Operaciones lógicas

Objetivos del módulo

Esta unidad es la base de la Matemática, proporciona herramientas para la Teoría de Conjuntos, el Álgebra de Boole y para la programación en distintos lenguajes.

Luego de completar el estudio de este módulo, el alumno será capaz de:

- Reconocer los símbolos de la lógica proposicional.
- Conocer las leyes lógicas, sus relaciones y aplicaciones.
- Analizar la validez de un razonamiento deductivo.
- Usar cuantificadores para funciones proposicionales.

¿Qué es la lógica?

El objetivo de la lógica es fijar pautas que permitan reconocer la validez de un argumento. Para ello, se la define como una lengua formada por un sistema de signos con reglas para su empleo, ya que el lenguaje ordinario, lleno de ambigüedades, haría muy difícil cumplir el objetivo de la lógica. La lógica que estudiaremos es bivalente, ya que toda proposición tiene solo dos posibilidades de ser clasificada: verdadera (V) o falsa (F). Para esto, la lógica:

- Elimina todo tipo de imprecisiones mediante la incorporación de símbolos y conectivos, cuyo uso adecuado aporta claridad y economía de pensamiento
- Determina reglas de inferencia que permitan decidir la validez de un razonamiento.
- Evalúa el valor de verdad.

Así como en el lenguaje coloquial la unidad es la oración, en lógica hablamos de **proposición**.

Proposición*:* Es una oración declarativa o descriptiva. Es toda oración o sucesión de palabras que se pueda afirmar como veraz o falsa.

Notación*:* Designaremos a las proposiciones con letras minúsculas, como por ejemplo p, q, r, s, etc.

Ejemplos

- p: “La matemática es una ciencia exacta”, es una proposición de la que podemos decir que es VERDADERA.
- q: “7 + 5 = 9”, es una proposición de la que podemos decir que es FALSA.
- “Cierre la puerta” es una oración imperativa de la que no podemos decir si es verdadera o falsa, por lo tanto no es una proposición.
- r: “El sol es cuadrado”, es una proposición de la que podemos decir que es FALSA.
- s: “4 es un número par”, es una proposición de la que podemos decir que es VERDADERA.
- “¿Qué día de la semana es hoy?” no es una proposición pues es una pregunta.
- “Estudiá” no es una proposición pues es una orden.

Valor de verdad de una proposición

- Si una proposición es verdadera diremos que su valor de verdad es **verdadero**.

Ejemplo: p: "el gato tiene cuatro patas” → v(p) = V Se lee: “el valor de verdad de p es verdadero”.

- Si una proposición es falsa diremos que su valor de verdad es **falso**.

Ejemplo: q: “el sol es cuadrado” → v(q) = F Se lee: “el valor de verdad de q es falso”.

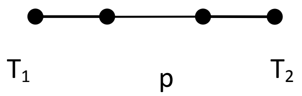
Representación gráfica de una proposición

Circuito lógico (crónico)

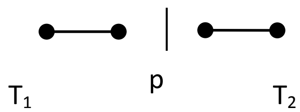
Una proposición se puede representar como el interruptor de circuito eléctrico que consta de dos terminales, a través del cual pasa o no la corriente.

T_1 Interruptor

Si el valor de verdad de p es verdadero, el interruptor se cierra y circula la corriente.



Si el valor de verdad de p es falso, el interruptor se abre para que no circule la corriente.



Operador lógico

La unidad aritmético-lógica de una computadora es la encargada de realizar las operaciones de tipo aritmético y lógico. El **operador lógico** es un circuito electrónico capaz de realizar una operación lógica. Las operaciones lógicas que, generalmente se encuentran en las computadoras, son las siguientes: NOT, OR, AND y XOR.

En esta unidad, veremos la equivalencia entre las operaciones lógicas matemáticas con los operadores lógicos que usa una computadora, junto con su representación gráfica.

Proposición simple

Se denomina así cuando no se puede descomponer en proposiciones más simples.

Ejemplos: "Una mosca mide 9 Km" o "Sócrates es griego".

Proposición compuesta

Se denomina así cuando se trata de una combinación de proposiciones simples enlazadas por conectivos lógicos.

Ejemplos

- "Juan irá al cine y María irá a tomar el té". En ese caso, podemos descomponer la proposición compuesta en dos proposiciones simples:

p: Juan irá al cine

q: María irá a tomar el té

- “Llueve o sale el sol”. En este caso, las dos proposiciones simples serían:

r: llueve

s: sale el sol

- “**Si** obtengo buenas calificaciones**,** apruebo la materia”. Aquí las proposiciones serían:

t: obtengo buenas calificaciones

u: apruebo la materia

Operaciones lógicas con proposiciones

A partir de proposiciones simples es posible generar otras, simples o compuestas. Es decir, se puede operar con proposiciones a través de símbolos denominados conectivos lógicos.
El valor de verdad de las proposiciones compuestas está dado por el valor de verdad de las proposiciones simples que las componen y las formas en que estas se combinan. Dichas combinaciones dan origen a las operaciones lógicas, cuyo valor de verdad resultante puede mostrarse en una tabla de verdad. Las tablas de verdad muestran todas las combinaciones posibles entre los valores de verdad de las proposiciones simples que intervienen en la operación.
Se tendrán en cuenta dos principios que ayudarán a formar las tablas de verdad:

1. Toda proposición puede ser verdadera o falsa: existen **dos estados** para cada proposición**.**

2. El **valor de verdad** de toda proposición compuesta está determinado por el valor de verdad de las proposiciones que la componen.

Los valores de verdad también pueden indicarse en sistema binario con **1** para indicar verdadero y **0** para indicar falso.

Para una proposición compuesta de dos proposiciones simples entonces tendremos la siguiente combinación:

p	Valor de la operación	q
V		V
V		F
F		V
F		F

Para no olvidarnos de ninguna opción, podemos asignarle a **p** dos verdaderos y dos falsos, y a **q** se le asigna un verdadero y un falso alternativamente.

¿Puede calcular cuántas combinaciones deberá tener la tabla de verdad de una proposición compuesta por tres proposiciones simples? ¿Y por cuatro?

En general, si una proposición está compuesta por ***n*** proposiciones simples, la tabla de verdad correspondiente a la misma deberá tener 2^n combinaciones.

Las operaciones lógicas son las siguientes:

1. Negación lógica

Se niega la proposición **p** colocando la palabra "no" al comienzo de la proposición o intercalándola dentro de la proposición.

Notación: ~ p, ¬p, - p

Se lee: "no p", "no es cierto que p", "no es verdad que p".

Operador lógico: El operador negación se llama "**NOT**" y se simboliza

→ p

•→ ~p

Observación: esta operación lógica se corresponde en el álgebra de Boole con la función inversa y en teoría de conjuntos con la complementación.

Ejemplo

p: "siete es un número primo". v (p) = V

¬p: “siete no es un número primo”. v (¬p) = F

Nota: la negación es un conectivo unitario o singular porque se aplica a una proposición.

Valor de verdad: El valor de verdad de ¬**p**, es **contrario** al valor de **p**.

Tabla de valores de verdad o tabla en sistema binario

Al ser un conectivo unitario la proposición puede ser:

p	**~p**
V	F
F	V

p	**~p**
1	0
0	1

Ejemplo: Expresar en forma simbólica, negar y luego escribir en lenguaje coloquial la negación de las siguientes proposiciones:

a. El pizarrón no es blanco

Expresado en forma simbólica: p

Negado: ~p

Escribir en lenguaje coloquial la negación: El pizarrón es blanco

b. 2 es menor que 1

Expresado en forma simbólica: q

Negado: ~q

Escribir en lenguaje coloquial la negación: 2 es mayor o igual que 1

c. Los números primos son infinitos

Expresado en forma simbólica: r

Negado: ~r

Escribir en lenguaje coloquial la negación: los números primos son finitos

2. Conjunción lógica

Dadas dos proposiciones, se llama conjunción de las mismas a la proposición que se obtiene colocando: “y “,”pero”, “aunque”, “sin embargo” entre las dos proposiciones.

Notación: “p $\wedge$ q” o “p $\bullet$ q”

Ejemplo

p: “Juan es bueno”.

q: “Juan es estudioso”.

p $\wedge$ q: “Juan es bueno y estudioso"

Nota: la conjunción es un conectivo binario porque se aplica entre dos proposiciones.

Valor de verdad: El valor de verdad de "p $\wedge$ q" es verdadero solo si los valores de verdad de p y q son ambos verdaderos; en todos los otros casos es falso.

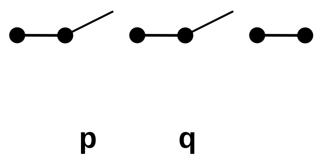
Pensemos en el siguiente ejemplo: “Alquilaré el departamento si es luminoso y amplio.”
De esta afirmación podemos deducir que no alquilaré el departamento (la afirmación es falsa) en los casos en los que sea luminoso pero no amplio (amplio es falso), o que sea amplio pero no sea luminoso (luminoso falso) o que no sea ni amplio ni luminoso (ambos son falsos).

Tabla de valores de verdad

p	$\wedge$	q
V	V	V
V	F	F
F	F	V
F	F	F

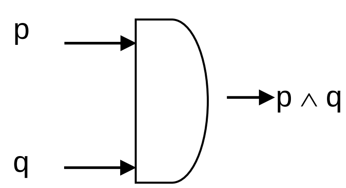
Observación: Esta operación lógica se corresponde en el álgebra de Boole con la función producto lógico y en conjuntos con la intersección.

Representación gráfica: Se denomina **circuito en serie,** y por él solo circula la corriente de una terminal a la otra cuando ambos interruptores (que son los que representan las proposiciones) están cerrados (las dos son verdaderas).



Circuito en serie

Operador lógico: Se llama **"AND"** y su representación es la siguiente



3. Disyunción inclusiva

Dadas dos proposiciones, p y q, se llama disyunción inclusiva de las proposiciones p y q a la proposición que se obtiene colocando: "o ","o bien", "p o q o ambas", entre las dos proposiciones.

Notación: "$p \vee q$" o "$p + q$"

Nota: la disyunción inclusiva es un conectivo binario porque se aplica a dos proposiciones.

Valor de verdad: El valor de verdad de "$p \vee q$" es falso si los valores de verdad de p y q son ambos falsos; en todos los otros casos es verdadero.

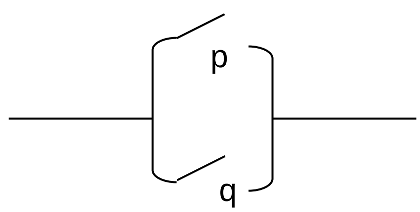
Ejemplo: "Salgo con paraguas los días nublados **o** lluviosos".

De esta afirmación podemos deducir que saldré sin paraguas (la afirmación es falsa) si el día no se presenta ni nublado ni lluvioso (solo cuando las dos proposiciones son falsas).

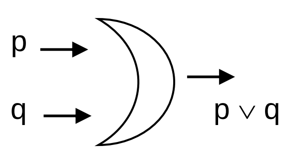
Tabla de valores de verdad

p	*∨*	*q*
V	*V*	*V*
V	*V*	*F*
F	*V*	*V*
F	*F*	*F*

Representación gráfica: Se denomina **circuito en paralelo,** y por él circula la corriente de una terminal a la otra cuando, al menos, uno de los interruptores (proposiciones) están cerrados (una de las dos es verdadera).



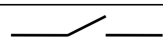
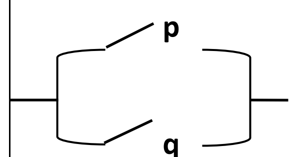
Operador lógico: Se llama "**OR**" y su representación gráfica es la siguiente.



Esta operación lógica se corresponde en el álgebra de Boole con la función suma lógica y en conjuntos con la unión.

Observación: La negación, la conjunción y la disyunción inclusiva son las únicas operaciones que tienen representación gráfica propia.

Síntesis

<table>
<tr><th>Operación lógica</th><th colspan="2">Negación</th><th colspan="3">Conjunción</th><th colspan="3">Disyunción incluyente</th></tr>
<tr><td>Notación</td><td>p</td><td>~p</td><td>p</td><td>q</td><td>p ∧ q</td><td>p</td><td>q</td><td>p ∨ q</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Tabla de valores de verdad</td><td rowspan="2">V</td><td rowspan="2">F</td><td>V</td><td>V</td><td>V</td><td>V</td><td>V</td><td>V</td></tr>
<tr><td>V</td><td>F</td><td>F</td><td>V</td><td>F</td><td>V</td></tr>
<tr><td rowspan="2">F</td><td rowspan="2">V</td><td>F</td><td>V</td><td>F</td><td>F</td><td>V</td><td>V</td></tr>
<tr><td>F</td><td>F</td><td>F</td><td>F</td><td>F</td><td>F</td></tr>
<tr><td>Conectivo extensional</td><td colspan="2">Monádico
<u>no</u> p
<u>no es cierto</u> p
<u>no es verdad</u> p</td><td colspan="3">p <u>y</u> q
p <u>pero</u> q
p <u>aunque</u> q
p <u>sin embargo</u> q</td><td colspan="3">p <u>o</u> q
p <u>o</u> q <u>o ambos</u></td></tr>
<tr><td>Circuito lógico</td><td colspan="2">
~p</td><td colspan="3">
p q
Circuito en serie</td><td colspan="3">
Circuito en paralelo</td></tr>
</table>

4. Implicación material o condicional

Se llama implicación material de las proposiciones p y q, dadas en ese orden, a la proposición que se obtiene enunciando “p **implica** q”, “**si** p **entonces** q”, “**aunque**” o “**sin embargo**” entre las dos proposiciones.

Notación **p** (**antecedente**) $\longrightarrow$ **q** (**consecuente**)

Nota: la implicación material es un conectivo binario porque se aplica a dos proposiciones.

Valor de verdad: El valor de verdad de p → q es falso si el valor de verdad de p es verdadero y el valor de verdad de q es falso; en todos los otros casos es verdadero.

Tabla de valores de verdad

p	$\rightarrow$	q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F

Condiciones necesaria y suficiente

Cuando la **implicación es verdadera** (filas 1, 3, 4) se dice que:

- **Es suficiente** que **p sea verdadera** para que **q también lo sea** (fila 1).
- Que **q sea verdadera** es **condición necesaria, pero no suficiente** para que **p** también lo sea**.** (Filas 1 y 3)

Ejemplo

p: "abc es un triángulo equilátero" q: "abc es un triángulo isósceles"

$p \rightarrow q$: "Si abc es un triángulo equilátero, entonces es isósceles"

Si enunciamos el ejemplo como condiciones necesaria y suficiente, suponiendo que la implicación es verdadera:

- Que abc sea un triángulo equilátero es **suficiente** para afirmar que abc es un triángulo isósceles. Que un triángulo tenga los tres lados iguales es suficiente para afirmar que tiene dos lados iguales.
- Que abc sea un triángulo isósceles es **necesario** para que sea equilátero, pero no suficiente. Que un triángulo tenga dos lados iguales es necesario para que pueda tener los tres iguales, pero no es suficiente.

Esta operación lógica se corresponde en conjuntos con **la inclusión**.

Representación gráfica: El circuito lógico de la implicación material se corresponde usando la proposición **($\sim p \vee q$)**, ya que tiene el mismo valor de verdad.

Relación entre antecedente y consecuente

Implicación causal: si el antecedente (p) es la causa que produce como efecto el consecuente (q).

Se aplica en el área biomédica, por ejemplo, si una persona tiene tales síntomas entonces tiene esta enfermedad.

Implicación formal: Del antecedente (p) se deduce el consecuente (q).

<u>Importante</u>: La **implicación matemática** es siempre **formal.**

Este tipo de implicación es la que se usa en las demostraciones, donde el antecedente es la hipótesis y el consecuente la tesis.

Implicación material: no hay relación entre antecedente y consecuente.
Por ejemplo, si $2 + 3 = 5 \rightarrow$ llueve

5. Doble implicación material o bicondicional

Se llama equivalencia material de las proposiciones p y q a la proposición que se obtiene enunciando: "p **sí y solo sí** q", "p **es condición necesaria y suficiente para** q", "p **equivale a** q".

Notación: "$p \leftrightarrow q$"

Ejemplo

p: "2 + 4 = 6"

q: "2 * 3 = 6"

$p \leftrightarrow q$: "2 + 4 = 6 sí y sólo si 2 * 3 = 6"

Nota: la equivalencia material es un conectivo binario porque se aplica a dos proposiciones.

Valor de verdad: El valor de verdad de $p \leftrightarrow q$ es **verdadera** si **el valor de verdad de p y el valor de verdad de q coinciden**; en todos los otros casos es falso.

Tabla de verdad

p	$\leftrightarrow$	q
V	V	V
V	F	F
F	F	V
F	V	F

Esta operación lógica se corresponde en conjuntos con la igualdad.

Representación gráfica: el circuito lógico de la doble implicación se corresponde a la doble implicación usando la proposición **(~p $\vee$ q)** $\wedge$ **(~q $\vee$ p)**, ya que tiene la misma tabla de verdad.

6. Disyunción excluyente

Se llama disyunción excluyente de las proposiciones p y q a la proposición que se obtiene enunciando: "p **o** q **pero no ambos**", "p **a menos** q", "p **salvo que** q".

Notación: p $\underline{\vee}$ q

Ejemplo

p: "El sol es amarillo". q: "el sol es cuadrado".

p $\underline{\vee}$ q: "El sol es amarillo salvo que sea cuadrado".

Nota: la disyunción excluyente es un conectivo binario porque se aplica a dos proposiciones.

Valor de Verdad: El valor de verdad de p $\underline{\vee}$ q es **verdadera** si los valores de verdad de p y q son **distintos**, en todos los otros casos es falso.

Ejemplo: "Si el equipo gana **o** empata el partido es campeón".

Si el equipo no gana ni empata (ambas proposiciones son falsas) el equipo no será campeón. Además, las dos opciones no pueden ser verdaderas al mismo tiempo: si el equipo gana no empata y viceversa, con lo cual la afirmación (en este caso) será falsa.

Tabla de verdad

p	$\veebar$	q
V	F	V
V	V	F
F	V	V
F	F	F

Esta operación lógica se corresponde en conjuntos con la **diferencia simétrica.**

Representación gráfica: el circuito lógico de la disyunción excluyente es correspondiente a la doble implicación usando la proposición **$(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$**, ya que tiene la misma tabla de verdad.

Síntesis

Implicación material	Doble implicación material	Disyunción excluyente
p q p → q V V **V** **V F F** F V **V** F F **V**	**p q p ↔ q** V V **V** V F **F** F V **F** F F **V**	**p q p $\veebar$ q** V V **F** V F **V** F V **V** F F **F**
p <u>implica</u> q **<u>si</u> p <u>entonces</u> q** **p <u>es condición suficiente para</u> q** **q, <u>si</u> p** **q <u>se deduce de</u> p** **q <u>es condición necesaria para</u> p** **p <u>solo si</u> q** **q <u>, cuando</u> p** **q <u>siempre que</u> p** **q <u>con la condición de que</u> p**	**p <u>si y solo si</u> q** **p <u>es condición necesaria y suficiente para</u> q** **q <u>si y solo si</u> p** **q <u>es condición necesaria y suficiente para</u> p** **Si p entonces q y recíprocamente** **Si q entonces p y recíprocamente**	**p <u>o</u> q <u>pero no ambos</u>** **p <u>a menos</u> q** **p <u>salvo que</u> q** **<u>o</u> p <u>o</u> q** **p <u>o bien</u> q**

Observación

Orden de ligación en proposiciones compuestas:

1) $\sim$
2) $\wedge$ $\vee$ ( )
3) $\rightarrow$ [ ]
4) $\leftrightarrow$ $\underline{\vee}$

Clasificación de las proposiciones compuestas

De acuerdo a los valores de verdad obtenidos en la tabla de una proposición compuesta, podemos clasificarla en:

a. Contradicción: Es una proposición compuesta siempre falsa, cualesquiera fueran los valores de verdad de las proposiciones que la componen.

Ejemplo: $p \wedge \sim p$

p	$\wedge$	~p
V	F	F
F	F	V

La proposición $p \wedge \sim p$ es una contradicción.

b. Contingencia: Es una proposición compuesta en cuya tabla de valores de verdad aparecen verdaderos y falsos.

Ejemplo: $p \rightarrow (q \wedge p)$

p	$\rightarrow$	(q	$\wedge$	p)
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	F

F	V	F	F	F

La proposición $p \rightarrow (q \wedge p)$ es una contingencia.

c. Tautología: es una proposición compuesta siempre verdadera, cualesquiera fueran los valores de verdad de las proposiciones que la componen.

Ejemplo: $(p \wedge \sim q) \rightarrow (q \vee p)$

(p	$\wedge$	$\sim$	q)	$\rightarrow$	(q	$\vee$	p)
V	F	F	V	V	V	V	V
V	V	V	F	V	F	V	V
F	F	F	V	V	V	V	F
F	F	V	F	V	F	F	F

La proposición $(p \wedge \sim q) \rightarrow (q \vee p)$ es una tautología.

Equivalencia: Se denomina así al bicondicional tautológico (cuando la doble implicación es siempre verdadera) y su notación es $\Leftrightarrow$ o ⍰. En p $\Leftrightarrow$ ⍰ q, p se denomina primer miembro y q segundo miembro.

Implicación: Se denomina así al condicional tautológico (cuando el condicional es siempre verdadero) y su notación es $\Rightarrow$.

Ley lógica o equivalencia lógica

Las leyes lógicas nos permiten reemplazar proposiciones compuestas por otras más simples que son equivalentes, con el fin de simplificarlas.

Idempotencia	$p \wedge p \Leftrightarrow p$ $p \vee p \Leftrightarrow p$
Ley de la doble negación	$\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$
Leyes asociativas **de la conjunción y la disyunción**	$[p \wedge (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \wedge r]$ $[p \vee (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \vee r]$
Leyes distributivas **de la conjunción respecto de la disyunción** **y viceversa**	$[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$ $[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$
Leyes conmutativas	$(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$

de la conjunción y la disyunción	$(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$
Leyes de absorción	$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$
Equivalencia para la implicación	$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$
Ley de la contra recíproca	$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$ $(q \rightarrow p) \Leftrightarrow (\sim p \rightarrow \sim q)$
Leyes de de Morgan	$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$ $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$
Leyes de inverso	$p \vee \sim p \Leftrightarrow V$ $p \wedge \sim p \Leftrightarrow F$
Leyes de neutro	$p \vee F \Leftrightarrow p$ $p \wedge V \Leftrightarrow p$
Leyes de dominación	$p \vee V \Leftrightarrow V$ $p \wedge F \Leftrightarrow F$

Implicaciones asociadas

Consideremos al condicional $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$ como una implicación directa.

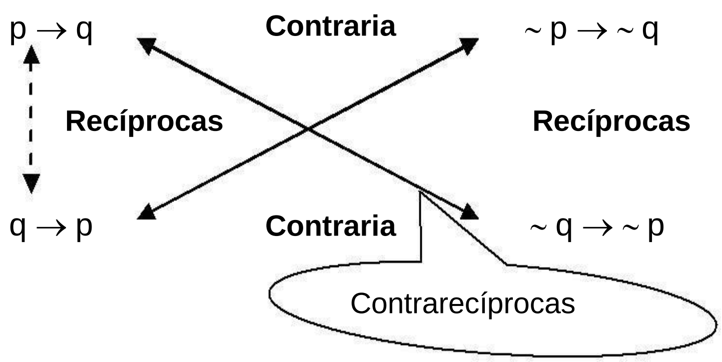
Asociadas a él podemos enunciar otras tres, obtenidas por las permutaciones o negaciones de antecedente y consecuente.

Recíproca, permutando antecedente y consecuente: $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{p}$

Contraria, negando antecedente y consecuente: $\sim \mathbf{p} \rightarrow \sim \mathbf{q}$

Contrarecíproca, negando y permutando antecedente y consecuente: $\sim \mathbf{q} \rightarrow \sim \mathbf{p}$

Las cuatro proposiciones se denominan conjugadas y cualquiera puede tomarse como directa. El siguiente esquema muestra la relación que las vincula.



Las proposiciones contrarecíprocas son equivalentes entre sí.

Ejemplo

- Si hoy es lunes, entonces ayer se jugó un partido de fútbol de primera división (directa)
- Si ayer no se jugó un partido de fútbol de primera división, entonces hoy no es lunes (contra recíproca)
- Si ayer se jugó un partido de fútbol de primera división, entonces hoy es lunes (recíproca)
- Si hoy no es lunes, entonces ayer no se jugó un partido de fútbol de primera división (contraria)