



一、可导性与可微性

1. 定义与相关性质

① 可导性

定义：

设 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 上有定义，

若极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 存在

则称 $f(x)$ 在 x_0 处**可导**，

并记 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 为 $f(x)$ 在 x_0 处的**导数**，

记为 $\frac{d}{dx} f(x)|_{x=x_0}$ 或 $f'(x)|_{x=x_0}$ 或 $f'(x_0)$

若 $\forall x_0 \in D$ ， f 都在 x_0 处可导，则称 f 在 D 上**可导**

若 $f'(x)$ 在 x_0 处可导，则称 f 在 x_0 处**二阶可导**

若 $f^{(n-1)}(x)$ 在 x_0 处可导，则称 f 在 x_0 处 **n 阶可导**。

以上是对课本上定义的提炼，此处对高阶导数的定义有点过于简略

Remark：

• ①几何意义：割线斜率的极限

• ②等价表述：事实上，考查 $f(x)$ 在 x_0 处是否可导，
就是考查 $g(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, $x \in U^\circ(x_0)$ 在 x_0 处是否有极限
也就是说极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 是否存在

• ③变量替换：有时会把 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 与 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$
这两个极限联系起来，只要考虑换元 $\Delta x = x - x_0$ 即可
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \stackrel{\Delta x = x - x_0 \text{ (当 } x \rightarrow x_0 \text{ 时 } \Delta x \rightarrow 0)}{=} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

③ 单侧导数

我们可以模仿对函数极限的考查，对应地考查 $g(x)$ 在 x_0 处的左右极限

左导数：

设 $y = f(x)$ 在 $U_-(x_0)$ 处有定义，

且极限 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在

则称 $f(x)$ 在 x_0 处**左可导**，
并将这个值记为 $f'_-(x_0)$

右导数：

设 $y = f(x)$ 在 $U_+(x_0)$ 处有定义，

且极限 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在

则称 $f(x)$ 在 x_0 处**右可导**，
并将这个值记为 $f'_+(x_0)$

可导的充要条件：

$f(x)$ 在 x_0 处可导，当且仅当 $f(x)$ 在 x_0 处**左右导数存在且相等**

简证：类似于函数极限的讨论

$$g(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \text{ 在 } x_0 \text{ 处极限存在} \iff g(x) \text{ 在 } x_0 \text{ 处左右极限存在且相等}$$
$$\Updownarrow \qquad \qquad \qquad \Updownarrow$$

$f(x)$ 在 x_0 处可导 $f(x)$ 在 x_0 处左、右可导，且左右导数值相等

② 可微性

定义：

设 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 上有定义，且满足

$\exists A \in \mathbb{R}$ ，使得下式成立

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \rightarrow 0)$$

其中 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

则称 $f(x)$ 在 x_0 处**可微**，并称 $A\Delta x$ 为 $f(x)$ 在 x_0 处的**微分**

记作 $dy = A\Delta x$

微分的一阶不变性

2. 重要性质与结论

① 可微与可导的等价性

定理：

$f(x)$ 在 x_0 处可微 $\iff f(x)$ 在 x_0 处可导

简证：

$f(x)$ 在 x_0 处可导

$$\iff \exists A \in \mathbb{R}, s.t. \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = A$$

$$\begin{aligned} \iff \exists A \in \mathbb{R}, s.t. \Delta y &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x) \ (\Delta x \rightarrow 0) \\ \iff f(x) &\text{在 } x_0 \text{ 处可微} \end{aligned}$$

考试的时候，可以如上书写，只需把" \implies "改成对应的".:"即可
 " \longleftarrow "同理

在一元情形下，可导和可微完全等价，
 所以对可导函数进行考查，就是对可微函数进行考查
 对应的结论也可以完全平行地进行迁移
 用 $\varepsilon - \delta$ 语言书写：...

② 可导/可微与连续的关系

定理：

- 可微必连续，可导必连续
- 同理，左可导必左连续，右可导必右连续

简证：

$$\begin{aligned} f(x) &\text{在 } x_0 \text{ 处可微} \\ \iff \exists A \in \mathbb{R}, s.t. f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) &= A\Delta x + o(\Delta x) \ (\Delta x \rightarrow 0) \\ \implies \exists A \in \mathbb{R}, s.t. f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) &= o(1) \ (\Delta x \rightarrow 0) \\ \iff \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 0 &\iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \\ \iff f(x) &\text{在 } x_0 \text{ 处连续} \end{aligned}$$

考试的时候，可以如上书写，只需把" \implies "改成对应的".:"即可
 用 $\varepsilon - \delta$ 语言书写：...

3. 导数定义的进一步性质

补充说明：由于对 $f(x)$ 在 x_0 处可导性的考查

就是对极限式 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 的考查
 所有函数极限的性质也对应地被"继承"下来

① **唯一性**

若 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则 $f'(x_0)$ 的值唯一

② **局部有界性**

若 $f(x)$ 在 x_0 处可导，
 则 $\exists \delta > 0, M > 0, \forall x \in \dot{U}(x_0; \delta),$
 有 $\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \leq M$

③ **保号性**

设 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 上有定义
 若 $\exists \delta > 0, \forall x \in \dot{U}(x_0; \delta),$ 均有 $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq A$ 且 $f(x)$ 在 x_0 处可导
 ,则 $f'(x_0) \geq A$

④ **保序性**

设 $f(x), g(x)$ 在 $U(x_0)$ 上有定义
 若 $f(x), g(x)$ 在 x_0 处可导，且 $f'(x_0) \geq g'(x_0)$
 则 $\exists \delta > 0, \forall x \in \dot{U}(x_0; \delta),$ 均有 $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$

⑤ **四则运算（注意乘除的情形，它们与函数极限的情形有区别）**

设 $f(x), g(x)$ 在 $U(x_0)$ 上有定义，若 $f(x), g(x)$ 在 x_0 处可导
 则 $(f(x) \pm g(x))'|_{x=x_0} = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
 $(f(x) \cdot g(x))'|_{x=x_0} = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
 $\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' \Big|_{x=x_0} = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

⑥ **单调收敛准则**

1. 设 $f(x)$ 在 $U_-(x_0)$ 上有定义，且 $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 在 $U_+(x_0)$ 内单调递增且有上界
 则 $f'_-(x_0)$ 存在

2. 设 $f(x)$ 在 $U_+(x_0)$ 上有定义, 且 $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 在 $U_+(x_0)$ 内单调递增且有下界则 $f'_+(x_0)$ 存在
3. 设 $f(x)$ 在 $U_-(x_0)$ 上有定义, 且 $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 在 $U_-(x_0)$ 内单调递减且有下界则 $f'_-(x_0)$ 存在
4. 设 $f(x)$ 在 $U_+(x_0)$ 上有定义, 且 $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 在 $U_+(x_0)$ 内单调递减且有上界则 $f'_+(x_0)$ 存在

(以下内容同学们可以自己动手写一下)

⑦ 夹逼准则

⑧ Cauchy收敛准则

⑨ 归结原则

4. 例题选讲(*部分选做)

eg.1 按导数定义, 求 $y = kx + b$ 在 $x = x_0$ 处的导数

eg.2

① 求 $y = \begin{cases} x^2 D(x) & x \geq 0 \\ kx & x < 0 \end{cases}$ 在 0 处的左、右导数

(*) ② $y = x^\alpha D(x)$ 何时在 0 处可导, 何时在 0 处连续
又问, 是否可以取合适的 α , 使得 $f(x)$ 在 0 处二阶可导

eg.3 设 $f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin x^\beta (\beta < 0) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

① $\alpha = 2, \beta = -1$ 时, $f(x)$ 在 0 处是否可导, 若存在, 求 $f'(0)$

又问 $f'(x)$ 在 0 处是否连续

(*) ② $f(x)$ 何时在 0 处连续, 何时在 0 处可导,
何时 $f'(x)$ 在 0 处连续

eg.4 设 $f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & x \geq 0 \\ \sin bx & x < 0 \end{cases}$

① 求 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的左导数与右导数.

② b 取何值时, $f(x)$ 在 0 处可导

Q: 若 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = A$, 写出对应的无穷小量表达式

导数与微分-第二页

一、1阶导数, 2阶导数计算

① 初等函数的导数

基本初等函数导数公式

常函数: $(C)' = 0$

幂函数: $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} (\alpha \neq 0)$

对数函数: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a} \right)' = \frac{1}{x \ln a} \quad (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$$

指数函数: $(e^x)' = e^x$

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = \ln a \cdot e^{x \ln a} = \ln a \cdot a^x \quad (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$$

三角函数:

$$(\sin x)' = \cos x \quad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\sec x)' = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \quad (\csc x)' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

记忆口诀：

- 记住一半，另一半就是 $\sin x$ 换成 $\cos x$, $\cos x$ 换成 $\sin x$, 再加一个负号
- "c"开头的都有负号

反三角函数：

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad \operatorname{arccot} x = -\frac{1}{1+x^2}$$

记忆口诀：

- 记住一半，另一半就是加负号，可以考虑 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上的恒等式 $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$
- "c"开头的都有负号

② 基础运算性质

1. 导数的四则运算

设 $f(x), g(x)$ 在 $U(x_0)$ 上有定义

若 $f(x), g(x)$ 在 x_0 处可导

则：

- $(f(x) \pm g(x))'|_{x=x_0} = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
- $(f(x) \cdot g(x))'|_{x=x_0} = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' \Big|_{x=x_0} = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)} \quad (g(x_0) \neq 0)$

2. 导数的复合运算（链式法则）

公式：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

定理：

设 $u = g(x)$ 在 x_0 处可导， $y = f(u)$ 在 $u = u_0 = g(x_0)$ 处可导

$$\text{则 } (f(g(x)))'|_{x=x_0} = f'(u|_{u=g(x_0)}) \cdot g'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$$

推导思路：

$$\text{在形式上可记为 } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

也可以这么记忆：

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &\stackrel{\text{令 } u=g(x)}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ u \rightarrow u_0}} \frac{f(u) - f(u_0)}{u - u_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0) \end{aligned}$$

注意：上述证明并不严谨，因为在 $x \rightarrow x_0$ 时可能会有 $g(x) = g(x_0)$ 而 $x \in \mathring{U}(x_0)$ 的情形发生

严谨证明（微分语言）：

$$f(g(x)) - f(g(x_0)) = f'(g(x_0))(g(x) - g(x_0)) + o(g(x) - g(x_0)) \quad (g(x) \rightarrow g(x_0))$$

$$g(x) - g(x_0) = g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad (x \rightarrow x_0)$$

当 $x \rightarrow x_0$ 时， $g(x) \rightarrow g(x_0)$

$$\text{故 } f(g(x)) - f(g(x_0)) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) + o(g(x) - g(x_0)) \quad (x \rightarrow x_0)$$

$$= f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad (x \rightarrow x_0)$$

最好还是用 $\varepsilon - \delta$ 语言书写

3. 反函数的导数

定理：

设 $y = f(x)$ 在 $U(x_0)$ 上可导，且在 $U(x_0)$ 上有反函数 $x = f^{-1}(y)$, $f(x_0) = y_0$

则：

$$\bullet f^{-1'}(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

$$\bullet f^{-1}''(y_0) = -\frac{f''(x_0)}{(f'(x_0))^3}$$

$$\text{即 } \frac{dx}{dy} \Big|_{y=y_0} = \frac{1}{\frac{dy}{dx} \Big|_{y=y_0}} = \frac{1}{\frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_0}}$$

说明：不用特别记忆，可以视作后面**隐函数求导**的特例

4. 对数求导法

公式：

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y}$$

适用情形：

当 y 为一堆函数的乘积/开方/幂指等形式

例题：

$$\text{eg.1 } y = \frac{\sqrt[5]{x-3}\sqrt[3]{3x-2}}{\sqrt{x+2}}, \text{ 求 } y'$$

$$\text{eg.2 } y = x^{\tan 3x}$$

③ 特殊形式函数的求导

1. 普通方程

$y = f(x)$ ，高中怎么求导就怎么来就行

$$\text{e.g. } y = x^2 e^{\sin^2 \frac{1}{x}}, \text{ 求 } \frac{dy}{dx}$$

2. 参数方程

形式：

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

求导公式：

$$\bullet \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

$$\bullet \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)'}{\frac{dx}{dt}}$$

例题：

$$\text{eg.1 设 } \begin{cases} x = \ln(t + \sqrt{1+t^2}) \\ y = \sqrt{1+t^2} \end{cases}, \text{ 求 } \textcircled{1} \frac{dy}{dx} \textcircled{2} \frac{d^2 y}{dx^2}$$

$$\text{eg.2 设 } y = y(x) \text{ 可由 } \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} \text{ 确定, 求其在 } t = \frac{\pi}{2} \text{ 处的切线方程}$$

3. 极坐标方程

形式：

$$\rho = f(\theta) \iff \begin{cases} x = \rho \cos \theta = f(\theta) \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta = f(\theta) \sin \theta \end{cases}$$

例题：

设曲线 C 的极坐标方程 $r = e^\theta + \theta$ ，求 C 在 $\theta = 0$ 处的切线方程

4. 隐函数方程

形式：

$F(x,y(x))=0$

方法：

把 y 看成 $y(x)$ ，直接求导，然后移项整理一下
等式两边都是两个函数，它们相等恒成立，
故它们关于 x 的导数也恒相等

例题：

eg.1 设 $y=f(x)$ 是由隐函数 $e^{x+y}-2xy=e$ 确定的隐函数

求 ① $\frac{dy}{dx}$ ② $dy|_{x=0}$ (*) ③ $\frac{d^2y}{dx^2}$

eg.2 设 $y=f(x)$ 是由隐函数 $x^2+y=\tan(x-y)$ 确定的隐函数，且 $y(0)=0$

求 $\frac{dy}{dx}$, (*) $\frac{d^2y}{dx^2}$

eg.3 $y-\frac{1}{2}\sin y=x, y(0)=0$ ，求 $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}$

对应的其实是 $f(x)=x+\frac{1}{2}\sin x$ 的反函数

Remark

反函数的求导法则也是隐函数求导
只换了变量，对 y 求导而已

牢记 $f^{-1}(y)=x$ ，以及 $f^{-1'}(y)=\frac{dx}{dy}$ ， $f^{-1''}(y)=\frac{d^2x}{dy^2}$

eg. $y=x+x^5$ ，求 $\frac{dx}{dy}$ ， $\frac{d^2x}{dy^2}$

例题

eg.1 已知 $y=\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x$ ，求 $\frac{dy}{dx}$

eg.2 设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $f(1)=0, f'(1)=-2$

求 $\lim_{x\rightarrow 0}\frac{xf(\cos x)}{e^{\tan x}-e^{\sin x}}$

导数与微分-第三页

二、高阶导数计算

基本函数的高阶导数

请计算以下函数的 n 阶导数：

- 1. $y=x^\alpha$
- 2. $y=a^x=e^{x\ln a} (a>0 \wedge a\neq 1)$
- 3. $y=\log_a x=\frac{\ln x}{\ln a} (a>0 \wedge a\neq 1)$
- 4. $y=\sin(x+c)$

基本性质补充

设 f,g 在 x_0 处 n 阶可导，则 $\forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ，有

$(\alpha f(x)+\beta g(x))^{(n)}\Big|_{x=x_0}=\alpha f^{(n)}(x_0)+\beta g^{(n)}(x_0)$

例： 设 $f(x)=\frac{1}{x(x+1)}$ ，求 $f^{(n)}(x)$

① 莱布尼茨法则

$(f(x)g(x))^{(n)}=\sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$

类比 $(x+y)^n=\sum_{k=0}^n C_n^k x^k y^{n-k}$

可以把 $f(x)$ 看成是上式中的x,g(x)看成是上式中的y , k 次看成求 k 阶导数

对于三个函数的情况：

$$(f_1(x)f_2(x)f_3(x))^{(n)} = \sum_{\substack{i+j+k=n \\ i,j,k \geq 0}} \frac{n!}{i!j!k!} f_1^{(i)}(x) f_2^{(j)}(x) f_3^{(k)}(x)$$

有兴趣的同学可以考虑一下任意有限多个函数相乘的情形

例： $f(x) = x^2 e^x$ ，求 $f^{(n)}(x)$

② 欧拉公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

例：若 $f(x) = 2e^x \cos x$ ，求 $f^{(n)}(x)$

解：

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x (e^{ix} + e^{-ix}) \\ &= e^{(1+i)x} + e^{(1-i)x} \\ \therefore f^{(n)}(x) &= (1+i)^n e^{(1+i)x} + (1-i)^n e^{(1-i)x} \\ &= 2^{\frac{n}{2}} e^{i\frac{n\pi}{4}} e^{(1+i)x} + 2^{\frac{n}{2}} e^{-i\frac{n\pi}{4}} e^{(1-i)x} \\ &= 2^{\frac{n}{2}} e^{x+i(x+\frac{n\pi}{4})} + e^{x-i(x+\frac{n\pi}{4})} \\ &= 2^{\frac{n}{2}+1} e^x \frac{e^{i(x+\frac{n\pi}{4})} + e^{-i(x+\frac{n\pi}{4})}}{2} \\ &= 2^{\frac{n}{2}+1} e^x \cos\left(x + \frac{n\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

③ 递推公式

例： $f(x) = (\arcsin x)^2$

1. 证明： $(1-x^2)y'' - xy' = 2$
2. 求 $f^{(n)}(0)$

解：

$$\therefore y = (\arcsin x)^2$$

$$\therefore y' = 2 \cdot \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad y'(0) = 0$$

$$y'' = 2 \left(\frac{x \arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{1-x^2} \right), \quad y''(0) = 2$$

$$\therefore (1-x^2)y'' - xy' = 2$$

$$\therefore ((1-x^2)y'' - xy')^{(n)} = 2^{(n)}$$

$$\therefore (1-x^2)y^{(n+2)} - n \cdot 2xy^{(n+1)} - n(n-1)y^{(n)} - xy^{(n+1)} - ny^{(n)} = 0$$

$$\therefore (1-x^2)y^{(n+2)} - (n+1)xy^{(n+1)} - n^2y^{(n)} = 0$$

代入 $x = 0$ ，得

$$y^{(n+2)}(0) = n^2 y^{(n)}(0)$$

$$\therefore y^{(2m)}(0) = \prod_{i=2}^m \frac{y^{(2i)}(0)}{y^{(2i-2)}(0)} \cdot y''(0) = \prod_{i=2}^m (2i-2)^2 \cdot 2 = 2^{2m-1} \cdot ((m-1)!)^2$$

$$y^{(2m+1)}(0) = \prod_{i=1}^m \frac{y^{(2i+1)}(0)}{y^{(2i-1)}(0)} \cdot y'(0) = 0$$

$$\therefore y^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & n \text{ 为奇数或 } n = 0 \\ 2^{n-1} \cdot \left(\left(\frac{n}{2} - 1\right)!\right)^2, & n \text{ 为正偶数} \end{cases}$$

④ Taylor 展开（在后面）

三、导数应用

① 函数性态分析

<1> 单调性

设 $f(x)$ 在区间 I 上可导

1. 若 $f'(x) \geq 0, \forall x \in I$, 则 $f(x)$ 在 I 上**单调递增**;
若 $f'(x) > 0, \forall x \in I$, 则 $f(x)$ 在 I 上**严格单调递增**。
2. 若 $f'(x) \leq 0, \forall x \in I$, 则 $f(x)$ 在 I 上**单调递减**;
若 $f'(x) < 0, \forall x \in I$, 则 $f(x)$ 在 I 上**严格单调递减**。
3. 若 $f'(x) = 0, \forall x \in I$, 则 $f(x)$ 在 I 上为**常值函数**。

例题：

- 求 $x^4 - 4x + 4e^x = k$ 的不同实根的个数
- 求证 $\ln(x + \sqrt{1+x^2}) \leq \sqrt{1+x^2} - \sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1), \forall x \in \mathbb{R}$

<2> 极值点判断

设 $f(x)$ 在 x_0 处有对应阶数的导数，判断 x_0 是否为极值点的步骤如下：

1. 一阶导数判断：

- 若 $f'(x_0) \neq 0$, 则 x_0 **不是极值点**；
- 若 $f'(x_0) = 0$, 进入二阶导数判断。

2. 二阶导数判断：

- 若 $f''(x_0) > 0$, 则 x_0 是**极小值点**；
- 若 $f''(x_0) < 0$, 则 x_0 是**极大值点**；
- 若 $f''(x_0) = 0$, 进入三阶导数判断。

3. 三阶及更高阶导数判断：

- 若 $f'''(x_0) \neq 0$, 则 x_0 **不是极值点**；
- 若 $f'''(x_0) = 0$, 继续判断更高阶导数，以此类推。

总结规律：

若 n 阶导数 $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, 且 $1 \leq k \leq n-1$ 阶导数均为 0：

- 若 n 为**奇数**, x_0 一定不是极值点；
- 若 n 为**偶数**, $f^{(n)}(x_0) > 0$ 时 x_0 为极小值点, $f^{(n)}(x_0) < 0$ 时 x_0 为极大值点。

<3> 切线

设 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则 f 在 x_0 处的切线满足：

1. 斜率为 $f'(x_0)$
2. 过 (x_0, y_0)

即 $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

<4> 渐近线

两类渐近线：垂直渐近线与斜渐近线

垂直渐近线：

先找间断点，再求间断点处极限

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ ，则 $x = x_0$ 为 $f(x)$ 的垂直渐近线

斜渐近线：

$+\infty$ 处：

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = A, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - Ax = B$ ，则 $y = Ax + B$ 为 $f(x)$ 的一条斜渐近线
(若 A, B 有一者不存在，则 $+\infty$ 处的斜渐近线不存在)

$-\infty$ 处：

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \tilde{A}, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - \tilde{A}x = \tilde{B}$ ，则 $y = \tilde{A}x + \tilde{B}$ 为 $f(x)$ 的一条斜渐近线
(若 \tilde{A}, \tilde{B} 有一者不存在，则 $-\infty$ 处的斜渐近线不存在)

Remark： 如果用无穷小量的语言来写，就是

$f(x) = Ax + B + o(1) \ (x \rightarrow +\infty)$

与 $f(x) = \tilde{A}x + \tilde{B} + o(1) \ (x \rightarrow -\infty)$

例题：

- 求 $y = \sqrt{x^2 + 3x + 2}$ 的渐近线
- 求 $y = \ln(e^x + 1)$ 的渐近线
- 求 $y = \frac{x}{x-1} \sqrt{x^2 + 6x + 10}$ 的渐近线
- 求 $y = e^{\frac{1}{|x|}} \arctan \frac{x}{(x+1)(x-3)^2}$ 的渐近线

<5> 曲率

设 $y = f(x)$ 在 x_0 处二阶可导，则 $y = f(x)$ 在 x_0 处的曲率为

$$\frac{|y''(x_0)|}{(1 + y'^2(x_0))^{\frac{3}{2}}}$$

微分中值定理

一、费马引理

极值点必要条件：

若函数在 x_0 处取到极大/小值且 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则 $f'(x_0) = 0$

反例： $y = |x|$ 在 $x = 0$ 处取极小值，但不可导

(基本不怎么会考，大致记一下就行)

二、三个中值定理

① 罗尔 (Rolle) 中值定理

定理：

设 $f(x) \in C[a, b] \cap D(a, b)$ (题目中可能会加强为 $D[a, b]$)，满足 $f(a) = f(b)$ ，
则 $\exists \xi \in (a, b)$ ，s.t. $f'(\xi) = 0$

补充：广义罗尔定理

设 $f(x) \in D(a, b)$ ， $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = L$ ，
则 $\exists \xi \in (a, b)$ ，s.t. $f'(\xi) = 0$

注： ξ 可能不唯一

证明思路：

考虑 $F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (a, b) \\ L, & x = a, b \end{cases}$ ，

则 $F(x) \in C[a, b] \cap D(a, b)$ ， $F(a) = F(b)$ ，故 $\exists \xi \in (a, b)$ ，s.t. $F'(\xi) = f'(\xi) = 0$

② 拉格朗日 (Lagrange) 中值定理

定理：

设 $f(x) \in C[a, b] \cap D(a, b)$,
则 $\exists \xi \in (a, b)$, s.t. $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

③ 柯西（Cauchy）中值定理

定理：

设 $f(x), g(x) \in C[a, b] \cap D(a, b)$, 且 $\forall x \in (a, b)$, $g'(x) \neq 0$,
则 $\exists \xi \in (a, b)$, s.t. $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

等价形式： $(f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi)$
(上述等价形式的证明不需要 $g'(x) \neq 0$ 的条件)

三、洛必达法则

$\frac{0}{0}$ 型

定理：

若 $f(x), g(x)$ 满足：

- 1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$
- 2. $\exists U^\circ(x_0)$, 使得 $\forall x \in U^\circ(x_0)$, $f(x), g(x)$ 可导且 $g'(x) \neq 0$
- 3. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$, A 为有限数或 $+\infty$, 或 $-\infty$

则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$

$\frac{*}{\infty}$ 型

定理：

若 $f(x), g(x)$ 满足：

- 1. $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$
- 2. $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in \mathring{U}(x_0)$
- 3. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$, A 为有限数或 $+\infty$, 或 $-\infty$

则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

四、拓展定理

① 导函数中心极限定理

设 $f(x) \in C(U(x_0)) \cap D(\mathring{U}(x_0))$
若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = A$
则 $f'(x_0)$ 存在且 $f'(x_0) = A$

② 导函数介值性定理

若 $f(x) \in D[a, b]$, 则 $\forall \eta$ 介于 $f'_+(a)$ 和 $f'_-(b)$
 $\exists \xi \in [a, b]$, s.t. $f'(\xi) = \eta$

五、泰勒（Taylor）公式

① 佩亚诺（Peano）型余项

设 $f(x)$ 在 x_0 处 n 阶可导, 则

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \ (x \rightarrow x_0)$$

② 拉格朗日（Lagrange）型余项

设 $f(x) \in C^n[a, b] \cap D^{n+1}(a, b), \forall x, x_0 \in [a, b],$
 $\exists \xi$ 介于 x 与 x_0 之间, s.t.

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

③ 柯西 (Cauchy) 型余项

设 $f(x) \in C^n[a, b] \cap D^{n+1}(a, b), \forall x, x_0 \in [a, b],$
 $\exists \xi$ 介于 x 与 x_0 之间, s.t.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} (x - \xi)^n (x - x_0)$$

④ 积分型余项

设 $f(x) \in C^n[a, b], \forall x \in [a, b],$ 则

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n)}(t) (x - t)^n dt$$

六、泰勒展开的唯一性

★**Remark:** Taylor 多项式系数具有唯一性
设 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 处有定义, 且 $\exists a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$
s.t. $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$
则系数 a_0, a_1, \dots, a_n 是唯一的, 且 $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$

后续许多处理手法都依赖于 Taylor 展开的唯一性

七、常见的泰勒公式 (以 Peano 余项为例)

★ $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \quad (x \rightarrow 0)$

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \quad (x \rightarrow 0)$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \quad (x \rightarrow 0)$

$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6) \quad (x \rightarrow 0)$

★ $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) \quad (x \rightarrow 0)$

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \quad (x \rightarrow 0)$

$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^n) \quad (x \rightarrow 0)$

$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) \quad (x \rightarrow 0)$

八、泰勒公式的记忆技巧

Tips:
① 记住 e^x 与 $(1+x)^\alpha$, 其他可通过两个现推

简单记住两个规律:

① **导数关系:**
若 $f'(x) = g(x)$, 记 $f(x)$ 、 $g(x)$ 对应的 Taylor 多项式为 $P_n(x; f), P_n(x; g)$
则 $P'_n(x; f) = P_{n-1}(x; g)$
简而言之, Taylor 多项式有继承求导关系

② **奇偶性分离:**
若 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2m-1}x^{2m-1} + a_{2m}x^{2m} + o(x^{2m+1}) \quad (x \rightarrow 0)$

$$\text{则 } \frac{f(x) + f(-x)}{2} = a_0 + a_2x^2 + \cdots + a_{2m}x^{2m} + o(x^{2m+1}) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\frac{f(x) - f(-x)}{2} = a_1x + a_3x^3 + \cdots + a_{2m-1}x^{2m-1} + o(x^{2m}) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\frac{f(ix) + f(-ix)}{2} = a_0 - a_2x^2 + a_4x^4 + \cdots + (-1)^n a_{2m}x^{2m} + o(x^{2m+1}) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\frac{f(ix) - f(-ix)}{2} = i(a_1x - a_3x^3 + a_5x^5 + \cdots + (-1)^n a_{2m-1}x^{2m-1} + o(x^{2m})) \quad (x \rightarrow 0)$$

应用示例：

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n+1}) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{2n-1} + o(x^{2n}) \quad (x \rightarrow 0)$$

(对应项也成导数与积分关系)

$$(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + o(x^n) \quad (x \rightarrow 0)$$

$\arcsin x$ 同理

$\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = \operatorname{arcsinh} x$ 的 Taylor 展开

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\textcircled{2} (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \cdots$$

$$\text{可类比 } (1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2 + \cdots \text{ 进行记背}$$

九、补充：介值性

(1) 定义：

若函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，且满足 $\forall x_1, x_2 \in I, \forall \mu$ 介于 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 之间， $\exists \xi$ 介于 x_1 与 x_2 之间，s.t. $f(\xi) = \mu$ ，则称 $f(x)$ 在区间 I 上有介值性

(2) 性质：

① 若 $f(x)$ 在区间 I 上有介值性

$\forall \alpha, \beta \in I, \forall \lambda \in (0, 1)$

$\exists \xi \in (\alpha, \beta), \text{s.t. } f(\xi) = \lambda f(\alpha) + (1-\lambda)f(\beta)$

若有 3 个点呢？

(3) 常见的有介值性的函数：连续函数、导函数

(4) 何时用介值性，何时用中值定理？

- **介值性**：不涉及求导运算
- **中值定理**：涉及求导运算

应试部分

一、计算

① 求极限

解题步骤：

- **Step1**: 能求极限的部分先求极限（一般非0）
- **Step2**: 能等价无穷小替换的地方先等价无穷小替换（多为乘除运算）
- **Step3**: Taylor展开（展开到哪一项？非零项）
- **Step4**: 洛必达

如果上述办法都没做出来，基本就是夹逼准则或定积分定义

例题：

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x - \sin(\sin x)) \arctan x}{1 - \sqrt{1 - x^4}}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} x - x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})$

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + 3x^3} - 1 + x^4 \cos \frac{1}{x}}{\cos x \ln(1 + 2x) \tan^2 x}$

(5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1 + x)}{x^3}$

(6) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 - x^2 + \frac{x}{2})e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^6 + 1}$

e.g.2 设 $y = f(x)$ 是由方程 $e^{x+y} - 2xy = e$ 所确定的隐函数

(1) 求 $f'(0)$

(2) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(f(x) - 1) \sin(ex)}{\sqrt{1 + 2x^2} - 1}$

e.g.3

$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\arctan \frac{2024}{n} - \arctan \frac{2024}{n+1} \right)$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}$

② 高阶导数（Taylor系数的唯一性）

例题：

- $f(x) = \arctan x$ ，求 $f^{(7)}(0)$
- $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$ ，求 $f^{(6)}(0)$
- 设 $y = f(x)$ 是由隐函数 $x^2 + y = \tan(x - y)$ 确定的隐函数，且 $y(0) = 0$
求 $y(0)$ ， $y''(0)$ (Taylor展开)

③ 渐近线

求 $f(x) = \frac{x^{1+x}}{(x+1)^x}$ 在 $x > 0$ 时的渐近线

二、证明相关

1、单介值点

两大类思路：

① 跟随Rolle定理的思路（更本质）

Rolle定理的证明思路：

- 基本思路：在区间内部找一个最值点，且在这一点可导，利用Fermat引理即可
- Q1：最值点存在性？
- Q2：如何保证在区间内部？

例题：

- 导函数介值性定理的证明**
若 $f(x) \in D[a, b]$ ，且 $f'_+(a) f'_-(b) < 0$
求证： $\exists \xi \in (a, b)$ ，s.t. $f'(\xi) = 0$
- 若 $f(x) \in D[0, +\infty)$ ，且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(0)$
求证： $\exists \xi \in [0, +\infty)$ ，s.t. $f'(\xi) = 0$
- 广义罗尔定理**
设 $f(x) \in D(a, b)$
满足 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$
则 $\exists \xi \in (a, b)$ ，s.t. $f'(\xi) = 0$

② 直接利用Rolle中值定理，找函数值相等的点（可能需多次用Rolle定理）

1) 构造函数

- 如何构造? 积分
- 关键是对哪个函数积分? 把中值点视为变量, 其它参数视为常量

例题:

e.g.1 设 $f(x) \in C[0, 1] \cap D(0, 1)$, $f(1) = 0$

求证: $\exists \xi \in (0, 1)$, s.t. $f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$

e.g.2 设 $f(x) \in C[0, 1] \cap D(0, 1)$, $f(1) = 0$

求证: $\exists \xi \in (0, 1)$, s.t. $2f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0$

e.g.3 Lagrange中值定理的证明

e.g.4 Cauchy中值定理的证明

e.g.5 设 $f \in C[a, b] \cap D(a, b)$, $f(a) = 0$

求证: $\exists \xi \in (a, b)$, $f(\xi) = \frac{b-\xi}{a} f'(\xi)$

e.g.6 设 $f(x) \in C[0, 1] \cap D(0, 1)$, $f(0) = 0$, $f(\frac{1}{2}) = 1$, $f(1) = \frac{1}{2}$

求证: $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\exists \xi \in (0, 1)$, s.t. $f(\xi) + \alpha(f(\xi) - \xi) = 1$

e.g.7 若 $f(x) \in C[a, b] \cap D(a, b)$, $f(a) = f(b) = 0$

求证: $\exists \xi \in (a, b)$, s.t. $f(\xi) + f'(\xi) = 0$

【Tips: $(f(x)e^{g(x)})' = e^{g(x)}(g'(x)f(x) + f'(x))$ 此处只是提供一种可能构造】

e.g.8 设 $f(x) \in C[0, 2] \cap D(0, 2)$, $f(0) = 0$, $f(1) = 3$, $f(2) = -1$

求证:

(1) $\exists \xi \in (0, 2)$, s.t. $f'(\xi) = 0$

(2) $\exists \eta \in (0, 2)$, s.t. $f(\eta) + f'(\eta) = 0$

② 多阶导数

例题:

e.g. 设 $f(x) \in D^3[0, 1]$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-1}{x-1} = 0$

求证: $\exists \xi \in (0, 1)$, s.t. $f'''(\xi) = 0$

e.g. 设 $f(x) \in D^3[0, 1]$, $f(1) = 0$, $F(x) = x^3 f(x)$

求证: $\exists \xi \in (0, 1)$, s.t. $F'''(\xi) = 0$

通过适当地构造函数, 可以增加一些初值条件

e.g. $f(x) \in D^2[0, 1]$, $f(0) = f(1)$

求证: $\exists \xi \in (0, 1)$, s.t. $f''(\xi) = \frac{2f'(\xi)}{1-\xi}$

在积分的时候, 可以适当配凑由常数项多次积分所形成的多项式的系数

三、高阶导数证明技巧

e.g. 设 $f \in D^3[-1, 1]$, $f(-1) = 0$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$

证明: $\exists \xi \in (-1, 1)$, s.t. $f'''(\xi) = 3$

证明:

令 $P(x) = (1-x^2)f(0) + \frac{x+x^2}{2} + \frac{1}{2}(x^3-x) = (1-x^2)f(0) + \frac{x+x^3}{2}$

令 $g(x) = f(x) - P(x)$, 则 $g(x) \in D^3[-1, 1]$

且

$g'(x) = f'(x) - P'(x) = f'(x) + 2xf(0) - \frac{2x+3x^2}{2}$

$g''(x) = f''(x) + 2f(0) - \frac{2+6x}{2} = f''(x) + 2f(0) - 1 - 3x$

$g'''(x) = f'''(x) - 3$

注意到 $g(-1) = g(0) = g(1) = 0$, $g'(0) = 0$

$\therefore \exists \xi_1 \in (-1, 0)$, $\xi_2 \in (0, 1)$

s.t. $g'(\xi_1) = g'(\xi_2) = 0$

$$\begin{aligned} \because g'(\xi_1) &= g'(\xi_2) = g'(0) = 0 \\ \therefore \exists \xi_3 \in (\xi_1, 0), \xi_4 \in (0, \xi_2) \\ \text{s.t. } g''(\xi_3) &= g''(\xi_4) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \exists \xi \in (\xi_3, \xi_4) &\subset (-1, 1) \\ \text{s.t. } g'''(\xi) &= 0 \\ \text{即 } f'''(\xi) &= 3 \end{aligned}$$

有些时候，出题人已经帮你构造好了

$$\begin{aligned} \textbf{e.g.} \text{ 设 } f \in D^3[0, 1], \text{ 满足 } f(0) &= -1, f'(0) = 0, f(1) = 0 \\ \text{证明: } \forall x \in [0, 1], \exists \theta \in (0, 1), \\ \text{s.t. } f(x) &= -1 + x^2 + \frac{x^2(x-1)}{6} f'''(\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textbf{证明:} \\ \forall x_0 \in [0, 1], \text{ 令 } K \text{ 为满足下式的常量 (} K \text{ 值法)} \end{aligned}$$

$$f(x_0) = -1 + x_0^2 + \frac{x_0^2(x_0 - 1)}{6} K$$

$$\begin{aligned} \text{令 } g(x) &= f(x) + 1 - x^2 - \frac{x^2(x-1)}{6} K \\ \text{则 } g(x) \in D^3[0, 1], \quad g'(x) \in D^2[0, 1], \quad g''(x) \in D[0, 1] \\ g'(x) &= f'(x) - 2x - \left(\frac{x^2}{6} + \frac{2x(x-1)}{6}\right) K = f'(x) - 2x + \frac{3x^2-2x}{6} K \\ g''(x) &= f''(x) - 2 - \frac{6x-2}{6} K \\ g'''(x) &= f'''(x) - K \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{注意到 } g(0) &= g(1) = g(x_0) = 0, \quad g'(0) = 0 \\ \therefore g \in D^3[0, 1] \\ \therefore \exists \xi_1 \in (0, x_0), \xi_2 \in (x_0, 1) \\ \text{s.t. } g'(\xi_1) &= g'(\xi_2) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore g' \in D^2[0, 1], \quad g'(0) &= g'(\xi_1) = g'(\xi_2) = 0 \\ \therefore \exists \xi_3 \in (0, \xi_1), \xi_4 \in (\xi_1, \xi_2) \\ \text{s.t. } g''(\xi_3) &= g''(\xi_4) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore g'' \in D[0, 1] \\ \therefore \exists \theta \in (\xi_3, \xi_4) \in (0, 1) \\ \text{s.t. } g'''(\theta) &= f'''(\theta) - K = 0 \\ \therefore f'''(\theta) &= K \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \forall x \in [0, 1], \exists \theta \in (0, 1), \\ \text{s.t. } f(x) &= -1 + x^2 + \frac{x^2(x-1)}{6} f'''(\theta) \end{aligned}$$

Taylor展开与函数介值性应用

一、适用场景与基本方法

适用场景：

- ① 只有一个介值
- ② 多项式情形
- ③ 仅有一点有连续的高阶导数值，且这一点不是边界点
- ④ 问n阶导，一般要知道0,1,2,⋯,n-1阶导的初值但不要求全知道，部分导数信息可通过代数变形消掉

方法本质：

此类方法所适用的题目本质是为了简化书写。此处介绍的方法是一种微分中值工具：Taylor公式,同时让同学们体会一下Taylor公式的应用。

Taylor公式：

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

做题关键：

- **在哪一点进行展开？**（有高阶导数的那点）
- **展开到第几项？**（介值对应的导数阶数）

- 对哪些点在该处展开? (一般来说题目中的所有点)

二、单介值点问题

e.g.1

设 $f \in D^2[0, 1]$, $f(0) = f(1) = 0$, $\min_{0 \leq x \leq 1} f(x) = -1$,

求证: $\exists \xi \in (0, 1)$, $f''(\xi) \geq 8$

证明:

$\because f \in D^2[0, 1]$

$\therefore f \in C[0, 1]$

$\exists c \in (0, 1)$, $\forall x \in [0, 1]$, $f(x) \geq f(c)$

(思考一下为什么c不能是0或1)

即 $f(c) = \min_{0 \leq x \leq 1} f(x) = -1$

则 $f'(c) = 0$

对 $x \in \{0, 1\}$, 在 $x = c$ 处进行展开

$\exists \xi_1 \in (0, c)$, $\xi_2 \in (c, 1)$

$$f(0) = f(c) + f'(c)(0 - c) + \frac{f''(\xi_1)}{2}(0 - c)^2$$

$$f(1) = f(c) + f'(c)(1 - c) + \frac{f''(\xi_2)}{2}(1 - c)^2$$

化简, 得

$$f''(\xi_1) = \frac{2}{c^2}$$

$$f''(\xi_2) = \frac{2}{(1 - c)^2}$$

$$\therefore \frac{f''(\xi_1) + f''(\xi_2)}{2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{(1 - c)^2} \geq 8$$

由介值性, 知

$$\exists \xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (0, 1), \text{ s.t. } f''(\xi) = \frac{f''(\xi_1) + f''(\xi_2)}{2}$$

e.g.3.2

设 $f(x) \in C[a, b] \cap D^2(a, b)$,

求证:

$\forall x \in (a, b)$, $\exists \xi \in (a, b)$

$$\text{s.t. } f(x) = \frac{x-a}{b-a}f(b) + \frac{x-b}{a-b}f(a) + \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)$$

证明:

$\forall x_0 \in (a, b)$

对 $x = a$, $x = b$ 在 $x = x_0$ 处进行展开

$\exists \xi_1 \in (a, x_0)$, $\xi_2 \in (x_0, b)$

$$f(a) = f(x_0) + f'(x_0)(a - x_0) + \frac{f''(\xi_1)}{2}(a - x_0)^2 \quad ①$$

$$f(b) = f(x_0) + f'(x_0)(b - x_0) + \frac{f''(\xi_2)}{2}(b - x_0)^2 \quad ②$$

原题中没有给出 $f'(x_0)$ 的值, 我们尝试将它消去

① $\times(b - x_0) + ② \times(x_0 - a)$, 有

$$(b - x_0)f(a) + (x_0 - a)f(b) = f(x_0)(b - a) + \frac{f''(\xi_1)}{2}(a - x_0)^2(b - x_0) + \frac{f''(\xi_2)}{2}(b - x_0)^2(x_0 - a)$$

即

$$f(x_0) = \frac{x_0 - b}{a - b} f(a) + \frac{x_0 - a}{b - a} f(b) + \frac{(x_0 - a)(x_0 - b)}{2} \left(\frac{a - x_0}{a - b} f''(\xi_1) + \frac{x_0 - b}{a - b} f''(\xi_2) \right)$$

(此处化简是为了追求原题中的形式)

由导函数介值性知

$$\exists \xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (a, b), \text{ s.t. } \frac{a-x_0}{a-b} f''(\xi_1) + \frac{x_0-b}{a-b} f''(\xi_2) = f''(\xi)$$

此时已证毕

e.g.

$$f(x) \in D^2[a, c] \text{ 且 } a < b < c$$

求证: $\exists \xi \in (a, c)$

$$\text{s.t. } \frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(b-c)(b-a)} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)} = \frac{1}{2} f''(\xi)$$

三、多介值点问题

1) 没有要求介值点互异 (Cauchy中值定理)

e.g.

$$\text{设 } f(x) \in C[a, b] \cap D(a, b) \text{ 且 } a > 0$$

$$\text{求证: } \exists \xi, \eta \in (a, b), \text{ s.t. } f'(\xi) = (a+b) \cdot \frac{f'(\eta)}{2\eta}$$

e.g.

$$\text{设 } f(x) \in C[a, b] \cap D(a, b), \quad 0 < a < b < \frac{\pi}{2}$$

求证:

$$\exists \xi, \eta \in (a, b), \text{ s.t. } f'(\eta) \tan \frac{a+b}{2} = f'(\xi) \cdot \frac{\sin \eta}{\cos \xi}$$

2) 要求介值点互异

一般都是一阶导数且要求介值点互异。关键在于配凑或插入点 (虽说大部分情况下都已经配凑好了)。

解题步骤:

- **Step1:** 将同一个值点的归到一边, 用Cauchy中值/Lagrange中值/数列原来找
- **Step2:** 配凑插入点

$$\text{e.g. 设 } f(x) \in C[0, 1] \cap D(0, 1), \quad f(0) = 0, \quad f(1) = 1$$

求证:

$$(1) \exists c \in (0, 1), \text{ s.t. } f(c) = \frac{3}{2023}$$

$$(2) \exists \xi \neq \eta \in (0, 1), \text{ s.t. } \frac{3}{f'(\xi)} + \frac{2020}{f'(\eta)} = 2023$$

$$\text{e.g. 设 } f(x) \in C[0, 1] \cap D(0, 1), \quad f(0) = 0, \quad f(1) = 1$$

求证:

$$(1) \exists c \in (0, 1), \text{ s.t. } f(c) = 1 - c$$

$$(2) \exists \xi \neq \eta \in (0, 1), \text{ s.t. } f'(\xi) \cdot f'(\eta) = 1$$

四、介值点极限相关

(这种题说白了就是一种题, 实在不行直接背过程都行)

$$\text{e.g. 设 } f(x) \in C^2(U(a)), \text{ 且 } f''(a) \neq 0$$

$$\forall h \in \dot{U}(a), \text{ 有 } f(a+h) = f(a) + f'(a+\theta_h h) \cdot h$$

$$\text{求证: } \lim_{h \rightarrow 0} \theta_h = \frac{1}{2}$$

$$\text{e.g. 设 } f(x) \text{ 在点 } a \text{ 处二阶可导, 且 } f''(a) \neq 0$$

$$\text{则当 } h \text{ 充分小时, 有 } f(a+h) - f(a) = f'(a+\theta_h h) \cdot h$$

$$\text{求证: } \lim_{h \rightarrow 0} \theta_h = \frac{1}{2}$$

$$\text{e.g. 设 } f(x) \in C^n[a, b], \text{ 且 } \forall h \in (0, b-a]$$

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} h^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a+\theta_h h)}{n!} \cdot h^n$$

求证： $\lim_{h \rightarrow 0} \theta_h = \frac{1}{n+1}$

e.g. 设 $f(x) \in C^n[a, b]$, 且 $f^{(k)}(a) = 0 \ (k = 2, 3, \cdots, n-1)$
且 $\forall h \in (0, b-a]$

$$f(a+h) = f(a) + f^{(n)}(a + \theta_h h) \cdot h$$

求证： $\lim_{h \rightarrow 0} \theta_h = \frac{1}{n-1/\sqrt[n]{n}}$

五、导数控制

e.g. 设 $f(x) \in D^2[0, +\infty)$, 且 $|f(x)| \leq a, \ |f''(x)| \leq b, \ \forall x \in (0, +\infty)$
求证：

- ① $\forall x \in (0, +\infty), \ |f'(x)| \leq 2a + \frac{1}{2}b$
- ② $\forall x \in (0, +\infty), \ |f'(x)| \leq 2\sqrt{ab}$

e.g. 设 $f(x) \in D^2(\mathbb{R})$, 且 $\forall x \in (0, +\infty), \ |f(x)| \leq M_0, \ |f''(x)| \leq M_2$
求证： $\forall x \in \mathbb{R}, \ |f'(x)| \leq \sqrt{2M_0M_2}$

e.g. 设 $f(x) \in D^3(\mathbb{R})$, 且 $\forall x \in (0, +\infty), \ |f(x)| \leq M_0, \ |f'''(x)| \leq M_3$
求证： $\forall x \in \mathbb{R}, \ |f'(x)| \leq \frac{\sqrt[3]{9M_0^2M_3}}{2}$

解：

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + \frac{h^3}{6} \cdot f'''(\xi)$$

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 - \frac{h^3}{6} \cdot f'''(\eta)$$

希望消去 $f''(x)$,
两式作差, 得

$$f(x+h) - f(x-h) = 2f'(x)h + \frac{h^3}{6} (f'''(\xi) + f'''(\eta))$$

$$\begin{aligned} \therefore |2f'(x)h| &\leq 2M_0 + \frac{|h|^3}{6} \cdot 2M_3 \\ \therefore |2f'(x)| &\leq \frac{2M_0}{|h|} + \frac{|h|^2}{3} \cdot M_3 \\ \therefore \frac{|h|^2}{3}M_3 + \frac{2M_0}{|h|} &= \frac{|h|^2}{3}M_3 + \frac{M_0}{|h|} + \frac{M_0}{|h|} \geq 3\sqrt[3]{M_0^2 \cdot \frac{M_3}{3}} = \sqrt[3]{9M_0^2M_3} \\ \therefore |f'(x)| &\leq \frac{\sqrt[3]{9M_0^2M_3}}{2} \end{aligned}$$

函数凹凸性与拐点

一、凹函数定义

(1) 定义

设 $f(x)$ 在 (a, b) 上可导, 且曲线 $y = f(x)$ 都在曲线上任意一点的上方, 则称函数 $f(x)$ 在 (a, b) 上是凹的。

(2) 等价刻画

$f(x)$ 在 (a, b) 上是凹的等价于以下叙述：

1. 割线定义：

若 $f(x)$ 在 (a, b) 上可导, 且 $\forall x, y \in (a, b), \ \lambda \in (0, 1)$, 均有 $f(\lambda x + \lambda y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$

2. 割线斜率单调性：

$f(x)$ 在 (a, b) 上可导, 且 $\forall x, y, z \in (a, b), \ x < y < z$, 有

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} < \frac{f(x) - f(z)}{x - z} < \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

3. 切线斜率单调性：

$f(x)$ 在 (a, b) 上可导，且 $f'(x)$ 在 (a, b) 上单调递增。

(3) 二阶导判定

若 $f(x)$ 在 (a, b) 上二阶可导，
则 $f''(x) > 0 \iff f(x)$ 在 (a, b) 上是凹的。

(4) 几何直观

若 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的下凸函数，则满足下列非单调情形之一：

- ① $f(x)$ 在 $[a, b]$ 递减
- ② $f(x)$ 在 $(a, b]$ 递增
- ③ $\exists c \in [a, b]$ ，使得 $f(x)$ 在 (a, c) 递减，在 (c, b) 递增

二、凹凸性应用例题

e.g. 设 $f(x)$ 为凹函数， $\forall x, y \in [a, b]$ ， $x + y = a + b$ ，有

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

e.g. 哈达马（Hadamard）不等式

若 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的下凸函数，则

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

三、拐点

1)定义

设 $f(x) \in D(U(x_0))$ ，若 x_0 是 $f(x)$ 凹与凸的分界点，
则称 $x = x_0$ 为 $y = f(x)$ 的拐点。

Remark：

若 $f(x)$ 连续，其实在大多数情况下，可以简单地将拐点视为 $f'(x)$ 的极值点。

2)必要条件

若 $f(x) \in D^2(U(x_0))$ ，且 $(x_0, f(x_0))$ 为 $y = f(x)$ 的拐点，则 $f''(x_0) = 0$

3)充分条件

若 $f(x) \in D^2(U(x_0))$ ，且 $f''(x_0) = 0$ ， $f''(x)$ 在 x_0 两侧异号，则 $(x_0, f(x_0))$ 为 $y = f(x)$ 的拐点