Optimisation convexe en ligne

Regrets logarithmiques

Samuel Givois - Fatou Sall

Apprentissage en ligne
Ensae

Vendredi 6 avril 2018

1. Problème

2. Hypothèses

3. OGD et EWOO

4. « Online Newton Step »

5. Implémentation

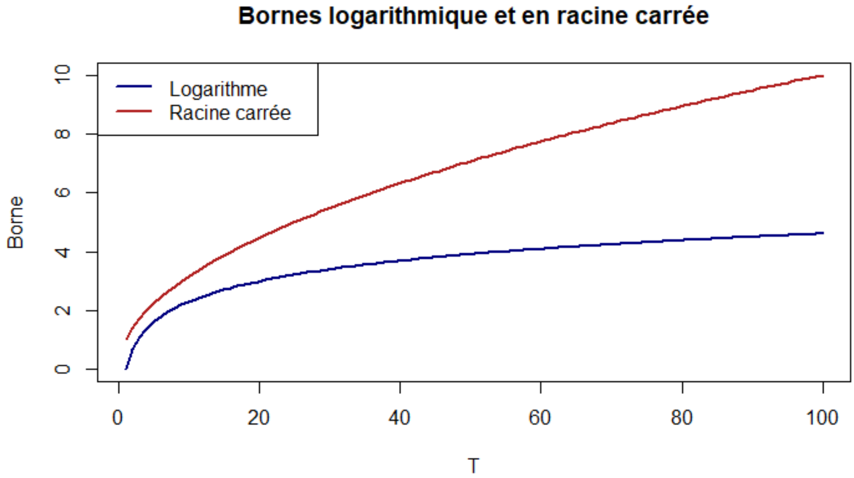
Problème

Objectif

Hazan, E., Kalai, A., Kale, S., Agarwal, A. (2006, June). Logarithmic regret algorithms for online convex optimization. *International Conference on Computational Learning Theory* (pp. 499-513). Springer, Berlin, Heidelberg.

- Problème d'optimisation convexe en ligne.
- Cadre introduit par Zinkevich en 2003.
  - Descente de gradient en ligne en $O(\sqrt{T})$
- Algorithmes en $O(\log(T))$ sous certaines hypothèses

Croissances des bornes



Notations

- Ensemble convexe $K \in \mathbb{R}^n$
- T périodes
- Décisions $x_1, \ldots, x_T \in K$
- Fonctions de perte convexes $f_1, \ldots, f_T : K \to \mathbb{R}$

Regret : $R_T = \sum_{t=1}^{T} f_t(x_t) - \min_{x \in K} \sum_{t=1}^{T} f_t(x)$

On veut garantir R_T faible

Hypothèses

Hypothèses

Hypothèse forte :

- $G \geqslant 0 : \exists G \geqslant 0$ tq $\forall t \leqslant T, \forall x \in K, ||\nabla f_t(x)|| \leqslant G$
- $H \geqslant 0 : \exists H \geqslant 0$ tq $\forall t \leqslant T, \forall x \in K, \nabla^2 f_t(x) \succeq HI_n$

Hypothèse faible :

$$\exists \alpha \geqslant 0 \text{ tq } \forall t \leqslant T, h_t : x \mapsto e^{-\alpha f_t(x)} \text{ est concave sur } K$$

La première implique la seconde.

Démonstration

Démonstration en dimension 1 :

$$h_t''(x) = ((\alpha f_t'(x))^2 - \alpha f_t''(x))e^{-\alpha f_t(x)} \leqslant 0$$

$$\iff$$

$$\alpha \leqslant \frac{f_t''(x)}{(f_t'(x))^2}$$

Résultats

A remplir

OGD et EWOO

Descente de gradient en ligne (OGD)

Descente de gradient dans le cadre « en ligne ».

Pas : $\eta_1, \ldots, \eta_T$.

Mise à jour :

$$x_{t+1} = \Pi_K(x_t - \eta_{t+1} \nabla f_t(x_t))$$

Projection :

$$\Pi_K(y) = \underset{x \in K}{\text{argmin}} ||x - y||$$

OGD - Borne du regret

Théorème

Supposons que $\exists G, H \geqslant 0$ tel que $\forall t \leqslant T, \forall x \in K$, $||\nabla f_t(x)|| \leqslant G$ et $\nabla^2 f_t(x) \succeq H I_n$.
Alors, en prenant $\forall t \leqslant T, \eta_t = \frac{1}{Ht}$, on a :

$$R_T \leqslant \frac{G^2}{2H}(1 + \log(T))$$

OGD - Eléments de preuve

1. Inégalité de Taylor-Lagrange :
   $f_t(x_t) - f_t(x^*) \leqslant \nabla_t^T(x_t - x^*) - \frac{H}{2}||x^* - x_t||^2$
2. Propriété des projections sur un ensemble convexe : borne pour $\nabla_t^T(x_t - x^*)$
3. Simplification grâce au choix des η_t

Poids exponentiels (EWOO)

Généralisation de l'algorithme EWA au cas continu.

Poids exponentiels :

$$w_{t+1}(x) = e^{-\alpha \sum\limits_{\tau=1}^{t} f_\tau(x)} = \prod_{\tau=1}^{t} h_\tau(x)$$

Mise à jour :

$$x_{t+1} = \frac{\int_K x w_{t+1}(x) dx}{\int_K w_{t+1}(x) dx}$$

EWOO - Borne du regret

Théorème

Supposons que $\exists \alpha$ tel que $\forall t \leqslant T$, $h_t : x \mapsto e^{-\alpha f_t(x)}$ est concave sur K.

Alors, on a :

$$R_T \leqslant \frac{n}{\alpha}(1 + \log(1 + T))$$

EWOO - Eléments de preuve

1. Concavité de h_t et inégalité de Jensen, puis produit téléscopique : $\prod_{\tau=1}^{t} h_\tau(x_\tau) \geqslant \frac{\int_K \prod_{\tau=1}^{t} h_\tau(x)dx}{\mathrm{vol}(K)}$
2. Borne sur ensemble S construit à partir de x^* et K (concavité et positivité de h_t).
3. Volume de S à partir de celui de K (mise à l'échelle en dimension n).

« Online Newton Step »

Implémentation

Sélection de portefeuille

- Application au problème de la sélection de portefeuille.
- Jeu de données : indices boursiers de 490 actions S&P entre 2001 et 2005 (source : ici)
- Cotation sur 1000 jours

Modélisation

- A chaque période, choix d'un portefeuille x_t.
- Hypothèse : $x_t^T u = 1$, donc K est le simplexe $K = \{y \in \mathbb{R}^n | y^T u = 1 \text{ et } \forall k, y_k \geqslant 0\}$
- A chaque période, prix de marché $c_t = \frac{a_t}{a_{t-1}}$
- Fonction de perte logarithmique : $f_t(x_t) = -\log(x_t^T c_t)$

Dérivées

- Gradient :

$$\nabla f_t(x_t) = \frac{-1}{x_t^\top c_t} c_t$$

- Hessienne :

$$\nabla^2 f_t(x_t) = \frac{1}{(x_t^\top c_t)^2} \left(c_{t,i} c_{t,j}\right)_{i,j}$$