



一、可导性与可微性

1. 定义与相关性质

① 可导性

定义：

设 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 上有定义，

若极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 存在

则称 $f(x)$ 在 x_0 处可导，

并记 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 为 $f(x)$ 在 x_0 处的导数，

记为 $\frac{d}{dx} f(x)|_{x=x_0}$ 或 $f'(x)|_{x=x_0}$ 或 $f'(x_0)$

若 $\forall x_0 \in D$, f 都在 x_0 处可导，则称 f 在 D 上可导

若 $f'(x)$ 在 x_0 处可导，则称 f 在 x_0 处二阶可导

若 $f^{(n-1)}(x)$ 在 x_0 处可导，则称 f 在 x_0 处 n 阶可导。

以上是对课本上定义的提炼，此处对高阶导数的定义有点过于简略

Remark:

- ①几何意义：割线斜率的极限
- ②等价表述：事实上，考查 $f(x)$ 在 x_0 处是否可导，就是考查 $g(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, $x \in U^\circ(x_0)$ 在 x_0 处是否有极限。也就是说极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 是否存在。
- ③变量替换：有时会把 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 与 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 这两个极限联系起来，只要考虑换元 $\Delta x = x - x_0$ 即可。

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \underset{\Delta x=x-x_0 \text{ (当 } x \rightarrow x_0 \text{ 时 } \Delta x \rightarrow 0)}{=} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

③ 单侧导数

我们可以模仿对函数极限的考查，对应地考查 $g(x)$ 在 x_0 处的左右极限

左导数：

设 $y = f(x)$ 在 $U_-(x_0)$ 处有定义，

且极限 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在

则称 $f(x)$ 在 x_0 处左可导，

并将这个值记为 $f'_-(x_0)$

右导数：

设 $y = f(x)$ 在 $U_+(x_0)$ 处有定义，

且极限 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在

则称 $f(x)$ 在 x_0 处右可导，

并将这个值记为 $f'_+(x_0)$

可导的充要条件：

$f(x)$ 在 x_0 处可导，当且仅当 $f(x)$ 在 x_0 处左右导数存在且相等

简证：类似于函数极限的讨论

$g(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 在 x_0 处极限存在 $\iff g(x)$ 在 x_0 处左右极限存在且相等

$$\Updownarrow \qquad \qquad \qquad \Updownarrow$$

$f(x)$ 在 x_0 处可导 $f(x)$ 在 x_0 处左、右可导，且左右导数值相等

② 可微性

定义：

设 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 上有定义，且满足

$\exists A \in \mathbb{R}$ ，使得下式成立

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x) (\Delta x \rightarrow 0)$$

其中 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

则称 $f(x)$ 在 x_0 处可微，并称 $A\Delta x$ 为 $f(x)$ 在 x_0 处的微分

记作 $dy = A\Delta x$

微分的一阶不变性

2. 重要性质与结论

① 可微与可导的等价性

定理：

$f(x)$ 在 x_0 处可微 $\iff f(x)$ 在 x_0 处可导

简证：

$f(x)$ 在 x_0 处可导

$$\iff \exists A \in \mathbb{R}, s.t. \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = A$$

$$\iff \exists A \in \mathbb{R}, s.t. \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x) (\Delta x \rightarrow 0)$$

$f(x)$ 在 x_0 处可微

考试的时候，可以如上书写，只需把“ \implies ”改成对应的“ \therefore ”即可

“ \iff ”同理

在一元情形下，可导和可微完全等价，

所以对可导函数进行考查，就是对可微函数进行考查

对应的结论也可以完全平行地进行迁移

用 $\varepsilon - \delta$ 语言书写：…

② 可导/可微与连续的关系

定理：

- 可微必连续，可导必连续
- 同理，左可导必左连续，右可导必右连续

简证：

$f(x)$ 在 x_0 处可微

$$\iff \exists A \in \mathbb{R}, s.t. f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x) (\Delta x \rightarrow 0)$$

$$\implies \exists A \in \mathbb{R}, s.t. f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = o(1) (\Delta x \rightarrow 0)$$

$$\iff \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$\iff f(x) \text{ 在 } x_0 \text{ 处连续}$$

考试的时候，可以如上书写，只需把“ \implies ”改成对应的“ \therefore ”即可

用 $\varepsilon - \delta$ 语言书写：…

3. 导数定义的进一步性质

补充说明：由于对 $f(x)$ 在 x_0 处可导性的考查

就是对极限式 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 的考查

所有函数极限的性质也对应地被“继承”下来

① 唯一性

若 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则 $f'(x_0)$ 的值唯一

② 局部有界性

若 $f(x)$ 在 x_0 处可导，

则 $\exists \delta > 0, M > 0, \forall x \in U(x_0; \delta)$ ，

$$\text{有 } \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \leq M$$

③ 保号性

设 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 上有定义

若 $\exists \delta > 0, \forall x \in U(x_0; \delta)$ ，均有 $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq A$ 且 $f(x)$ 在 x_0 处可导

则 $f'(x_0) \geq A$

④ 保序性

设 $f(x), g(x)$ 在 $U(x_0)$ 上有定义

若 $f(x), g(x)$ 在 x_0 处可导，且 $f'(x_0) \geq g'(x_0)$

则 $\exists \delta > 0, \forall x \in U(x_0; \delta)$ ，均有 $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$

⑤ 四则运算（注意乘除的情形，它们与函数极限的情形有区别）

设 $f(x), g(x)$ 在 $U(x_0)$ 上有定义，若 $f(x), g(x)$ 在 x_0 处可导

则 $(f(x) \pm g(x))'|_{x=x_0} = f'(x_0) \pm g'(x_0)$

$(f(x) \cdot g(x))'|_{x=x_0} = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)'|_{x=x_0} = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

⑥ 单调收敛准则

1. 设 $f(x)$ 在 $U_-(x_0)$ 上有定义，且 $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 在 $U_+(x_0)$ 内单调递增且有上界
则 $f'_-(x_0)$ 存在

2. 设 $f(x)$ 在 $U_+(x_0)$ 上有定义, 且 $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 在 $U_+(x_0)$ 内单调递增且有下界
则 $f'_+(x_0)$ 存在
3. 设 $f(x)$ 在 $U_-(x_0)$ 上有定义, 且 $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 在 $U_-(x_0)$ 内单调递减且有下界
则 $f'_-(x_0)$ 存在
4. 设 $f(x)$ 在 $U_+(x_0)$ 上有定义, 且 $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 在 $U_+(x_0)$ 内单调递减且有上界
则 $f'_+(x_0)$ 存在

(以下内容同学们可以自己动手写一下)

⑦ 夹逼准则

⑧ Cauchy 收敛准则

⑨ 归结原则

4. 例题选讲(*部分选做)

eg.1 按导数定义, 求 $y = kx + b$ 在 $x = x_0$ 处的导数

eg.2

① 求 $y = \begin{cases} x^2 D(x) & x \geq 0 \\ kx & x < 0 \end{cases}$ 在 0 处的左、右导数

(* ②) $y = x^\alpha D(x)$ 何时在 0 处可导, 何时在 0 处连续
又问, 是否可以取合适的 α , 使得 $f(x)$ 在 0 处二阶可导

eg.3 设 $f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin x^\beta (\beta < 0) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

① $\alpha = 2, \beta = -1$ 时, $f(x)$ 在 0 处是否可导, 若存在, 求 $f'(0)$

又问 $f'(x)$ 在 0 处是否连续

(* ②) $f(x)$ 何时在 0 处连续, 何时在 0 处可导,

何时 $f'(x)$ 在 0 处连续

eg.4 设 $f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & x \geq 0 \\ \sin bx & x < 0 \end{cases}$

① 求 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的左导数与右导数.

② b 取何值时, $f(x)$ 在 0 处可导

Q: 若 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = A$, 写出对应的无穷小量表达式

导数与微分-第二页

一、1阶导数, 2阶导数计算

① 初等函数的导数

基本初等函数导数公式

常函数: $(C)' = 0$

幂函数: $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} (\alpha \neq 0)$

对数函数: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{x \ln a} \quad (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$

指数函数: $(e^x)' = e^x$

$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = \ln a \cdot e^{x \ln a} = \ln a \cdot a^x \quad (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$

三角函数:

$(\sin x)' = \cos x \quad (\cos x)' = -\sin x$

$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$(\sec x)' = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \quad (\csc x)' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$

记忆口诀：

- 记住一半，另一半就是 $\sin x$ 换成 $\cos x$, $\cos x$ 换成 $\sin x$, 再加一个负号
- "c"开头的都有负号

反三角函数：

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad \operatorname{arccot} x = -\frac{1}{1+x^2}$$

记忆口诀：

- 记住一半，另一半就是加负号，可以考虑 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上的恒等式 $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$
- "c"开头的都有负号

② 基础运算性质

1. 导数的四则运算

设 $f(x), g(x)$ 在 $U(x_0)$ 上有定义

若 $f(x), g(x)$ 在 x_0 处可导

则：

- $(f(x) \pm g(x))'|_{x=x_0} = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
- $(f(x) \cdot g(x))'|_{x=x_0} = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'|_{x=x_0} = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)} \quad (g(x_0) \neq 0)$

2. 导数的复合运算（链式法则）

公式：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

定理：

设 $u = g(x)$ 在 x_0 处可导， $y = f(u)$ 在 $u = u_0 = g(x_0)$ 处可导

则 $(f(g(x)))'|_{x=x_0} = f'\left(u|_{u=g(x_0)}\right) \cdot g'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$

推导思路：

在形式上可记忆为 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

也可以这么记忆：

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$
$$\stackrel{\text{令 } u=g(x)}{=} \lim_{u \rightarrow u_0} \frac{f(u) - f(u_0)}{u - u_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

注意： 上述证明并不严谨，因为在 $x \rightarrow x_0$ 时可能会有 $g(x) = g(x_0)$ 而 $x \in \dot{U}(x_0)$ 的情形发生

严谨证明（微分语言）：

$$f(g(x)) - f(g(x_0)) = f'(g(x_0))(g(x) - g(x_0)) + o(g(x) - g(x_0)) \quad (g(x) \rightarrow g(x_0))$$

$$g(x) - g(x_0) = g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad (x \rightarrow x_0)$$

当 $x \rightarrow x_0$ 时， $g(x) \rightarrow g(x_0)$

$$\text{故 } f(g(x)) - f(g(x_0)) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) + o(g(x) - g(x_0)) \quad (x \rightarrow x_0)$$

$$= f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad (x \rightarrow x_0)$$

最好还是用 $\varepsilon - \delta$ 语言书写

3. 反函数的导数

定理：

设 $y = f(x)$ 在 $U(x_0)$ 上可导，且在 $U(x_0)$ 上有反函数 $x = f^{-1}(y)$, $f(x_0) = y_0$

则：

$$\bullet f^{-1}'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

- $f^{-1''}(y_0) = -\frac{f''(x_0)}{(f'(x_0))^3}$

$$\text{即 } \left. \frac{dx}{dy} \right|_{y=y_0} = \left. \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \right|_{y=y_0} = \left. \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \right|_{x=x_0}$$

说明：不用特别记忆，可以视作后面**隐函数求导**的特例

4. 对数求导法

公式：

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y}$$

适用情形：

当 y 为一堆函数的乘积/开方/幂指等形式

例题：

eg.1 $y = \frac{\sqrt[5]{x-3}\sqrt[3]{3x-2}}{\sqrt{x+2}}$, 求 y'

eg.2 $y = x^{\tan 3x}$

③ 特殊形式函数的求导

1. 普通方程

$y = f(x)$, 高中怎么求导就怎么来就行

e.g. $y = x^2 e^{\sin^2 \frac{1}{x}}$, 求 $\frac{dy}{dx}$

2. 参数方程

形式：

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

求导公式：

- $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$
- $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{dy}{dt}\right)}{dx} = \frac{\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)'}{x'(t)}$

例题：

eg.1 设 $\begin{cases} x = \ln(t + \sqrt{1+t^2}) \\ y = \sqrt{1+t^2} \end{cases}$, 求 ① $\frac{dy}{dx}$ ② $\frac{d^2y}{dx^2}$

eg.2 设 $y = y(x)$ 可由 $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ 确定, 求其在 $t = \frac{\pi}{2}$ 处的切线方程

3. 极坐标方程

形式：

$$\rho = f(\theta) \iff \begin{cases} x = \rho \cos \theta = f(\theta) \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta = f(\theta) \sin \theta \end{cases}$$

例题：

设曲线 C 的极坐标方程 $r = e^\theta + \theta$, 求 C 在 $\theta = 0$ 处的切线方程

4. 隐函数方程

形式：

$$F(x, y(x)) = 0$$

方法：

把 y 看成 $y(x)$, 直接求导, 然后移项整理一下

等式两边都是两个函数, 它们相等恒成立,

故它们关于 x 的导数也恒相等

例题：

eg.1 设 $y = f(x)$ 是由隐函数 $e^{x+y} - 2xy = e$ 确定的隐函数

$$\text{求 } \frac{dy}{dx} \quad \text{①} \quad \frac{dy}{dx}|_{x=0} \quad \text{②} \quad (*) \quad \frac{d^2y}{dx^2} \quad \text{③}$$

eg.2 设 $y = f(x)$ 是由隐函数 $x^2 + y = \tan(x - y)$ 确定的隐函数, 且 $y(0) = 0$

$$\text{求 } \frac{dy}{dx}, \quad (*) \quad \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\text{eg.3 } y - \frac{1}{2} \sin y = x, \quad y(0) = 0, \quad \text{求 } \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}$$

对应的其实是 $f(x) = x + \frac{1}{2} \sin x$ 的反函数

Remark

反函数的求导法则也是隐函数求导

只换了变量, 对 y 求导而已

$$\text{牢记 } f^{-1}(y) = x, \text{ 以及 } f^{-1'}(y) = \frac{dx}{dy}, \quad f^{-1''}(y) = \frac{d^2x}{dy^2}$$

$$\text{eg. } y = x + x^5, \quad \text{求 } \frac{dx}{dy}, \quad \frac{d^2x}{dy^2}$$

例题

$$\text{eg.1} \text{ 已知 } y = \frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x, \quad \text{求 } \frac{dy}{dx}$$

eg.2 设 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处可导, 且 $f(1) = 0, f'(1) = -2$

$$\text{求 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(\cos x)}{e^{\tan x} - e^{\sin x}}$$

导数与微分-第三页

二、高阶导数计算

基本函数的高阶导数

请计算以下函数的 n 阶导数:

1. $y = x^\alpha$
2. $y = a^x = e^{x \ln a} \quad (a > 0 \wedge a \neq 1)$
3. $y = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \quad (a > 0 \wedge a \neq 1)$
4. $y = \sin(x + c)$

基本性质补充

设 f, g 在 x_0 处 n 阶可导, 则 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 有

$$(\alpha f(x) + \beta g(x))^{(n)} \Big|_{x=x_0} = \alpha f^{(n)}(x_0) + \beta g^{(n)}(x_0)$$

例: 设 $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$, 求 $f^{(n)}(x)$

① 莱布尼茨法则

$$(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$$

$$\text{类比 } (x+y)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k y^{n-k}$$

可以把 $f(x)$ 看成是上式中的 x , $g(x)$ 看成是上式中的 y , k 次看成求 k 阶导数

对于三个函数的情况：

$$(f_1(x)f_2(x)f_3(x))^{(n)} = \sum_{\substack{i+j+k=n \\ i,j,k \geq 0}} \frac{n!}{i!j!k!} f_1^{(i)}(x)f_2^{(j)}(x)f_3^{(k)}(x)$$

有兴趣的同学可以考虑一下任意有限多个函数相乘的情形

例： $f(x) = x^2 e^x$, 求 $f^{(n)}(x)$

② 欧拉公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

例：若 $f(x) = 2e^x \cos x$, 求 $f^{(n)}(x)$

解：

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x (e^{ix} + e^{-ix}) \\ &= e^{(1+i)x} + e^{(1-i)x} \\ \therefore f^{(n)}(x) &= (1+i)^n e^{(1+i)x} + (1-i)^n e^{(1-i)x} \\ &= 2^{\frac{n}{2}} e^{i\frac{n\pi}{4}} e^{(1+i)x} + 2^{\frac{n}{2}} e^{-i\frac{n\pi}{4}} e^{(1-i)x} \\ &= 2^{\frac{n}{2}} e^{x+i(x+\frac{n\pi}{4})} + e^{x-i(x+\frac{n\pi}{4})} \\ &= 2^{\frac{n}{2}+1} e^x \frac{e^{i(x+\frac{n\pi}{4})} + e^{-i(x+\frac{n\pi}{4})}}{2} \\ &= 2^{\frac{n}{2}+1} e^x \cos\left(x + \frac{n\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

③ 递推公式

例： $f(x) = (\arcsin x)^2$

1. 证明： $(1-x^2)y'' - xy' = 2$

2. 求 $f^{(n)}(0)$

解：

$$\because y = (\arcsin x)^2$$

$$\therefore y' = 2 \cdot \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad y'(0) = 0$$

$$y'' = 2 \left(\frac{x \arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{1-x^2} \right), \quad y''(0) = 2$$

$$\therefore (1-x^2)y'' - xy' = 2$$

$$\therefore ((1-x^2)y'' - xy')^{(n)} = 2^{(n)}$$

$$\therefore (1-x^2)y^{(n+2)} - n \cdot 2xy^{(n+1)} - n(n-1)y^{(n)} - xy^{(n+1)} - ny^{(n)} = 0$$

$$\therefore (1-x^2)y^{(n+2)} - (n+1)xy^{(n+1)} - n^2y^{(n)} = 0$$

代入 $x = 0$, 得

$$y^{(n+2)}(0) = n^2 y^{(n)}(0)$$

$$\therefore y^{(2m)}(0) = \prod_{i=2}^m \frac{y^{(2i)}(0)}{y^{(2i-2)}(0)} \cdot y''(0) = \prod_{i=2}^m (2i-2)^2 \cdot 2 = 2^{2m-1} \cdot ((m-1)!)^2$$

$$y^{(2m+1)}(0) = \prod_{i=1}^m \frac{y^{(2i+1)}(0)}{y^{(2i-1)}(0)} \cdot y'(0) = 0$$

$$\therefore y^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & n \text{ 为奇数或 } n = 0 \\ 2^{n-1} \cdot ((\frac{n}{2}-1)!)^2, & n \text{ 为正偶数} \end{cases}$$

④ Taylor 展开 (在后面)

三、导数应用

① 函数性态分析

<1> 单调性

设 $f(x)$ 在区间 I 上可导

- 1. 若 $f'(x) \geq 0, \forall x \in I$, 则 $f(x)$ 在 I 上**单调递增**;
若 $f'(x) > 0, \forall x \in I$, 则 $f(x)$ 在 I 上**严格单调递增**。
- 2. 若 $f'(x) \leq 0, \forall x \in I$, 则 $f(x)$ 在 I 上**单调递减**;
若 $f'(x) < 0, \forall x \in I$, 则 $f(x)$ 在 I 上**严格单调递减**。
- 3. 若 $f'(x) = 0, \forall x \in I$, 则 $f(x)$ 在 I 上为**常值函数**。

例题：

- 求 $x^4 - 4x + 4e^x = k$ 的不同实根的个数
- 求证 $\ln(x + \sqrt{1+x^2}) \leq \sqrt{1+x^2} - \sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1), \forall x \in \mathbb{R}$

<2> 极值点判断

设 $f(x)$ 在 x_0 处有对应阶数的导数, 判断 x_0 是否为极值点的步骤如下:

1. 一阶导数判断:

- 若 $f'(x_0) \neq 0$, 则 x_0 **不是极值点**;
- 若 $f'(x_0) = 0$, 进入二阶导数判断。

2. 二阶导数判断:

- 若 $f''(x_0) > 0$, 则 x_0 是**极小值点**;
- 若 $f''(x_0) < 0$, 则 x_0 是**极大值点**;
- 若 $f''(x_0) = 0$, 进入三阶导数判断。

3. 三阶及更高阶导数判断:

- 若 $f'''(x_0) \neq 0$, 则 x_0 **不是极值点**;
- 若 $f'''(x_0) = 0$, 继续判断更高阶导数, 以此类推。

总结规律:

若 n 阶导数 $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, 且 $1 \leq k \leq n-1$ 阶导数均为 0:

- 若 n 为**奇数**, x_0 一定不是极值点;
- 若 n 为**偶数**, $f^{(n)}(x_0) > 0$ 时 x_0 为极小值点, $f^{(n)}(x_0) < 0$ 时 x_0 为极大值点。

<3> 切线

设 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 则 f 在 x_0 处的切线满足:

1. 斜率为 $f'(x_0)$
2. 过 (x_0, y_0)

即 $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

<4> 渐近线

两类渐近线：垂直渐近线与斜渐近线

垂直渐近线：

先找间断点，再求间断点处极限

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, 则 $x = x_0$ 为 $f(x)$ 的垂直渐近线

斜渐近线：

$+\infty$ 处：

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = A$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - Ax = B$, 则 $y = Ax + B$ 为 $f(x)$ 的一条斜渐近线
(若 A, B 有一者不存在，则 $+\infty$ 处的斜渐近线不存在)

$-\infty$ 处：

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \tilde{A}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - \tilde{A}x = \tilde{B}$, 则 $y = \tilde{A}x + \tilde{B}$ 为 $f(x)$ 的一条斜渐近线
(若 \tilde{A}, \tilde{B} 有一者不存在，则 $-\infty$ 处的斜渐近线不存在)

Remark: 如果用无穷小量的语言来写，就是

$f(x) = Ax + B + o(1) (x \rightarrow +\infty)$

与 $f(x) = \tilde{A}x + \tilde{B} + o(1) (x \rightarrow -\infty)$

例题：

- 求 $y = \sqrt{x^2 + 3x + 2}$ 的渐近线
- 求 $y = \ln(e^x + 1)$ 的渐近线
- 求 $y = \frac{x}{x-1} \sqrt{x^2 + 6x + 10}$ 的渐近线
- 求 $y = e^{\frac{1}{|x|}} \arctan \frac{x}{(x+1)(x-3)^2}$ 的渐近线

<5> 曲率

设 $y = f(x)$ 在 x_0 处二阶可导，则 $y = f(x)$ 在 x_0 处的曲率为

$$\frac{|y''(x_0)|}{(1 + y'^2(x_0))^{\frac{3}{2}}}$$

微分中值定理

一、费马引理

极值点必要条件：

若函数在 x_0 处取到极大/小值且 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则 $f'(x_0) = 0$

反例： $y = |x|$ 在 $x = 0$ 处取极小值，但不可导

(基本不怎么会考，大致记一下就行)

二、三个中值定理

① 罗尔 (Rolle) 中值定理

定理：

设 $f(x) \in C[a, b] \cap D(a, b)$ (题目中可能会加强为 $D[a, b]$)，满足 $f(a) = f(b)$ ，
则 $\exists \xi \in (a, b)$, s.t. $f'(\xi) = 0$

补充：广义罗尔定理

设 $f(x) \in D(a, b)$, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = L$,

则 $\exists \xi \in (a, b)$, s.t. $f'(\xi) = 0$

注： ξ 可能不唯一

证明思路：

考虑 $F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (a, b) \\ L, & x = a, b \end{cases}$,

则 $F(x) \in C[a, b] \cap D(a, b)$, $F(a) = F(b)$, 故 $\exists \xi \in (a, b)$, s.t. $F'(\xi) = f'(\xi) = 0$

② 拉格朗日 (Lagrange) 中值定理

定理：

设 $f(x) \in C[a, b] \cap D(a, b)$,

则 $\exists \xi \in (a, b)$, s.t. $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

③ 柯西 (Cauchy) 中值定理

定理：

设 $f(x), g(x) \in C[a, b] \cap D(a, b)$, 且 $\forall x \in (a, b)$, $g'(x) \neq 0$,

则 $\exists \xi \in (a, b)$, s.t. $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

等价形式: $(f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi)$

(上述等价形式的证明不需要 $g'(x) \neq 0$ 的条件)

三、洛必达法则

$\frac{0}{0}$ 型

定理：

若 $f(x), g(x)$ 满足:

$$1. \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$$

2. $\exists U^\circ(x_0)$, 使得 $\forall x \in U^\circ(x_0)$, $f(x), g(x)$ 可导且 $g'(x) \neq 0$

$$3. \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A, A \text{ 为有限数或 } +\infty, \text{ 或 } -\infty$$

则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$

$\frac{*}{\infty}$ 型

定理：

若 $f(x), g(x)$ 满足:

$$1. \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$$

2. $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in \dot{U}(x_0)$

$$3. \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A, A \text{ 为有限数或 } +\infty, \text{ 或 } -\infty$$

则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

四、拓展定理

① 导函数中心极限定理

设 $f(x) \in C(U(x_0)) \cap D(\dot{U}(x_0))$

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = A$

则 $f'(x_0)$ 存在且 $f'(x_0) = A$

② 导函数介值性定理

若 $f(x) \in D[a, b]$, 则 $\forall \eta \in f'_+(a) \text{ 和 } f'_-(b)$

$\exists \xi \in [a, b]$, s.t. $f'(\xi) = \eta$

五、泰勒 (Taylor) 公式

① 佩亚诺 (Peano) 型余项

设 $f(x)$ 在 x_0 处 n 阶可导, 则

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \quad (x \rightarrow x_0)$$

② 拉格朗日 (Lagrange) 型余项

设 $f(x) \in C^n[a, b] \cap D^{n+1}(a, b)$, $\forall x, x_0 \in [a, b]$,
 $\exists \xi$ 介于 x 与 x_0 之间, s.t.

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

③ 柯西 (Cauchy) 型余项

设 $f(x) \in C^n[a, b] \cap D^{n+1}(a, b)$, $\forall x, x_0 \in [a, b]$,
 $\exists \xi$ 介于 x 与 x_0 之间, s.t.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} (x - \xi)^n (x - x_0)$$

④ 积分型余项

设 $f(x) \in C^n[a, b]$, $\forall x \in [a, b]$, 则

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n)}(t) (x - t)^n dt$$

六、泰勒展开的唯一性

★ Remark: Taylor 多项式系数具有唯一性

设 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 处有定义, 且 $\exists a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

s.t. $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$

则系数 a_0, a_1, \dots, a_n 是唯一的, 且 $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$

后续许多处理手法都依赖于 Taylor 展开的唯一性

七、常见的泰勒公式 (以 Peano 余项为例)

$$\star e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\star (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^n) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) \quad (x \rightarrow 0)$$

八、泰勒公式的记忆技巧

Tips:

① 记住 e^x 与 $(1+x)^\alpha$, 其他可通过两个现推

简单记住两个规律:

① 导数关系:

若 $f'(x) = g(x)$, 记 $f(x)$ 、 $g(x)$ 对应的 Taylor 多项式为 $P_n(x; f)$, $P_n(x; g)$

则 $P'_n(x; f) = P_{n-1}(x; g)$

简而言之, Taylor 多项式有继承求导关系

② 奇偶性分离:

若 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2m-1}x^{2m-1} + a_{2m}x^{2m} + o(x^{2m+1})$ ($x \rightarrow 0$)

$$\text{则 } \frac{f(x) + f(-x)}{2} = a_0 + a_2 x^2 + \cdots + a_{2m} x^{2m} + o(x^{2m+1}) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\frac{f(x) - f(-x)}{2} = a_1 x + a_3 x^3 + \cdots + a_{2m-1} x^{2m-1} + o(x^{2m}) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\frac{f(ix) + f(-ix)}{2} = a_0 - a_2 x^2 + a_4 x^4 + \cdots + (-1)^n a_{2m} x^{2m} + o(x^{2m+1}) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\frac{f(ix) - f(-ix)}{2} = i(a_1 x - a_3 x^3 + a_5 x^5 + \cdots + (-1)^n a_{2m-1} x^{2m-1} + o(x^{2m})) \quad (x \rightarrow 0)$$

应用示例：

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n+1}) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{2n-1} + o(x^{2n}) \quad (x \rightarrow 0)$$

(对应项也成导数与积分关系)

$$(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + o(x^n) \quad (x \rightarrow 0)$$

$\arcsin x$ 同理

$\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = \operatorname{arcsinh} x$ 的 Taylor 展开

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\textcircled{2} (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \cdots$$

可类比 $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2 + \cdots$ 进行记背

九、补充：介值性

(1) 定义：

若函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，且满足 $\forall x_1, x_2 \in I, \forall \mu \text{ 介于 } f(x_1) \text{ 与 } f(x_2) \text{ 之间, } \exists \xi \text{ 介于 } x_1 \text{ 与 } x_2 \text{ 之间, s.t. } f(\xi) = \mu$ ，则称 $f(x)$ 在区间 I 上有介值性

(2) 性质：

① 若 $f(x)$ 在区间 I 上有介值性

$\forall \alpha, \beta \in I, \forall \lambda \in (0, 1)$

$\exists \xi \in (\alpha, \beta), \text{s.t. } f(\xi) = \lambda f(\alpha) + (1-\lambda) f(\beta)$

若有 3 个点呢？

(3) 常见的有介值性的函数：连续函数、导函数

(4) 何时用介值性，何时用中值定理？

- **介值性：** 不涉及求导运算

- **中值定理：** 涉及求导运算

应试部分

一、计算

① 求极限

解题步骤：

- **Step1:** 能求极限的部分先求极限（一般非0）

- **Step2:** 能等价无穷小替换的地方先等价无穷小替换（多为乘除运算）

- **Step3:** Taylor 展开（展开到哪一项？非零项）

- **Step4:** 洛必达

如果上述办法都没做出来，基本就是夹逼准则或定积分定义

例题：

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x - \sin(\sin x)) \arctan x}{1 - \sqrt{1 - x^4}}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} x - x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x^3} - 1 + x^4 \cos \frac{1}{x}}{\cos x \ln(1+2x) \tan^2 x}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 - x^2 + \frac{x}{2}) e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^6 + 1}$$

e.g.2 设 $y = f(x)$ 是由方程 $e^{x+y} - 2xy = e$ 所确定的隐函数

(1) 求 $f'(0)$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(f(x) - 1) \sin(ex)}{\sqrt{1+2x^2} - 1}$$

e.g.3

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\arctan \frac{2024}{n} - \arctan \frac{2024}{n+1} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}$$

② 高阶导数 (Taylor系数的唯一性)

例题：

- $f(x) = \arctan x$, 求 $f^{(7)}(0)$
- $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$, 求 $f^{(6)}(0)$
- 设 $y = f(x)$ 是由隐函数 $x^2 + y = \tan(x-y)$ 确定的隐函数, 且 $y(0) = 0$
求 $y(0)$, $y''(0)$ (Taylor展开)

③ 渐近线

求 $f(x) = \frac{x^{1+x}}{(x+1)^x}$ 在 $x > 0$ 时的渐近线

二、证明相关

1、单介值点

两大类思路：

① 跟随Rolle定理的思路 (更本质)

Rolle定理的证明思路：

- 基本思路：在区间内部找一个最值点，且在这一点可导，利用Fermat引理即可
- Q1：最值点存在性？
- Q2：如何保证在区间内部？

例题：

• 导函数介值性定理的证明

若 $f(x) \in D[a, b]$, 且 $f'_+(a)f'_-(b) < 0$

求证： $\exists \xi \in (a, b)$, s.t. $f'(\xi) = 0$

• 若 $f(x) \in D[0, +\infty)$, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(0)$

求证： $\exists \xi \in [0, +\infty)$, s.t. $f'(\xi) = 0$

• 广义罗尔定理

设 $f(x) \in D(a, b)$

满足 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$

则 $\exists \xi \in (a, b)$, s.t. $f'(\xi) = 0$

② 直接利用Rolle中值定理，找函数值相等的点 (可能需多次用Rolle定理)

1) 构造函数

- 如何构造? 积分
- 关键是对哪个函数积分? 把中值点视为变量, 其它参数视为常量

例题:

e.g.1 设 $f(x) \in C[0, 1] \cap D(0, 1)$, $f(1) = 0$

求证: $\exists \xi \in (0, 1)$, s.t. $f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$

e.g.2 设 $f(x) \in C[0, 1] \cap D(0, 1)$, $f(1) = 0$

求证: $\exists \xi \in (0, 1)$, s.t. $2f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$

e.g.3 Lagrange中值定理的证明

e.g.4 Cauchy中值定理的证明

e.g.5 设 $f \in C[a, b] \cap D(a, b)$, $f(a) = 0$

求证: $\exists \xi \in (a, b)$, $f(\xi) = \frac{b-\xi}{a} f'(\xi)$

e.g.6 设 $f(x) \in C[0, 1] \cap D(0, 1)$, $f(0) = 0$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, $f(1) = \frac{1}{2}$

求证: $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\exists \xi \in (0, 1)$, s.t. $f(\xi) + \alpha(f(\xi) - \xi) = 1$

e.g.7 若 $f(x) \in C[a, b] \cap D(a, b)$, $f(a) = f(b) = 0$

求证: $\exists \xi \in (a, b)$, s.t. $f(\xi) + f'(\xi) = 0$

【Tips: $(f(x)e^{g(x)})' = e^{g(x)}(g'(x)f(x) + f'(x))$ 此处只是提供一种可能构造】

e.g.8 设 $f(x) \in C[0, 2] \cap D(0, 2)$, $f(0) = 0$, $f(1) = 3$, $f(2) = -1$

求证:

(1) $\exists \xi \in (0, 2)$, s.t. $f'(\xi) = 0$

(2) $\exists \eta \in (0, 2)$, s.t. $f(\eta) + f'(\eta) = 0$

② 多阶导数

例题:

e.g. 设 $f(x) \in D^3[0, 1]$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-1}{x-1} = 0$

求证: $\exists \xi \in (0, 1)$, s.t. $f'''(\xi) = 0$

e.g. 设 $f(x) \in D^3[0, 1]$, $f(1) = 0$, $F(x) = x^3 f(x)$

求证: $\exists \xi \in (0, 1)$, s.t. $F'''(\xi) = 0$

通过适当地构造函数, 可以增加一些初值条件

e.g. $f(x) \in D^2[0, 1]$, $f(0) = f(1)$

求证: $\exists \xi \in (0, 1)$, s.t. $f''(\xi) = \frac{2f'(\xi)}{1-\xi}$

在积分的时候, 可以适当配凑由常数项多次积分所形成的多项式的系数

三、高阶导数证明技巧

e.g. 设 $f \in D^3[-1, 1]$, $f(-1) = 0$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$

证明: $\exists \xi \in (-1, 1)$, s.t. $f'''(\xi) = 3$

证明:

$$\text{令 } P(x) = (1-x^2)f(0) + \frac{x+x^2}{2} + \frac{1}{2}(x^3-x) = (1-x^2)f(0) + \frac{x+x^3}{2}$$

令 $g(x) = f(x) - P(x)$, 则 $g(x) \in D^3[-1, 1]$

且

$$g'(x) = f'(x) - P'(x) = f'(x) + 2xf(0) - \frac{2x+3x^2}{2}$$

$$g''(x) = f''(x) + 2f(0) - \frac{2+6x}{2} = f''(x) + 2f(0) - 1 - 3x$$

$$g'''(x) = f'''(x) - 3$$

注意到 $g(-1) = g(0) = g(1) = 0$, $g'(0) = 0$

$\therefore \exists \xi_1 \in (-1, 0)$, $\xi_2 \in (0, 1)$

s.t. $g'(\xi_1) = g'(\xi_2) = 0$

$$\because g'(\xi_1) = g'(\xi_2) = g'(0) = 0$$

$$\therefore \exists \xi_3 \in (\xi_1, 0), \xi_4 \in (0, \xi_2)$$

$$\text{s.t. } g''(\xi_3) = g''(\xi_4) = 0$$

$$\therefore \exists \xi \in (\xi_3, \xi_4) \subset (-1, 1)$$

$$\text{s.t. } g'''(\xi) = 0$$

$$\text{即 } f'''(\xi) = 3$$

有些时候，出题人已经帮你构造好了

e.g. 设 $f \in D^3[0, 1]$, 满足 $f(0) = -1, f'(0) = 0, f(1) = 0$

证明: $\forall x \in [0, 1], \exists \theta \in (0, 1),$

$$\text{s.t. } f(x) = -1 + x^2 + \frac{x^2(x-1)}{6} f'''(\theta)$$

证明:

$\forall x_0 \in [0, 1]$, 令 K 为满足下式的常量 (K 值法)

$$f(x_0) = -1 + x_0^2 + \frac{x_0^2(x_0-1)}{6} K$$

$$\text{令 } g(x) = f(x) + 1 - x^2 - \frac{x^2(x-1)}{6} K$$

$$\text{则 } g(x) \in D^3[0, 1], g'(x) \in D^2[0, 1], g''(x) \in D[0, 1]$$

$$g'(x) = f'(x) - 2x - \left(\frac{x^2}{6} + \frac{2x(x-1)}{6}\right) K = f'(x) - 2x + \frac{3x^2 - 2x}{6} K$$

$$g''(x) = f''(x) - 2 - \frac{6x-2}{6} K$$

$$g'''(x) = f'''(x) - K$$

$$\text{注意到 } g(0) = g(1) = g(x_0) = 0, g'(0) = 0$$

$$\therefore g \in D^3[0, 1]$$

$$\therefore \exists \xi_1 \in (0, x_0), \xi_2 \in (x_0, 1)$$

$$\text{s.t. } g'(\xi_1) = g'(\xi_2) = 0$$

$$\therefore g' \in D^2[0, 1], g'(0) = g'(\xi_1) = g'(\xi_2) = 0$$

$$\therefore \exists \xi_3 \in (0, \xi_1), \xi_4 \in (\xi_1, \xi_2)$$

$$\text{s.t. } g''(\xi_3) = g''(\xi_4) = 0$$

$$\therefore g'' \in D[0, 1]$$

$$\therefore \exists \theta \in (\xi_3, \xi_4) \in (0, 1)$$

$$\text{s.t. } g'''(\theta) = f'''(\theta) - K = 0$$

$$\therefore f'''(\theta) = K$$

$$\therefore \forall x \in [0, 1], \exists \theta \in (0, 1),$$

$$\text{s.t. } f(x) = -1 + x^2 + \frac{x^2(x-1)}{6} f'''(\theta)$$

Taylor展开与函数介值性应用

一、适用场景与基本方法

适用场景：

① 只有一个介值

② 多项式情形

③ 仅有一点有连续的高阶导数值，且这一点不是边界点

④ 问n阶导，一般要知道0,1,2,...,n-1阶导的初值但不要求全知道，部分导数信息可通过代数变形消掉

方法本质：

此类方法所适用的题目本质是为了简化书写。此处介绍的方法是一种微分中值工具：Taylor公式，同时让同学们体会一下Taylor公式的应用。

Taylor公式：

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

做题关键：

- 在哪一点进行展开？（有高阶导数的那点）

- 展开到第几项？（介值对应的导数阶数）

- 对哪些点在该处展开? (一般来说题目中的所有点)

二、单介值点问题

e.g.1

设 $f \in D^2[0, 1]$, $f(0) = f(1) = 0$, $\min_{0 \leq x \leq 1} f(x) = -1$,
求证: $\exists \xi \in (0, 1)$, $f''(\xi) \geq 8$

证明:

$$\because f \in D^2[0, 1]$$

$$\therefore f \in C[0, 1]$$

$$\exists c \in (0, 1), \forall x \in [0, 1], f(x) \geq f(c)$$

(思考一下为什么c不能是0或1)

$$\text{即 } f(c) = \min_{0 \leq x \leq 1} f(x) = -1$$

$$\text{则 } f'(c) = 0$$

对 $x \in \{0, 1\}$, 在 $x = c$ 处进行展开

$$\exists \xi_1 \in (0, c), \xi_2 \in (c, 1)$$

$$f(0) = f(c) + f'(c)(0 - c) + \frac{f''(\xi_1)}{2}(0 - c)^2$$

$$f(1) = f(c) + f'(c)(1 - c) + \frac{f''(\xi_2)}{2}(1 - c)^2$$

化简, 得

$$f''(\xi_1) = \frac{2}{c^2}$$

$$f''(\xi_2) = \frac{2}{(1 - c)^2}$$

$$\therefore \frac{f''(\xi_1) + f''(\xi_2)}{2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{(1 - c)^2} \geq 8$$

由介值性, 知

$$\exists \xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (0, 1), \text{s.t. } f''(\xi) = \frac{f''(\xi_1) + f''(\xi_2)}{2}$$

e.g.3.2

设 $f(x) \in C[a, b] \cap D^2(a, b)$,

求证:

$$\forall x \in (a, b), \exists \xi \in (a, b)$$

$$\text{s.t. } f(x) = \frac{x-a}{b-a}f(b) + \frac{x-b}{a-b}f(a) + \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)$$

证明:

$$\forall x_0 \in (a, b)$$

对 $x = a, x = b$ 在 $x = x_0$ 处进行展开

$$\exists \xi_1 \in (a, x_0), \xi_2 \in (x_0, b)$$

$$f(a) = f(x_0) + f'(x_0)(a - x_0) + \frac{f''(\xi_1)}{2}(a - x_0)^2 \quad ①$$

$$f(b) = f(x_0) + f'(x_0)(b - x_0) + \frac{f''(\xi_2)}{2}(b - x_0)^2 \quad ②$$

原题中没有给出 $f'(x_0)$ 的值, 我们尝试将它消去

①×(b - x_0) + ②×(x_0 - a), 有

$$(b - x_0)f(a) + (x_0 - a)f(b) = f(x_0)(b - a) + \frac{f''(\xi_1)}{2}(a - x_0)^2(b - x_0) + \frac{f''(\xi_2)}{2}(b - x_0)^2(x_0 - a)$$

即

$$f(x_0) = \frac{x_0 - b}{a - b} f(a) + \frac{x_0 - a}{b - a} f(b) + \frac{(x_0 - a)(x_0 - b)}{2} \left(\frac{a - x_0}{a - b} f''(\xi_1) + \frac{x_0 - b}{a - b} f''(\xi_2) \right)$$

(此处化简是为了追求原题中的形式)

由导函数介值性知

$$\exists \xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (a, b), \text{ s.t. } \frac{a-x_0}{a-b} f''(\xi_1) + \frac{x_0-b}{a-b} f''(\xi_2) = f''(\xi)$$

此时已证毕

e.g.

$f(x) \in D^2[a, c]$ 且 $a < b < c$

求证: $\exists \xi \in (a, c)$

$$\text{s.t. } \frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(b-c)(b-a)} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)} = \frac{1}{2} f''(\xi)$$

三、多介值点问题

1) 没有要求介值点互异 (Cauchy中值定理)

e.g.

设 $f(x) \in C[a, b] \cap D(a, b)$ 且 $a > 0$

$$\text{求证: } \exists \xi, \eta \in (a, b), \text{ s.t. } f'(\xi) = (a+b) \cdot \frac{f'(\eta)}{2\eta}$$

e.g.

设 $f(x) \in C[a, b] \cap D(a, b)$, $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$

求证:

$$\exists \xi, \eta \in (a, b), \text{ s.t. } f'(\eta) \tan \frac{a+b}{2} = f'(\xi) \cdot \frac{\sin \eta}{\cos \xi}$$

2) 要求介值点互异

一般都是一阶导数且要求介值点互异。关键在于配凑或插入点 (虽说大部分情况下都已经配凑好了)。

解题步骤:

- Step1: 将同一个值点的归到一边, 用Cauchy中值/Lagrange中值/数列原来找

- Step2: 配凑插入点

e.g. 设 $f(x) \in C[0, 1] \cap D(0, 1)$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$

求证:

$$(1) \exists c \in (0, 1), \text{ s.t. } f(c) = \frac{3}{2023}$$

$$(2) \exists \xi \neq \eta \in (0, 1), \text{ s.t. } \frac{3}{f'(\xi)} + \frac{2020}{f'(\eta)} = 2023$$

e.g. 设 $f(x) \in C[0, 1] \cap D(0, 1)$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$

求证:

$$(1) \exists c \in (0, 1), \text{ s.t. } f(c) = 1 - c$$

$$(2) \exists \xi \neq \eta \in (0, 1), \text{ s.t. } f'(\xi) \cdot f'(\eta) = 1$$

四、介值点极限相关

(这种题说白了就是一种题, 实在不行直接背过程都行)

e.g. 设 $f(x) \in C^2(U(a))$, 且 $f''(a) \neq 0$

$\forall h \in U(a)$, 有 $f(a+h) = f(a) + f'(a+\theta_h h) \cdot h$

$$\text{求证: } \lim_{h \rightarrow 0} \theta_h = \frac{1}{2}$$

e.g. 设 $f(x)$ 在点 a 处二阶可导, 且 $f''(a) \neq 0$

则当 h 充分小时, 有 $f(a+h) - f(a) = f'(a+\theta_h h) \cdot h$

$$\text{求证: } \lim_{h \rightarrow 0} \theta_h = \frac{1}{2}$$

e.g. 设 $f(x) \in C^n[a, b]$, 且 $\forall h \in (0, b-a]$

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} h^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a+\theta_h h)}{n!} \cdot h^n$$

求证: $\lim_{h \rightarrow 0} \theta_h = \frac{1}{n+1}$

e.g. 设 $f(x) \in C^n[a, b]$, 且 $f^{(k)}(a) = 0$ ($k = 2, 3, \dots, n - 1$)
且 $\forall h \in (0, b - a]$

$$f(a + h) = f(a) + f^{(n)}(a + \theta_h h) \cdot h$$

求证: $\lim_{h \rightarrow 0} \theta_h = \frac{1}{\sqrt[n-1]{n}}$

五、导数控制

e.g. 设 $f(x) \in D^2[0, +\infty)$, 且 $|f(x)| \leq a$, $|f''(x)| \leq b$, $\forall x \in (0, +\infty)$

求证:

- ① $\forall x \in (0, +\infty)$, $|f'(x)| \leq 2a + \frac{1}{2}b$
- ② $\forall x \in (0, +\infty)$, $|f'(x)| \leq 2\sqrt{ab}$

e.g. 设 $f(x) \in D^2(\mathbb{R})$, 且 $\forall x \in (0, +\infty)$, $|f(x)| \leq M_0$, $|f''(x)| \leq M_2$

求证: $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f'(x)| \leq \sqrt{2M_0 M_2}$

e.g. 设 $f(x) \in D^3(\mathbb{R})$, 且 $\forall x \in (0, +\infty)$, $|f(x)| \leq M_0$, $|f'''(x)| \leq M_3$

求证: $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f'(x)| \leq \frac{\sqrt[3]{9M_0^2 M_3}}{2}$

解:

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + \frac{h^3}{6} \cdot f'''(\xi)$$

$$f(x - h) = f(x) - f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 - \frac{h^3}{6} \cdot f'''(\eta)$$

希望消去 $f''(x)$,

两式作差, 得

$$f(x + h) - f(x - h) = 2f'(x)h + \frac{h^3}{6} (f'''(\xi) + f'''(\eta))$$

$$\therefore |2f'(x)h| \leq 2M_0 + \frac{|h|^3}{6} \cdot 2M_3$$

$$\therefore |2f'(x)| \leq \frac{2M_0}{|h|} + \frac{|h|^2}{3} \cdot M_3$$

$$\therefore \frac{|h|^2}{3} M_3 + \frac{2M_0}{|h|} = \frac{|h|^2}{3} M_3 + \frac{M_0}{|h|} + \frac{M_0}{|h|} \geq 3 \sqrt[3]{M_0^2 \cdot \frac{M_3}{3}} = \sqrt[3]{9M_0^2 M_3}$$

$$\therefore |f'(x)| \leq \frac{\sqrt[3]{9M_0^2 M_3}}{2}$$

函数凹凸性与拐点

一、凹函数定义

(1) 定义

设 $f(x)$ 在 (a, b) 上可导, 且曲线 $y = f(x)$ 都在曲线上任意一点的上方, 则称函数 $f(x)$ 在 (a, b) 上是凹的。

(2) 等价刻画

$f(x)$ 在 (a, b) 上是凹的等价于以下叙述:

1. 割线定义:

若 $f(x)$ 在 (a, b) 上可导, 且 $\forall x, y \in (a, b)$, $\lambda \in (0, 1)$, 均有 $f(\lambda x + \lambda y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$

2. 割线斜率单调性:

$f(x)$ 在 (a, b) 上可导, 且 $\forall x, y, z \in (a, b)$, $x < y < z$, 有

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} < \frac{f(x) - f(z)}{x - z} < \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

3. 切线斜率单调性：

$f(x)$ 在 (a, b) 上可导，且 $f'(x)$ 在 (a, b) 上单调递增。

(3) 二阶导判定

若 $f(x)$ 在 (a, b) 上二阶可导，
则 $f''(x) > 0 \iff f(x)$ 在 (a, b) 上是凹的。

(4) 几何直观

若 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的下凸函数，则满足下列非单调情形之一：

- ① $f(x)$ 在 $[a, b]$ 递减
- ② $f(x)$ 在 $(a, b]$ 递增
- ③ $\exists c \in [a, b]$, 使得 $f(x)$ 在 (a, c) 递减，在 (c, b) 递增

二、凹凸性应用例题

e.g. 设 $f(x)$ 为凹函数， $\forall x, y \in [a, b]$, $x + y = a + b$, 有

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2} \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

e.g. 哈达马 (Hadamard) 不等式

若 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的下凸函数，则

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

三、拐点

1) 定义

设 $f(x) \in D(U(x_0))$, 若 x_0 是 $f(x)$ 凹与凸的分界点，
则称 $x = x_0$ 为 $y = f(x)$ 的拐点。

Remark:

若 $f(x)$ 连续，其实在大多数情况下，可以简单地将拐点视为 $f'(x)$ 的极值点。

2) 必要条件

若 $f(x) \in D^2(U(x_0))$, 且 $(x_0, f(x_0))$ 为 $y = f(x)$ 的拐点，则 $f''(x_0) = 0$

3) 充分条件

若 $f(x) \in D^2(U(x_0))$, 且 $f''(x_0) = 0$, $f''(x)$ 在 x_0 两侧异号，则 $(x_0, f(x_0))$ 为 $y = f(x)$ 的拐点