《微积分》辅学计划

第一次讲义：级数

Author：芋头不吃鱼头

特别鸣谢：lxj 老师、sdk 老师、cygg、sjwjj

Version :2.0(第一次写的讲义文件损坏了T.T但希望好事多磨)

前面de碎碎念：本讲义的最终解释权在每一位读者。本人因为第一次第一次编写讲义和授课，再加上版本被强制升级到2.0的仓促和自身水平限制难免存在一定疏漏。请愿意拨冗指正的王子公主们加my VX（iD:Severus_050302)

亦欢迎大家和我讨论其他的一切话题！

一. 级数的基本知识（Hint:使用时无需证明)

1.1 典型级数（Hint:级数的核心研究内容是收敛情况)

需要掌握的典型级数有以下2种：

等比级数：公比的绝对值小于1收敛，否则发散

ρ级数：$p>1$收敛，否则发散，特别的，$p=1$称作调和级数。

1.2 级数的基本性质（Hint：此处均要求为收敛级数)

性质1:线性运算法则（Hint：说明了有限收敛级数相加的收敛情况)

$$\sum_{n=1}^{\infty} Aa_n + Bb_n = A\sum_{n=1}^{\infty} a_n + B\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

性质2:改变其有限项不影响敛散情况，任意添加括号和不变

（Hint：如何计算部分和的收敛极限)

性质3:级数收敛的必要条件是:（Hint：逆否命题判断发散)

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

（务必！请先检查这个！）

性质 4（定理）:柯西收敛法则（Hint：描述‘∞’操作的经典语言）

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^{+},$$

当 $n > N$，对一切 $p \in \mathbb{N}^{+}$, 都有：

$$|u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}| < \epsilon$$

这一节这里就先不放题目了

二．正项级数（Hint:最‘难’收敛的一类级数）

2.1.正项级数敛散性的判别方法总结

定理一：单调有界准则（Hint:此处有上界即可）

定理二：比较判别法（Hint:收敛速度的认识）

推广：比较判别法的极限形式（Hint:极限的处理技巧）

定理三：比值判别法（Hint:从数列自身性质出发）

定理四：根值判别法（Hint:注意失效条件，上同）

定理五：积分判别法（Hint:注意别忘记，比较特殊，例 1）

特别的对于失效的情况可以使用拉比判别法考察:

$$\lim_{n \to +\infty} n\left(\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| - 1\right) = r$$

r>1 时级数绝对收敛；r<1 时级数发散；r=1 时失效

2.2.正项级数敛散性的判别方法选择

(1) 如果它的通项存在一些我们熟悉的适合泰勒展开的初等函数 对级数的通项做泰勒展开并使用相应的 p-级数进行比较是判断这类正项级数敛散性的一个主要方法;

(2) 若级数通项有阶乘 $n!$ 或指数项时常用比值判别法;

(3) 当级数通项的指数为关于 n 的函数时常用根值判别法;

(4) 当级数通项含 $1/n$ 与 $\ln n$ 时常用积分判别法;

(5) 数列求和的其他技巧

例 1 讨论下面级数的收敛情况（$Hint$:常见数列的收敛速度）

$$\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}$$

三．一般数项级数（$Hint$:考试的重点部分 1）

3.1 一般数项级数敛散性的判别方法总结

（$Hint$:关注 or 转化为正项级数部分）

对于一般数项级数的研究方法主要是转化为正项级数，即，

定理一：绝对收敛可以推出原级数条件收敛。

特别的，交错级数是一种特殊的一般数项级数，对于交错级数可以使用莱布尼茨判别法，只关注正项部分。

定理二：（莱布尼茨判别法）对交错级数中的 U_n：

如果Un单调递减并在极限处趋向0，该交错级数收敛。

3.2 一般数项级数敛散性的判别思路（Hint:试探+分而治之）

先判别绝对收敛情况是必要的。

然后在判别条件收敛情况时，除了上面提供的方法，将数列拆分成为容易判断的级数和是一种常用的思路，从第一节的线性法则出发，我们还有下面的性质5:

收敛+收敛=收敛，收敛+发散=发散

下面的例题是一个应用，其还揭示了第二节提到的泰勒公式的使用。

例2 讨论下面级数的收敛情况（Hint:泰勒展开得到'部分'de部分和）

$$\sum_{n=1}^{\infty} ln(1+\frac{(-1)^{n-1}}{n^p})$$

3.3 一般数项级数敛散性的判别方法补充（Hint:不太需要掌握）

刚才介绍了从通项里拆分成为和的形式，如果拆分成乘积则有:

阿贝尔判别法:

若数列$\{a_n\}$单调有界，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$收敛，则数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$收敛。

与之相对的是狄利克雷判别法:

其在数列上的条件强化为单调趋向于0，在级数上弱化为有界。

这一节关于重排的内容就不放入讲义了

四. 函数项级数（Hint:掌握程度为理解即可）

4.1 函数项级数的概念

前面所提到的级数可以看作是无数个单'点'累加所得到。

函数项级数利用函数输出不同性质的单'点'，因此引出收敛点、收敛半径和收敛域的概念。

对于逐点的和显然不能通过一一考察，所以通过通项出发计算的部分和 $S(x)$ 是 x 的函数，记该点部分和的极限就为 $S(x)$.

4.2 级数的一致收敛判定

和之前的柯西收敛准则对应有一致收敛准则

一致收敛准则是对定义域的所有 x 同时按照精度速度满足收敛。

因此对域 or 区间的整体考虑带来了有关连续的相关性质。

4.3 级数的一致收敛性质（Hint:一致收敛为这些性质的充分前提）

(1) 部分和函数一致收敛到 $S(x)$，$S(x)$ 连续，即对级数和的极限(此时 x 趋向 x_0)等于对各项求极限再求和。

(2) 对级数先求和（Hint:可以认为是'部分'和函数）再求导 or 积分等价于对级数每一项求导 or 积分再求和。

我们所用到的都默认了具有这些良好性质。

这一节也不放题目了

五．幂级数（Hint:考试的重点部分 2）

5.1Abel 引理（Hint:收敛半径、收敛区间、收敛域的定义区分）

如果幂级数在点 x_0 处（x_0 不等于 0）收敛，则对于适合不等式 $|x|<|x_0|$ 的一切 x 使这幂级数绝对收敛。 反之，如果幂级数在点 x_1 处发散，则对于适合不等式 $|x|>|x_1|$ 的一切 x 使这幂级数发散。

注:Abel 引理说明了收敛半径的存在，优点是可以直接判断出绝对收敛（由等比求和得来）缺点是 x=R 处的情况是未知的。

5.2 柯西-阿达马公式和变式（Hint:依旧注意绝对收敛）

仿照比值判别法和根值判别法得到的比值给出收敛半径的倒数。

这里即可得到收敛区间，进一步验证可以得到收敛域。

特别的对于幂级数在 0 点一定收敛。

5.3 有关和函数的计算

（Hint:第四节的求导微分换序法则,且此时收敛的相关性质不改变）

5.3.1 和函数的直接计算

基本形式 1:

由于级数在 $x=-1$ 处收敛，$-\ln(1-x)$ 在 $x=-1$ 处连续，所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x),\quad x\in[-1,1).$$

注:利用积分请不要忘记0处的值（!）

$$\int_0^x S'(x)\,\mathrm{d}x = S(x) - S(0),$$

知

$$S(x) = S(0) + \int_0^x S'(x)\,\mathrm{d}x.$$

基本形式2:

$$S(x)=\left(\int_0^x S(x)\,\mathrm{d}x\right)'=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2},$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2},\ x \in (-1,1).$$

以及以下若干推广：

例3 (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{n+1}}{n} = x\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{n-1}}{n} \xlongequal{\text{当}\,x\neq 0\,\text{时}} \dfrac{1}{x}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$，从而

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} = \begin{cases} \dfrac{-\ln(1-x)}{x}, & -1 \leqslant x < 0 \text{或} 0 < x < 1, \\ 1, & x = 0; \end{cases}$$

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{n} \xlongequal{\text{令}\,x^2=y} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{y^n}{n}$;

(4)
$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)x^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} - \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} - \frac{1}{x}\left(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n} + x - x\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} - \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} + 1 = \left(1-\frac{1}{x}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} + 1 \\
&= \frac{1-x}{x}\ln(1-x) + 1 \quad (x \in [-1,0) \cup (0,1)),
\end{aligned}$$

当 $x=0$ 时，和为0，当 $x=1$ 时，$\lim\limits_{x\to 1^-}\left[\dfrac{1-x}{x}\ln(1-x)+1\right]=1$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n = x\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{2n} \xlongequal{\text{令}\,x^2=y} \sum\limits_{n=1}^{\infty} ny^n$;

(7)
$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty} nx^{n-2} &= \frac{1}{x}\sum_{n=2}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{x}\left(\sum_{n=2}^{\infty} nx^{n-1} + 1 - 1\right) \\
&= \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} - \frac{1}{x}\ (x \neq 0),
\end{aligned}$$

注:操作时将 x 放在分母上的时候要提醒对'0'的特殊关照（！）

再注:逐项求导和逐项求积不改变收敛区间，但要注意,它们的收敛域可能不同（！）

例 3 求下面幂级数的和函数（Hint:加减拆分、逐项求导或求积）

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n+1}x^n$$

5.3.2 构造和函数计算级数（Hint:目前还没有考察过）

首先再补充一下和函数的性质:若幂级数在收敛区间的左（右）端点上收敛，则其和函数也在这一端点上右（左）连续，也就是说此时该点和函数的右（左）极限反映了收敛和（Hint:和函数性质的补充）

选做 求下面级数的和（Hint:和傅立叶级数对比求级数和可能的方法）

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$$

5.3.3 函数展为幂级数（Hint:考试中重点的重点）

(1) $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\cdots,\ x\in(-\infty,+\infty)$;

(2) $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots,\ x\in(-\infty,+\infty)$;

(3) $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots,\ x\in(-\infty,+\infty)$;

(4) $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots,\ x\in(-1,1]$;

(5) $(1+x)^a=1+ax+\dfrac{a(a-1)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n+\cdots,$

$x\in(-1,\ 1)$.

$$(6)\ \frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\quad |x|<1;$$

$$(7)\ \frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,\quad |x|<1.$$

思路：唯一性定理+上面的基本麦克劳林展开式

函数展为幂级数和幂级数求和是互逆的，因此方法上有相似之处。

这一部分主要是熟练+细心。

一个常用的思想遇见反三角函数要求导。

例 4 将下面的函数展为幂级数

$$f(x)=arctan(\frac{1-x^2}{1+x^2})$$

从另外一个角度看函数的展开本质上是系数的确定，因此待定系数法等确定系数的一系列方法也是可以采取的策略。

例 5 将下面的函数展为幂级数

$$f(x)=ln(\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}})$$

六．函数的傅立叶展开（Hint:考试的难点部分）

函数的傅立叶展开可以分为三个渐进的层次

1.以 2π 为周期的函数的傅里叶展开

2.以 $2L$ 为周期的函数的傅里叶展开

3.通过延拓对对函数进行傅里叶展开:

若要展成正弦级数，则由于正弦函数为奇函数，则应对 $f(x)$ 做奇延拓；若要展成余弦级数，则由于余弦函数为偶函数，则应对 $f(x)$ 做偶延拓。

其定义是在 2 的基础上给出的

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

其中

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x, \quad n = 1, 2, \cdots$$

注:只要函数 $f(x)$ 在一个周期内至多有有限个第一类间断点，且不做无限次振荡，则 $f(x)$ 的傅里叶级数 在连续点处收敛于该点的函数值，在不连续点处收敛于该点左、右极限的平均值.

期中考试的大题还是结合考生自己动手展开考察

例 6 将下面的函数展为周期为 2pi 的傅里叶级数并求 S(-9pi/2)

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{if } -\pi/2 <= x <= \pi/2 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

补充:另一种用途是计算下面级数的和：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{6}$$

（彩蛋:如果允许的话会发棒棒糖 ）