$\mathbb{R}^n$上的重积分

from：pcz

一般地，我们讨论多元函数的积分，称为重积分

如果要讨论向量值映射的积分，只需对各分量函数建立积分，再把这些积分的结果排成向量即可

建立重积分

把区间长度推广到广义体积

> 积分是要建立一种关于数的累积的运算，因此对于$\mathbb{R}^n$中的点集，要建立一种合适的概念：用数来刻画点集的某种属性，以此建立定义在某个点集上的函数的$Riemann$积分

$\mathbb{R}^n$中集合的测度（广义体积），$n=1,2,3$时有我们熟悉的长度、面积、体积情形，但仍有推广

如同我们在教材中看到的，我们为$\mathbb{R}^n$中的点集建立了$Jordan$测度（教材以$\mathbb{R}^2$（平面点集）为例,称为面积），以此建立起了多元函数的$Riemann$积分

> 为了叙述的统一，对$\mathbb{R}^n$中点集的这个概念，均称为“体积”
>
> 有界点集D可求体积$\Longleftrightarrow$边界∂D体积为0

以下列出几条$\mathbb{R}^2$中的结论，对于$\mathbb{R}^n$，把边界由曲线变成高维曲面，则不难类比

> 光滑曲线段（参数表达C^1，正则（导数非零)$\Longrightarrow$可求长曲线段$\Longrightarrow$面积为0的曲线段
>
> 边界∂D由有限条可求长曲线段组成的有界区域D可求面积
>
> 以分段光滑曲线为边界的有界区域可求面积

> 注意,光滑是指满足两个条件：一般设其有参数表示
>
> - 参数表达C^1
> - 正则，即导数非零

定义 7.4.1 若$x'(t)$和$y'(t)$在$[T_1,T_2]$上连续，且$[x'(t)]^2+[y'(t)]^2\neq 0$，则由参数方程

$$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases}\quad t\in[T_1,T_2]$$

确定的曲线称为**光滑曲线**.

定理 7.4.1（弧长公式） 若由参数方程

$$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases}\quad t\in[T_1,T_2]$$

确定的曲线是光滑曲线，则它是可求长的，其弧长为

$$l=\int_{T_1}^{T_2}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t.$$

$Riemann$定积分如何建立

一维情形考虑有界闭区间$[a,b]$上函数的$Riemann$定积分，且要求被积函数有界

在高维多元函数情形中，积分区域考虑零边界的有界闭区域

办法仍旧是分割—作和—取极限，只不过原来的小区间长度变成了小区域的“面积/体积”

类比地，可以得到相应的$Darboux$理论、R可积的条件和R积分的相应性质

> 在高维，这些理论建立起来相当繁琐且冗杂，且有很多细节不容易说清楚，这些可以当作是$Riemann$积分理论的缺陷，我们不必纠结于这些证明。
>
> 如有兴趣，以后可以学习$Lebesgue$积分理论，L积分会把$\mathbb{R}^n$上的积分理论（包括所谓反常积分）统一、清晰地建立起来，$Riemann$积分情形被包含进其中

计算重积分

转化为累次积分

一元函数的定积分计算是我们熟悉的，它的计算通过$Newton-Leibniz$公式是非常容易计算的

如果我们可以把重积分计算分部进行，每次都当成一元函数定积分的计算，那么问题就解决了

这就是重积分计算中最常用的办法：把**重积分**运算变为**累次积分**运算

先考虑积分区域是规则的闭矩体

> Thm（$Fubini$）
>
> 设
>
> - 闭矩体$D=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times...\times[a_n,b_n]\subset\mathbb{R}^n$
> - $f(x_1,x_2,...,x_n)\in R(D)$
> - 且任意固定m个分量，f作为其余$n-m$个分量的函数，在D的截面上$Riemann$可积，
>
> 则
>
> - 该重积分可以任意地作有意义的累次积分、低维重积分或两者混合，并且结果相等

因高维的连续函数限制低维一定连续，而零边界有界闭区域上的连续函数必然$Riemann$可积，故有如下推论

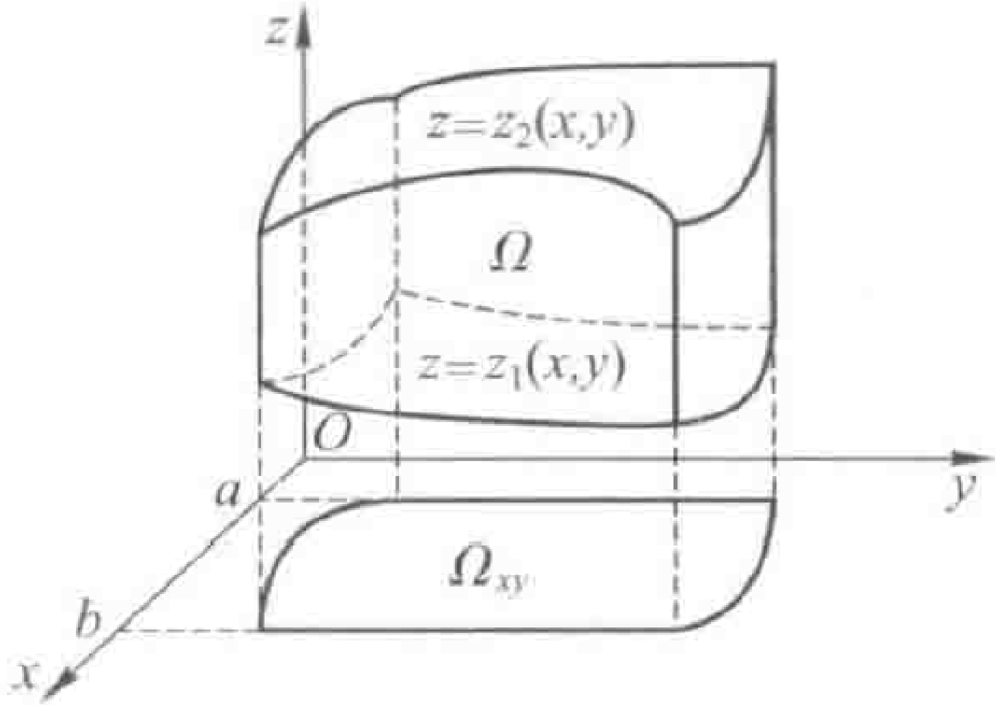
> $Corollary$
>
> 设$f(x_1,x_2,...,x_n)\in C(D)$,闭矩体$D=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times...\times[a_n,b_n]\subset\mathbb{R}^n$，则下式成立：
>
> $\int...\int_D f(x_1,x_2,...,x_n)dx_1dx_2...dx_n$
> $=\int_{a_1}^{b_1}dx_1\int_{a_2}^{b_2}dx_2...\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}}dx_{n-1}\int_{a_n}^{b_n}f(x_1,x_2,...,x_n)dx_n$
> $=\iint_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]}dx_1dx_2...\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}}dx_{n-1}\int_{a_n}^{b_n}f(x_1,x_2,...,x_n)dx_n$
> $=\int_{a_1}^{b_1}dx_1\int_{a_2}^{b_2}dx_2...\iint_{[a_{n-1},b_{n-1}]\times[a_n,b_n]}f(x_1,x_2,...,x_n)dx_{n-1}dx_n$

> 关于符号：
>
> 积分微元可以省略，如$dx_1dx_2...dx_n$可以不写，也可以只写成dx

> 重积分号也可以只写一条,如$\int ... \int$可以写成$\int$
>
> 重要的是把积分区域标注清楚

对于一般区域上的重积分与累次积分的关系，以三维情形给出示例

> 设
>
> - $\Omega=\{(x,y,z)|z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y),y_1(x)\le y\le y_2(x),a\le x\le b\}$
> - $f(x,y,z)\in C(\Omega)$，且$z_1(x,y),z_2(x,y),y_1(x),y_2(x)$都连续
>
> 则
>
> $\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz$
>
> $=\iint_{\Omega_{xy}}dxdy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)dz$
>
> $=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)dz$
>
> $=\int_e^f dz\iint_{\Omega_z}f(x,y,z)dxdy$
>
> 其中$\Omega_{xy}=\{(x,y)|y_1(x)\le y\le y_2(x),a\le x\le b\}$为区域$\Omega$在$xy$平面的投影
>
> 而Ω_z是Ω关于分量z的截面，e,f是Ω在z方向上投影的边界



变量替换

变量代换也即**换元法**，一般的换元是将被积函数变成与积分区域贴合的可以**分离变量**的形式，这样才容易转化为累次积分进行计算

> 一般地，变量替换前后的自变量数目是相等的，并且希望变量替换关系是同胚映射（双射，映射和逆映射均连续），并且正则（$Jacobi$行列式非零）、连续可微（映射是C^1的，即各个偏导数存在且连续）

> 当然，在某些地方变换不具备这么良好的性质也是可以允许的

设 U 为 $\mathbf{R}^n(n>2)$ 上的开集，映射

$$T: y_1 = y_1(x_1,x_2,\cdots,x_n), y_2 = y_2(x_1,x_2,\cdots,x_n), \cdots, y_n = y_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

将 U 一一对应地映到 $V \subset \mathbf{R}^n$ 上，因此它有逆变换 T^{-1}. 进一步假设 $y_1 = y_1(x_1,x_2,\cdots,x_n), y_2 = y_2(x_1,x_2,\cdots,x_n), \cdots, y_n = y_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 都具有连续偏导数，而且这个映射的Jacobi行列式不等于零.

设 Ω 为 U 中具有分片光滑边界的有界闭区域，则与二维情形类似的有结论：

定理 13.3.2 映射 T 和区域 Ω 如上假设. 如果 $f(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 是 $T(\Omega)$ 上的连续函数，那么变量代换公式

$$\int_{T(\Omega)} f(y_1,y_2,\cdots,y_n)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\cdots\mathrm{d}y_n = \int_{\Omega} f(y_1(\boldsymbol{x}),y_2(\boldsymbol{x}),\cdots,y_n(\boldsymbol{x}))\left|\frac{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_n)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}\right|\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

成立，其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.

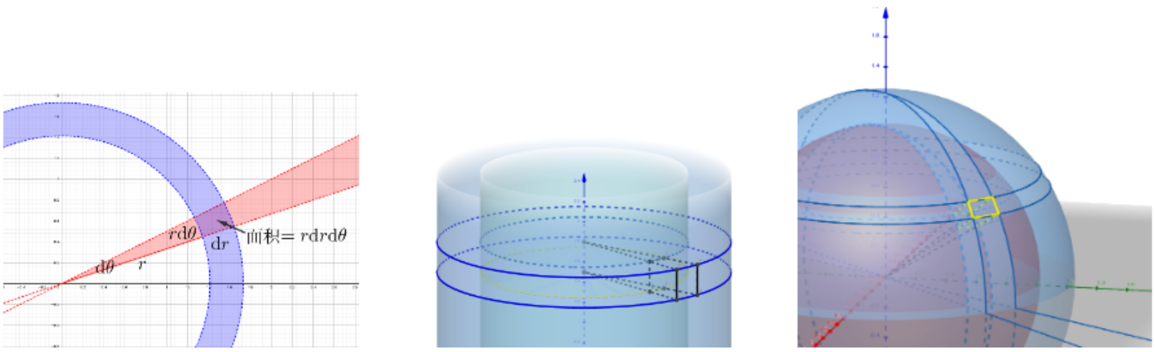
> 定理的证明不用理会，只需要从微元的角度理解$Jacobi$行列式的绝对值称为一个面积伸缩的因子，而等式两边的积分区域也要对应变换

对于初学者，下面的事情很容易搞混，可以慢慢体会

> 本质上，等式两边被积函数、积分区域都已经不同了，它们只是对应有定积分值相等的关系
>
> 我们所做的积分，其实都是对定义在$\mathbb{R}^n$一个子集上的函数进行的，数学上展开的场地都是$\mathbb{R}^n$
>
> 正如我想说的，整个数学分析研究的都是数集、点集及其映射关系，积分作为运算完全是数的结果，一切图形、几何、形状都仅仅是微积分的几何意义，是数学分析理论的一种应用场景

> 而后面常说的"坐标系"，只是代表常用的换元方法，"坐标系"的概念不是积分的实质
>
> 如果你愿意，可以认为一切积分都是在$\mathbb{R}^n$上天然的直角坐标里进行的，而例如所做的球坐标变化，是把积分区域从直角坐标里的一个"球"，映射成了直角坐标里的一个长方体。

常用的三种变换



平面极坐标变换

$$\begin{cases} x = r\cos\ \theta \\ y = r\sin\ \theta \end{cases} \quad 0 \le r < +\infty, 0 \le \theta \le 2\pi$$

$$det\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = det\begin{bmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta\end{bmatrix} = r$$

球坐标变换

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \quad 0 \le r < +\infty, 0 \le \theta \le \pi, 0 \le \phi \le 2\pi$$

$$det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)} = det\begin{bmatrix}\sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0\end{bmatrix} = r^2\sin\theta$$

柱坐标变换

$$\begin{cases} x = rcos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \quad 0 \le r < +\infty, 0 \le \theta \le 2\pi, -\infty < z < +\infty$$

$$det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = det\begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = r$$

反常重积分

$\mathbb{R}^n$上的广义积分同样分为**无穷积分**和**瑕积分**

在此我们不去仔细研究反常重积分的存在性，而是直接计算其结果

一般地，若能够计算得到一个有限值，便认为这是反常可积的

而在计算时，我们承认**累次积分**和**变量替换**这两种方法对反常积分同样适用

> 如果考虑$Lebesgue$积分理论，$Riemann$积分中的所谓反常积分被归纳进了整个L积分理论的框架中，那里对于积分理论的讨论更全面，也不会如此冗杂