Optimisation convexe en ligne

Regrets logarithmiques

Samuel Givois - Fatou Sall

Apprentissage en ligne
Ensae

Vendredi 6 avril 2018

1. Problème

2. Hypothèses

3. « Online Gradient Descent »

4. « Exponentially Weighted Online Optimization »

5. « Online Newton Step »

6. Implémentation

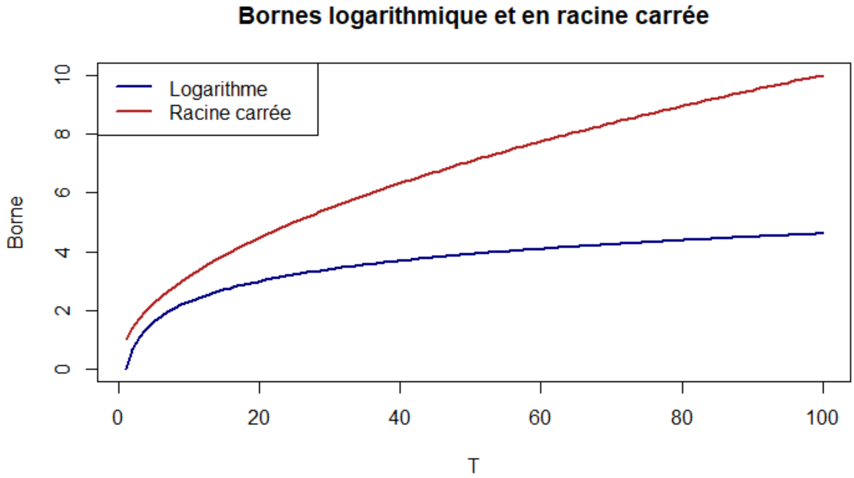
Problème

Objectif

Hazan, E., Kalai, A., Kale, S., Agarwal, A. (2006, June). Logarithmic regret algorithms for online convex optimization. *International Conference on Computational Learning Theory* (pp. 499-513). Springer, Berlin, Heidelberg.

- Problème d'optimisation convexe en ligne.
- Cadre introduit par Zinkevich en 2003.
  - Descente de gradient en ligne en $O(\sqrt{T})$
- Algorithmes en $O(\log(T))$ sous certaines hypothèses

Croissances des bornes



Notations

- Ensemble convexe $K \in \mathbb{R}^n$
- T périodes
- Décisions $x_1, \ldots, x_T \in K$
- Fonctions de perte convexes $f_1, \ldots, f_T : K \to \mathbb{R}$

Regret : $R_T = \sum_{t=1}^{T} f_t(x_t) - \min_{x \in K} \sum_{t=1}^{T} f_t(x)$

On veut garantir R_T faible

Hypothèses

Hypothèses

Hypothèse forte :

- $\exists G \geqslant 0$ tq $\forall t \leqslant T, \forall x \in K, ||\nabla f_t(x)|| \leqslant G$
- $\exists H \geqslant 0$ tq $\forall t \leqslant T, \forall x \in K, \nabla^2 f_t(x) \succeq HI_n$

Hypothèse faible :

$$\exists \alpha \geqslant 0 \text{ tq } \forall t \leqslant T, h_t : x \mapsto e^{-\alpha f_t(x)} \text{ est concave sur } K$$

La première implique la seconde.

« Online Gradient Descent »

Descente de gradient en ligne (OGD)

Descente de gradient dans le cadre « en ligne ».

Pas : $\eta_1, \dots, \eta_T$.

Mise à jour :

$$x_{t+1} = \Pi_K(x_t - \eta_{t+1} \nabla f_t(x_t))$$

Projection :

$$\Pi_K(y) = \underset{x \in K}{\text{argmin}} ||x - y||$$

OGD - Borne du regret

Théorème

Supposons que $\exists G, H \geqslant 0$ tel que $\forall t \leqslant T, \forall x \in K$,
$||\nabla f_t(x)|| \leqslant G$ et $\nabla^2 f_t(x) \succeq H I_n$.
Alors, en prenant $\forall t \leqslant T, \eta_t = \frac{1}{Ht}$, on a :

$$R_T \leqslant \frac{G^2}{2H}(1 + \log(T))$$

OGD - Eléments de preuve

1. Forte convexité :
   $f_t(x_t) - f_t(x^*) \leqslant \nabla_t^T(x_t - x^*) - \frac{H}{2}||x^* - x_t||^2$
2. Propriété des projections sur un ensemble convexe : borne pour $\nabla_t^T(x_t - x^*)$
3. Simplification grâce au choix des η_t

« Exponentially Weighted Online Optimization »

Poids exponentiels (EWOO)

Généralisation de l'algorithme EWA au cas continu.

Poids exponentiels :

$$w_{t+1}(x) = e^{-\alpha \sum_{\tau=1}^{t} f_\tau(x)} = \prod_{\tau=1}^{t} h_\tau(x)$$

Mise à jour :

$$x_{t+1} = \frac{\int_K x w_{t+1}(x)dx}{\int_K w_{t+1}(x)dx}$$

EWOO - Borne du regret

Théorème

Supposons que $\exists \alpha$ tel que $\forall t \leqslant T$, $h_t : x \mapsto e^{-\alpha f_t(x)}$ est concave sur K.

Alors, on a :

$$R_T \leqslant \frac{n}{\alpha}(1 + \log(1 + T))$$

EWOO - Eléments de preuve

1. Concavité de h_t et inégalité de Jensen, puis produit téléscopique : $\prod_{\tau=1}^{t} h_\tau(x_\tau) \geqslant \frac{\int_K \prod_{\tau=1}^{t} h_\tau(x)dx}{\mathrm{vol}(K)}$
2. Borne sur ensemble S construit à partir de x^* et K (concavité et positivité de h_t).
3. Volume de S à partir de celui de K (mise à l'échelle en dimension n).

« Online Newton Step »

Changement de fonction de perte

$x_1, \ldots, x_{T+1}$: décisions « follow the leader ». On a :

$$R_T = \sum_{t=1}^{T} f_t(x_t) - \min_{x \in K} \sum_{t=1}^{T} f_t(x) \leqslant \sum_{t=1}^{T} \left(f_t(x_t) - f_t(x_{t+1})\right)$$

Soit $\tilde{f}_t$ tel que : $\forall t, \tilde{f}_t(x_t) = f_t(x_t)$ et $\forall x, \tilde{f}_t(x) \leqslant f(x)$.
Alors,

$$R_T \leqslant \tilde{R}_T \leqslant \sum_{t=1}^{T} \left(\tilde{f}_t(x_t) - \tilde{f}_t(x_{t+1})\right)$$

Follow the Approximate Leader (FTAL)

Paramètre β

- x_1 arbitraire
- Pour $t \geqslant 2$, $x_t = \operatorname{argmin}_{x \in K} \sum_{\tau=1}^{t-1} \tilde{f}_t(x)$
- $\tilde{f}_t(x) =$
$f_t(x_t) + \nabla_t^T (x - x_t) + \frac{\beta}{2}(x - x_t)^T \nabla_t \nabla_t^T (x - x_t)$

Justification

Soit $f : K \mapsto \mathbb{R}$ tel que $e^{-\alpha f(x)}$ est concave, de gradient borné $||\nabla f|| \leqslant G$, et $\beta = \frac{1}{2}\min(\frac{1}{4GD}, \alpha)$. $\forall x, y \in K$:

$$f(x) \geqslant$$
$$f(y) + \nabla f(y)^T(x-y) + \frac{\beta}{2}(x-y)^T \nabla f(y) \nabla f(y)^T (x-y)$$

Sous les mêmes hypothèses :

$$\sum_{t=1}^{T} (\tilde{f}_t(x_t) - \tilde{f}_t(x_{t+1})) \leqslant 3(\frac{1}{\alpha} + 4GD) n \log(T)$$

« Online Newton Step » (ONS)

Algorithme de Newton-Raphson « en ligne » :

$$\nabla_{t-1} = \nabla f_{t-1}(x_{t-1}) \qquad A_{t-1} = \sum_{\tau=1}^{t-1} \nabla_\tau \nabla_\tau^T$$

$$b_{t-1} = \sum_{\tau=1}^{t-1} \nabla_\tau \nabla_\tau^T x_\tau - \frac{1}{\beta}\nabla_\tau \qquad x_t = \Pi_K^{A_{t-1}}(A_{t-1}^{-1} b_{t-1})$$

Projection : $\Pi_K^{A_{t-1}}(y) = \underset{x \in K}{\operatorname{argmin}} (x-y)^T A_{t-1}(x-y)$

Equivalence entre ONS et FTAL !

« Online Newton Step » (ONS)

Algorithme de Newton-Raphson « en ligne » :

$$\nabla_{t-1} = \nabla f_{t-1}(x_{t-1}) \qquad A_{t-1} = \sum_{\tau=1}^{t-1} \nabla_\tau \nabla_\tau^T$$

$$b_{t-1} = \sum_{\tau=1}^{t-1} \nabla_\tau \nabla_\tau^T x_\tau - \frac{1}{\beta} \nabla_\tau \qquad x_t = \Pi_K^{A_{t-1}}(A_{t-1}^{-1} b_{t-1})$$

Projection : $\Pi_K^{A_{t-1}}(y) = \underset{x \in K}{\operatorname{argmin}} (x-y)^T A_{t-1} (x-y)$

Equivalence entre ONS et FTAL !

Implémentation

Sélection de portefeuille

- Application au problème de la sélection de portefeuille.
- Jeu de données : indices boursiers de 490 actions S& P entre 2001 et 2005 (source : ici)
- Cotation sur 1000 jours

Modélisation

- A chaque période, choix d'un portefeuille x_t.
- Hypothèse : $x_t^\top u = 1$, donc K est le simplexe
  $K = \{y \in \mathbb{R}^n | y^\top u = 1 \text{ et } \forall k, y_k \geqslant 0\}$
- A chaque période, prix de marché $c_t = \frac{a_t}{a_{t-1}}$
- Fonction de perte logarithmique : $f_t(x_t) = -\log(x_t^\top c_t)$

Dérivées

- Gradient :

$$\nabla f_t(x_t) = \frac{-1}{x_t^\top c_t} c_t$$

- Hessienne :

$$\nabla^2 f_t(x_t) = \frac{1}{(x_t^\top c_t)^2} \left(c_{t,i} c_{t,j}\right)_{i,j}$$