因此,分别考虑该级数奇次项和偶次项构成的两个幂级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k-1}}{2k-1}x^{2k-1}$ 和 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4^{2k}}{2k}x^{2k}$.

容易求得幂级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k-1}}{2k-1}x^{2k-1}$ 的收敛半径 $R_1=\frac{1}{2}$,而幂级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4^{2k}}{2k}x^{2k}$ 的收敛半径 $R_2=\frac{1}{4}$,则原幂级数收敛半径为$\frac{1}{4}$.

当 $x=\pm\frac{1}{4}$ 时,$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k-1}}{2k-1}x^{2k-1}$ 收敛,$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4^{2k}}{2k}x^{2k}$ 发散,则原幂级数发散,故原幂级数收敛域为$(-\frac{1}{4},\frac{1}{4})$.

【例 2】 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=0$ 收敛,在 $x=2$ 发散,则该幂级数收敛域为________.

解 由于幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=0$ 处收敛,在 $x=2$ 处发散,由阿贝尔定理知当 $|x-1|<|0-1|$,即 $|x-1|<1$,原幂级数收敛;当 $|x-1|>|2-1|$,即 $|x-1|>1$,原幂级数发散.则该幂级数收敛域为$[0,2)$.

【例 3】 设 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{n}$ 在 $x=-2$ 处条件收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty}n^2(x-a)^n$ 在 $x=\ln\frac{1}{2}$ 处

(A) 绝对收敛.　　(B) 条件收敛.

(C) 必发散.　　(D) 敛散性由 a 确定.

解 应选(A).

显然 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{n}$ 的收敛半径为 1. 由 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{n}$ 在 $x=-2$ 处条件收敛知,$a=-3$ 或 $a=-1$,但 $a=-3$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{n}$ 在 $x=-2$ 处条件收敛矛盾,则 $a=-1$. 而 $\sum_{n=1}^{\infty}n^2(x-a)^n=\sum_{n=1}^{\infty}n^2(x+1)^n$ 的收敛半径为 1,收敛区间为$(-2,0)$,又 $\ln\frac{1}{2}\in(-2,0)$,则 $\sum_{n=1}^{\infty}n^2(x-a)^n$ 在 $x=\ln\frac{1}{2}$ 处绝对收敛.

题型二　将函数展开为幂级数

常用方法:

1) 直接展开法　　2) 间接展开法

一般都是用间接展开法.

【例 1】 将下列函数展开为 x 的幂级数.

(1) $f(x)=\frac{3x}{2+x^2}$;

(2) $f(x)=\frac{12-5x}{6-5x-x^2}$;

(3) $f(x)=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$;

(4) $f(x)=x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}$;

(5) $f(x)=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{1}{2}\arctan x-x$;

(6) $f(x)=\ln(1-x-2x^2)$;

(7) $f(x)=\ln(1+x+x^2+x^3+x^4)$.

解

(1) $f(x)=\dfrac{3x}{2}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{x^2}{2}}=\dfrac{3x}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\dfrac{x^2}{2})^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n3x^{2n+1}}{2^{n+1}},x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

(2) $$f(x)=\frac{6}{x+6}-\frac{1}{x-1}=\frac{1}{1+\dfrac{x}{6}}+\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{x}{6})^n+\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{(-1)^n}{6^n}+1)x^n,x\in(-1,1).$$

(3) $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{2n},x\in(-1,1)$.

$$f(x)-f(0)=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(-1)^nt^{2n}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{2n+1},$$

又 $f(0)=\arctan 1=\dfrac{\pi}{4}$,则 $f(x)=\dfrac{\pi}{4}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^nx^{2n+1}}{2n+1},x\in[-1,1)$.

(4) $\arctan x=\displaystyle\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\int_0^x(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nt^{2n})\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{2n+1}$,

$$\ln\sqrt{1+x^2}=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n},$$

则 $$f(x)=x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n+2}}{2n+1}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)},x\in[-1,1].$$

(5) $f(x)=\dfrac{1}{4}(\ln(1+x)-\ln(1-x))+\dfrac{1}{2}\arctan x-x$,

$$f'(x)=\frac{1}{4}(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x})+\frac{1}{2(1+x^2)}-1=\frac{1}{1-x^4}-1=\sum_{n=1}^{\infty}x^{4n},$$

$$f(x)=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t+f(0)=\int_0^x(\sum_{n=1}^{\infty}t^{4n})\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1},x\in(-1,1).$$

(6) $$f(x)=\ln[(1+x)(1-2x)]=\ln(1+x)+\ln(1-2x)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(-2x)^n}{n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}[1+(-2)^n]x^n}{n},x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}).$$

(7) $f(x)=\ln(1+x+x^2+x^3+x^4)=\ln\dfrac{1-x^5}{1-x}=\ln(1-x^5)-\ln(1-x)$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(-x^5)^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(-x)^n}{n}$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{5n}}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},x\in[-1,1).$$

【例 2】 将下列函数在指定点处展开为幂级数.

(1) $f(x)=\sin x$ 在 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 处；　(2) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$ 在 $x=1$ 处；

(3) $f(x)=\dfrac{1}{(x+2)^2}$ 在 $x=-1$ 处.

解 (1) $f(x)=\sin x=\sin[(x-\frac{\pi}{4})+\frac{\pi}{4}]=\frac{\sqrt{2}}{2}[\sin(x-\frac{\pi}{4})+\cos(x-\frac{\pi}{4})]$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-\frac{\pi}{4})^{2n+1}}{(2n+1)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-\frac{\pi}{4})^{2n}}{(2n)!}\right],x\in(-\infty,+\infty).$$

(2) $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{2+(x-1)}-\dfrac{1}{3+(x-1)}$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-1}{2}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-1}{3}}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{x-1}{2})^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{x-1}{3})^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}})(x-1)^n\quad(-1<x<3).$$

(3) $f(x)=-\left(\dfrac{1}{x+2}\right)'=-\left(\dfrac{1}{1+(x+1)}\right)'=-(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x+1)^n)'$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n(x+1)^{n-1}\quad(-2<x<0).$$

【例 3】 将 $f(x)=x^2\ln(1+x)$ 展开为 x 的幂级数，并求 $f^{(n)}(0)(n>2)$.

解 $\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n},x\in(-1,1)$，则

$$f(x)=x^2\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{n+2}}{n}$$

于是 $x^n(n>2)$ 项系数 $a_n=\dfrac{(-1)^{n-3}}{n-2}=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n-2}$，从而有 $\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n-2}$，即 $f^{(n)}(0)=\dfrac{(-1)^{n-1}n!}{n-2}$.

【例 4】 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$，求 $f^{(n)}(0)$.

解 由于 $\sin x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$，则 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$.

于是 $a_{2n}=\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}=\dfrac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!}$,从而 $f^{(2n)}(0)=\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$.

又 $a_{2n+1}=0$,从而 $f^{(2n+1)}(0)=0$.

题型三　级数求和

级数求和常见的是两种问题,幂级数求和及常数项级数求和.

1)幂级数求和的方法:

利用已有的几个展开式($\dfrac{1}{1\pm x}$, e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$)以及幂级数的性质(有理运算,逐项求导,逐项积分)来求幂级数的和函数;

2)常数项级数求和的方法:

求常数项级数的和最常用的方法是借助于幂级数求和. 常见的求和级数形式为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nb^n$,此时,考虑相应的幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$,并求出其和函数 $S(x)$,则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nb^n=S(b)$.

【例 1】 求下列幂级数的和函数

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$.　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$.

(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^2+1}{2^n n!}x^n$.　　(4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n+1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$.

解 (1) 易求得该幂级数收敛域为$[-1,1]$.

令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$, $x\in[-1,1]$. 当 $x=0$ 时,$S(x)=0$.

当 $0<|x|<1$ 时,

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}=-\ln(1-x)-\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$$
$$=-\ln(1-x)-\frac{1}{x}[-\ln(1-x)-x]=1+(\frac{1}{x}-1)\ln(1-x).$$

$$S(-1)=\lim_{x\to(-1)^+}S(x)=1+\lim_{x\to(-1)^+}\left(\frac{1}{x}-1\right)\ln(1-x)=1-2\ln 2$$

$$S(1)=\lim_{x\to1^-}S(x)=1+\lim_{x\to1^-}\left(\frac{1}{x}-1\right)\ln(1-x)=1+\lim_{x\to1^-}(1-x)\ln(1-x)=1$$

故
$$S(x)=\begin{cases}1+(\dfrac{1}{x}-1)\ln(1-x), & -1\leqslant x<1 \text{ 且 } x\neq0\\ 0, & x=0\\ 1, & x=1\end{cases}.$$

【注】 本题用到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}=-\ln(1-x)$,这是一个常用的结论,望读者记住.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{2n-1}}{2}=\dfrac{1}{2}$，则 $R=\sqrt{2}$. 当 $x=\pm\sqrt{2}$ 时，原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2}$ 发散. 则原级数收敛域为$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$，$x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$. 当 $x=0$ 时，$S(x)=\dfrac{1}{2}$.

当 $0<|x|<\sqrt{2}$ 时，

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}=(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2^n})'=(\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2^n})'=(\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x^2}{2})^n)'$$

$$=\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{\frac{x^2}{2}}{1-\frac{x^2}{2}}\right)'=(\frac{x}{2-x^2})'=\frac{2+x^2}{(2-x^2)^2}$$

故 $S(x)=\dfrac{2+x^2}{(2-x^2)^2}$，$x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

(3) $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{n!}(\frac{x}{2})^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!}(\frac{x}{2})^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\frac{x}{2})^n}{n!}$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}(\frac{x}{2})^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}(\frac{x}{2})^n+\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{x^2}{4}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}+\frac{x}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}+\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}=(\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+1)\mathrm{e}^{\frac{x}{2}},x\in(-\infty,+\infty).$$

(4) 易求得该级数收敛域为$(-\infty,+\infty)$.

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(2n+1)!}x^{2n+1}=(\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+2})'$$

$$=(\frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1})'=(\frac{x}{2}\sin x)'$$

$$=\frac{1}{2}(\sin x+x\cos x),x\in(-\infty,+\infty).$$

【例 2】　求下列常数项级数的和.

(1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(n^2-1)2^n}$；

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}$.

解 (1) 令 $S(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2-1}$，$x\in(-1,1)$，则

$$S(x)=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n-1}-\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}=\frac{x}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n-1}-\frac{1}{2x}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$=\frac{x}{2}[-\ln(1-x)]-\frac{1}{2x}[-\ln(1-x)-x-\frac{x^2}{2}]$$

$$=\frac{2+x}{4}+\frac{1-x^2}{2x}\ln(1-x)\quad(|x|<1,x\neq0),$$

故 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(n^2-1)2^n}=S(\dfrac{1}{2})=\dfrac{5}{8}-\dfrac{3}{4}\ln 2.$

(2) $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)(-\frac{1}{2})^n+\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{2})^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{2})^n=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$$

令 $S(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^n,x\in(-1,1)$，则

$$S(x)=x^2\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}=x^2(\sum_{n=0}^{\infty}x^n)''=x^2(\frac{1}{1-x})''=\frac{2x^2}{(1-x)^3},$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)(-\frac{1}{2})^n=S(-\frac{1}{2})=\frac{4}{27}$$

故 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}=\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{27}=\dfrac{22}{27}.$

【例 3】 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$ 的和函数.

解 (方法一) 由于 $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\cdots$，则

$$e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^n}{n!}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\cdots+\frac{(-1)^nx^n}{n!}+\cdots$$

$$e^x+e^{-x}=2(1+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots)=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

故 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}.$

(方法二) 令 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}=1+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\cdots+\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$，则

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}=x+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)}+\cdots$$

$$S(x)+S'(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=e^x$$

解一阶线性微分方程 $S'(x)+S(x)=e^x$ 得 $S(x)=Ce^{-x}+\dfrac{1}{2}e^x.$

由 $S(0)=1$ 知 $C=\dfrac{1}{2}$. 则 $S(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}.$

【例 4】 设 $a_n=\int_0^{n\pi}x\,|\sin x|\,dx(n=1,2,\cdots)$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{2^2}+\cdots+\dfrac{a_n}{2^n}\right).$

解
$$\begin{aligned}a_n&=\int_0^{n\pi}x\,|\sin x|\,dx\quad(x=n\pi-t)\\&=\int_0^{n\pi}(n\pi-t)|\sin t|dt=n\pi\int_0^{n\pi}|\sin t|dt-a_n\end{aligned}$$

$$a_n=\frac{n\pi}{2}\int_0^{n\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t=\frac{n^2\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin t\mathrm{d}t=n^2\pi$$

则$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_n}{2^n}\right)=\pi\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{2}+\frac{2^2}{2^2}+\cdots+\frac{n^2}{2^n}\right)=\pi\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$.

令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^n$,则

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'=x\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{x}{(1-x)^2}$$

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n=x\left(\sum_{n=1}^{\infty}nx^n\right)'=x\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)'=\frac{x+x^2}{(1-x)^3}$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_n}{2^n}\right)=\pi S\left(\frac{1}{2}\right)=6\pi$.

【例 5】　设 $a_1=a_2=1,a_{n+1}=a_n+a_{n-1}(n=2,3,\cdots)$,试证$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^{n-1}$ 在 $|x|<\frac{1}{2}$ 处必收敛,并求其和函数.

解　由 $a_1=a_2=1$ 及 $a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$ 知$\{a_n\}$单调增,即 $a_{n+1}>a_n$,则

$$a_{n+1}=a_n+a_{n-1}<a_n+a_n=2a_n<2^2a_{n-1}<\cdots<2^{n-1}a_2=2^{n-1}$$

从而有 $a_n<2^{n-2}(n=4,5,\cdots)$,于是$|a_nx^{n-1}|<2^{n-2}|x^{n-1}|=\frac{1}{2}|(2x)^{n-1}|$.

由于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2x)^{n-1}$ 在$|2x|<1$,即 $|x|<\frac{1}{2}$ 时绝对收敛,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^{n-1}$ 在 $|x|<\frac{1}{2}$ 处收敛.

令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^{n-1}\left(x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right)$,则

$$\begin{aligned}S(x)&=1+x+\sum_{n=3}^{\infty}a_nx^{n-1}=1+x+\sum_{n=2}^{\infty}a_{n+1}x^n=1+x+\sum_{n=2}^{\infty}(a_n+a_{n-1})x^n\\&=1+x+x[S(x)-a_1]+x^2S(x)=1+(x+x^2)S(x),\end{aligned}$$

解得 $S(x)=\frac{1}{1-x-x^2}$,$|x|<\frac{1}{2}$.

【注】　类似的

设 $a_0=1,a_1=0,a_{n+1}=\frac{1}{n+1}(na_n+a_{n-1})(n=1,2,3,\cdots)$,$S(x)$为幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数.

(Ⅰ)证明幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径不小于1;

(Ⅱ)证明$(1-x)S'(x)-xS(x)=0(x\in(-1,1))$,并求 $S(x)$ 的表达式.

第三节　傅里叶级数

一、考试内容要点精讲

1. 傅里叶系数与傅里叶级数

设函数 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，且在 $[-\pi,\pi]$ 上可积，则称

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \qquad (n=1,2,\cdots)$$

为 $f(x)$ 的傅里叶系数，称级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

为 $f(x)$ 以 2π 为周期的傅里叶级数，记作

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

2. 收敛定理(狄利克雷)

设 $f(x)$ 是 $[-\pi,\pi]$ 上的分段单调函数，除有限个第一类间断点外都是连续的，则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $[-\pi,\pi]$ 上处处收敛，且收敛于

1) $f(x)$，　　当 x 为 $f(x)$ 的连续点.

2) $\dfrac{f(x^-)+f(x^+)}{2}$，　　当 x 为 $f(x)$ 的间断点.

3) $\dfrac{f(-\pi^+)+f(\pi^-)}{2}$，　　当 $x=\pm\pi$.

3. 周期为 2π 的函数的展开

1) $[-\pi,\pi]$ 上展开

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x,\qquad n=0,1,2,\cdots,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x,\qquad n=1,2,\cdots.$$

2) $[-\pi,\pi]$ 上奇偶函数的展开

① $f(x)$ 为奇函数

$$a_n=0,\qquad n=0,1,2,\cdots,$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x,\qquad n=1,2,\cdots.$$

② $f(x)$ 为偶函数

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x,\qquad n=0,1,2,\cdots,$$

$$b_n=0,\qquad n=1,2,\cdots.$$

③ 在$[0,\pi]$上展为正弦或展为余弦

(1) 展为正弦

$$a_n = 0, \qquad n = 0,1,2,\cdots,$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x, \qquad n = 1,2,\cdots.$$

(2) 展为余弦

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x, \qquad n = 0,1,2,\cdots,$$

$$b_n = 0, \qquad n = 1,2,\cdots.$$

4. 周期为 $2l$ 的函数的展开

1)$[-l,l]$上展开

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x, \qquad n = 0,1,2,\cdots,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x, \qquad n = 1,2,\cdots.$$

2)$[-l,l]$上奇偶函数的展开

①$f(x)$ 为奇函数

$$a_n = 0, \qquad n = 0,1,2,\cdots,$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x, \qquad n = 1,2,\cdots.$$

②$f(x)$ 为偶函数

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x, \qquad n = 0,1,2,\cdots,$$

$$b_n = 0, \qquad n = 1,2,\cdots.$$

3) 在$[0,l]$上展为正弦或展为余弦

① 展为正弦

$$a_n = 0, \qquad n = 0,1,2,\cdots,$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x, \qquad n = 1,2,\cdots.$$

② 展为余弦

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x, \qquad n = 0,1,2,\cdots,$$

$$b_n = 0, \qquad n = 1,2,\cdots.$$

二、常考题型的方法与技巧

题型一　有关收敛定理的问题

【例 1】 函数 $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$ 在$[-\pi,\pi]$上展开为傅里叶级数的和函数

$S(x)=$ ____________.

解 由收敛定理知

$$S(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x<0\\ 1, & 0<x<\pi\\ 0, & x=0\\ 0, & x=\pm\pi\end{cases}$$

【例 2】 设 $f(x)=\begin{cases}-1,-\pi<x<0\\ 1+x^2,0<x<\pi\end{cases}$,则其以 2π 为周期的傅里叶级数在 $x=\pi$ 处收敛于________.

解 由收敛定理知,在 $x=\pi$ 处收敛于$\dfrac{f((-\pi)^+)+f(\pi^-)}{2}=\dfrac{-1+(1+\pi^2)}{2}=\dfrac{\pi^2}{2}$.

【例 3】 设函数 $f(x)=x^2(0\leqslant x\leqslant 1)$,而 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x(-\infty<x<+\infty)$,其中 $b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\mathrm{d}x(n=1,2,3,\cdots)$,则 $S(-\dfrac{1}{2})$ 为

(A) $-\dfrac{1}{2}$. (B) $-\dfrac{1}{4}$. (C) $\dfrac{1}{4}$. (D) $\dfrac{1}{2}$.

解 将 $f(x)$ 在$[-1,1]$上作奇延拓按周期 2 展开,则

$$S(-\frac{1}{2})=-S(\frac{1}{2})=-\frac{1}{4}$$

故应选(B).

【例 4】 设 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}\\ 2-2x, & \dfrac{1}{2}<x<1\end{cases}$,

$$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x(-\infty<x<+\infty)$$

其中 $a_n=2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\mathrm{d}x(n=0,1,2,\cdots)$,则 $S(-\dfrac{5}{2})$ 等于

(A) $\dfrac{1}{2}$. (B) $-\dfrac{1}{2}$. (C) $\dfrac{3}{4}$. (D) $-\dfrac{3}{4}$.

解 将 $f(x)$ 在$[-1,1]$上作偶延拓按周期为 2 展开,则

$$S(-\frac{5}{2})=S(-\frac{1}{2})=S(\frac{1}{2})=\frac{f(\frac{1}{2}-0)+f(\frac{1}{2}+0)}{2}=\frac{\frac{1}{2}+(2-1)}{2}=\frac{3}{4}$$

故应选(C).

题型二　将函数展开为傅里叶级数

将函数展开为傅里叶级数分两步进行：

第一步　求出傅里叶系数，写出傅里叶级数；

第二步　根据狄利克雷收敛定理确定其傅里叶级数在哪些点处收敛于 $f(x)$，在哪些点处不收敛于 $f(x)$，在不收敛于 $f(x)$ 的点处收敛于何值.

【例 1】　将 $f(x)=x^2$ 在 $(0,\pi)$ 上分别展开为正弦级数和余弦级数.

解　(1) 展为正弦

$$a_n=0,b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{2\pi}{n}(-1)^{n-1}+\frac{4}{n^3\pi}[(-1)^n-1]$$

则 $x^2=2\pi\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx-\dfrac{8}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^3}\sin(2n-1)x,x\in(0,\pi)$.

(2) 展为余弦

$$b_n=0,a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\pi^2,a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{4}{n^2}(-1)^n$$

则 $x^2=\dfrac{\pi^2}{3}+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}\cos nx,x\in(0,\pi)$.

【例 2】　将函数 $f(x)=2+|x|\ (-1\leqslant x\leqslant 1)$ 展开为以 2 为周期的傅里叶级数，并由此求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 的和.

解　由于 $f(x)=2+|x|$ 为偶函数，则

$$b_n=0\quad(n=1,2,\cdots)$$

$$a_0=2\int_0^1(2+x)\mathrm{d}x=5$$

$$a_n=2\int_0^1(2+x)\cos n\pi x\mathrm{d}x=\frac{2(\cos n\pi-1)}{n^2\pi^2}\qquad(n=1,2\cdots)$$

由收敛定理知

$$\begin{aligned}2+|x|&=\frac{5}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(\cos n\pi-1)}{n^2\pi^2}\cos n\pi x\\&=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos[(2n+1)\pi x]}{(2n+1)^2},x\in[-1,1]\end{aligned}$$

令 $x=0$，得 $2=\dfrac{5}{2}-\dfrac{4}{\pi^2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2k+1)^2}$，则

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

又

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{4}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

【例 3】 设 $f(x)=10-x(5\leqslant x\leqslant 15)$，将 $f(x)$ 展成以 10 为周期的傅里叶级数.

分析 本题给出周期函数 $f(x)$ 在一个周期 $5\leqslant x\leqslant 15$ 上的表达式，但该区间不关于原点对称，为了利用系数计算公式，将 $f(x)$ 作周期延拓，得其在 $-5\leqslant x\leqslant 5$ 上有表达式，此时 $a_n=\frac{1}{5}\int_{-5}^{5}f(x)\cos\frac{n\pi x}{5}\mathrm{d}x$.

由于 $f(x)\cos\frac{n\pi x}{5}$ 以 10 为周期，则

$$a_n=\frac{1}{5}\int_{-5}^{5}f(x)\cos\frac{n\pi x}{5}\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\int_{5}^{15}f(x)\cos\frac{n\pi x}{5}\mathrm{d}x$$

解 $a_0=\frac{1}{5}\int_{5}^{15}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\int_{5}^{15}(10-x)\mathrm{d}x=0$,

$a_n=\frac{1}{5}\int_{5}^{15}f(x)\cos\frac{n\pi x}{5}\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\int_{5}^{15}(10-x)\cos\frac{n\pi x}{5}\mathrm{d}x=0$,

$b_n=\frac{1}{5}\int_{5}^{15}f(x)\sin\frac{n\pi x}{5}\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\int_{5}^{15}(10-x)\sin\frac{n\pi x}{5}\mathrm{d}x=(-1)^n\frac{10}{n\pi}$,

则 $f(x)=10-x=\frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi x}{5},x\in(5,15)$.

当 $x=5,x=15$ 时，它的傅里叶级数收敛于 0.

笔记：