n+1) \\ \frac{1}{n},\frac{1}{n+1} \end{cases}$ 这样的形式在通项里配凑成导数/变限积分.

② 引用逐项求导/求积分定理

③ 剩余的级数形式一般是常见函数 Taylor 级数展开或变形.
（变形包括：数乘、去掉前有限项、乘 $f(x)$）.

④ 简化后完成 $\sum$ 符号外的求积分/求导即可

注 [1] 因为幂级数的通项是幂函数，幂函数求导、求积分必然出现 $n, \frac{1}{n}$. 故配凑掉 $n, \frac{1}{n}$ 的形式是通用方法.

[2] $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\dots$ （等比）

$\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-\dots$

$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots$

$\sin x$. $\cos x$. $\arctan x$. $\ln(1+x)$.

[3] 牢记求导/积分的对象是 x. 级数求和 $\sum$ 的指标是 n

例：两次求导/求积分：（书 P82. 4.(4).；2次求积分）

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} n^2 x^n = x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} n\,(n x^{n-1}) = x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} n (x^n)'$$

$$= x\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^{n-1} n x^n\right]' = x\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} n x^n\right)'$$

$$= x\left[x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\underline{n x^{n-1}}\right]' \overset{同理}{=} x\left[x\left(\underline{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} x^n}\right)'\right]'$$

$$= x\frac{d}{dx}\left[x\frac{d}{dx}\left(1-\frac{1}{1+x}\right)\right]$$

$$= x\frac{d}{dx}\left[x\cdot\frac{1}{(1+x)^2}\right]$$

$$= x\cdot\frac{(1+x)^2-2x(1+x)}{(1+x)^4} = \frac{x(1-x)}{(1+x)^3}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} x^n$$
$$= x-x^2+x^3-\dots$$
$$= -\left(\frac{1}{1+x}-1\right)$$
$$= \left(1-\frac{1}{1+x}\right)$$

幂级数求导/求积，收敛半径不变.
收敛域内部 $(-R,R)$ 内可以任意有限次逐项微分、积分. 这样操作 $\boxed{对幂级数}$ 不需要再列出逐项求导/求积的那么多条件. 直接操作计算即可.

形如 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{3n}$ 的收敛半径：

① 回到根值判别法.（Cauchy）

令 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|\,R^{3n}} = 1. \Rightarrow R = \left(\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}\right)^{1/3}$

$\quad\ \ \| $

$R^3\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$

② 令 $u=x^3$：$\sum_{n=1}^{\infty} a_n u^n$ 是一般形式：

$R_u = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$，$R_u = R_x^3$

$R = R_x = \left(\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}\right)^{1/3}$

3. 回顾怎样选择函数作不作延拓，作什么延拓.

计算练习. $I_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx = \begin{cases} 0 & n\text{偶} \\ -\frac{2}{n^2\pi} & n\text{奇} \end{cases}$

$I_2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

$I_3 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos nx\,dx = \frac{2}{n^2}(-1)^n$

$I_4 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\sin nx\,dx. = \begin{cases} -\frac{\pi}{n}. & n\text{偶}. \\ \frac{\pi}{n} - \frac{4}{n^3\pi}. & n\text{奇}. \end{cases}$

计算办法都是对 sin. cos 凑微分.

→ 分部积分 → 幂函数项可降次.

以 I_1 为例:

$$I_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{n}\int_0^{\pi} x\,d(\sin nx)$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left[x\sin nx\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin nx\,dx.\right]$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left[0 + \frac{1}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{n^2\pi}(\cos n\pi - 1)$$

$$= \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi} = \begin{cases} 0 & .\ n\text{偶} \\ -\frac{2}{n^2\pi} & ,\ n\text{奇}. \end{cases}$$

对三角级数，一般不会考查逐项微/积分.

只会让你写 Fourier series，再用 Dirichlet Thm 说明收敛.

4. 常用 trick:

积化和差:

$$\cos\alpha\cdot\underline{\sin\beta} = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\right]$$

$$\sin\alpha\cdot\underline{\sin\beta} = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$$

则 用 sin 凑项, 可使逐项抵消:

$$\underline{2\sin\frac{x}{2}}\cdot\sum_{k=1}^{n}\sin kx = \cos\frac{x}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x$$

$$\underline{2\sin\frac{x}{2}}\cdot\sum_{k=1}^{n}\cos kx = \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sin\frac{x}{2}$$

取 $0<\delta<\pi$, $x\in[\delta, 2\pi-\delta]$

知: $$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right| = \left|\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\right| \le \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}$$ 有界

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right| = \cdots \le \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}$$, 有界

4. (2). 用反证法, 考查端点 $x=0$ 处的收敛/连续(/可微)性质

得出矛盾.

这里不能直接代入 $x=\frac{1}{n}$ 用归结原理

因为点态收敛的和函数不好求出来.

→ 周日上午说这里说的不对! . sorry ...

定理 10.1.2 设函数序列 $\{S_n(x)\}$ 在集合 D 上点态收敛于 $S(x)$, 则 $\{S_n(x)\}$ 在 D 上一致收敛于 $S(x)$ 的充分必要条件是: 对任意数列 $\{x_n\}$, $x_n\in D$, 成立

$$\lim_{n\to\infty}\left(S_n(x_n)-S(x_n)\right)=0.$$

→ 归结原理

5. $z=f(x^2e^{-y}, xy)$. $f\in C^2$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & & z \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\ & u \arrow[dl] \arrow[d] & & v \arrow[d] \arrow[dr] & \\ x & y & & x & y \end{tikzcd}$$

求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

记 $u=x^2e^{-y}$. $v=xy$. 则 $z=f(u,v)=z(x,y)$.

这里 z 表示 $\begin{cases}\text{函数(对应法则)}.\\ \text{因变量}\end{cases}$

此处 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$. $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 无歧义.

① $\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial u}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial v}=2xe^{-y}\dfrac{\partial}{\partial u}+y\dfrac{\partial}{\partial v}\\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial}{\partial u}+\dfrac{\partial v}{\partial y}\dfrac{\partial}{\partial v}=-x^2e^{-y}\dfrac{\partial}{\partial u}+x\dfrac{\partial}{\partial v}\end{cases}$ 算子

☆ 用链式法则写出的算子代入. 再用积规则小心计算即可. (左导右不导+左不导右导)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(-x^2e^{-y})\cdot\frac{\partial z}{\partial u}+(-x^2e^{-y})\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}(x)\cdot\frac{\partial z}{\partial v}+x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

② (记 $f_1'=\dfrac{\partial f}{\partial u}=\dfrac{\partial z}{\partial u}$ $f_2'=\dfrac{\partial f}{\partial v}=\dfrac{\partial z}{\partial v}$ $f_{12}''=\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\partial}{\partial u}f\right)=\dfrac{\partial f_1'}{\partial v}$ $f_{21}''=\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial}{\partial v}f\right)$)

把①. ②代入:

$$=-2xe^{-y}f_1'-x^2e^{-y}\Big(2xe^{-y}\underbrace{\frac{\partial}{\partial u}f_1'}_{\to f_{11}''}+y\underbrace{\frac{\partial}{\partial v}f_1'}_{\to f_{12}''}\Big)$$
$$+1\cdot f_2'+x\Big(2xe^{-y}\underbrace{\frac{\partial}{\partial u}f_2'}_{\to f_{21}''}+y\underbrace{\frac{\partial}{\partial v}f_2'}_{\to f_{22}''}\Big)$$

而 $f\in C^2$: $f_{12}''=f_{21}''$

$$=-2xe^{-y}f_1'+f_2'-2x^3e^{-2y}f_{11}''+xyf_{22}''+(2-y)x^2e^{-y}f_{12}''$$

可以练习 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$. 因 $f_{12}''=f_{21}''$. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 一定成立.

而设 $z=z(x,xy)$.

$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 便会引发歧义: 对函数求导 or 对因变量求导?

若只记 $\begin{cases}x.\ y.\ u.\ v\ \text{记自变量}.\\ f.\ g.\ h\ \text{记函数}\\ z.\ w\ \text{记因变量}\end{cases}$

求导总对函数же $z=f(x,y)=g(u,v)$ 中的 $f.\ g$ 进行.

即记函数.因变量不使用同一字母.则可消除歧义.

6. $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$

方向导数：任取 $\hat{v}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$　$\alpha\in[0,2\pi)$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \hat{v}}\right|_{(0,0)}=\lim_{\substack{t\to 0^+\\(t>0)}}\frac{f(t\cos\alpha+0,t\sin\alpha+0)-f(0,0)}{t}=\sqrt[3]{\sin^3\alpha+\cos^3\alpha}\text{ 存在.}$$

取 $\hat{v}_1=(1,0)$ $(\alpha=0)$　$\hat{v}_2=(-1,0)$ $(\alpha=\pi)$ ∴ $\left.\frac{\partial f}{\partial \hat{v}_1}\right|_{(0,0)}=1$，$\left.\frac{\partial f}{\partial \hat{v}_2}\right|_{(0,0)}=-1$. 相反

则 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 存在. ∴ $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=1$.

同理：$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}=1$.

这里直接用方向导数相反判断可偏导及 $\frac{\partial}{\partial x}$，$\frac{\partial}{\partial y}$ 的值. 当然直接判偏导也可以，但要麻烦地说明一个 $\frac{0}{0}$ 的极限

可微 $\Leftrightarrow$ $\Delta f=A\Delta x+B\Delta y+o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2})$.

若可微，则 A 必为 $\frac{\partial f}{\partial x}$，B 必为 $\frac{\partial f}{\partial y}$.

因此，判断 f 是否可微，只需判定 $\Delta f-\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x-\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$ 是否是 $o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2})$.

即计算 $$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0\\ (x,y)=(0,0)}}\frac{\Delta f-\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x-\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^3+(\Delta y)^3}-\Delta x-\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

取 $\begin{cases}\Delta y=k\Delta x\\ \Delta x\to 0\end{cases}$ ∴ lim 号后边 $=\dfrac{\sqrt[3]{1+k^3}-1-k}{\sqrt{1+k^2}}$ 这个结果与 k 有关

因此 $\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}$ ( ) $\neq 0$.（不存在该极限）

故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微.

Made with Goodnotes

7. $F(x,y) = \sin y + \frac{e^{y}-e^{-y}}{2} - x \neq 0$.

① $F'_y = \cos y + \frac{e^{y}+e^{-y}}{2}$

$F'_y(0,0) = 2 \neq 0$. 非退化.

② F满足 局部 C^1 要求.

(1) 存在性:

$\Longrightarrow$ $F(x,y)=0$ 可在 $(0,0)$ 局部唯一定出隐函数 $y=\varphi(x) \in C^1$.

(2) 计算:

把 $y=\varphi(x)$ 代入 $F(x,y)=0$:

$F(x,\varphi(x))=0$, 关于 x 求导:

$F'_x + F'_y \cdot \varphi'(x) = 0$, 而 $F'_x = -1$, $F'_y = \cos y + \frac{e^{y}+e^{-y}}{2}$

$$\varphi'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y} = \frac{1}{\cos y + \frac{e^{y}+e^{-y}}{2}} = \frac{1}{\cos\varphi(x) + \operatorname{ch}\varphi(x)}$$

9. 本题曲线给出了简单的参数形式, 容易计算.

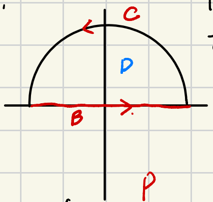
自己回顾教材中如何计算 曲面交线 的曲线 → 第一类曲线积分.

$\begin{cases} \text{对称性} \\ \text{参数化.} \end{cases}$

注: 参数形式的第一/二类曲线/曲面积分有通用方法.

但方程形式的不好处理, 一般不会过分考查.

10.



因为即使把 C (半圆) 参数化，直接积分仍困难

故考虑引用 Green 公式.

注意被积函数在 $\mathbb{R}^2$ 上无瑕点, $\in C^\infty(\mathbb{R}^2) \Rightarrow C^1(\mathbb{R}^2)$

这样 可以放心地补全；拿到一个闭合曲线.

$$I=\int_C (\underbrace{e^x-y^3}_{P})dx+(\underbrace{\cos y^2+x^3}_{Q})dy$$ ， C 为逆时针 上半单位圆.

记 $I_2=\int_B (e^x-y^3)dx+(\cos y^2+x^3)dy$. 在 B 上 $\begin{cases} y=0. \\ dy=0. \end{cases}$ $(-1,0)\to(1,0)$.

$$=\int_{-1}^{1} e^x\,dx = e-\frac{1}{e}$$

$$I+I_2=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$$=\iint_D(3x^2+3y^2)\,dxdy$$ 极坐标换元 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ $\left|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|=$

$$=3\iint_{[0,1]\times[0,\pi]} r^2\cdot r\,d\theta\,dr$$ → Jacobi 因子

$$=3\int_0^\pi d\theta\int_0^1 r^3\,dr$$

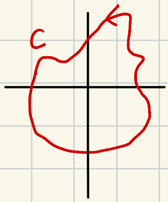
$$=3\pi\cdot\frac{1}{4}r^4\Big|_0^1=\frac{3\pi}{4}$$

一般把补全曲线放在坐标轴上. 这样可以让 $\begin{cases} dy=0 \\ y=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} dx=0 \\ x=0 \end{cases}$. 容易计算.

或许用一条与 C 对称的曲线补全也 ok. 但会用到对称性, 不直接, 有时是行不通.

$$I=\frac{3\pi}{4}-I_2=\frac{3\pi}{4}-e+\frac{1}{e}.$$

☆ 计算 $I=\int_C\frac{x\,dy-y\,dx}{ax^2+by^2}$ ， C 是 $\mathbb{R}^2$ 上包住 $(0,0)$ 的任意闭合光滑曲线. 取逆时针方向 (可以特殊地考虑 C 是单位圆).



注意. $(0,0)$ 是被积函数的瑕点. 使它在 C 内部不是 C^1 的.

因此, 只能在原点邻域以外引用 Green 公式. 这允许我们把 C 变形成想要的形状

一般地. C 上分母 $ax^2+by^2\neq$ 常值, 我们引用 Green 公式 把 C 变形.

目的是在新曲线上让 分母 = 定值

$$P=\frac{-y}{ax^2+by^2}. \quad Q=\frac{x}{ax^2+by^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{ax^2+by^2-2ax^2}{(ax^2+by^2)^2}=\frac{by^2-ax^2}{(ax^2+by^2)^2}$$

$\parallel$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{-(ax^2+by^2)+2by^2}{(ax^2+by^2)^2}=\frac{by^2-ax^2}{(ax^2+by^2)^2}.$$ → 不含 $(0,0)$ 的区域上, Green 公式中出现的面积分, 贡献为 0.

C 变形 → $\tilde{C}$. $ax^2+by^2=\varepsilon^2$ (考虑 $C'=ax^2+by^2=1$ 也可以, 变形是放大 or 缩小、只要不含原点均可)

$$I=\int_{\tilde C}\frac{x\,dy-y\,dx}{ax^2+by^2}=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{\tilde C}x\,dy-y\,dx.$$ ，分母为常值. 提出后两种计算办法

① 再次引用 Green 公式: $I=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{\tilde C\text{内部}}\left(\frac{\partial x}{\partial x}-\frac{\partial(-y)}{\partial y}\right)dxdy=\frac{2}{\varepsilon^2}\iint_{\tilde C\text{内部}}dxdy=\frac{2}{\varepsilon^2}\cdot S_{\text{椭圆}}$

$$=\frac{2}{\varepsilon^2}\cdot\pi\sqrt{\varepsilon^2/a}\cdot\sqrt{\varepsilon^2/b}=\frac{2\pi}{\sqrt{ab}}$$ ($ax^2+by^2=\varepsilon^2$ 即 $\frac{x^2}{\varepsilon^2/a}+\frac{y^2}{\varepsilon^2/b}=1$)

② 直接椭圆参数换元 $x=\sqrt{\varepsilon^2/a}\cos\theta.\ y=\sqrt{\varepsilon^2/b}\sin\theta$

$$I=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^{2\pi}\left[\sqrt{\varepsilon^2/a}\cos\theta\sqrt{\varepsilon^2/b}\cos\theta-\sqrt{\varepsilon^2/b}\sin\theta\left(-\sqrt{\varepsilon^2/a}\sin\theta\right)\right]d\theta$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\cdot\varepsilon^2\int_0^{2\pi}\frac{1}{\sqrt{ab}}\underbrace{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}_{1}d\theta=\frac{2\pi}{\sqrt{ab}}$$

11. 计算重积分，一般的手段是先换元，再变为累次积分.

换元时，$\left\{\begin{array}{l}\text{被积函数}\\\text{与边界形状}\end{array}\right.$ 要兼顾，题目中，二者一般是配合好的.

换元法记得添上 Jacobi 因子.

计算：$\Omega: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$ 椭球

$$I=\iiint_\Omega \sqrt[4]{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}\,dxdydz.$$

椭球变换 $\left\{\begin{array}{l} x=ar\sin\theta\cos\varphi \\ y=br\sin\theta\sin\varphi \\ z=cr\cos\theta \end{array}\right.$

$r:[0,1]$, $\theta:[0,\pi]$, $\varphi:[0,2\pi]$

计算行列式，仅是比起球坐标变换三行分别乘 a、b、c.

故 Jacobi 因子是其 abc 倍：

$$\left|\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}\right| = abc\,r^2\sin\theta$$

$$I=\int_0^1\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\sqrt[4]{r^2}\cdot abc\,r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

$$=4\pi\,abc\int_0^1 r^{5/2}\,dr$$

$$=\frac{8}{7}\pi abc$$

注意：若为椭球面上曲面积分，可把 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 代入被积函数.

但此处是体积分，上式仅在 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上成立.

不要混淆地代入被积函数.（$I=\iiint\sqrt[4]{1}\,dxdydz$ ✗）.

回顾 10. 题中，分母 $=\varepsilon^2$ 代入是因为积分是曲线上的线积分，积分区域上分母 $=\varepsilon^2$ 总成立

注意椭球变换中 r 范围总为 $[0,1]$

而球变换 $r:[0,R]$，R 是球的半径

椭球的大小实际体现在 Jacobi 因子的 abc 中.