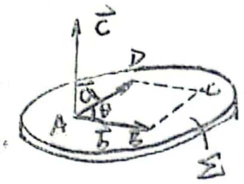
一、预备知识

1、矢积



设空间中有两向量 $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$，$\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$

定义二者的矢积（叉乘）

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

（$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 为坐标基矢）

· 几何意义：$|\vec{a}\times\vec{b}| = ab\sin\theta = S_{\square ABCD}$

说明：① $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}$，$\vec{c}$ 垂直于 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 张成的平面，$\vec{c}$ 的方向由右手螺旋定则确定

② $\vec{a}\times\vec{b} \neq \vec{b}\times\vec{a}$，这点可由右手螺旋定则判定，实际上根据行列式的性质 $\vec{b}\times\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = -\vec{a}\times\vec{b}$ （交换两行）

例1-1 验证 $(\mu\vec{a}+\lambda\vec{b})\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=0$，即叉乘后所得向量垂直于原向量张成空间

解：

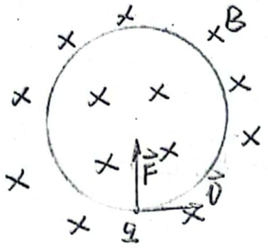
$$\mu\vec{a}+\lambda\vec{b} = (\mu a_x+\lambda b_x,\ \mu a_y+\lambda b_y,\ \mu a_z+\lambda b_z)$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}$$

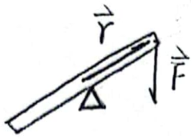
$$(\mu\vec{a}+\lambda\vec{b})\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = \mu(a_xa_yb_z-a_xa_zb_y+a_ya_zb_x-a_ya_xb_z+a_za_xb_y-a_ya_zb_x)$$
$$+\lambda(\cdots)=0$$

证毕

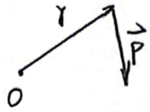
· 我们熟悉的公式



洛仑兹力
$\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}$



力矩
$\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F}$



角动量
$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$

2、微分方程

① 直接分离法:

eg. $dp\,SL + mg\,dh = 0$

$\Rightarrow dp\,SL = -mg\,dh \Rightarrow \int dp\,SL = \int -mg\,dh$

eg. $\frac{dp}{dh} = -\frac{pM}{RT}g$ (等温大气)

$\Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT}dh \Rightarrow \int\frac{dp}{p} = \int -\frac{Mg}{RT}dh$

② 猜解法

eg. $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$ (弹簧振子)

猜想 $x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$

$\Rightarrow -A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\sin\omega t = -\frac{k}{m}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$

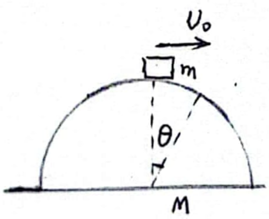
$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

如果改为 $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{k}{m}x$,则应猜 $x = Ae^{\lambda t} + Be^{-\lambda t}$

3、小量近似

题目中经常出现 $M >> m$,$R >> L$ 之类的词语,我们在做近似时,常常将他们打包在一起。写成 $\alpha = \frac{m}{M}$,$\beta = \frac{L}{R}$ ($\alpha, \beta << 1$)。

如作业中一道题

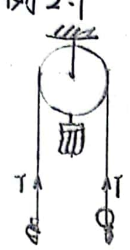


分离角度θ满足: $\frac{m\sin^2\theta + M}{m+M}\cdot\cos\theta = 2(1-\cos\theta)$

4. vocabulary (rigid body)

二、动量

例2.1



如图，一光滑定滑轮固定在天花板，轻绳跨过光滑定滑轮，绳两端等高处有一个胖猴和一只瘦猴，两猴身高相同，胖猴使劲沿绳向上爬，瘦猴懒洋洋地挂在绳上。问：吊在滑轮下边香蕉归谁所有

解：对胖猴： $-Mg+T=M\frac{dv_M}{dt}$

对瘦猴： $-mg+T=m\frac{dv_m}{dt}$

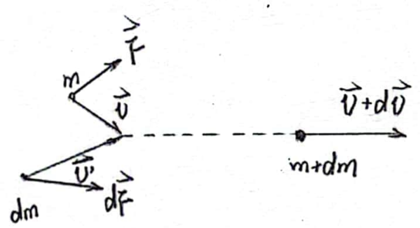
任意t时刻： $v_M=\int\frac{Tdt}{M}-gt$

$$v_m=\int\frac{Tdt}{m}-gt$$

$v_m>v_M$ 故瘦猴先拿到香蕉（躺平）

、变质量问题

增质型：（航行在太空尘埃中的宇宙飞船）



由动量定理

$(\vec{F}+d\vec{F})dt=(m+dm)(\vec{v}+d\vec{v})-m\vec{v}-dm\vec{v'}$

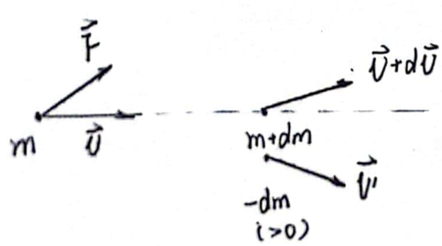
忽略二阶小量，并化简有

$\vec{F}dt=md\vec{v}+dm(\vec{v}-\vec{v'})$

$\vec{F}=m\frac{d\vec{v}}{dt}+\frac{dm}{dt}(\vec{v}-\vec{v'})=m\frac{d\vec{v}}{dt}-\frac{dm}{dt}\vec{u}$

$\vec{u}$是dm相对m速度

减质型：（喷气式发动机） $dm<0$



由动量定理

$\vec{F}dt=[(m+dm)(\vec{v}+d\vec{v})+(-dm)\vec{v'}]-m\vec{v}$

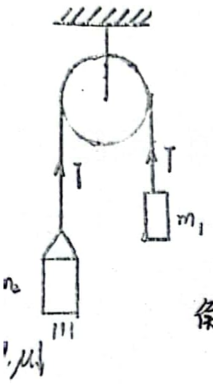
忽略二阶小量

$\vec{F}dt=md\vec{v}+dm(\vec{v}-\vec{v'})$

即 $\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}(\vec{v} - \vec{v}') = m\frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{dm}{dt}\vec{u}$

二者具有统一形式: $\boxed{\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{dm}{dt}\vec{u}}$

例2.2 (半个真题)



如图, 定滑轮固定在天花板上, 一轻绳跨过滑轮, 一端连接着一个物块, 其质量为 m_1, 另一端接着一个水桶, 水桶和水的初始总质量为 m_2, 水桶在向外溢水, 水流相对桶速度为 u, 初始时刻 $m_1 > m_2$, 求下绳上张力为 T。流速为 μ (kg/s)

解: 对 m_1, $m_1 g - T = m_1 a_1$

对 m_2, $\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{dm}{dt}\vec{u}$ 减质 正方向

取向上为正 $T - m_2 g = m_2 a_2 - \frac{(-\mu dt)}{dt}(-u)$ [dm取负 u取负]

即 $T - m_2 g = m_2 a_2 - \mu u$

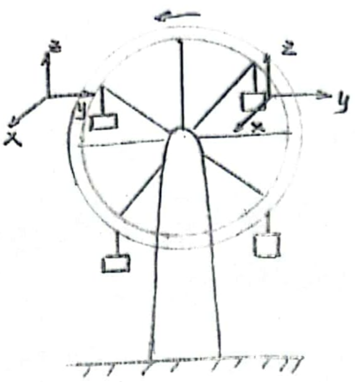
又同绳 $a_1 = a_2$, 联立可得:

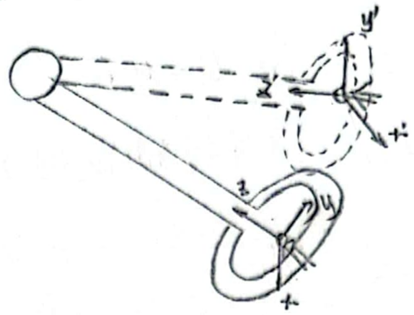
$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left(2g - \frac{\mu u}{m_2}\right)$$

三、转动

1、何为转动

转动是区别于平动的一种方式，判断一个物体是否转动就要看物体本征坐标系相对于参考系是否发生了变化。

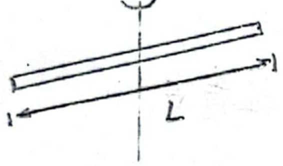




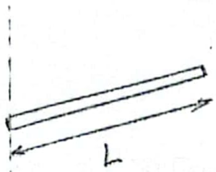
摩天轮上的人在较~~转动~~作平动，大摆锤上的人在作转动。

2、转动惯量($I \propto M$)

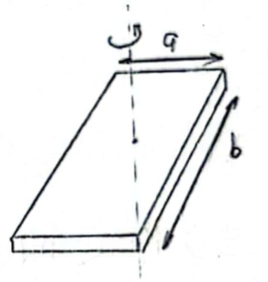
① 杆及其衍生物



$I_c = \frac{1}{12}ML^2$



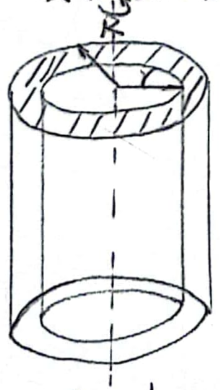
$I = \frac{1}{3}ML^2$



(板)

$I_c = \frac{1}{12}M(a^2+b^2)$

② 圆柱及其衍生物



$I = \frac{1}{2}M(R^2+r^2)$

令 $r=0$ 得实心圆柱 $I=\frac{1}{2}MR^2$

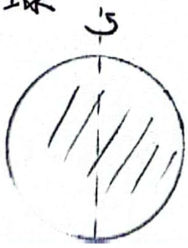
令 $r=R$ 得空心圆柱 $I=MR^2$

由于沿轴旋转 将其沿轴拍扁

圆环 $I=MR^2$

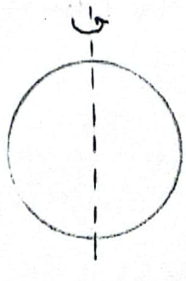
圆盘 $I=\frac{1}{2}MR^2$

③ 球



$I=\frac{2}{5}MR^2$

(实心)



$I=\frac{2}{3}MR^2$

(空心)

3. 转动动能

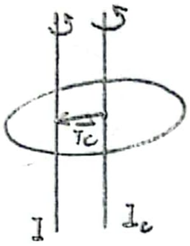
对于定轴转动刚体

$$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$$

由于 $E_k = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} I_c \omega^2 = E_{kc}' + E_{kc}$ （柯尼希定理）

$\therefore I = m \frac{v_c^2}{\omega^2} + I_c$ 　　又 $v_c = \omega r_c$

$\therefore I = m r_c^2 + I_c$ 　　（平行轴定理）



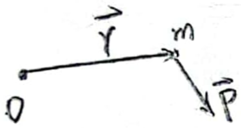
ps：定轴转动

$\vec{\omega} \times \vec{r_i} = \vec{v_i}$

$\vec{\beta} \times \vec{r_i} = \vec{a_i}$

4. 角动量

①角动量是对于某点定义的，如图对于O点而言，质点角动量为



$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

②对于刚体，当其作定轴转动时，固定点可以是轴上任意点，

$$\vec{L} = I \vec{\omega}$$

角动量定理：　$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

对于定轴转动刚体（$\vec{L} = I\vec{\omega}$）

$$\vec{M} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I \vec{\beta}$$

这就是转动定律，类比牛二

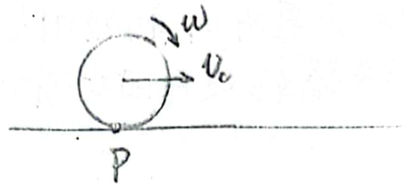
$$\vec{F} = m\vec{a}$$

可知 $\vec{M}$ 相当于 $\vec{F}$，I 相当于 m，α $\vec{\beta}$ 相当于 $\vec{a}$

5、刚体平面平行运动

刚体是任何两个点间距都恒定不变的质点系。

刚体运动可分解为随质心平动加上绕质心转动



对纯滚动 $v_p=0$

$$v_p = v_c - \omega R$$

故纯滚条件： $v_c = \omega R$

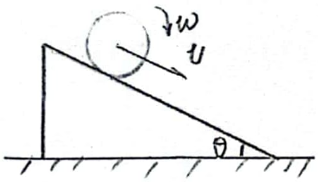
说明：①纯滚动的刚体~~不~~只能受静摩擦力，不能受动摩擦力

② 纯滚动时~~能量守恒~~ 无能量耗散（不生热）

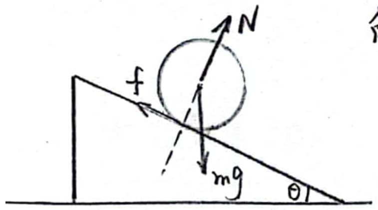
③ 若是放置在斜面上，刚体可能做加速纯滚，此时还要满足

$a_c = \beta R$ （对 $v_c = \omega R$ 求导）

例 5.3.1



一个半径为 R 实心圆柱置于倾角为 θ 的斜面上，圆柱与斜面摩擦因素（系数）为 μ，求临界角 θ_c 使得只当 $\theta > \theta_c$，圆柱不可能做纯滚。（斜面足够长）



解：平动方程：（对质心）

$$mg\sin\theta - f = ma$$

$$mg\cos\theta = N$$

转动方程：

$$fR = I\beta = \frac{1}{2} mR^2\beta$$

纯滚条件

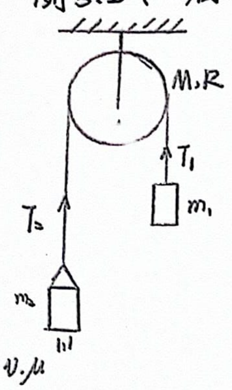
$$a = \beta R$$

当 $f=\mu N$ 时 $\theta = \theta_c$

代入得：

$\tan\theta_c = 3\mu$ 即 $\arctan 3\mu = \theta_c$

例3.2（上届期末）



如图所示，一个质量为M半径为R的定滑轮悬挂在天花板上，绳子无质量跨过滑轮，一端系着一个水桶，水桶和水的初始总质量为m_2，水桶底部有一开口，水从桶中不断喷出，水流速为μ(kg/s)，水流相对桶的速度为v，另一端系有一物块，质量为m_1，初始时刻$m_1 > m_2$，求绳中张力和桶的加速度。设绳子与滑轮没有相对滑动。

解：

左右两绳张力相等吗？

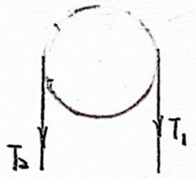
非也，滑轮要有角加速度才能保证无滑滚动。

对m_1 $\quad -T_1 + m_1 g = m_1 a_1 \quad$ ①

对m_2 $\quad T_2 - m_2 g = m_2 a_2 - \mu v \quad$ ②

对滑轮

$$M = T_1 R - T_2 R$$



由角动量定理（或由转动定律）

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (M = I\beta)$$

即 $(T_1 - T_2)R = I\beta \quad$ ③

滑轮视作实心圆柱

$$I = \frac{1}{2} M R^2$$

无滑滚动 $\quad \omega R = v$

对t求导 $\quad \beta R = a$

得加速度关联 $\quad a_1 = a_2 = \beta R \quad$ ④

联立① ② ③ ④可得：

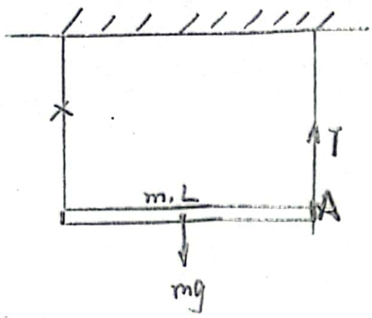
$$a = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M} + \frac{\mu v}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M}$$

$$T_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M}\left(2m_2 g + \frac{1}{2}Mg - \mu v\right)$$

$$T_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M}\left(2m_1 g + \frac{1}{2}Mg + \mu v\right) - \mu v$$

补记

例3.3（期末真题）



如图，一根长为L，质量为m的杆两端用挂线悬挂在天花板上，现突然剪断左侧的线，求剪断瞬间右侧线的拉力。

解：剪断后杆绕过A点指向纸面内的轴旋转（定轴）

$$mg\frac{L}{2} = I\beta$$

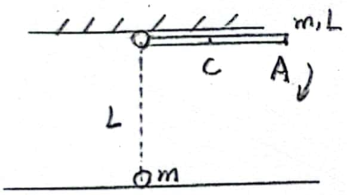
$$I = \frac{1}{3}mL^2$$

$\propto$ $a_c = \beta\cdot\frac{L}{2}$ （定轴加速度公式）

$$mg - T = ma_c$$

联立得：$T = \frac{1}{4}mg$

例3.4（期末真题）



如图，一根长为L，质量为m的杆件一端固定在天花板上，并可绕固定轴旋转。初始杆件为水平状态，随后释放。当杆运动到竖直状态时，其下端击中放置在水平面上质量同为m的小球，发生弹性碰撞，求碰撞后小球速度。

机械能守恒

$mg\frac{L}{2} = \frac{1}{2}I\omega^2$　　$I = \frac{1}{3}mL^2$

即　$mg\frac{L}{2} = \frac{1}{6}m\omega^2L^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{L}}$

A端速度 $v_A = \omega L$

碰撞过程 动量不守恒！（固定轴会有冲力）

设A端与球作用冲量为 $I_冲$

对球：$I_冲 = mv$

对杆 $-I_冲\cdot L = \Delta L = I(\omega' - \omega)$

弹性碰撞，能量守恒

$$E_{k0} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$E_k' = \frac{1}{2} I \omega'^2 + \frac{1}{2} m v^2$$

$$E_{k0} = E_k'$$

联立可得：

$$v = \frac{\omega L}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3gL}$$

$$\omega' = -\frac{\omega}{2} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3g}{L}}$$

接近速度：$v_A = \omega L = \sqrt{3gL}$

远离速度：$\omega' L + v = \sqrt{3gL}$

$v_{接} = v_{远}$ （就和质点的弹性碰撞一样）