

Optimisation convexe en ligne

Regrets logarithmiques

Samuel Givois - Fatou Sall

Apprentissage en ligne
Ensaë

Vendredi 6 avril 2018

1. Problème

2. Hypothèses

3. OGD

4. EWOO

5. « Online Newton Step »

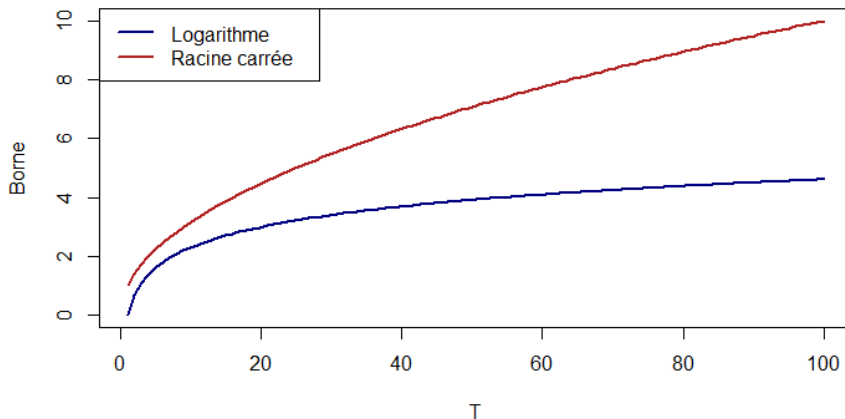
6. Implémentation

Problème

Hazan, E., Kalai, A., Kale, S., Agarwal, A. (2006, June). Logarithmic regret algorithms for online convex optimization. *International Conference on Computational Learning Theory* (pp. 499-513). Springer, Berlin, Heidelberg.

- ▶ Problème d'optimisation convexe en ligne.
- ▶ Cadre introduit par Zinkevich en 2003.
 - ▶ Descente de gradient en ligne en $O(\sqrt{T})$
- ▶ Algorithmes en $O(\log(T))$ sous certaines hypothèses

Bornes logarithmique et en racine carrée



- ▶ Ensemble convexe $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^n$
- ▶ T périodes
- ▶ Décisions $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_T \in \mathbf{K}$
- ▶ Fonctions de perte convexes $f_1, \dots, f_T : \mathbf{K} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{Regret} : \mathbf{R}_T = \sum_{t=1}^T f_t(\mathbf{x}_t) - \min_{\mathbf{x} \in \mathbf{K}} \sum_{t=1}^T f_t(\mathbf{x})$$

On veut garantir \mathbf{R}_T faible

Hypothèses

Hypothèse forte :

- ▶ $G \geq 0 : \exists G \geq 0$ tq $\forall t \leq T, \forall x \in K, \|\nabla f_t(x)\| \leq G$
- ▶ $H \geq 0 : \exists H \geq 0$ tq $\forall t \leq T, \forall x \in K, \nabla^2 f_t(x) \geq H I_n$

Hypothèse faible :

$\exists \alpha \geq 0$ tq $\forall t \leq T, h_t : x \mapsto e^{-\alpha f_t(x)}$ est concave sur K

La première implique la seconde.

OGD

Descente de gradient en ligne (OGD)



Descente de gradient dans le cadre « en ligne ».

Pas : η_1, \dots, η_T .

Mise à jour :

$$\mathbf{x}_{t+1} = \Pi_K(\mathbf{x}_t - \eta_{t+1} \nabla f_t(\mathbf{x}_t))$$

Projection :

$$\Pi_K(\mathbf{y}) = \operatorname{argmin}_{\mathbf{x} \in K} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

Théorème

Supposons que $\exists G, H \geq 0$ tel que $\forall t \leq T, \forall x \in K$,
 $\|\nabla f_t(x)\| \leq G$ et $\nabla^2 f_t(x) \geq H I_n$.

Alors, en prenant $\forall t \leq T, \eta_t = \frac{1}{Ht}$, on a :

$$R_T \leq \frac{G^2}{2H} (1 + \log(T))$$

1. Forte convexité :

$$f_t(\mathbf{x}_t) - f_t(\mathbf{x}^*) \leq \nabla_t^T(\mathbf{x}_t - \mathbf{x}^*) - \frac{H}{2} \|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_t\|^2$$

2. Propriété des projections sur un ensemble convexe :
borne pour $\nabla_t^T(\mathbf{x}_t - \mathbf{x}^*)$

3. Simplification grâce au choix des η_t

EWOO

Généralisation de l'algorithme **EW**A au cas continu.

Poids exponentiels :

$$w_{t+1}(x) = e^{-\alpha \sum_{\tau=1}^t f_{\tau}(x)} = \prod_{\tau=1}^t h_{\tau}(x)$$

Mise à jour :

$$x_{t+1} = \frac{\int_K x w_{t+1}(x) dx}{\int_K w_{t+1}(x) dx}$$

Théorème

Supposons que $\exists \alpha$ tel que $\forall t \leq T$, $h_t : x \mapsto e^{-\alpha f_t(x)}$ est concave sur \mathbf{K} .

Alors, on a :

$$R_T \leq \frac{n}{\alpha} (1 + \log(1 + T))$$

1. Concavité de h_t et inégalité de Jensen, puis produit

téléscopique :
$$\prod_{\tau=1}^t h_{\tau}(x_{\tau}) \geq \frac{\int_K \prod_{\tau=1}^t h_{\tau}(x) dx}{\text{vol}(K)}$$

2. Borne sur ensemble S construit à partir de x^* et K (concavité et positivité de h_t).
3. Volume de S à partir de celui de K (mise à l'échelle en dimension n).

« Online Newton Step »

$\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{T+1}$: décisions « follow the leader ». On a :

$$R_T = \sum_{t=1}^T f_t(\mathbf{x}_t) - \min_{\mathbf{x} \in K} \sum_{t=1}^T f_t(\mathbf{x}) \leq \sum_{t=1}^T (f_t(\mathbf{x}_t) - f_t(\mathbf{x}_{t+1}))$$

Soit \tilde{f}_t tel que : $\forall t, \tilde{f}_t(\mathbf{x}_t) = f_t(\mathbf{x}_t)$ et $\forall \mathbf{x}, \tilde{f}_t(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_t)$.

Alors,

$$R_T \leq \tilde{R}_T \leq \sum_{t=1}^T (\tilde{f}_t(\tilde{\mathbf{x}}_t) - \tilde{f}_t(\tilde{\mathbf{x}}_{t+1}))$$

Paramètre β

- ▶ \mathbf{x}_1 arbitraire
- ▶ Pour $t \geq 2$, $\mathbf{x}_t = \operatorname{argmin}_{\mathbf{x} \in K} \sum_{\tau=1}^{t-1} \tilde{f}_t(\mathbf{x})$
- ▶ $\tilde{f}_t(\mathbf{x}) =$
$$f_t(\mathbf{x}_t) + \nabla_t^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}_t) + \frac{\beta}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_t)^T \nabla_t \nabla_t^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}_t)$$

Soit $f : \mathbf{K} \mapsto \mathbb{R}$ tel que $e^{-\alpha f(\mathbf{x})}$ est concave, de gradient borné $\|\nabla f\| \leq G$, et $\beta = \frac{1}{2} \min(\frac{1}{4GD}, \alpha)$. $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{K}$:

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{y}) + \nabla f(\mathbf{y})^\top (\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \frac{\beta}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{y})^\top \nabla f(\mathbf{y}) \nabla f(\mathbf{y})^\top (\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

Sous les mêmes hypothèses :

$$\sum_{t=1}^T (\tilde{f}_t(\tilde{\mathbf{x}}_t) - \tilde{f}_t(\tilde{\mathbf{x}}_{t+1})) \leq 3\left(\frac{1}{\alpha} + 4GD\right)n \log(T)$$

« Online Newton Step » : application de l'algorithme de Newton-Raphson au cas en ligne.
Equivalence entre ONS et FTAL.

Implémentation

- ▶ Application au problème de la sélection de portefeuille.
- ▶ Jeu de données : indices boursiers de 490 actions S&P entre 2001 et 2005 (source : [ici](#))
- ▶ Cotation sur 1000 jours

- ▶ A chaque période, choix d'un portefeuille \mathbf{x}_t .
- ▶ Hypothèse : $\mathbf{x}_t^T \mathbf{u} = 1$, donc \mathbf{K} est le simplexe
 $\mathbf{K} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{y}^T \mathbf{u} = 1 \text{ et } \forall k, y_k \geq 0\}$
- ▶ A chaque période, prix de marché $\mathbf{c}_t = \frac{a_t}{a_{t-1}}$
- ▶ Fonction de perte logarithmique : $f_t(\mathbf{x}_t) = -\log(\mathbf{x}_t^T \mathbf{c}_t)$

- ▶ Gradient :

$$\nabla f_t(\mathbf{x}_t) = \frac{-1}{\mathbf{x}_t^T \mathbf{c}_t} \mathbf{c}_t$$

- ▶ Hessienne :

$$\nabla^2 f_t(\mathbf{x}_t) = \frac{1}{(\mathbf{x}_t^T \mathbf{c}_t)^2} (\mathbf{c}_{t,i} \mathbf{c}_{t,j})_{i,j}$$