TP°4 : Méthode d'Euler
Équations différentielles du 2^{e} ordre

La méthode d'Euler permet de résoudre des équations différentielles linéaires ou non d'ordre 1 ou plus.

I Manipulation des tableaux

I.1 Création d'un tableau

Pour construire des tableaux à n lignes et p colonnes :

— `np.array([[`x_1`,`x_2`,`x_3`,....,`x_p`],[`y_1`,`y_2`,`y_3`,....,`y_p`],[`z_1`,`z_2`,`z_3`,....,`z_p`]])` converti une liste de lignes en tableau, avec les $n*p$ valeurs choisies. Attention, si toutes les valeurs sont des entiers, le tableau est un tableau d'entiers à moins de préciser avec l'option `dtype=float` ;

— `np.zeros((n,p))` renvoie un tableau de n lignes et p colonnes rempli de *zero* (noter que la dimension du tableau est un unique objet itérable, ici un `tuple`) ;

— `np.ones((n,p))` renvoie un tableau de n lignes et p colonnes rempli de *un*.

Remarque : faire bien attention aux doubles crochets et doubles parenthèses.

I.2 Extraire des valeurs d'un tableau

Créer un tableau `tab` de 4 lignes et 3 colonnes et essayer les commandes suivantes afin d'extraire un ou des éléments du tableau :

— `tab[i]`

— `tab[i,:]`

— `tab[:,i]`

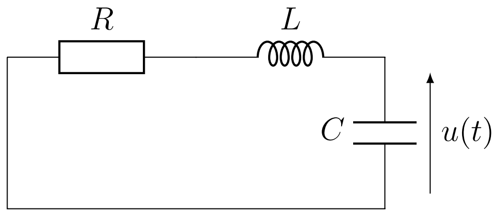
— `tab[i,j]`

Remarque : l'instruction `tab[i][j]` est aussi utilisable mais à réserver aux listes de listes.

II Décharge d'un condensateur dans un circuit RLC

II.1 Rappels de physique

Étudions la tension $u(t)$ aux bornes d'un condensateur lors de sa décharge dans un circuit RLC série, sachant qu'initialement : $u(0) = u_0 = 5{,}0\,\mathrm{V}$ et l'intensité du courant est nulle dans le circuit. On donne $L = 1{,}0\,\mathrm{H}$, $C = 1{,}0\,\mu\mathrm{F}$ et R pouvant varier entre $100\,\Omega$ et $5000\,\Omega$.



$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u = 0$$

On rappelle que : $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, $Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ et on donne : $u(0) = u_0$ et $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0) = 0$.

II.2 Résolution avec Odeint

Résoudre l'équation différentielle avec la fonction `sc.odeint(F,X0,t)` qui fonctionne comme pour une équation différentielle du 1er ordre avec cette fois-ci :

- F la fonction admettant comme arguments le vecteur d'état X et le temps t,
- X_0 le vecteur contenant la condition initiale sur X,
- t le paramètre défini sous la forme `np.linspace(`t_0`,`t_{fin}`,`n`)`.

1. Commencer par définir tous les paramètres, constantes, conditions initiales... nécessaires à la résolution de cet exercice (avec des noms de variable explicites et de valeur en unités internationales précisées en commentaire)
2. En utilisant le mémento, définir une fonction `F` : $(X, t) \rightarrow X'$ traduisant une équation différentielle du 1er ordre telle que dans notre cas : `F` : $\left(\begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix}, t\right) \rightarrow \begin{pmatrix} u' \\ u'' \end{pmatrix}$.
3. Définir le vecteur X_0 sous la forme d'un tableau numpy `np.array([`u_0, u'_0`])`.
4. Résoudre l'équation différentielle avec `odeint` pour $n = 5000$, $t_0 = 0$, $t_{\text{fin}} = 70\,\mathrm{ms}$ dans le cas où $R = 200\,\Omega$.
5. Afficher les valeurs de X et vérifier la dimension du tableau obtenu (`X.shape`).
6. Extraire les valeurs de u et tracer le graphe $u = f(t)$.
7. Extraire les valeurs de u' et tracer le portrait de phase (u, u').
8. Recommencer avec $R = 4000\,\Omega$.

III Oscillations d'un pendule simple

III.1 Rappels de physique

Étudions les oscillations d'un pendule simple soumis à des frottements fluides, sachant qu'initialement on lâche la masse sans vitesse initiale sous un angle $\theta_0 = 30°$.
On donne : $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$, $\ell = 35\,\mathrm{cm}$, $m = 50\,\mathrm{g}$ et $\lambda = 0{,}070\,\mathrm{USI}$.

L'équation différentielle vérifiée par θ est de la forme :

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 \sin(\theta) = 0$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{\ell}}$ et $Q = \dfrac{m}{\lambda}\sqrt{\dfrac{g}{\ell}}$.

III.2 Résolution par votre fonction d'Euler - vectorialisation

1. Commencer par définir tous les paramètres, constantes, conditions initiales... nécessaires à la résolution de cet exercice.
2. Définir une nouvelle fonction `F` : $(X, t) \to X'$ traduisant une équation différentielle du 1^{er} ordre telle que dans notre cas : `F` : $\left(\begin{pmatrix}\theta \\ \theta'\end{pmatrix}, t\right) \to \begin{pmatrix}\theta' \\ \theta''\end{pmatrix}$.
3. Définir le vecteur X_0 sous la forme d'un tableau numpy `np.array(`$[\theta_0, \theta'_0]$`)`.
4. Reprendre votre fonction `euler1(`f`,`t_0`,`t_{fin}`,`x_0`,`n`)` du TP n°3, et l'adapter pour une équation différentielle du 2^e ordre. On appellera `euler1(`F`,`t_0`,`t_{fin}`,`X_0`,`n`)` cette nouvelle fonction retournant (X, t). Il n'y a normalement, quasiment rien à modifier. Pour que votre fonction puisse s'adapter à un problème de dimension N, utiliser la longueur de X_0 (qui correspond à N) pour définir le tableau contenant la solution.
5. Déterminer la solution X et le temps t avec $n = 5000$, $t_0 = 0$ et $t_{\text{fin}} = 20\,\mathrm{s}$.
6. Afficher les valeurs de X et vérifier la dimension du tableau obtenu.
7. Extraire de X les valeurs de θ et représenter graphiquement θ en fonction du temps t.
8. Tracer le portrait de phase (θ, θ').

III.3 Résolution par votre fonction d'Euler - liste

À faire chez vous pour vous entraîner !
Reprendre votre fonction `euler2(`f`,`t_0`,`t_{fin}`,`x_0`,`n`)` du TP n°3, et l'adapter pour une équation différentielle du 2^e ordre. Appeler `euler2(`f`,`t_0`,`t_{fin}`,`x_0`,`$\dot{x}_0$`,`n`)` cette nouvelle fonction retournant x et $\dot{x}$.

IV Chute libre de Félix Baumgartner

Dans le TP n°3 nous avons étudié le mouvement de chute libre de Félix Baumgartner à partir d'une équation différentielle simplifiée sous la forme :

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{2}\rho A C_x v^2 + mg$$

Cependant, la masse volumique de l'air ρ et le champ de gravitation g ne sont pas constants au cours de la chute : ils dépendent de l'altitude h du parachutiste tels que :

$$\rho(h) = a\exp\left(-\beta h\right) \quad \text{et} \quad g(h) = \frac{G m_T}{\left(R_T + h\right)^2}$$

où $a = 1{,}433\,\mathrm{kg\,m^3}$, $\beta = 1{,}3 \times 10^{-4}\,\mathrm{m^{-1}}$, $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{USI}$, $m_T = 5{,}94 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$ et $R_T = 6{,}4 \times 10^3\,\mathrm{km}$.

La nouvelle équation différentielle est donc de la forme :

$$\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{2m}\rho(h) A C_x \left(\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right)^2 - g(h)$$

avec $m = 80\,\mathrm{kg}$, $A = 0{,}45\,\mathrm{m^2}$ la surface apparente du parachutiste et $C_x = 0{,}8$ le coefficient de traînée dans l'air.

1. Après avoir écrit les fonctions $\rho(h)$ et $g(h)$, résoudre cette équation à l'aide de votre fonction Euler afin de déterminer h et $v = -\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$ en fonction du temps pour $t_0 = 0$, $t_{\text{fin}} = 120\,\mathrm{s}$, $n = 1000$ et $h_0 = 39000$ m.
2. Tracer $h = f(t)$ mais aussi $v = f(t)$.
3. Le fichier « *mesure_chute_Baumgartner_TVH.csv* » disponible dans les documents en consultation de la classe, dossier TP4 IPT, contient les données mesurées lors du saut sur les 120 premières secondes de vol. Les trois colonnes du fichier contiennent le temps t, la vitesse v et l'altitude h. Si le fichier se trouve dans le dossier de travail, les mesures s'obtiennent à l'aide du code suivant :

   ```
   texp, vexp, hexp = np.loadtxt("fichier.csv",unpack=True,delimiter=",")
   ```

   permettant de créer 3 tableaux `numpy` contenant les 3 séries de valeurs expérimentales.
4. Superposer les courbes théoriques aux courbes expérimentales.
5. Déterminer la hauteur de chute en 2 min ainsi que l'intervalle de temps durant lequel le parachutiste a une vitesse supérieure à la vitesse du son $v_{\text{son}} = 340\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

V Tour de Taipei

La tout de Taipei de 508 mètres a été inaugurée à Taïwan début 2004 et est restée le plus haut gratte-ciel du monde jusque fin 2007 à l'inauguration du Burj Dubaï de 512,10 mètres.

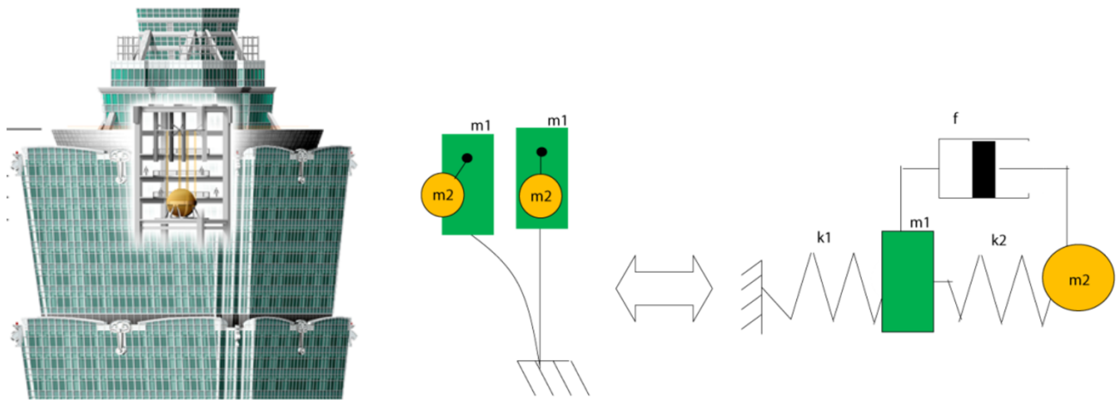
Cette tour qui pèse 700 000 tonnes a été définie par ses concepteurs comme « un majestueux bambou bleu turquoise ». Le but étant que cette tour soit suffisamment souple pour résister aux typhons et aux tremblements de terre fréquents sur l'île de Taïwan. Elle a été étudiée pour résister à des vents soufflant à 216 kilomètres/heure et à un tremblement de terre de 7 sur l'échelle de Richter.

La tour de 101 étages a été équipée d'une sphère d'acier de 660 tonnes suspendue au 92ème étage de la tour. Afin d'amortir 30 à 40 % des mouvements de l'édifice qui pourraient être causés par des vents violents dus aux typhons, un tremblement de terre, la sphère peut se déplacer jusqu'à une amplitude de 1,5 mètre par rapport au bâtiment, limitant le déplacement latéral du bâtiment à 3 m.

L'objectif est d'évaluer, à partir d'un modèle simple, l'efficacité du dispositif de stabilisation de la tour suite à une bourrasque de vent.

V.1 Modèle du bâtiment

La tour est un système complexe dont les vibrations sont très variées. Cependant, sa réduction à un modèle de type masse-ressort (amortissement négligé) permet d'obtenir rapidement une estimation des déplacements en haut de la tour.



En y ajoutant un modèle masse-ressort-ammortisseur pour la sphère de stabilisation et en notant :

— $x_1(t)$ le déplacement du haut de la tour par rapport au sol ;
— $x_2(t)$ le déplacement du centre de la sphère par rapport au haut de la tour ;
— $m_1 = 264000$ t la masse équivalente de la tour rapportée au déplacement de son sommet (toute la tour ne peut être assimilée à une unique masse ponctuelle placée en haut) ;
— $k_1 = 225 \cdot 10^6$ N/m la raideur équivalente de la tour ;
— $m_2 = 660$ t la masse de la sphère ;
— $k_2 = 510000$ N/m et $f_2 = 52000$ N/(m/s) la raideur et le coefficient d'amortissement des vérins ;

les équations du mouvement s'écrivent :

$$\begin{cases} m_1\, \ddot{x}_1(t) = -k_1\, x_1(t) + k_2\, \left(x_2(t) - x_1(t)\right) \\ m_2\, \ddot{x}_2(t) = -k_2\, \left(x_2(t) - x_1(t)\right) - f_2\, \left(\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)\right) \end{cases}$$

Les conditions initiales sont définies à $t_0 = 0$ s :
— $x_1(t_0) = x10 = 0,25$ m et $\dot{x}_1 = v10 = 0$ m/s ;
— $x_2(t_0) = x20 = 0$ m et $\dot{x}_2 = v20 = 0$ m/s.

V.2 Travail préparatoire sur feuille

Définir les variables intermédiaires et le système d'équations à résoudre mis sous la forme d'un problème de Cauchy.

V.3 Utilisation de votre fonction Euler

1. Définir les paramètres du problème.
2. Écrire la fonction `F` : $(X, t) \to X'$, si on pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$.
3. Définir le vecteur X_0 sous la forme d'un tableau numpy `np.array(`$[x_{10}, x_{20}, v_{10}, v_{20}]$`)`.
4. Déterminer la solution X et le temps t avec $n = 500000$, $t_0 = 0$ et $t_{fin} = 10\,\text{min}$.
5. Tracer l'évolution de $x_1 = f(t)$ et $x_2 = g(t)$.
6. Déterminer l'amplitude maximale des mouvements de la sphère.
7. Déterminer le temps que met la tour pour présenter des oscillations d'amplitude inférieure à 5 cm.