Der Supercomputer als Teleskop -
Die Sternenbewegung im Zeitraffer

Ein Beitrag zum Jahr der Mathematik 2008

Autoren:

Ivo Kabadshow [1]
Oliver Bücker [1]
Christian Müller [2]
Carsten Karbach [1]

[1] Jülich Supercomputing Centre (JSC)
[2] Schülerlabor (JULAB)

Jülich, den 22. Juli 2008

Vorwort

Das Bundesministerium für Bildung und Forschung (BMBF) veranstaltet seit dem Jahr 2000 zusammen mit der Initiative Wissenschaft im Dialog (WiD) die Wissenschaftsjahre mit jährlich wechselnden Themen. 2008 ist der Mathematik gewidmet.
Ziel des Wissenschaftsjahres 2008 ist es, der Öffentlichkeit die Faszination der Mathematik näher zu bringen. Dabei sollen vor allem junge Menschen ermutigt werden, einen neuen Zugang zu dem Fach zu finden. Denn Mathematik ist die Basis aller Naturwissenschaften und vieler technischer Entwicklungen. Sie spielt eine zentrale Rolle in der Wirtschaft und begleitet uns in Alltag und Beruf. Mit ihren Methoden lassen sich große Teile unserer Lebenswirklichkeit erfassen, beschreiben und lösen.
Kurzum, Mathematik ist Zukunft!

Auch das Forschungszentrum Jülich engagiert sich als Partner des Wissenschaftsjahres der Mathematik.
Es richtet sich mit dem Online-Projekt „*Der Supercomputer als Teleskop - Die Sternenbewegung im Zeitraffer*“ an Schülerinnen und Schüler. Unterstützt werden diese sowohl von Jülicher Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftlern, als auch von „JUGENE“, einem der schnellsten Computer der Welt. Mit seiner Rechenleistung von 223 Billionen Rechenoperationen pro Sekunde lassen sich Aufgaben lösen, die mit normalen PCs nicht bearbeitet werden können.
Das Prinzip moderner Höchstleistungsrechner, den sogenannten „Supercomputern“, ist das parallele Rechnen: Große Rechenaufgaben werden in viele kleine Teilaufgaben zerlegt, die von zehntausenden von Prozessoren parallel bearbeitet werden. Ähnlich wie bei einem Mosaik fügen sich dann die Teilergebnisse zur Lösung zusammen.

Inhaltsverzeichnis

1 Das Problem

Wie bewegen sich die Sterne mit der Zeit? Welche Kräfte wirken dabei? Bei welchen Startbedingungen kommt es zu einem Auseinanderfliegen oder Aufeinanderstoßen der Sterne? Wann bewegen sie sich auf gleichmäßigen Ellipsenbahnen wie in unserem Sonnensystem?
Genau diesen Fragestellungen möchten wir im Rahmen dieses Online-Projekts nachgehen.

Die Animation unter `http://jdm.fz-juelich.de/index.php?NR=0&UK=0` gibt einen kleinen Vorgeschmack auf das eigentliche Online-Projekt „*Der Supercomputer als Teleskop - Die Sternenbewegung im Zeitraffer*". Das dort dargestellte Problem, das so genannte „Dreikörperproblem", ist eine klassische Fragestellung der Himmelsmechanik:
Wie bewegen sich drei Körper unter dem Einfluss ihrer gegenseitigen Anziehung? Bei frei wählbarer Startkonfiguration von drei Sternen werden deren Flugbahnen berechnet und visualisiert.

Dabei ist vor allem die Startkonfiguration der Körper - in unserem Fall Sterne - von besonderer Bedeutung: Einfluss auf die Flugbahnen nehmen deren Massen, die Positionen der Sterne zueinander und die Startgeschwindigkeiten.
Sind die Sterne nahe beieinander, so ist davon auszugehen, dass sich diese stärker anziehen und damit auch stärker beschleunigen, als weit entfernte Sterne. Wählt man die Startgeschwindigkeit zu groß, so kann es dazu kommen, dass die Sterne keine gleichbleibenden Ellipsen beschreiben, sondern auseinanderfliegen. Wählt man die Startgeschwindigkeit eines Sterns hingegen zu klein oder in Richtung der Kraft, mit der er von einem anderen Stern angezogen wird, so kommt es zu einer Sternenkollision.

2 Die Herausforderung

Wesentlich aufwändiger wird die Berechnung der Flugbahnen bei Erhöhung der Anzahl der Sterne:
Im Online-Projekt „*Der Supercomputer als Teleskop - Die Sternenbewegung im Zeitraffer*" werden die Bahnkurven von mehr als $100\,000$ Sternen berechnet werden.

Und hier kommt die Arbeitsweise des Supercomputers und damit das Prinzip des Parallelrechnens ins Spiel. Es ist dann nämlich sinnvoll darüber nachzudenken, wie das Berechnungsproblem in mehrere Teilprobleme zerlegt werden kann, die dann möglichst parallel gelöst werden sollten, um den Zeitaufwand der Berechnung klein zu halten. Deshalb werden die Teilnehmer sich neben der eigentlichen Berechnung der Sternenbewegungen auch mit der Parallelisierung und Optimierung dieser Berechnung beschäftigen. Denn was nützt uns die Vorhersage der Sternenbahnen der nächsten zwei Monate, wenn die Berechnung der Vorhersage ein Jahr in Anspruch nähme?

Vom 18. August 2008 bis zum 26. September 2008 werden die Schüler die Arbeitsweise eines Supercomputers kennenlernen. In diesen 6 Wochen werden sie die Prozessoren eines Supercomputers darstellen und Teilaufgaben der Simulation von $100\,000$ Sternen übernehmen.

3 Historie

Isaac Newton[1] wurde am $4.1.1643$ in Woolsthorpe (Lincolnshire) geboren und starb am $31.3.1727$ in Kensington. Die Daten beziehen sich auf den Gregorianischen Kalender. Da bis 1752 in England der Julianische Kalender in Gebrauch war, findet man manchmal auch als Lebensdaten $25.12.1642 - 20.3.1727$. Aufgrund seiner Leistungen, vor allem auf den Gebieten der Physik und Mathematik, gilt Sir Isaac Newton als einer

[1] `http://de.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton`

der größten Wissenschaftler aller Zeiten. Die *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*[2], veröffentlicht im Jahr 1687, wird als eines der wichtigsten wissenschaftlichen Werke eingestuft.
Newton ist heute vor allem als der Begründer der Gravitationstheorie und der Infinitesimalrechnung bekannt. Newton hat zum ersten Mal eine wirkliche Theorie der Gravitation aufgestellt, indem er ein allgemein gültiges Gravitationsgesetz (Kraftgesetz) formulierte und die Bewegungen der Körper daraus herleitete. Diese allgemeine Gültigkeit bedeutet, dass alle Körper diesem Gesetz gleichermaßen unterworfen sind, unabhängig davon, ob sie nun himmlischen oder irdischen Ursprungs sind. Gerade diese Unterscheidung hatte im Naturverständnis der Antike eine zentrale Rolle gespielt. Mit Newtons Gravitationsgesetz wird erstmals eine Brücke zwischen Himmelskunde und Physik geschlagen. Allgemein gilt Newton auch als Begründer unserer heutigen Form der Mechanik (die Newtonschen Bewegungsgesetze, Kapitel 4.1).
Ohne die Infinitesimalrechnung hätte Newton seine bahnbrechenden Einsichten in der „*klassischen Mechanik*“ kaum gewinnen bzw. belegen können. Seine zu einem ersten Abschluß gelangten Überlegungen zur Infinitesimalrechnung formulierte er 1672 mittels zweier, an der Bewegung eines Massenpunktes orientierter Probleme:

1. Wenn die Länge der zurückgelegten Strecke stetig gegeben ist, soll die Geschwindigkeit der Bewegung zu irgendeiner Zeit gefunden werden.

2. Wenn die Geschwindigkeit der Bewegung stetig gegeben ist, soll die Länge der zurückgelegten Strecke zu irgendeiner gegebenen Zeit gefunden werden.

Die beiden aufgeführten Probleme sind, wie Newton von seinem Lehrer *Isaac Barrow*[3] gelernt hatte, invers zueinander. Im Fall 1) ist die Geschwindigkeit v die „*Fluxion*“ des Weges s:

$$v = \dot{s}\,(t)$$

und im Fall 2) der Weg die „*Fluente*“ der Geschwindigkeit:

$$s = \int_{t_0}^{t} v\,(\tau)\,d\tau$$

Die Fluxion (der Fluß) ist dasjenige, was *Gottfried Wilhelm Leibniz* [4] den „*Differentialquotienten*“ einer Funktion nannte und heute auch Ableitung heißt, die Fluente (fließende Größe) entspricht dem „*Integral*“. Newton benutzte einen Punkt über der abzuleitenden Größe, was in der Physik für Ableitungen nach der Zeit bis heute üblich geblieben ist. Die symbolische Schreibweise von Integralen mit dem Integralzeichen $\int \ldots d\tau$ geht auf Leibniz zurück.
Obwohl Newton als Erfinder der Infinitesimalrechnung gilt, führte er sie nicht in die europäische Mathematik ein. 1675 entwickelte Leibniz unabhängig von Newtons Arbeit nahezu die gleiche Methode, die er Differentialrechnung nannte. Nachdem Leibniz bis zur Veröffentlichung der Newtonschen Infinitesimalrechnung (1704) als Begründer der Differentialrechnung galt, entbrannte in späteren Jahren zwischen Newton und Leibniz ein langanhaltender Prioritätenstreit.

4 Grundlagen

Im Folgenden soll das Problem der Berechnung der Bahnkurve eines Sterns anhand eines Beispiels erklärt werden.
Zur Vereinfachung wird die Bewegung eines Sternes 2 um einen anderen Stern 1 beschrieben. Die Bahnkurve, die Stern 2 um Stern 1 beschreibt, ist eine Ellipse. Doch wie können wir anhand weniger Anfangsdaten

[2] http://de.wikipedia.org/wiki/Philosophiae_Naturalis_Principia_Mathematica
[3] http://de.wikipedia.org/wiki/Isaac_Barrow
[4] http://de.wikipedia.org/wiki/Gottfried_Wilhelm_Leibniz

erkennen, dass der Weg von Stern 2 tatsächlich eine Ellipse um Stern 1 ist? Nehmen wir einmal an, wir kennen die folgenden Anfangsdaten:

	Stern 1	Stern 2
Position	x_1, y_1, z_1	x_2, y_2, z_2
Geschwindigkeit	v_{1x}, v_{1y}, v_{1z}	v_{2x}, v_{2y}, v_{2z}
Masse	m_1	m_2

Wie können wir aus dieser „Momentaufnahme“ der Bewegung den weiteren Verlauf der Bewegung verfolgen? Um die Lösung des Problems verstehen zu können, brauchen wir ein paar physikalische Grundlagen.

4.1 Die Newtonschen Bewegungsgesetze

Jeder, der einmal den Nachthimmel betrachtet hat, könnte meinen, dass die dort zu sehenden Sterne still am Himmel stehen. Das stimmt aber nicht, denn auch die Fixsterne bewegen sich, verändern ihre Position aber recht langsam (verglichen mit Planeten). Was ist die Ursache ihrer Bewegung?
Isaac Newton beschreibt in seinem Werk „Philosophiae Naturalis Principa Mathematica“, drei grundlegende Gesetze für Bewegungen[5]:

1. *Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare.*[6]

   Ein Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung, sofern er nicht durch einwirkende Kräfte zur Änderung seines Zustands gezwungen wird.

2. *Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae, et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.*[6]

   Die Änderung der Bewegung einer Masse ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher jene Kraft wirkt.

   Für die meisten Systeme ist die Masse m während der Bewegungsänderung konstant. Das zweite newtonsche Gesetz vereinfacht sich damit: Wirkt eine äußere resultierende Kraft auf den Körper, so bewirkt diese eine Änderung der Bewegung des Körpers (Beschleunigung). Dabei ist die Kraft proportional zur Masse m sowie proportional zur Beschleunigung a des Körpers:

$$F = ma \tag{1}$$

3. *Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem: sive corporum duorum actiones is se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi.*[6]

   Kräfte treten immer paarweise auf. Übt ein Körper A auf einen anderen Körper B eine Kraft aus (das nennt man dann *actio*), so wirkt eine gleichgroße, aber entgegen gerichtete Kraft von Körper B auf Körper A (was man dann *reactio* nennt).

Ihr wisst nun, dass die Ursache einer Bewegung eine Kraft ist. Doch welche Kraft ist dies bei unserem Sternenproblem? Die Antwort findet ihr im nächsten Abschnitt.

[5] `http://de.wikipedia.org/wiki/Newtonsche_Axiome`
[6] Philosophiae naturalis principia mathematica. Bd.1: Tomus Primus, London 1726, 13

4.2 Das Newtonsche Gravitationsgesetz

Ebenfalls im Werk „Philosophiae Naturalis Principa Mathematica“ ist die Formulierung des Newtonschen Gravitationsgesetzes zu finden. Die von Johannes Kepler [7] 1609 im Werk „Astronomia nova“ veröffentlichten Gesetzmäßigkeiten (die ersten beiden Keplerschen Gesetze) und die Veröffentlichung des dritten Keplerschen Gesetzes im Jahre 1619 waren ein wichtiger Schritt zum Verständnis der Planetenbewegung. Doch die Keplerschen Gesetze lieferten nur die Beschreibung der Planetenbewegung, nicht deren Erklärung. Mit Newton wurde klar, warum sich die Planeten so bewegen, wie sie es tun. Nach Newton hat jede Beschleunigung ihre Ursache in einer Kraft. Er postulierte eine Kraft, die eine Masse auf eine andere Masse ausübt, die er Gravitationskraft nannte. Die Gleichungen, die diese Kraft beschreiben, lauten

$$\begin{aligned} F_{2x} &= -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \cdot (x_2 - x_1) \\ F_{2y} &= -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \cdot (y_2 - y_1) \\ F_{2z} &= -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \cdot (z_2 - z_1) \end{aligned} \tag{2}$$

wobei G die sogenannte Gravitationskonstante ist. Sie hat den Wert $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$. In unserem Beispiel, bei dem wir die Bahnkurve des Sterns 2 berechnen wollen, sind die Anfangspositionen des Sternes 2 durch dessen Anfangskoordinaten x_2, y_2, z_2 gegeben, die des Sternes 1 durch x_1, y_1, z_1. Mit $F_{2x} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \cdot (x_2 - x_1)$ berechnen wir nun den Teil der gesamten Gravitationskraft, mit der Stern 1 in x-Richtung dieses Koordinatensystems auf Stern 2 wirkt, mit $F_{2y} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \cdot (y_2 - y_1)$ den Teil in y-Richtung, und mit $F_{2z} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \cdot (z_2 - z_1)$ den Teil in z-Richtung.
Außerdem sagen uns die Gleichungen (2), dass die Kraft, die von Masse 1 auf Masse 2 wirkt, proportional zu den beiden einzelnen Massen ist. Das heißt, dass die Ursache für das Vorhandensein einer Kraft offensichtlich in den Massen liegen muss. Es ist egal, ob wir Sterne betrachten oder irgendwelche anderen Massen (wir könnten Erbsen nehmen): zwischen zwei Massen wirken anziehende Gravitationskräfte! Dass dies auch für kleine Massen gilt, kann mit dem Experiment von Cavendish[8] gezeigt werden.

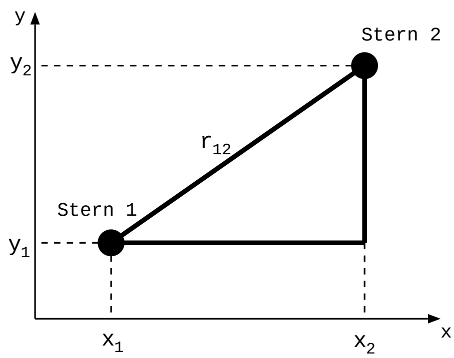

Abbildung 1: Abstand zweier Massen im zweidimensionalen Raum

Bleibt noch die Frage offen, was r_{12} in den Gleichungen (2) bedeutet. r_{12} ist der Abstand der Massen 1 und 2 voneinander. Er kann, wie Abb. 1 verdeutlicht, folgendermaßen berechnet werden:

$$r_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{3}$$

[7] http://de.wikipedia.org/wiki/Johannes_Kepler
[8] http://de.wikipedia.org/wiki/Gravitationswaage

Für den dreidimensionalen Raum gilt dann:

$$r_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,, \tag{4}$$

was Abbildung 2 verdeutlichen soll.

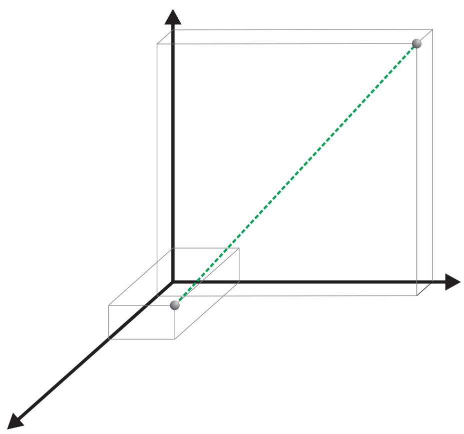

Abbildung 2: Abstand zweier Massen im dreidimensionalen Raum

Ihr wisst nun, wie die Kraft auf Stern 2 zu berechnen ist. Wie kann man damit nun die Bahn von Stern 2 berechnen? Dazu müsst Ihr noch wissen, wie die Geschwindigkeit und die Beschleunigung berechnet werden.

4.3 Geschwindigkeit und Beschleunigung

Die Änderung der Position in einer bestimmten Zeit wir als *Geschwindigkeit* bezeichnet. Man unterscheidet zwischen mittlerer Geschwindigkeit und Momentangeschwindigkeit. Diesen Unterschied kennt ihr sehr wahrscheinlich vom Reisen mit dem Auto: obwohl bei einer Stadtrundfahrt zwischenzeitlich das Tachometer 50 km/h anzeigt, legt man in der Regel nicht wirklich exakt 50 Kilometer in einer Stunde zurück, weil unterwegs doch die ein oder andere rote Ampel im Weg ist!
Aus dem Unterricht kennt ihr für die Kennzeichnung von Änderungen bestimmt das Symbol Δ. Wenn sich ein Objekt von der Position s_1 innerhalb eines Zeitraums auf die Position s_2 ändert, so schreiben wir für die Positionsdifferenz Δs und für das Zeitintervall Δt.
Die mittlere Geschwindigkeit kann man berechnen mit

$$\begin{aligned} v &= \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} \\ &= \frac{\Delta s}{\Delta t} \end{aligned} \tag{5}$$

Aus dem zweiten Newtonschen Gesetz wissen wir, dass die Kraft F proportional zur Masse m und zur Beschleunigung a ist (siehe Seite 3). Um also die Beschleunigung eines Sterns zu bestimmen, müssen wir diese Gleichung nur nach a auflösen:

$$\begin{aligned} F &= m \cdot a \\ \Leftrightarrow \quad a &= \tfrac{F}{m} \end{aligned}$$

Die Beschleunigung von Stern 2 in x-Richtung können wir also über seine Masse m_2 und die Kraft, die von allen anderen Sternen (bei uns nur von Stern 1) auf ihn wirkt, bestimmen:

$$a_{2x} = \frac{F_{2x}}{m_2}$$

Zur Bestimmung der Beschleunigung benötigen wir also die Masse des Sterns, die uns über die Startbedingungen gegeben ist und die auf den Stern wirkende Kraft. Diese wiederum können wir über Gleichung (2) aus dem Newtonschen Gravitationsgesetz einsetzen. Wenn man die Kraft in unsere Gleichung einsetzt, kann man die Masse m_2 kürzen und erhält die endgültige Gleichung für die Beschleunigung. Für die y- und z-Richtung kann in gleicher Weise vorgegangen werden, so dass sich folgende Gleichungen ergeben:

$$\begin{aligned} a_{2x} &= -G\frac{m_1}{r_{12}^3}\cdot(x_2 - x_1) \\ a_{2y} &= -G\frac{m_1}{r_{12}^3}\cdot(y_2 - y_1) \\ a_{2z} &= -G\frac{m_1}{r_{12}^3}\cdot(z_2 - z_1) \end{aligned} \tag{6}$$

Doch was genau ist eigentlich eine Beschleunigung? Auch die Beschleunigung in einem Zeitintervall kann man mit Hilfe des Δ-Operators angeben:

$$\begin{aligned} a &= \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \\ &= \frac{\Delta v}{\Delta t} \end{aligned} \tag{7}$$

Die nach Gleichung (7) erhaltene Beschleunigung ist allerdings nur die *mittlere Beschleunigung* (oder auch *Durchschnittsbeschleunigung*) im Zeitintervall Δt. Abbildung 3 soll dies verdeutlichen.

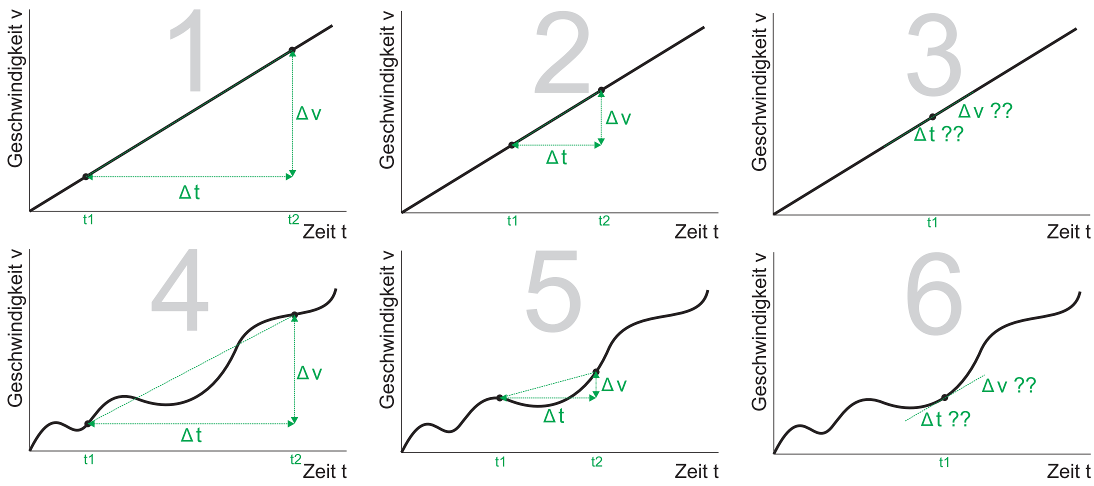

Abbildung 3: Bestimmung der *mittleren Beschleunigung*

In den Diagrammen in Abbildung 3 ist zu sehen, wie sich die Geschwindigkeiten von zwei verschiedenen Bewegungsabläufen mit der Zeit ändern. Während Bewegung 1 – *Diagramm 1 bis 3* – mit einer konstanten Beschleunigung abläuft ($\frac{\Delta v}{\Delta t}$ ist in jedem beliebigen Zeitintervall konstant!) wird bei Bewegung 2 – *Diagramm 4 bis 6* – das Objekt zwischenzeitlich sehr viel stärker beschleunigt als das Objekt aus Bewegung 1.

Allerdings wird innerhalb des Zeitintervalls Δt die Bewegung später so abgebremst, dass sich die beiden Körper mit der gleichen mittleren Beschleunigung bewegt haben, auch wenn ihre Momentanbeschleunigungen zu gewissen Zeitpunkten stark unterschiedlich sind.

4.4 Wechselwirkungen

Unser eigentliches Problem lautet: Wie bewegen sich Sterne in Sternensystemen mit mehr als $100\,000$ Sternen? Jeder Stern wirkt mehr oder weniger stark auf jeden anderen Stern ein, was man Wechselwirkungen nennt. Wir können uns vorstellen, dass wir bei $100\,000$ Sternen eine riesige Anzahl an solchen Wechselwirkungen haben werden. Wie viele werden es genau sein?

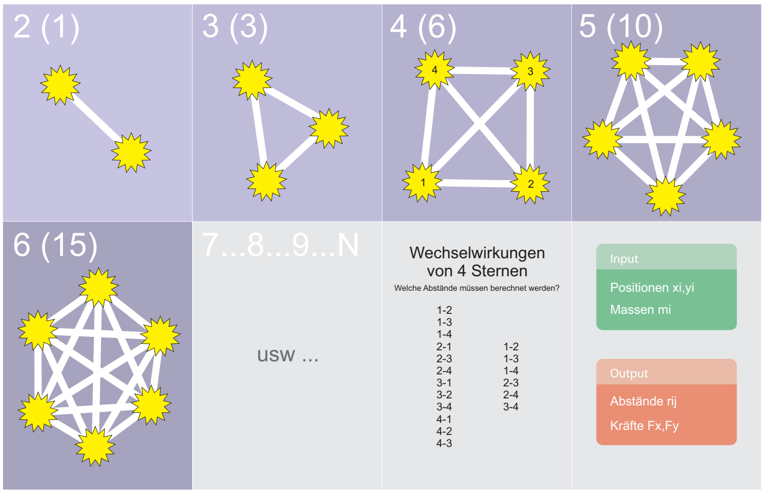

Abbildung 4: Anzahl der Wechselwirkungen mit steigender Anzahl der Sterne

Abbildung 4 verdeutlicht, dass die Anzahl der Wechselwirkungen (WW) folgendermaßen berechnet werden kann:

$$WW = \frac{N\,(N-1)}{2} \tag{8}$$

N ist hier die Anzahl der an den Wechselwirkungen beteiligten Körper. Wenn wir also $N = 100\,000$ wählen, dann ergibt sich die Anzahl der Wechselwirkungen zu etwa 5 Milliarden! Um das Bewegungsproblem von $100\,000$ Sternen zu lösen, müssen also etwa 5 Milliarden Wechselwirkungen pro Simulationsschritt berechnet werden!

5 Simulationsverfahren/Numerik

5.1 Das Euler-Verfahren

Kommen wir auf unser Beispiel zurück: Auf welcher Bahn bewegt sich Stern 2? Bevor wir konkrete Zahlen verwenden, soll zunächst der Grundgedanke der Berechnung erklärt werden.
Nehmen wir an, wir besitzen die Startwerte aus Tabelle 1 und die abgeleiteten Größen.

	Stern 1	Stern 2
Position	x_1, y_1, z_1	x_2, y_2, z_2
Geschwindigkeit	v_{1x}, v_{1y}, v_{1z}	v_{2x}, v_{2y}, v_{2z}
Masse	m_1	m_2

Tabelle 1: Die Startwerte des Simulationsverfahrens

Wir untersuchen im Folgenden die Bewegung in x-, y- und z-Richtung unabhängig voneinander.

Starten wir mit der x-Richtung:

Wir haben für Stern 2 die Startposition x_{2,t_0} und die Startgeschwindigkeit v_{2,t_0}. Das t_0 im Index soll für den Startzeitpunkt $t = 0$ stehen. Wir wollen nun wissen, wo befindet sich das Objekt zu einem späteren Zeitpunkt t_1, also nach einem Zeitintervall Δt, und welche Geschwindigkeit hat es dann. Wir können folgende Gleichung zur Berechnung der nächsten x-Position verwenden:

$$x_{2,t_1} = x_{2,t_0} + v_{2x,t_0} \cdot \Delta t \tag{9}$$

mit $t_1 = t_0 + \Delta t$. Wenn v_{2,t_0} während des Zeitintervalls Δt gleich bleibt, erhalten wir die exakte neue x-Position x_{2,t_1}. Denn $v_{2,t_0} \cdot \Delta t$ berechnet nichts anderes als das Stück Δx, das wir während Δt zurücklegen, wenn v_{2x,t_0} konstant bleibt. Woher sollen wir wissen, ob sich die Geschwindigkeit des Objektes im Zeitintervall nicht ändert? Sehr wahrscheinlich wird sie das sogar tun! Was hilft uns da also weiter? Die Idee ist nun folgende: Wenn wir das Zeitintervall sehr klein werden lassen, dann unterscheidet sich die Geschwindigkeit noch nicht sehr stark von v_{2,t_0}. Ein Einwand, dass dies nicht sehr exakt ist, ist richtig! Wenn das Zeitintervall unendlich klein wird, erhalten wir die exakte neue x-Position.
Für die x-Geschwindigkeit nach einem Zeitraum Δt gilt das gleiche. Die Gleichung lautet hier:

$$v_{2x,t_1} = v_{2x,t_0} + a_{2x,t_0} \cdot \Delta t \tag{10}$$

Auch hier wird sich die Beschleunigung a_{2x,t_0} im allgemeinen im Zeitintervall Δt ändern. Aber auch hier haben wir durch Auswahl eines sehr kleinen Zeitintervalls die Möglichkeit, den Bewegungsablauf sehr genau anzunähern.
Wir erhalten somit einen Satz Gleichungen, mit dem wir unser Problem lösen wollen:

Position:

$$\begin{aligned} x_{2,t_1} &= x_{2,t_0} + v_{2x,t_0} \cdot \Delta t \\ y_{2,t_1} &= y_{2,t_0} + v_{2y,t_0} \cdot \Delta t \\ z_{2,t_1} &= z_{2,t_0} + v_{2z,t_0} \cdot \Delta t \end{aligned} \tag{11}$$

Geschwindigkeit:

$$\begin{aligned} v_{2x,t_1} &= v_{2x,t_0} + a_{2x,t_0} \cdot \Delta t \\ v_{2y,t_1} &= v_{2y,t_0} + a_{2y,t_0} \cdot \Delta t \\ v_{2z,t_1} &= v_{2z,t_0} + a_{2z,t_0} \cdot \Delta t \end{aligned} \tag{12}$$

Zur Berechnung der Geschwindigkeiten benötigen wir noch die Beschleunigungen. Hierfür können wir die Gleichungen (6) heranziehen.

Ein Beispiel mit konkreten Zahlen:

Als Zeitintervall wählen wir einen Tag, also $\Delta t = 86400\ s$. Zur Vereinfachung wird außerdem eine Bewegung von Stern 1 vernachlässigt (Wir werden die Masse von Stern 1 etwa 33000 mal größer wählen als die von Stern 2, so dass der Einfluss von Stern 2 auf Stern 1 nur zu einer sehr sehr geringen Bewegung von Stern 1 führt. Das gewählte Beispiel entspricht der Bewegung eines Planeten um die Sonne). Die Masse von Stern 1 soll $1,989 \cdot 10^{30}\ kg$ sein; die Gravitationskonstante G ist $6,67 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$.
Unsere Anfangsdaten lauten somit:

	Stern 1	
t	t_0 0	t_1 86 400
x_1	0.0	
y_1	0.0	
z_1	0.0	
v_{1x}	0.0	
v_{1y}	0.0	
v_{1z}	0.0	
a_{1x}		
a_{1y}		
a_{1z}		
r		

	Stern 2	
t	t_0 0	t_1 86 400
x_2	$1.496 \cdot 10^{11}$	
y_2	0.0	
z_2	0.0	
v_{2x}	0.0	
v_{2y}	$2.978 \cdot 10^4$	
v_{2z}	0.0	
a_{2x}		
a_{2y}		
a_{2z}		
r		

Da die Anfangsposition von Stern 2 keine Geschwindigkeitskomponente in z-Richtung besitzt, hat dieser Stern nur eine Bewegung in der x-y-Ebene. Wir brauchen uns also bei den Gleichungen (11), (12) und (6) nur um die $x-$ und $y-$Komponenten zu kümmern, da nur diese Veränderungen bewirken.
Zum Zeitpunkt $t = t_0 = 0$ müssen wir zunächst einmal den Abstand der Sterne zueinander berechnen:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ &= \sqrt{(1.496 \cdot 10^{11})^2 + 0^2} \\ &= \underline{\underline{1.496 \cdot 10^{11}}} \end{aligned}$$

Unsere Tabelle für Stern 2 wird also ergänzt:

	Stern 2	
t	t_0 0	t_1 86 400
x_2	$1.496 \cdot 10^{11}$	
y_2	0.0	
z_2	0.0	
v_{2x}	0.0	
v_{2y}	$2.978 \cdot 10^4$	
v_{2z}	0.0	
a_{2x}		
a_{2y}		
a_{2z}		
r	$1.496 \cdot 10^{11}$	

Mit dem Abstand r, der Masse m_1 (von Stern 1) und der Gravitationskonstanten G sind wir nun in der Lage, die Momentanbeschleunigungskomponenten a_{2x} und a_{2y} zu berechnen:

$$
\begin{aligned}
a_{2x} &= -G\frac{m_1}{r^3} \cdot (x_2 - x_1) \\
&= -6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1,989 \cdot 10^{30}}{(1.496 \cdot 10^{11})^3} \cdot \left(1.496 \cdot 10^{11} - 0.0\right) \\
&= \underline{\underline{-5.928 \cdot 10^{-3}}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_{2y} &= -G\frac{m_1}{r^3} \cdot (y_2 - y_1) \\
&= -6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1,989 \cdot 10^{30}}{(1.496 \cdot 10^{11})^3} \cdot (0.0 - 0.0) \\
&= \underline{\underline{0.0}}
\end{aligned}
$$

Unsere Tabelle kann also ergänzt werden zu:

	Stern 2	
t	t_0 0	t_1 86 400
x_2	$1.496 \cdot 10^{11}$	
y_2	0.0	
z_2	0.0	
v_{2x}	0.0	
v_{2y}	$2.978 \cdot 10^4$	
v_{2z}	0.0	
a_{2x}	$-5.928 \cdot 10^3$	
a_{2y}	0.0	
a_{2z}	0.0	
r	$1.496 \cdot 10^{11}$	

Die letzten Berechnungen waren nur dazu da, um unsere Startbedingungen zu vervollständigen. Wie sieht die Tabelle aus, wenn wir uns den Zeitpunkt $t_1 = 86\,400$ ansehen? Die neue x-Position bei $t_1 = 86\,400$ berechnen wir mit:

$$
x_{86\,400} = x_{t_0} + v_{x,t_0} \cdot \Delta t
$$

Wir rechnen also:

$$
\begin{aligned}
x_{2,t_0+\Delta t} &= 1.496 \cdot 10^{11} + 0.0 \cdot 86\,400 \\
&= \underline{\underline{1.496 \cdot 10^{11}}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_{2,t_0+\Delta t} &= 0.0 + 2.978 \cdot 10^4 \cdot 86\,400 \\
&= \underline{\underline{2.573 \cdot 10^9}}
\end{aligned}
$$

Wir tragen die neuen Koordinaten in die Tabelle ein:

	Stern 2	
t	t_0 0	t_1 86 400
x_2	$1.496 \cdot 10^{11}$	$1.496 \cdot 10^{11}$
y_2	0.0	$2.573 \cdot 10^{9}$
z_2	0.0	0.0
v_{2x}	0.0	
v_{2y}	$2.978 \cdot 10^{4}$	
v_{2z}	0.0	
a_{2x}	$-5.928 \cdot 10^{3}$	
a_{2y}	0.0	
a_{2z}	0.0	
r	$1.496 \cdot 10^{11}$	

Die neuen Geschwindigkeitskomponenten berechnen sich zu:

$$\begin{aligned} v_{2,x,t_0+\Delta t} &= v_{2,x,t_0} + a_{x,t_0} \cdot \Delta t \\ &= 0.0 + \left(-5.928 \cdot 10^{-3}\right) \cdot 86\,400 \\ &= \underline{\underline{5.122 \cdot 10^{2}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{2,y,t_0+\Delta t} &= v_{2,y,t_0} + a_{y,t_0} \cdot \Delta t \\ &= 2.978 \cdot 10^{4} + 0.0 \\ &= \underline{\underline{2.978 \cdot 10^{4}}} \end{aligned}$$

Außerdem ergeben sich der neue Abstand und die neuen Beschleunigungskomponenten zu:

$$\begin{aligned} r_{86\,400} &= \sqrt{(1.496 \cdot 10^{11}) + (2.573 \cdot 10^{9})} \\ &\approx \underline{\underline{1.496 \cdot 10^{11}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{2x,86\,400} &= -6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1,989 \cdot 10^{30}}{\left(1.496 \cdot 10^{11}\right)^3} \cdot \left(1.496 \cdot 10^{11} - 0.0\right) \\ &= \underline{\underline{-5.928 \cdot 10^{-3}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{2y,86\,400} &= -6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1,989 \cdot 10^{30}}{\left(1.496 \cdot 10^{11}\right)^3} \cdot \left(2.573 \cdot 10^{9} - 0.0\right) \\ &= \underline{\underline{-1.020 \cdot 10^{-4}}} \end{aligned}$$

Unsere Tabelle wird ergänzt zu:

	Stern 2	
t	t_0 0	t_1 86 400
x_2	$1.496 \cdot 10^{11}$	$1.496 \cdot 10^{11}$
y_2	0.0	$2.573 \cdot 10^{9}$
z_2	0.0	0.0
v_{2x}	0.0	$5.122 \cdot 10^{2}$
v_{2y}	$2.978 \cdot 10^{4}$	$2.978 \cdot 10^{4}$
v_{2z}	0.0	0.0
a_{2x}	$-5.928 \cdot 10^{3}$	$-5.928 \cdot 10^{-3}$
a_{2y}	0.0	$-1.020 \cdot 10^{-4}$
a_{2z}	0.0	0.0
r	$1.496 \cdot 10^{11}$	$1.496 \cdot 10^{11}$

Für unseren nächsten Zeitpunkt $t_2 = 172\,800$ bilden nun die Werte aus der Spalte bei $t_1 = 86400$ die Ausgangswerte für den Berechnungsschritt.
So können wir nach und nach für immer mehr Zeitpunkte eine Tabelle entwickeln, die uns den Bewegungsablauf des Sterns 2 um den Stern 1 liefert. Allerdings nehmen wir bei diesem Verfahren an, dass die Beschleunigung und die Geschwindigkeit während des Zeitintervalls konstant sind. Sie sind es aber nicht! Also machen wir hier einen Fehler!
Die Konsequenz des Fehlers könnt ihr in der folgenden Abbildung sehen:

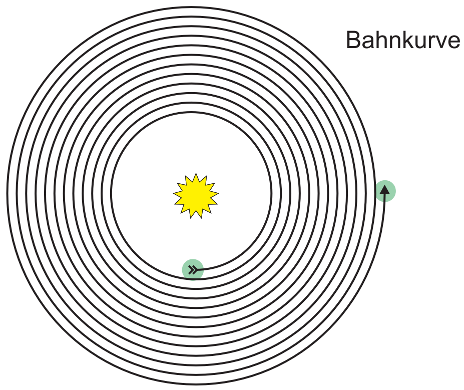

Abbildung 5: Die Bahnkurve einer Euler-Simulation

Der grüne Stern bewegt sich nicht auf einer Ellipse oder einem Kreis um den zentralen gelben Stern, sondern treibt immer mehr vom Ursprung weg.

5.2 Das Leapfrog-Verfahren

Das Programm im letzten Kapitel hat uns gezeigt, dass unsere Näherungsrechnung bei fortschreitender Zeit sehr schnell sehr falsche Werte liefert. Eine Verkleinerung des Zeitintervalls verbessert zwar die Näherungswerte, allerdings ist das spiralförmige Fortlaufen mit der Zeit nicht zu vermeiden. Da dies den Rechenaufwand stark erhöht, ist das Euler-Verfahren nicht die Methode der Wahl. Wir haben es hier dargestellt, weil das folgende Verfahren darauf aufbaut. Das Verfahren wird Leapfrog-Verfahren genannt und wir werden sehen, mit welch einfacher Idee sich die Genauigkeit bei gleichem Rechenaufwand gigantisch steigern lässt!

Die Gleichungen, mit denen wir unsere Näherung durchführen, werden lauten:

$$\begin{aligned} x_{t+\Delta t} &= x_t + v_{x,t+\frac{\Delta t}{2}} \cdot \Delta t \\ y_{t+\Delta t} &= y_t + v_{y,t+\frac{\Delta t}{2}} \cdot \Delta t \\ z_{t+\Delta t} &= z_t + v_{z,t+\frac{\Delta t}{2}} \cdot \Delta t \end{aligned} \tag{13}$$

und

$$\begin{aligned} v_{x,t+\frac{\Delta t}{2}} &= v_{x,t-\frac{\Delta t}{2}} + a_{x,t} \cdot \Delta t \\ v_{y,t+\frac{\Delta t}{2}} &= v_{y,t-\frac{\Delta t}{2}} + a_{y,t} \cdot \Delta t \\ v_{z,t+\frac{\Delta t}{2}} &= v_{z,t-\frac{\Delta t}{2}} + a_{z,t} \cdot \Delta t \end{aligned} \tag{14}$$

Was will uns das sagen? Offensichtlich benutzen wir nun zur Berechnung der Bewegung Geschwindigkeiten, die in der Mitte des Zeitintervalls, also $\Delta t/2$, liegen. Wir erinnern uns, dass die Geschwindigkeit im Intervall Δt im allgemeinen nicht konstant ist. Welche Geschwindigkeit sollen wir also für unsere Berechnung nehmen? Wir können die Genauigkeit unserer Berechnungen erhöhen, indem wir die Geschwindigkeit in der Mitte des Zeitintervalls wählen. Für unsere Startsituation haben wir allerdings ein Problem. In Gleichung (14) ist zur Berechnung der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0 + \frac{\Delta t}{2}$ die Kenntnis der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0 - \frac{\Delta t}{2}$ notwendig. Für die Startbedingungen ersetzen wir also die Gleichungen (14) durch die speziellen Gleichungen:

$$\begin{aligned} v_{x,0+\frac{\Delta t}{2}} &= v_{x,0} + a_{x,0} \cdot \Delta t \\ v_{y,0+\frac{\Delta t}{2}} &= v_{y,0} + a_{y,0} \cdot \Delta t \\ v_{z,0+\frac{\Delta t}{2}} &= v_{z,0} + a_{z,0} \cdot \Delta t \end{aligned} \tag{15}$$

Wir wollen wieder mit unserem Stern 2 konkrete Zahlenwerte verwenden:

Unsere Startsituation ist wieder wie folgt:

Stern 2					
t	t_0 0	$t_{0.5}$ 43 200	t_1 86 400	$t_{1.5}$ 129 600	t_2 172 800
x_2	$1.496 \cdot 10^{11}$				
y_2	0.0				
z_2	0.0				
v_{2x}	0.0				
v_{2y}	$2.978 \cdot 10^4$				
v_{2z}	0.0				
a_{2x}	$-5.928 \cdot 10^{-3}$				
a_{2y}	0.0				
a_{2z}	0.0				
r	$1.496 \cdot 10^{11}$				

Zunächst einmal müssen wir die Geschwindigkeitskomponenten $v_{x,0+\frac{\Delta t}{2}}$ und $v_{y,0+\frac{\Delta t}{2}}$ zum Zeitpunkt

$t_{0.5} = 0 + \frac{\Delta t}{2} = 43\,200$ berechnen. Wir machen dies mit unseren speziellen Gleichungen (15):

$$\begin{aligned} v_{x,43\,200} &= v_{x,0} + a_{x,0} \cdot \frac{\Delta t}{2} \\ &= 0 + \left(-5.928 \cdot 10^{-3}\right) \cdot 43\,200 \\ &= \underline{\underline{-2.561 \cdot 10^{2}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{y,43\,200} &= v_{y,0} + a_{y,0} \cdot \frac{\Delta t}{2} \\ &= 2.978 \cdot 10^{4} + 0 \cdot 43\,200 \\ &= \underline{\underline{2.978 \cdot 10^{4}}} \end{aligned}$$

Wir ergänzen die Tabelle:

Stern 2					
t	t_0 0	$t_{0.5}$ 43 200	t_1 86 400	$t_{1.5}$ 129 600	t_2 172 800
x_2	$1.496 \cdot 10^{11}$				
y_2	0.0				
z_2	0.0				
v_{2x}	0.0	$-2.561 \cdot 10^{2}$			
v_{2y}	$2.978 \cdot 10^{4}$	$2.978 \cdot 10^{4}$			
v_{2z}	0.0	0.0			
a_{2x}	$-5.928 \cdot 10^{-3}$				
a_{2y}	0.0				
a_{2z}	0.0				
r	$1.496 \cdot 10^{11}$				

Nun sind wir in der Lage den Gleichungssatz (13) zu verwenden. Wir berechnen nun die Position zum Zeitpunkt $t_1 = 86\,400$:

$$\begin{aligned} x_{t+\Delta t} &= x_t + v_{x,\frac{\Delta t}{2}} \cdot \Delta t \\ &= 1.496 \cdot 10^{11} + \left(-2.561 \cdot 10^{2}\right) \cdot 86\,400 \\ &\approx \underline{\underline{1.496 \cdot 10^{11}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{t+\Delta t} &= y_t + v_{y,\frac{\Delta t}{2}} \cdot \Delta t \\ &= 0.0 + 2.978 \cdot 10^{4} \cdot 86\,400 \\ &\approx \underline{\underline{2.573 \cdot 10^{9}}} \end{aligned}$$

Wir ergänzen die Tabelle:

Stern 2					
t	t_0 0	$t_{0.5}$ 43 200	t_1 86 400	$t_{1.5}$ 129 600	t_2 172 800
x_2	$1.496 \cdot 10^{11}$		$1.496 \cdot 10^{11}$		
y_2	0.0		$2.573 \cdot 10^{9}$		
z_2	0.0		0.0		
v_{2x}	0.0	$-2.561 \cdot 10^{2}$			
v_{2y}	$2.978 \cdot 10^{4}$	$2.978 \cdot 10^{4}$			
v_{2z}	0.0	0.0			
a_{2x}	$-5.928 \cdot 10^{-3}$				
a_{2y}	0.0				
a_{2z}	0.0				
r	$1.496 \cdot 10^{11}$				

Nun kann der neuen Abstand r berechnen werden. Da wir eine Bewegung von Stern 1 vernachlässigen, ist seine Position ständig mit $x = 0$ und $y = 0$ gegeben, so dass der Abstand berechnet wird zu:

$$
\begin{aligned}
r &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \\
&= \sqrt{(1.496 \cdot 10^{11} - 0.0)^2 + (2.573 \cdot 10^9 - 0.0)^2 + (0.0 - 0.0)^2} \\
&\approx \underline{\underline{1.496 \cdot 10^{11}}}
\end{aligned}
$$

Damit berechnet sich die Beschleunigung bei $t_1 = 86\,400$ zu:

$$
\begin{aligned}
a_{2x} &= -G\frac{m_1}{r^3} \cdot (x_2 - x_1) \\
&= -6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1.989 \cdot 10^{30}}{(1.496 \cdot 10^{11})^3} \cdot 1.496 \cdot 10^{11} \\
&= \underline{\underline{-5.928 \cdot 10^{-3}}}
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
a_{2y} &= -G\frac{m_1}{r^3} \cdot (y_2 - y_1) \\
&= -6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1.989 \cdot 10^{30}}{(1.496 \cdot 10^{11})^3} \cdot 2.573 \cdot 10^{9} \\
&= \underline{\underline{-1.020 \cdot 10^{-4}}}
\end{aligned}
$$

Somit sieht unsere Tabelle wie folgt aus:

Stern 2					
t	t_0 0	$t_{0.5}$ 43 200	t_1 86 400	$t_{1.5}$ 129 600	t_2 172 800
x_2	$1.496 \cdot 10^{11}$		$1.496 \cdot 10^{11}$		
y_2	0.0		$2.573 \cdot 10^{9}$		
z_2	0.0		0.0		
v_{2x}	0.0	$-2.561 \cdot 10^{2}$			
v_{2y}	$2.978 \cdot 10^{4}$	$2.978 \cdot 10^{4}$			
v_{2z}	0.0	0.0			
a_{2x}	$-5.928 \cdot 10^{-3}$		$-5.928 \cdot 10^{-3}$		
a_{2y}	0.0		$-1.020 \cdot 10^{-4}$		
a_{2z}	0.0		0.0		
r	$1.496 \cdot 10^{11}$		$1.496 \cdot 10^{11}$		

Um die Position, den Abstand und die Beschleunigung zum Zeitpunkt $172\,800$ zu bestimmen, brauchen wir die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $129\,600$. Ab jetzt können wir auch die Geschwindigkeiten mit unserem Näherungsverfahren nach (14) berechnen:

$$\begin{aligned} v_{x,129\,600} &= v_{x,43\,200} + a_{x,86400} \cdot \Delta t \\ &= -2.561 \cdot 10^2 + \left(-5.928 \cdot 10^{-3}\right) \cdot 86400 \\ &= \underline{\underline{-7.683 \cdot 10^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{y,129\,600} &= v_{y,43\,200} + a_{y,86400} \cdot \Delta t \\ &= 2.978 \cdot 10^4 + \left(-1.020 \cdot 10^{-4}\right) \cdot 86400 \\ &= \underline{\underline{2.977 \cdot 10^4}} \end{aligned}$$

Wenn wir diese Ergebnisse in die Tabelle eintragen, erhalten wir:

Stern 2					
t	t_0 0	$t_{0.5}$ 43 200	t_1 86 400	$t_{1.5}$ 129 600	t_2 172 800
x_2	$1.496 \cdot 10^{11}$		$1.496 \cdot 10^{11}$		
y_2	0.0		$2.573 \cdot 10^{9}$		
z_2	0.0		0.0		
v_{2x}	0.0	$-2.561 \cdot 10^{2}$		$-7.683 \cdot 10^{2}$	
v_{2y}	$2.978 \cdot 10^{4}$	$2.978 \cdot 10^{4}$		$2.977 \cdot 10^{4}$	
v_{2z}	0.0	0.0		0.0	
a_{2x}	$-5.928 \cdot 10^{-3}$		$-5.928 \cdot 10^{-3}$		
a_{2y}	0.0		$-1.020 \cdot 10^{-4}$		
a_{2z}	0.0		0.0		
r	$1.496 \cdot 10^{11}$		$1.496 \cdot 10^{11}$		

An dieser Stelle sei die weitere Berechnung euch überlassen!

In Abbildung 6 ist die Bahnkurse einer Leapfrog-Simulation aufgetragen. Man kann erkennen, dass im Gegensatz zur Bahnkurve des Eulerverfahrens (siehe Abbildung 5 auf Seite 12), das Leapfrog-Verfahren ein stabiles Ergebnis produziert. Das grüne Stern bewegt sich stabil, von ein paar Ungenauigkeiten abgesehen, auf einer Bahnkurve um den gelben Stern herum.

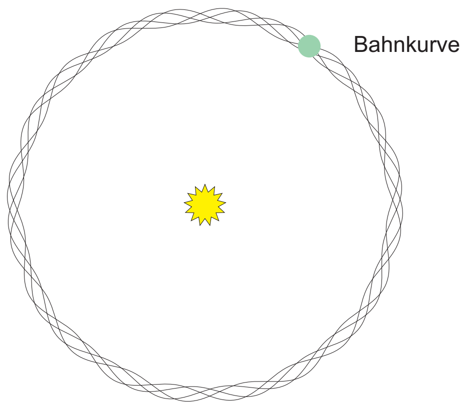

Abbildung 6: Die Bahnkurve einer Leapfrog-Simulation

Um das Leapfrog-Verfahren zu erklären, wurden einige Vereinfachungen verwendet, die wir deshalb machen konnten, da ein sehr schwerer Zentralstern ausgewählt wurde. Wenn diese Voraussetzung nicht gegeben ist, muss für alle Sterne das, was wir bis jetzt nur für den Stern 2 berechnet haben, für alle Sterne berechnet werden.

6 Paralleles Rechnen

Das Beispiel aus dem letzen Kapitel ist schon ziemlich kompliziert, auch wenn die einzelnen Schritte nicht besonders schwierig sind. Für einen Computer sind die Rechnungen problemlos, die Bewegung über mehrere Umläufe lässt sich in Bruchteilen einer Sekunde berechnen. Für zwei Sterne kann man - mit Mathematik, die jenseits der Schulmathematik ist - die eigentliche Rechnung noch mal wesentlich vereinfachen. Für mehr Sterne geht das nicht mehr, und für die Bewegung sehr vieler Sterne entsteht ein riesiger Rechenaufwand. Z.B. ist die Milchstraße gerade dabei, eine Zwerggalaxie zu „verschlucken“. Das bedeutet etwa $2 \cdot 10^{11}$ Sterne, die miteinander wechselwirken. Für die Berechnung eines solchen Ereignisses werden Parallelrechner eingesetzt.

6.1 Was ist ein Parallelrechner?

Ein Parallelrechner ist eine mehr oder weniger große Anzahl von einzelnen Rechnern (Prozessoren), die so miteinander verbunden sind, dass sie gemeinsam an einer Aufgabe arbeiten können, um diese schneller zu erledigen, als ein einzelner Rechner es könnte. Ob die Prozessoren auch einzeln sinnvoll arbeiten können, ist dabei nicht wichtig, meistens können sie es.

Beispiel: Erbsen zählen parallel

Ein einfaches Beispiel für paralleles Rechnen ist die Aufgabe, die Erbsen in einem Sack ($50kg$) zu zählen (wozu auch immer). Für eine Person wäre das ziemlich langwierig. Teilt man die Erbsen aber in 50 Portionen von je etwa $1kg$, lässt 50 Personen je eine solche Portion durchzählen, und addiert die Zahlen, so hat man das Ergebnis nach ein paar Minuten. Hier sieht man auch, dass die parallele Abarbeitung etwas Zusatzaufwand benötigt. Zunächst müssen die Erbsen möglichst gleich portioniert werden, die Portionen müssen verteilt werden, und die einzelnen Zählergebnisse müssen aufaddiert werden. Außerdem muss mit dem Addieren der Ergebnisse auf den langsamsten Zähler gewartet werden. Vermutlich geht es so also nicht 50 mal so schnell wie für eine Person, sondern vielleicht nur 40 mal.

An dem Beispiel sieht man auch, dass das mögliche Maß an Parallelität begrenzt ist. Hat im Extremfall jeder nur eine Erbse zu zählen, ist das Zusammenrechnen wieder genau dieselbe Aufgabe wie das Zählen der Erbsen, und man ist sogar, durch den Zusatzaufwand des Portionierens, deutlich langsamer als mit nur einem Zähler.

6.2 Kommunikation

Beim Zählen der Erbsen gibt es keine Notwendigkeit zur Zusammenarbeit der Zähler, jeder macht einfach seine Arbeit und meldet das Ergebnis, wenn er fertig ist. Bei anderen Aufgaben kommt es aber auf ständige Abstimmung an, z.B. beim gemeinsamen Aufrichten eines Fachwerkhauses. Hier ist es wichtig, dass die einzelnen Arbeiter sich ständig nach den Nachbarn richten. Ähnliches gibt es auch beim Rechnen. Für Parallelrechner bedeutet das, dass die einzelnen Rechner miteinander schnell und häufig kommunizieren können müssen.

Die Berechnung der Sternbewegungen ist so ein Beispiel. Eine einfache und vernünftige Aufteilung wäre, dass jeder Prozessor die Bewegungen der Sterne in einem Teilgebiet des Raumes berechnet. Dann muss nach jedem Zeitschritt die neue Position aller Sterne allen Prozessoren mitgeteilt werden, damit die Kräfte für den nächsten Zeitschritt richtig berechnet werden.

Für diese Kommunikation gibt es im Prinzip zwei Möglichkeiten. Zum einen kann es einen *gemeinsamen Speicher* für Sternpositionen geben, auf den alle Prozessoren zugreifen können. Für $2 \cdot 10^{11}$ Sterne müsste der ziemlich groß sein, aber machbar ist das. Die andere Möglichkeit besteht darin, dass jeder Prozessor Speicher für seine „eigenen“ Sterne und noch mal eine gute Reserve hat, und die Daten ausgetauscht werden. So etwas nennt man *message passing*[9]. Dann könnte z.B. jeder Prozessor zum Nachbar-Prozessor die Positionen seiner Sterne schicken (der letzte Prozessor schickt an den ersten). Dann können alle die Kräfte dieser Sterne auf die „eigenen“ berechnen. Danach werden die Positionen an den übernächsten Nachbar-Prozessor (der direkt Nachbar hat vorherigen Schritt die Daten ja bereits erhalten) geschickt. Dies macht man immer so weiter bis der Porzessor seine Positionen an alle anderen Prozessoren einmal geschickt hat.

Für die Kommunikation in unserem Beispiel gilt: es müssen ziemlich große Datenmengen bewegt werden, dies muss schnell geschehen, und es darf keine Ausreißer in der Übermittlungszeit geben, da jeder Prozessor den neuen Zeitschritt erst ausführen kann, wenn er die Ergebnisse von **allen** anderen Prozessoren hat.

6.3 Synchronisation

Bei *message passing* ist es für jeden Prozessor einfach festzustellen, ob die anderen fertig sind. Wenn er von allen anderen Daten bekommen hat, kann es weiter gehen. Bei gemeinsamem Speicher ist das nicht so einfach. Hier muss eine explizite Synchronisation stattfinden. In einem Zeitschritt rechnen zunächst alle Prozessoren die Kräfte aus. Erst wenn alle damit fertig sind, dürfen die neuen Positionen berechnet werden. Wieder können die neuen Kräfte erst berechnet werden, wenn dies vollständig erledigt ist. Es ergeben sich also pro Zeitschritt zwei Synchronisationspunkte. Wie diese technisch realisiert werden, hängt von der Rechnerarchitektur ab. Eine Möglichkeit besteht darin, einen besonderen Speicherbereich für Statusinformation der Prozessoren vorzusehen, bei dem jeder Prozessor den gesamten Bereich lesen kann, aber nur auf seinem „eigenen“ schreiben. Dann kann jeder feststellen, ob die anderen fertig sind. Nachrichtenaustausch ist eine weitere Möglichkeit.

[9] `http://de.wikipedia.org/wiki/Message_Passing_Interface`

6.4 Latenz

Für viele Probleme müssen große Datenmengen zwischen den Prozessoren ausgetauscht werden, für manche nur kleine; bei gewissen Aufgabenstellungen müssen sehr oft Daten ausgetauscht werden, manchmal (wie z.B. beim Zählen der Erbsen) nur selten. Es gibt daher zwei verschiedene Anforderungen an die Kommunikation: große Bandbreite (viele Daten pro Zeit) und kurze Latenz (Zeit für die Vorbereitung der Nachrichtensendung). Von der Bandbreite ist ein LKW voller DVDs immer noch nicht zu schlagen, aber die Latenzzeit von einigen Stunden macht dies Verfahren für die meisten Zwecke unbrauchbar.
Für viele Probleme - auch für eine professionelle Simulation von Sternhaufen und Galaxien - muss der Datenaustausch in weniger als einer Millisekunde laufen. Das geht nur mit speziell angepassten, dedizierten und teuren Datenleitungen. Daher sind brauchbare Parallelrechner weit teurer als die gleiche Anzahl PCs nebeneinander, obwohl die addierte Leistung vieler PCs nicht schlecht ist.

6.5 Parallelrechner am JSC

Das JSC betreibt seit über 20 Jahren Parallelrechner. Der größte Rechner des JSC ist zur Zeit (6/2008) JUGENE, ein IBM BlueGene/P Rechner mit 65548 Prozessoren (4 Prozessoren pro Chip, 1 Chip pro Board, 32 Boards pro Einschub, 32 Einschübe pro Schrank, 16 Schränke). Die Prozessoren selbst sind mit $850\,MHz$ relativ langsam, ihr Vorteil ist der geringe Stromverbrauch. Dadurch hat der BlueGene/P aber ein sehr gutes Verhältnis von Rechenoperationen pro Wattsekunde. Die Kommunikationsleistung ist der Rechenleistung entsprechend. Jedes Board hat nach außen eine Verbindung mit $5.1\,GB/s$. Die Latenzzeit zum Nachbarn ist nur $100\,ns$, die Latenz bei Kommunikation quer durch den Rechner $3.2\,\mu s$. Damit können Probleme effizient gerechnet werden, bei denen in sehr kurzen Abständen – nach einigen tausend Rechenschritten – Daten ausgetauscht werden müssen. Bei Inbetriebnahme im Oktober 2007 war JUGENE der zweitschnellste Rechner der Welt, inzwischen ist er etwas abgerutscht aber immer noch Platz 1 in Europa.

Abbildung 7: Rechnerraum des JSC im FZJ

Daneben betreibt das JSC mehrere kleinere – aber immer noch beachtliche – Rechner für Anwendungen, die auf JUGENE nicht gut laufen, und zur Erprobung neuer Rechnerarchitekturen. 2009 soll ein großer Cluster installiert werden, der bei anderer Architektur JUGENE an Leistung übertreffen soll.

7 Das Online-Projekt und seine technische Realisierung

Das Online-Projekt „*Der Supercomputer als Teleskop - Die Sternenbewegung im Zeitraffer*“ teilt sich in drei Phasen auf (siehe dazu auch Abbildung 8):

1. In der ersten Phase sollt ihr in jedem simulierten Zeitschritt die Kräfte der Sterne untereinander berechnen. Der Server wird dann mit euren Daten den restlichen Integrationsschritt durchführen.
   Am Ende dieser ersten Phase werdet ihr merken, wieviel Aufwand es ist, bei steigender Anzahl von Sternen die Kräfte untereinander zu berechnen. Wir werden euch einen ersten Tipp geben, wie man diese Arbeit verkürzen kann.

2. Die Gruppen, die mit der ersten Phase *unterfordert* sind, werden dann nicht mehr nur die Kräfte auf die Sterne berechnen, sondern mit diesen Daten dann auch die Beschleunigungen und damit die neuen Geschwindigkeiten der Sterne berechnen. Die Positionsberechnung übernimmt dann immer noch der Server.

3. Die Gruppen, die zum Abschluss des Projektes dann den Server ganz ersetzen möchten, können dann in die dritte Phase wechseln, in der sie auch noch die Positionsberechnung übernehmen.

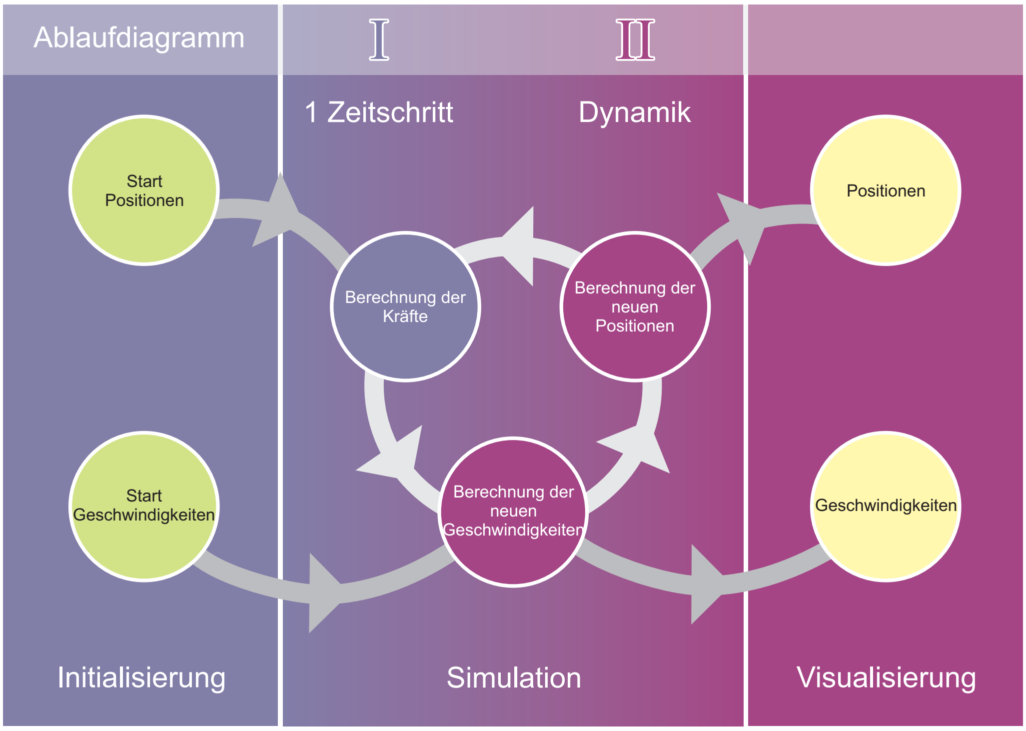

Abbildung 8: Ablauf einer Sternensimulation

7.1 Voraussetzungen

Um an diesem Online-Projekt teilnehmen zu können sind folgende Voraussetzungen zu erfüllen:

- Internet-Anschluss für den Download der Sterndaten und den anschließenden Datenabgleich
- Taschenrechner oder Computer
- Interesse an Mathematik und Freude am Lernen

Darüberhinaus ist es sinnvoll Arbeitsgruppen zu bilden, um die Berechnungen für den einzelnen Schüler abzukürzen, sofern nicht die Möglichkeit besteht, das zu lösende Problem programmtechnisch umzusetzen.

7.2 Ein Rechenbeispiel mit fünf Sternen

Um noch einmal klar zu machen, was wir in der ersten Phase unseres Online-Projektes berechnen, wollen wir noch einmal beispielhaft die Kräfte, die bei fünf Sternen untereinander wirken, bestimmen.
Die Ausgangssituation der Berechnung ist gegeben durch die Massen der Sterne und deren Positionen bezogen auf ein bestimmtes Koordinatensystem:

Stern	Masse	$X\ [m]$	$Y\ [m]$	$Z\ [m]$
1	$1.989 \cdot 10^{33}$	0.0	0.0	0.0
2	$6.419 \cdot 10^{26}$	$-2.5 \cdot 10^{11}$	0.0	$1.0 \cdot 10^{11}$
3	$5.974 \cdot 10^{27}$	0.0	$-1.5 \cdot 10^{11}$	$-2.0 \cdot 10^{11}$
4	$3.302 \cdot 10^{26}$	0.0	$5.0 \cdot 10^{10}$	0.0
5	$4.869 \cdot 10^{27}$	$1.1 \cdot 10^{11}$	0.0	$7.0 \cdot 10^{10}$

Nun wollen wir die Bewegungen dieser Sterne simulieren. Wie in den vorherigen Kapiteln deutlich geworden ist, benötigen wir für die Berechnung der neuen Positionen nur die aktuelle Position, sowie die Geschwindkeit in einem Zeitschritt:

$$\begin{aligned} x_{t_1} &= x_{t_0} + v_{x,t_0} \cdot \Delta t \\ y_{t_1} &= y_{t_0} + v_{y,t_0} \cdot \Delta t \\ z_{t_1} &= z_{t_0} + v_{z,t_0} \cdot \Delta t \end{aligned} \tag{16}$$

Sowohl die aktuelle Position als auch die aktuelle Geschwindigkeit und die Größe des Zeitschrittes sind bekannte Größen. Jedoch müssen wir auch die Geschwindigkeit zum neuen Zeitpunkt berechnen. Wie in den letzten Kapiteln kennengelernt, benötigen wir zur Geschwindigkeitsberechnung die Beschleunigung. Diese können wir aber über die Kraft mittels der Formel

$$\begin{aligned} F &= m \cdot a \\ \Leftrightarrow \quad a &= \tfrac{F}{m} \end{aligned}$$

bestimmen. Die Kraft auf ein Teilchen kann man über

$$\begin{aligned} F_{ij,x} &= -G\frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} \cdot (x_i - x_j) \\ F_{ij,y} &= -G\frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} \cdot (y_i - y_j) \\ F_{ij,z} &= -G\frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} \cdot (z_i - z_j) \end{aligned}$$

bestimmen. Mit diesen Formeln berechnen wir dann die Kraft, die der Stern j auf den Stern i in der jeweiligen Richtung ausübt.

Ihr sollt nun für alle Sterne in allen Richtungen die Kraftkomponenten berechnen, die auf die jeweiligen Sterne wirken:

Stern	$F_x\ [N]$	$F_y\ [N]$	$F_z\ [N]$
1			
2			
3			
4			
5			

Um die Gesamtkraft in x-Richtung für den Stern 1 zu berechnen benötigen wir zunächst die einzelnen

Kräfte, die von allen anderen Sternen (2-5) auf Stern 1 wirken:

$$F_{12,x} = -6.67428 \cdot 10^{-11} \frac{1.989 \cdot 10^{30} * 6.419 \cdot 10^{23}}{(2.69258 \cdot 10^{11})^3} \left(0.0 - -2.5 \cdot 10^{11}\right) = -1.09129 \cdot 10^{21}$$

$$F_{13,x} = -6.67428 \cdot 10^{-11} \frac{1.989 \cdot 10^{30} * 5.974 \cdot 10^{24}}{(2.5 \cdot 10^{11})^3} (0.0 - 0.0) = 0.0$$

$$F_{14,x} = -6.67428 \cdot 10^{-11} \frac{1.989 \cdot 10^{30} * 3.302 \cdot 10^{23}}{(5.0 \cdot 10^{10})^3} (0.0 - 0.0) = 0.0$$

$$F_{15,x} = -6.67428 \cdot 10^{-11} \frac{1.989 \cdot 10^{30} * 4.869 \cdot 10^{24}}{(1.30384 \cdot 10^{11})^3} \left(0.0 - 1.1 \cdot 10^{11}\right) = 3.20773 \cdot 10^{22}$$

Summiert man alle Einzelkräfte auf, so erhält man die x-Komponente der Kraft, die im aktuellen Zeitpunkt auf den Stern 1 wirkt.

$$\begin{aligned} F_{1,x} &= F_{12,x} + F_{13,x} + F_{14,x} + F_{15,x} \\ &= \underline{\underline{3.0986 \cdot 10^{22}}} \end{aligned}$$

Entsprechend müssen nun noch die anderen Kraftkomponenten berechnet werden:
Die Kraft in y-Richtung:

$$F_{12,y} = -6.67428 \cdot 10^{-11} \frac{1.989 \cdot 10^{30} * 6.419 \cdot 10^{23}}{(2.69258 \cdot 10^{11})^3} (0.0 - 0.0) = 0.0$$

$$F_{13,y} = -6.67428 \cdot 10^{-11} \frac{1.989 \cdot 10^{30} * 5.974 \cdot 10^{24}}{(2.5 \cdot 10^{11})^3} \left(0.0 - -1.5 \cdot 10^{11}\right) = -7.61335 \cdot 10^{21}$$

$$F_{14,y} = -6.67428 \cdot 10^{-11} \frac{1.989 \cdot 10^{30} * 3.302 \cdot 10^{23}}{(5.0 \cdot 10^{10})^3} \left(0.0 - 5.0 \cdot 10^{10}\right) = 1.75338 \cdot 10^{22}$$

$$F_{15,y} = -6.67428 \cdot 10^{-11} \frac{1.989 \cdot 10^{30} * 4.869 \cdot 10^{24}}{(1.30384 \cdot 10^{11})^3} (0.0 - 0.0) = 0.0$$

$$\begin{aligned} F_{1,y} &= F_{12,y} + F_{13,y} + F_{14,y} + F_{15,y} \\ &= \underline{\underline{9.92046 \cdot 10^{21}}} \end{aligned}$$

Die Kraft in z-Richtung:

$$F_{12,z} = -6.67428 \cdot 10^{-11} \frac{1.989 \cdot 10^{30} * 6.419 \cdot 10^{23}}{(2.69258 \cdot 10^{11})^3} \left(0.0 - 1.0 \cdot 10^{11}\right) = 4.36515 \cdot 10^{20}$$

$$F_{13,z} = -6.67428 \cdot 10^{-11} \frac{1.989 \cdot 10^{30} * 5.974 \cdot 10^{24}}{(2.5 \cdot 10^{11})^3} \left(0.0 - -2.0 \cdot 10^{11}\right) = -1.01511 \cdot 10^{22}$$

$$F_{14,z} = -6.67428 \cdot 10^{-11} \frac{1.989 \cdot 10^{30} * 3.302 \cdot 10^{23}}{(5.0 \cdot 10^{10})^3} (0.0 - 0.0) = 0.0$$

$$F_{15,z} = -6.67428 \cdot 10^{-11} \frac{1.989 \cdot 10^{30} * 4.869 \cdot 10^{24}}{(1.30384 \cdot 10^{11})^3} \left(0.0 - 7.0 \cdot 10^{10}\right) = 2.04128 \cdot 10^{22}$$

$$\begin{aligned} F_{1,z} &= F_{12,z} + F_{13,z} + F_{14,z} + F_{15,z} \\ &= \underline{\underline{1.06982 \cdot 10^{22}}} \end{aligned}$$

Nachdem nun die Kraft auf Stern 1 in allen Koordinaten berechnet wurde, müssen diese Berechnungen für die Sterne 2 bis 5 ebenfalls durchgeführt werden:

Stern 2:

Die Kraft in x-Richtung:

$$\begin{aligned}
F_{21,x} &= -6.67428 \cdot 10^{-11} \frac{6.419 \cdot 10^{23} * 1.989 \cdot 10^{30}}{(2.69258 \cdot 10^{11})^3} \left(-2.5 \cdot 10^{11} - 0.0\right) = 1.09129 \cdot 10^{21} \\
F_{23,x} &= -6.67428 \cdot 10^{-11} \frac{6.419 \cdot 10^{23} * 5.974 \cdot 10^{24}}{(4.1833 \cdot 10^{11})^3} \left(-2.5 \cdot 10^{11} - 0.0\right) = 8.74017 \cdot 10^{14} \\
F_{24,x} &= -6.67428 \cdot 10^{-11} \frac{6.419 \cdot 10^{23} * 3.302 \cdot 10^{23}}{(2.73861 \cdot 10^{11})^3} \left(-2.5 \cdot 10^{11} - 0.0\right) = 1.72186 \cdot 10^{14} \\
F_{25,x} &= -6.67428 \cdot 10^{-11} \frac{6.419 \cdot 10^{23} * 4.869 \cdot 10^{24}}{(3.61248 \cdot 10^{11})^3} \left(-2.5 \cdot 10^{11} - 1.1 \cdot 10^{11}\right) = 1.59294 \cdot 10^{15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{2,x} &= F_{21,x} + F_{23,x} + F_{24,x} + F_{25,x} \\
&= \underline{\underline{1.09129 \cdot 10^{21}}}
\end{aligned}$$

Die Kraft in y-Richtung:

$$\begin{aligned}
F_{21,y} &= -6.67428 \cdot 10^{-11} \frac{6.419 \cdot 10^{23} * 1.989 \cdot 10^{30}}{(2.69258 \cdot 10^{11})^3} (0.0 - 0.0) = 0.0 \\
F_{23,y} &= -6.67428 \cdot 10^{-11} \frac{6.419 \cdot 10^{23} * 5.974 \cdot 10^{24}}{(4.1833 \cdot 10^{11})^3} \left(0.0 - -1.5 \cdot 10^{11}\right) = -5.2441 \cdot 10^{14} \\
F_{24,y} &= -6.67428 \cdot 10^{-11} \frac{6.419 \cdot 10^{23} * 3.302 \cdot 10^{23}}{(2.73861 \cdot 10^{11})^3} \left(0.0 - 5.0 \cdot 10^{10}\right) = 3.44371 \cdot 10^{13} \\
F_{25,y} &= -6.67428 \cdot 10^{-11} \frac{6.419 \cdot 10^{23} * 4.869 \cdot 10^{24}}{(3.61248 \cdot 10^{11})^3} (0.0 - 0.0) = 0.0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{2,y} &= F_{21,y} + F_{23,y} + F_{24,y} + F_{25,y} \\
&= \underline{\underline{-4.89973 \cdot 10^{14}}}
\end{aligned}$$

Die Kraft in z-Richtung:

$$\begin{aligned}
F_{21,z} &= -6.67428 \cdot 10^{-11} \frac{6.419 \cdot 10^{23} * 1.989 \cdot 10^{30}}{(2.69258 \cdot 10^{11})^3} \left(1.0 \cdot 10^{11} - 0.0\right) = -4.36515 \cdot 10^{20} \\
F_{23,z} &= -6.67428 \cdot 10^{-11} \frac{6.419 \cdot 10^{23} * 5.974 \cdot 10^{24}}{(4.1833 \cdot 10^{11})^3} \left(1.0 \cdot 10^{11} - -2.0 \cdot 10^{11}\right) = -1.04882 \cdot 10^{15} \\
F_{24,z} &= -6.67428 \cdot 10^{-11} \frac{6.419 \cdot 10^{23} * 3.302 \cdot 10^{23}}{(2.73861 \cdot 10^{11})^3} \left(1.0 \cdot 10^{11} - 0.0\right) = -6.88743 \cdot 10^{13} \\
F_{25,z} &= -6.67428 \cdot 10^{-11} \frac{6.419 \cdot 10^{23} * 4.869 \cdot 10^{24}}{(3.61248 \cdot 10^{11})^3} \left(1.0 \cdot 10^{11} - 7.0 \cdot 10^{10}\right) = -1.32745 \cdot 10^{14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{2,z} &= F_{21,z} + F_{23,z} + F_{24,z} + F_{25,z} \\
&= \underline{\underline{-4.36517 \cdot 10^{20}}}
\end{aligned}$$

Stern 3:

Die Kraft in x-Richtung:

$$F_{31,x} = -6.67428 \cdot 10^{-11} \frac{5.974 \cdot 10^{24} * 1.989 \cdot 10^{30}}{(2.5 \cdot 10^{11})^3} (0.0 - 0.0) = 0.0$$

$$F_{32,x} = -6.67428 \cdot 10^{-11} \frac{5.974 \cdot 10^{24} * 6.419 \cdot 10^{23}}{(4.1833 \cdot 10^{11})^3} \left(0.0 - -2.5 \cdot 10^{11}\right) = -8.74017 \cdot 10^{14}$$

$$F_{34,x} = -6.67428 \cdot 10^{-11} \frac{5.974 \cdot 10^{24} * 3.302 \cdot 10^{23}}{(2.82843 \cdot 10^{11})^3} (0.0 - 0.0) = 0.0$$

$$F_{35,x} = -6.67428 \cdot 10^{-11} \frac{5.974 \cdot 10^{24} * 4.869 \cdot 10^{24}}{(3.27872 \cdot 10^{11})^3} \left(0.0 - 1.1 \cdot 10^{11}\right) = 6.05884 \cdot 10^{15}$$

$$\begin{aligned} F_{3,x} &= F_{31,x} + F_{32,x} + F_{34,x} + F_{35,x} \\ &= \underline{\underline{5.18482 \cdot 10^{15}}} \end{aligned}$$

Die Kraft in y-Richtung:

$$F_{31,y} = -6.67428 \cdot 10^{-11} \frac{5.974 \cdot 10^{24} * 1.989 \cdot 10^{30}}{(2.5 \cdot 10^{11})^3} \left(-1.5 \cdot 10^{11} - 0.0\right) = 7.61335 \cdot 10^{21}$$

$$F_{32,y} = -6.67428 \cdot 10^{-11} \frac{5.974 \cdot 10^{24} * 6.419 \cdot 10^{23}}{(4.1833 \cdot 10^{11})^3} \left(-1.5 \cdot 10^{11} - 0.0\right) = 5.2441 \cdot 10^{14}$$

$$F_{34,y} = -6.67428 \cdot 10^{-11} \frac{5.974 \cdot 10^{24} * 3.302 \cdot 10^{23}}{(2.82843 \cdot 10^{11})^3} \left(-1.5 \cdot 10^{11} - 5.0 \cdot 10^{10}\right) = 1.1637 \cdot 10^{15}$$

$$F_{35,y} = -6.67428 \cdot 10^{-11} \frac{5.974 \cdot 10^{24} * 4.869 \cdot 10^{24}}{(3.27872 \cdot 10^{11})^3} \left(-1.5 \cdot 10^{11} - 0.0\right) = 8.26205 \cdot 10^{15}$$

$$\begin{aligned} F_{3,y} &= F_{31,y} + F_{32,y} + F_{34,y} + F_{35,y} \\ &= \underline{\underline{7.61336 \cdot 10^{21}}} \end{aligned}$$

Die Kraft in z-Richtung:

$$F_{31,z} = -6.67428 \cdot 10^{-11} \frac{5.974 \cdot 10^{24} * 1.989 \cdot 10^{30}}{(2.5 \cdot 10^{11})^3} \left(-2.0 \cdot 10^{11} - 0.0\right) = 1.01511 \cdot 10^{22}$$

$$F_{32,z} = -6.67428 \cdot 10^{-11} \frac{5.974 \cdot 10^{24} * 6.419 \cdot 10^{23}}{(4.1833 \cdot 10^{11})^3} \left(-2.0 \cdot 10^{11} - 1.0 \cdot 10^{11}\right) = 1.04882 \cdot 10^{15}$$

$$F_{34,z} = -6.67428 \cdot 10^{-11} \frac{5.974 \cdot 10^{24} * 3.302 \cdot 10^{23}}{(2.82843 \cdot 10^{11})^3} \left(-2.0 \cdot 10^{11} - 0.0\right) = 1.1637 \cdot 10^{15}$$

$$F_{35,z} = -6.67428 \cdot 10^{-11} \frac{5.974 \cdot 10^{24} * 4.869 \cdot 10^{24}}{(3.27872 \cdot 10^{11})^3} \left(-2.0 \cdot 10^{11} - 7.0 \cdot 10^{10}\right) = 1.48717 \cdot 10^{16}$$

$$\begin{aligned} F_{3,z} &= F_{31,z} + F_{32,z} + F_{34,z} + F_{35,z} \\ &= \underline{\underline{1.01511 \cdot 10^{22}}} \end{aligned}$$

Stern 4:

Die Kraft in x-Richtung:

$$\begin{aligned}
F_{41,x} &= -6.67428 \cdot 10^{-11} \frac{3.302 \cdot 10^{23} * 1.989 \cdot 10^{30}}{(5.0 \cdot 10^{10})^3} (0.0 - 0.0) = 0.0 \\
F_{42,x} &= -6.67428 \cdot 10^{-11} \frac{3.302 \cdot 10^{23} * 6.419 \cdot 10^{23}}{(2.73861 \cdot 10^{11})^3} \left(0.0 - -2.5 \cdot 10^{11}\right) = -1.72186 \cdot 10^{14} \\
F_{43,x} &= -6.67428 \cdot 10^{-11} \frac{3.302 \cdot 10^{23} * 5.974 \cdot 10^{24}}{(2.82843 \cdot 10^{11})^3} (0.0 - 0.0) = 0.0 \\
F_{45,x} &= -6.67428 \cdot 10^{-11} \frac{3.302 \cdot 10^{23} * 4.869 \cdot 10^{24}}{(1.39642 \cdot 10^{11})^3} \left(0.0 - 1.1 \cdot 10^{11}\right) = 4.33473 \cdot 10^{15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{4,x} &= F_{41,x} + F_{42,x} + F_{43,x} + F_{45,x} \\
&= \underline{\underline{4.16254 \cdot 10^{15}}}
\end{aligned}$$

Die Kraft in y-Richtung:

$$\begin{aligned}
F_{41,y} &= -6.67428 \cdot 10^{-11} \frac{3.302 \cdot 10^{23} * 1.989 \cdot 10^{30}}{(5.0 \cdot 10^{10})^3} \left(5.0 \cdot 10^{10} - 0.0\right) = -1.75338 \cdot 10^{22} \\
F_{42,y} &= -6.67428 \cdot 10^{-11} \frac{3.302 \cdot 10^{23} * 6.419 \cdot 10^{23}}{(2.73861 \cdot 10^{11})^3} \left(5.0 \cdot 10^{10} - 0.0\right) = -3.44371 \cdot 10^{13} \\
F_{43,y} &= -6.67428 \cdot 10^{-11} \frac{3.302 \cdot 10^{23} * 5.974 \cdot 10^{24}}{(2.82843 \cdot 10^{11})^3} \left(5.0 \cdot 10^{10} - -1.5 \cdot 10^{11}\right) = -1.1637 \cdot 10^{15} \\
F_{45,y} &= -6.67428 \cdot 10^{-11} \frac{3.302 \cdot 10^{23} * 4.869 \cdot 10^{24}}{(1.39642 \cdot 10^{11})^3} \left(5.0 \cdot 10^{10} - 0.0\right) = -1.97033 \cdot 10^{15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{4,y} &= F_{41,y} + F_{42,y} + F_{43,y} + F_{45,y} \\
&= \underline{\underline{-1.75338 \cdot 10^{22}}}
\end{aligned}$$

Die Kraft in z-Richtung:

$$\begin{aligned}
F_{41,z} &= -6.67428 \cdot 10^{-11} \frac{3.302 \cdot 10^{23} * 1.989 \cdot 10^{30}}{(5.0 \cdot 10^{10})^3} (0.0 - 0.0) = 0.0 \\
F_{42,z} &= -6.67428 \cdot 10^{-11} \frac{3.302 \cdot 10^{23} * 6.419 \cdot 10^{23}}{(2.73861 \cdot 10^{11})^3} \left(0.0 - 1.0 \cdot 10^{11}\right) = 6.88743 \cdot 10^{13} \\
F_{43,z} &= -6.67428 \cdot 10^{-11} \frac{3.302 \cdot 10^{23} * 5.974 \cdot 10^{24}}{(2.82843 \cdot 10^{11})^3} \left(0.0 - -2.0 \cdot 10^{11}\right) = -1.1637 \cdot 10^{15} \\
F_{45,z} &= -6.67428 \cdot 10^{-11} \frac{3.302 \cdot 10^{23} * 4.869 \cdot 10^{24}}{(1.39642 \cdot 10^{11})^3} \left(0.0 - 7.0 \cdot 10^{10}\right) = 2.75846 \cdot 10^{15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{4,z} &= F_{41,z} + F_{42,z} + F_{43,z} + F_{45,z} \\
&= \underline{\underline{1.66364 \cdot 10^{15}}}
\end{aligned}$$

Stern 5:

Die Kraft in x-Richtung:

$$
\begin{aligned}
F_{51,x} &= -6.67428 \cdot 10^{-11} \frac{4.869 \cdot 10^{24} * 1.989 \cdot 10^{30}}{(1.30384 \cdot 10^{11})^3} \left(1.1 \cdot 10^{11} - 0.0\right) = -3.20773 \cdot 10^{22} \\
F_{52,x} &= -6.67428 \cdot 10^{-11} \frac{4.869 \cdot 10^{24} * 6.419 \cdot 10^{23}}{(3.61248 \cdot 10^{11})^3} \left(1.1 \cdot 10^{11} - -2.5 \cdot 10^{11}\right) = -1.59294 \cdot 10^{15} \\
F_{53,x} &= -6.67428 \cdot 10^{-11} \frac{4.869 \cdot 10^{24} * 5.974 \cdot 10^{24}}{(3.27872 \cdot 10^{11})^3} \left(1.1 \cdot 10^{11} - 0.0\right) = -6.05884 \cdot 10^{15} \\
F_{54,x} &= -6.67428 \cdot 10^{-11} \frac{4.869 \cdot 10^{24} * 3.302 \cdot 10^{23}}{(1.39642 \cdot 10^{11})^3} \left(1.1 \cdot 10^{11} - 0.0\right) = -4.33473 \cdot 10^{15}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{5,x} &= F_{51,x} + F_{52,x} + F_{53,x} + F_{54,x} \\
&= \underline{\underline{-3.20773 \cdot 10^{22}}}
\end{aligned}
$$

Die Kraft in y-Richtung:

$$
\begin{aligned}
F_{51,y} &= -6.67428 \cdot 10^{-11} \frac{4.869 \cdot 10^{24} * 1.989 \cdot 10^{30}}{(1.30384 \cdot 10^{11})^3} (0.0 - 0.0) = 0.0 \\
F_{52,y} &= -6.67428 \cdot 10^{-11} \frac{4.869 \cdot 10^{24} * 6.419 \cdot 10^{23}}{(3.61248 \cdot 10^{11})^3} (0.0 - 0.0) = 0.0 \\
F_{53,y} &= -6.67428 \cdot 10^{-11} \frac{4.869 \cdot 10^{24} * 5.974 \cdot 10^{24}}{(3.27872 \cdot 10^{11})^3} \left(0.0 - -1.5 \cdot 10^{11}\right) = -8.26205 \cdot 10^{15} \\
F_{54,y} &= -6.67428 \cdot 10^{-11} \frac{4.869 \cdot 10^{24} * 3.302 \cdot 10^{23}}{(1.39642 \cdot 10^{11})^3} \left(0.0 - 5.0 \cdot 10^{10}\right) = 1.97033 \cdot 10^{15}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{5,y} &= F_{51,y} + F_{52,y} + F_{53,y} + F_{54,y} \\
&= \underline{\underline{-6.29172 \cdot 10^{15}}}
\end{aligned}
$$

Die Kraft in z-Richtung:

$$
\begin{aligned}
F_{51,z} &= -6.67428 \cdot 10^{-11} \frac{4.869 \cdot 10^{24} * 1.989 \cdot 10^{30}}{(1.30384 \cdot 10^{11})^3} \left(7.0 \cdot 10^{10} - 0.0\right) = -2.04128 \cdot 10^{22} \\
F_{52,z} &= -6.67428 \cdot 10^{-11} \frac{4.869 \cdot 10^{24} * 6.419 \cdot 10^{23}}{(3.61248 \cdot 10^{11})^3} \left(7.0 \cdot 10^{10} - 1.0 \cdot 10^{11}\right) = 1.32745 \cdot 10^{14} \\
F_{53,z} &= -6.67428 \cdot 10^{-11} \frac{4.869 \cdot 10^{24} * 5.974 \cdot 10^{24}}{(3.27872 \cdot 10^{11})^3} \left(7.0 \cdot 10^{10} - -2.0 \cdot 10^{11}\right) = -1.48717 \cdot 10^{16} \\
F_{54,z} &= -6.67428 \cdot 10^{-11} \frac{4.869 \cdot 10^{24} * 3.302 \cdot 10^{23}}{(1.39642 \cdot 10^{11})^3} \left(7.0 \cdot 10^{10} - 0.0\right) = -2.75846 \cdot 10^{15}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{5,z} &= F_{51,z} + F_{52,z} + F_{53,z} + F_{54,z} \\
&= \underline{\underline{-2.04129 \cdot 10^{22}}}
\end{aligned}
$$

Zusammengefasst erhalten wir folgende Ergebnisse:

Stern	$F_x\ [N]$	$F_y\ [N]$	$F_z\ [N]$
1	$3.098604674069550 \cdot 10^{22}$	$9.92046120354432 \cdot 10^{21}$	$1.0698235014971604 \cdot 10^{22}$
2	$1.091291142293450 \cdot 10^{21}$	$-4.89973154789005 \cdot 10^{14}$	$-4.3651665170138746 \cdot 10^{20}$
3	$5.184821738124179 \cdot 10^{15}$	$7.61335751535684 \cdot 10^{21}$	$1.0151147171140103 \cdot 10^{22}$
4	$4.162544163633999 \cdot 10^{15}$	$-1.75338119372067 \cdot 10^{22}$	$1.6636368478541998 \cdot 10^{15}$
5	$-3.207734723035484 \cdot 10^{22}$	$-6.29172128394707 \cdot 10^{15}$	$-2.0412867198047167 \cdot 10^{22}$

Mit Hilfe dieser Ergebnisse können wir anschließend die aktuellen Beschleunigungen in allen drei Koordinaten berechnen und damit die Momentangeschwindigkeiten im nächsten Iterationsschritt. Aber diese Berechnungen überlassen wir nach so viel Anstrengung zunächst dem Supercomputer.

7.3 Formatierung der Ein- und Ausgabedateien

Nachdem wir nun wissen, was wir zu berechnen haben, wollen wir uns abschließend noch einmal die Formate ansehen, in denen wir unsere Daten bekommen, bzw. in denen wir die Daten wieder an den Server zurückschicken.
Als Ausgangssitution erhalten die Teilnehmer zunächst eine Textdatei (über den Download-Bereich) in dem wie in Abbildung 9 gezeigten Format.

```
1  1.989E30   0.0      0.0      0.0
2  6.419E23  -2.5E11   0.0      1.0E11
3  5.974E24   0.0     -1.5E11  -2.0E11
4  3.302E23   0.0      5.0E10   0.0
5  4.869E24   1.1E11   0.0      7.0E10
```

Abbildung 9: Beispiel für einen möglichen Startdatensatz

Die erste Spalte enthält den Index des jeweiligen Sterns, die zweite die zugehörige Masse in kg, die dritte die X-, die vierte die Y- und die fünfte die Z-Koordinate des entsprechenden Sterns. Über diese Eingabedatei erhält man folglich die Massen und die kartesischen Positionen der benötigten Sterne.
Nach der Berechnung sollte folgende Ergebnisdatei erzeugt werden:

```
1  3.0986046740695496E22  9.92046120354432E21    1.0698235014971604E22
2  1.0912911422934496E21 -4.8997315478900475E14 -4.3651665170138746E20
3  5.184821738124179E15   7.613357515356839E21   1.0151147171140103E22
4  4.162544163633999E15  -1.7533811937206721E22  1.6636368478541998E15
5 -3.2077347230354843E22 -6.291721283947074E15  -2.0412867198047167E22
```

Abbildung 10: Ergebnisdaten zum Beispieldatensatz aus Abbildung 9

Die erste Spalte sollte einfach die Indizes der Sterne in der Reihenfolge enthalten, die aus der Eingabedatei zu entnehmen ist. Die Spalten zwei bis vier enthalten nun die Kraftkomponenten F_x, F_y und F_z der jeweiligen Sterne. Die Werte der Komponenten müssen als Fließkommazahlen mit einem optionalen Exponenten angegeben werden. Dieser muss durch ein e, E, d oder D von der restlichen Zahl getrennt werden. (Beispiele sind oben zu sehen, der Exponent kann aber auch entfallen, so dass auch Zahlen wie 0.0007234 erlaubt sind.)
Bei den Rechnungen mit solchen Zahlen kann es bei euren Rechnungen zu kleinen Rechenungenauigkeiten kommen. Beim Datenabgleich wird darüber hinweggesehen. Solltet ihr euch aber einmal verrechnet haben,

so dass eure Daten zu stark von den korrekten Ergebnissen abweichen, bekommt ihr eine Meldung, welche Daten ihr noch einmal nachrechnen solltet.
Eine so formatierte Datei sollte dann im vorgegebenen Zeitfenster im persönlichen Login-Bereich hochgeladen und mit den tatsächlichen Ergebnissen abgeglichen werden. ihr erhaltet dann eine entsprechende Analyse eurer Daten und eine Prozentangabe, welche aussagt, zu welchen Teilen die abgeschickten Ergebnisse mit den korrekten Ergebnissen übereinstimmen.