Función cuadrática

Función cuadrática

Algunos ejemplos

Antena para el seguimiento de satélites.

Las líneas parabólicas de la imagen se han obtenido proyectando un haz de luz sobre una pared blanca.

Arcos parabólicos en una de las fuentes en el Paseo del Prado de Madrid.

Cocina solar.

Resolución de problemas

Puente Golden Gate

Enunciado

El puente Golden Gate enmarca la entrada a la bahía de San Francisco. Sus torres de 746 pies de altura están separadas por una distancia de 4200 pies. El puente está suspendido de dos enormes cables que miden 3 pies de diámetro: el ancho de la calzada es de 90 pies y ésta se encuentra aproximadamente a 220 pies del nivel del agua. Los cables forman una parábola y tocan la calzada en el centro del puente. **Determinar la altura de los cables a una distancia de 1000 pies del centro del puente.**

Función cuadrática

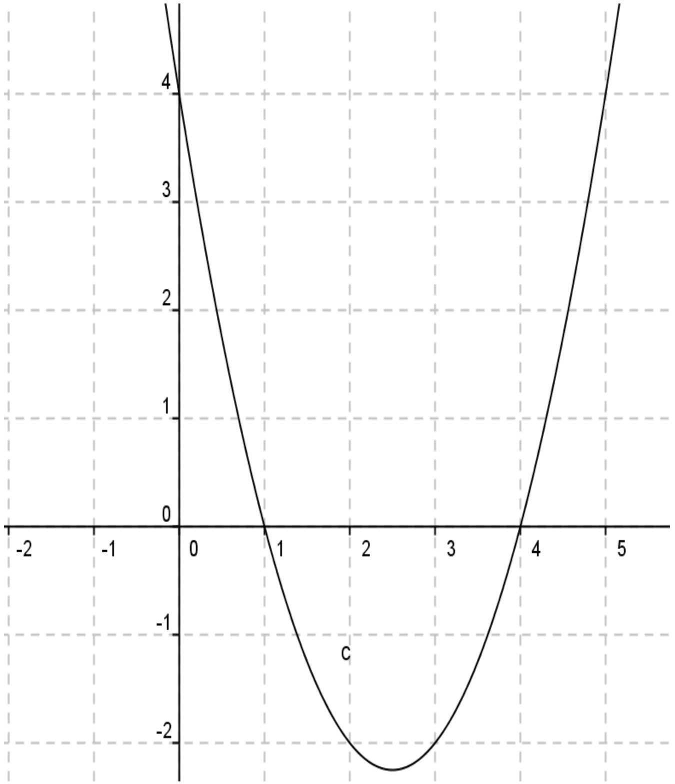
- Llamamos **función cuadrática** a toda función definida de reales en reales cuya formula es de la forma $f(x)= ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son números reales con $a \neq 0$, que se denominan:

  a) coeficiente cuadrático,

  b) coeficiente lineal

  c) término independiente

- Simbólicamente, $f: R \rightarrow R / f(x) = ax^2 + bx + c$
- El gráfico es una curva simétrica respecto de una recta vertical (eje de simetría) denominada **parábola**. El punto de la parábola que pertenece al eje de simetría se llama **vértice**.



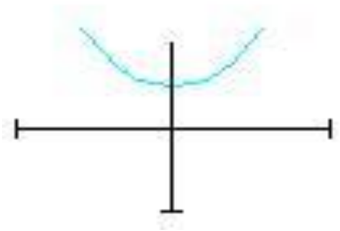
Concavidad

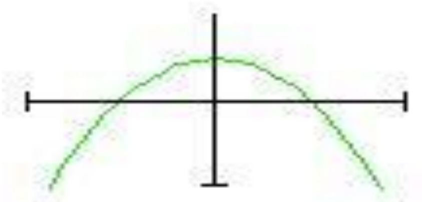
Depende del coeficiente cuadrático a.

- Si a > 0 la parábola es cóncava hacia arriba. La ordenada del vértice es el menor valor que toma la función, por lo tanto en dicho punto presenta un **mínimo.** El conjunto imagen es [yv; +∞)

- Si a< 0 la parábola es cóncava hacia abajo. La ordenada del vértice es el mayor valor que toma la función, por lo tanto en dicho punto presenta un **máximo**. El conjunto imagen es (- ∞; yv]

Gráficamente





Intersección con el eje X

- La intersección con el eje x se da en los puntos cuya ordenada es igual a cero (y = 0), por lo tanto debemos buscar las raíces (o ceros) de la función cuadrática, es decir:

$$ax^2+bx+c=0$$

- Para calcular las raíces podemos utilizar la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Naturaleza de las raíces

b^2 - 4ac se denomina discriminante de la ecuación, porque según su valor esta operación presenta distintas soluciones:

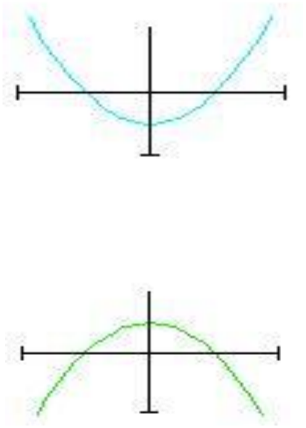
- Si $b^2 - 4ac > 0$ la ecuación tiene dos soluciones reales y distintas. Gráficamente, la parábola corta al eje x en dos puntos.

- Si $b^2 - 4ac = 0$, raíz cuadrada es igual a cero, por lo que la ecuación tiene dos soluciones iguales. Gráficamente, la parábola corta al eje x en un solo punto que coincide con el vértice.

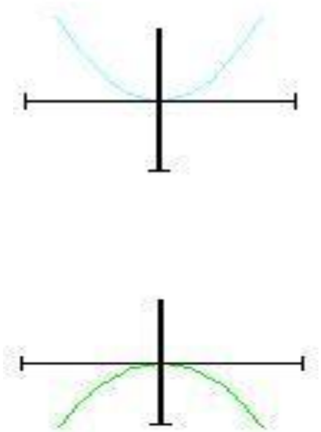
- Si $b^2 - 4ac < 0$ la ecuación no tiene solución real. Gráficamente la parábola no corta al eje x.

Naturaleza de las raíces

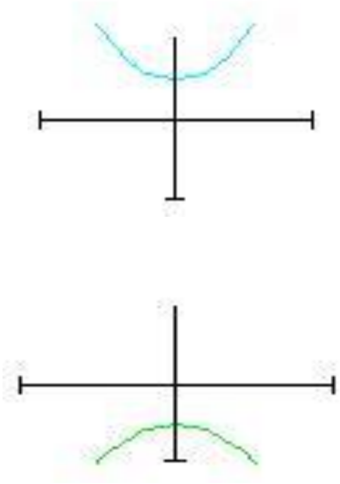
Gráficamente



Dos raíces distintas



Dos raíces iguales



Ninguna raíz real

Intersección con el eje Y

- La parábola se intersecta con el eje y en el punto en el que $x = 0$
- Entonces reemplazando en la función, queda: $y = a.0^2 + b.0 + c \rightarrow y = c$
- Es decir, el punto de intersección es el $(0; c)$ denominado **ordenada al origen.**

Intersección con el eje Y

Ejemplo:

Hallar la intersección con los ejes de la gráfica de la función cuadrática $y = x^2 - 2x - 3$

Resolución

Para hallar la intersección con el eje x, reemplazamos a =1, b=-2 y c=-3 en la fórmula:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4.1.(-3)}}{2.1} = \frac{2 \pm 4}{2} \qquad x1 = 3 \quad x2 = -1$$

Luego, los puntos de intersección con el eje *x* son:

A=(3;0) y B=(-1;0)

La intersección con el eje y, es el punto (0; c). En el ejemplo dicho punto es P = (0; -3).

Vértice

El **vértice de la parábola** es el punto que es simétrico de sí mismo cuyas coordenadas son V= (x_v, y_v)

Es el punto donde la parábola toma el valor máximo (convexa) o mínimo (cóncava).

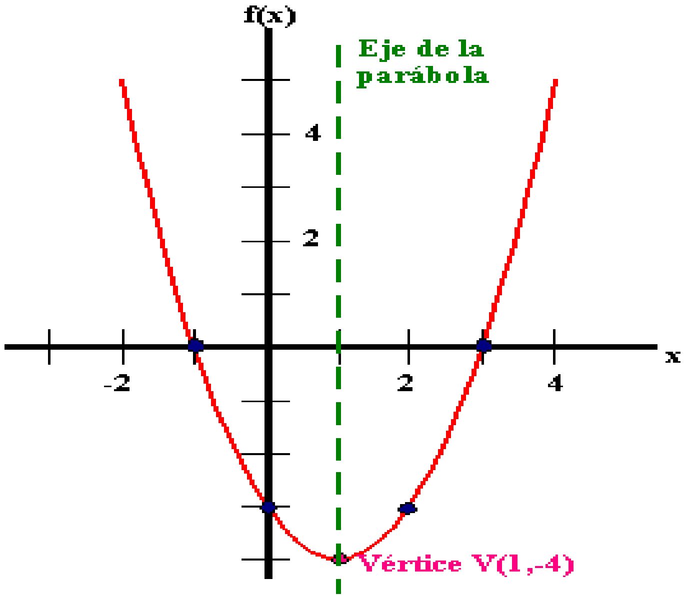
Cálculo: $x_v = \frac{-b}{2a}$

También se puede calcular como: $x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}$

Conociendo las dos raíces para calcular y_v reemplazamos el valor de x_v en la función.

Eje de simetría

Las dos ramas de la parábola son simétricas respecto de una recta vertical a la cual pertenece el vértice, entonces su ecuación es x = x_v



Eje de simetría

Ejemplo:

Enunciado

Graficar la función y = - x^2 + 2x + 3, determinando intersección con los ejes, coordenadas del vértice y ecuación del eje de simetría.

Resolución

Intersección con el eje x (y = 0)

Debemos hallar las raíces:

$$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4.3.(-1)}}{2.(-1)}=\frac{-2\pm4}{-2}\rightarrow$$

Luego, los puntos de intersección son A=(1,0) B=(3,0)

Intersección con el eje y (x = 0)

Es el punto P=(0,3)

Eje de simetría

Ejemplo:

Resolución

Vértice

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{-2} = 1$$

y_v = f(1) = $-1^2 + 2.1 + 3 = 4$

Eje de simetría

x =1

Eje de simetría

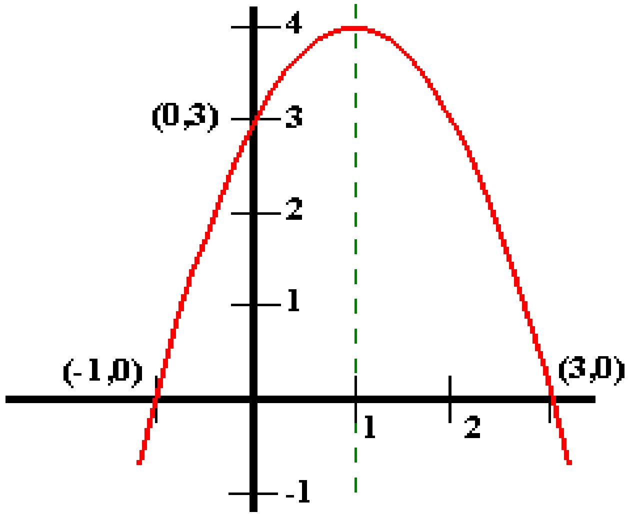
Ejemplo:

Resolución

Valores obtenidos

- Intersección eje x: (-1; 0) (3; 0)
- Intersección eje y: (0; 3)
- Vértice: V= (1; 4)
- Eje de simetría: x=1
- Concavidad: negativa

Gráfica



Intervalos de positividad y negatividad

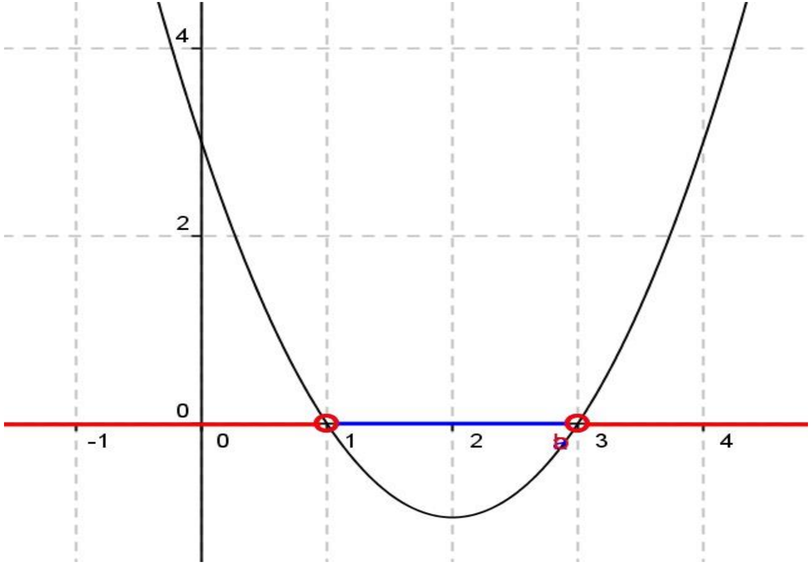
- El **conjunto de positividad** está formado por los valores de x que tienen imagen positiva (f(x) >0, gráficamente por encima del eje x), o sea, $ax^2 + bx + c > 0$.
- El **conjunto de negatividad** esta formado por los valores de x que tienen imagen negativa (f(x) < 0, gráficamente por debajo del eje x), o sea, $ax^2 + bx + c < 0$.
- En ambos casos queda planteada una inecuación cuadrática que resolvemos gráficamente a partir de los ceros y la concavidad.

Intervalos de positividad y negatividad

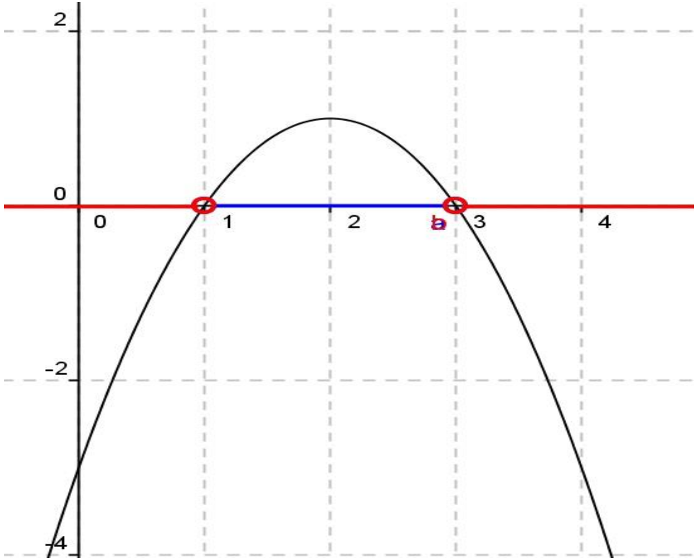
Observando los gráficos:

C+ = (-∞; 1) ∪ (3; +∞)
C- = (1; 3)

C- = (-∞; 1) ∪ (3; +∞)
C+ = (1; 3)



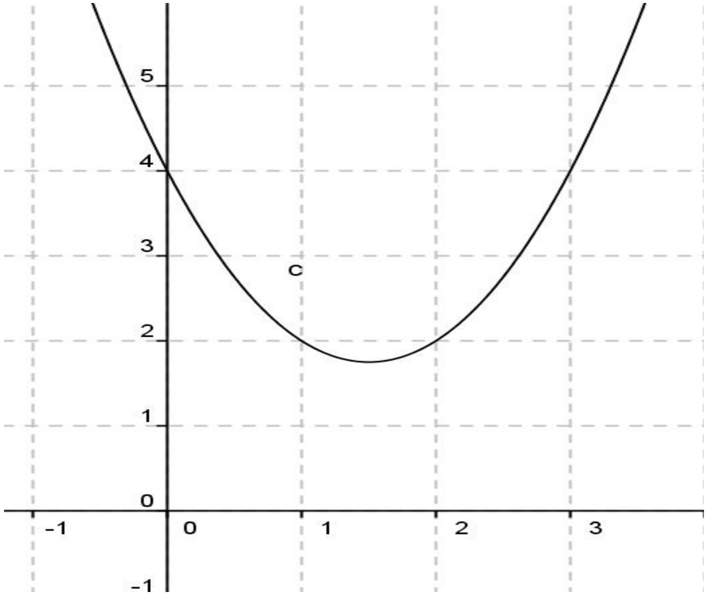
$f(x) = x^2-4x+3$



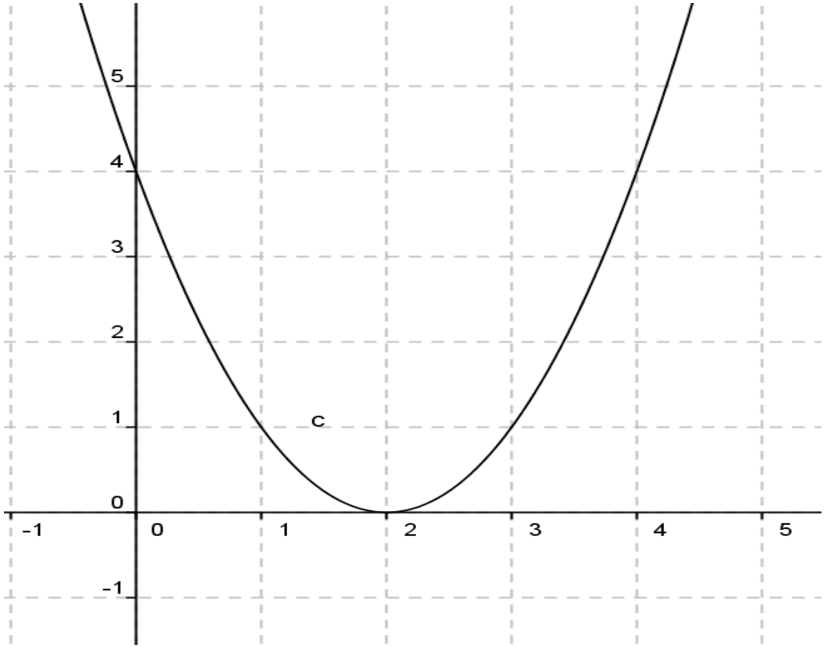
$f(x) = -x^2+4x-3$

Intervalos de positividad y negatividad

$C^+ = \mathbb{R}$
$C^- = \varnothing$



$C^+ = \mathbb{R} - \{2\}$
$C^- = \varnothing$

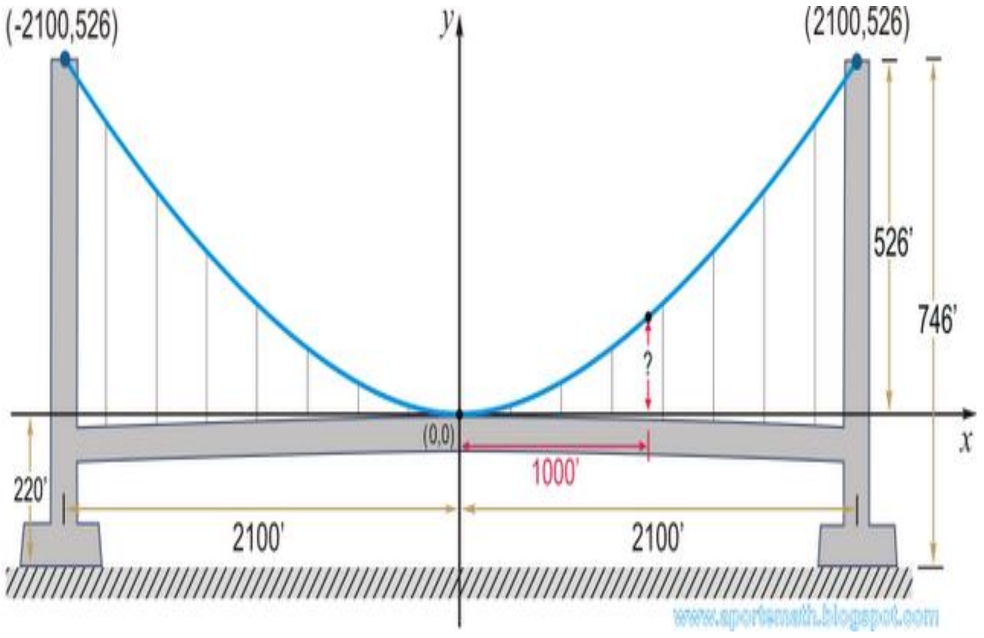


Resolución de problemas

Puente Golden Gate

Resolución

Empezarnos seleccionando la ubicación de los ejes de coordenadas de modo que el eje x coincida en la calzada y el origen coincida en el centro del puente. Entonces ambas torres quedarán a 746-220=526 pies arriba de la calzada y ubicadas a 4200/2=2100 pies del centro. Los cables de forma parabólicas se extenderán desde las torres, abriendo hacia arriba, y tendrán su vértice en (0 ,0). Por la manera en que seleccionamos la colocación de los ejes nos queda la ecuación de una parábola como $y=ax^2$, a>0. Podemos ver que los puntos (−2100,526) y (2100,526) pertenecen a la gráfica parabólica.



Resolución de problemas

Puente Golden Gate

Resolución

Reemplazando alguno de dichos puntos en la ecuación de la cuadrática $y=ax^2$ nos queda:

$526 = a(2100)^2 \rightarrow a = \dfrac{526}{(2100)^2}$

Luego la ecuación de la cuadrática queda: $y = \dfrac{526}{(2100)^2} x^2$.

Luego cuando se está a una distancia de 1000 pies (aproximadamente 305 metros) del centro del puente ($x=1000$), nos queda:

$y = \dfrac{526}{(2100)^2} (1000)^2 \approx 119.3$pies.

Por tanto, el cable mide 119.3 pies (aproximadamente: 34 metros) de altura cuando se está a una distancia de 1000 pies del centro del puente.

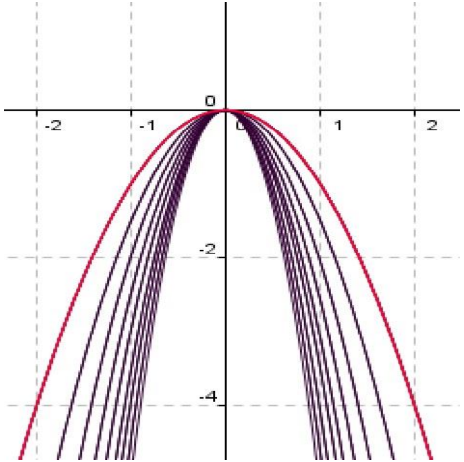
Desplazamientos

A partir de la parábola matriz $y = x^2$, se pueden obtener los gráficos de las demás parábolas a través de los desplazamientos generados por los distintos coeficientes que afectan a la variable.

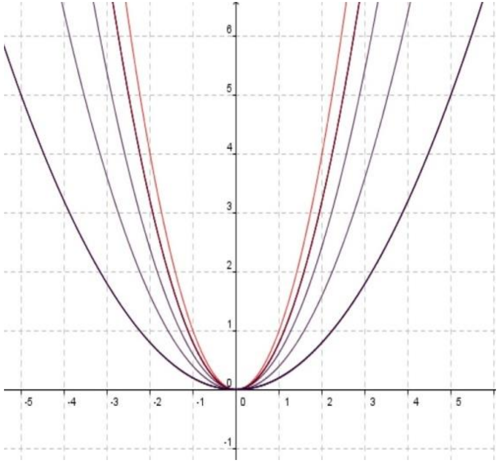
$$y = ax^2$$

El coeficiente cuadrático afecta la concavidad (observar que la parábola dibujada en rojo corresponde a |a|=1

a < 0 (a < -1)



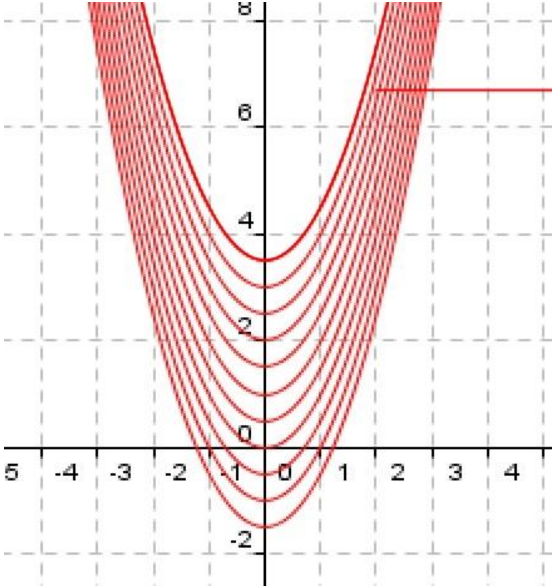
a > 0 (0 < a < 1)



Desplazamientos

$$y = ax^2 + c$$

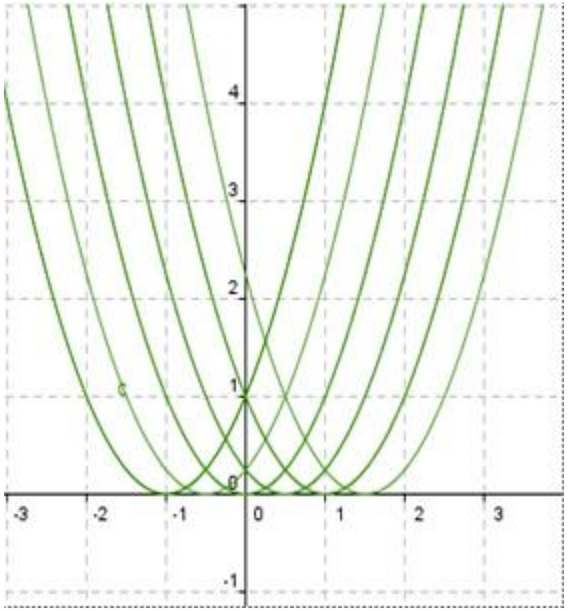
El término independiente produce un desplazamiento vertical tantas unidades como indica el coeficiente c y en el sentido de su signo.
Observar que el vértice se corre al punto (0; c)



Desplazamientos

$$y = a(x - k)^2$$

Restar una constante al argumento de la función cuadrática produce un desplazamiento horizontal de la parábola matriz; si k es positivo el desplazamiento se produce hacia la derecha y si es negativo, hacia la izquierda

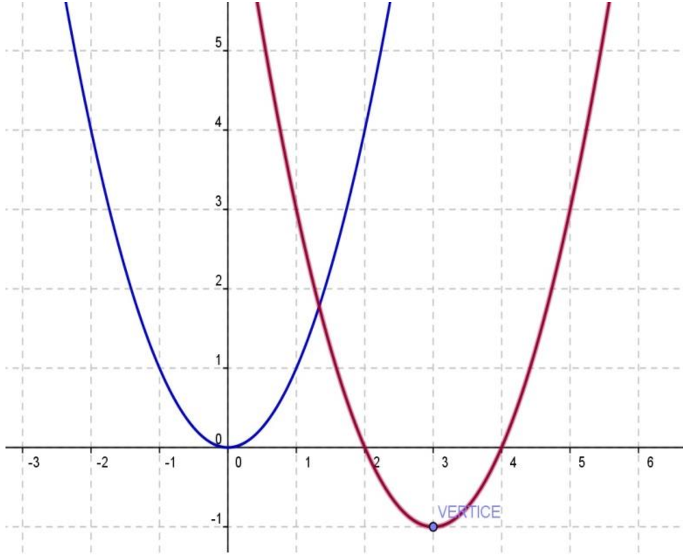


Expresión canónica

$$y = a(x-x_v)^2 + y_v$$

Los parámetros x_v e y_v representan los desplazamientos horizontal y vertical de la parábola, correspondiendo a las coordenadas del vértice

En el ejemplo $y=(x-3)^2 -1$ las coordenadas del vértice son $x_v=3$ $y_v= -1$

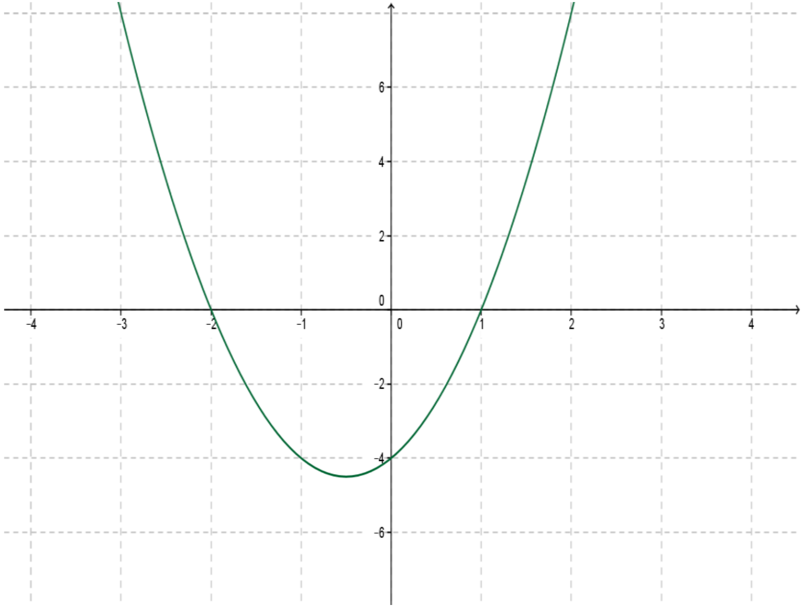


Expresión factorizada

$$y = a\,(x-x_1)\,(x-x_2)$$

Los valores x_1 y x_2 son los ceros de la función, es decir las raíces.

En caso que la función tenga un cero la factorización nos quedará: $y = a\,(x-x_1)^2$

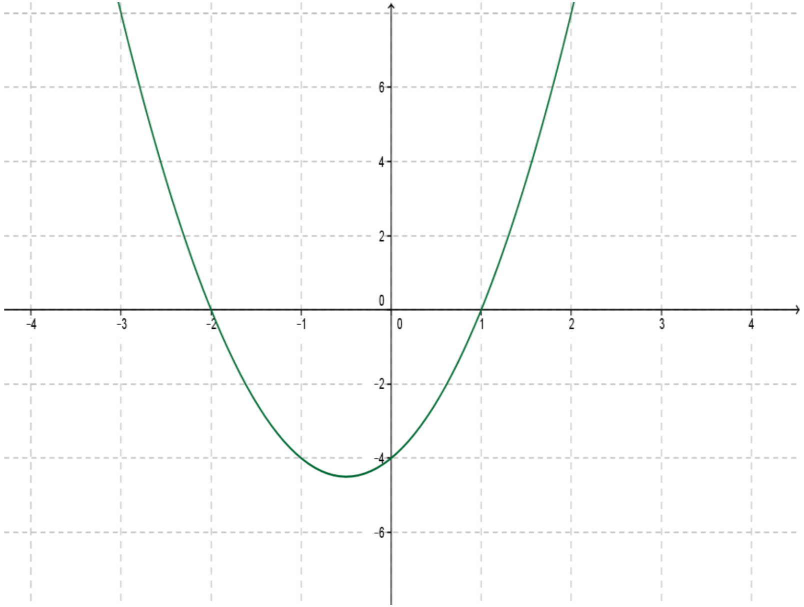


Expresión factorizada

$$y = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$$

Los valores x_1 y x_2 son los ceros de la función, es decir las raíces.

En caso que la función tenga un cero la factorización nos quedará: $y = a\,(x - x_1)^2$



Ejemplo

Hallar la expresión canónica de una función cuadrática f(x) cuyo conjunto de negatividad sea $(-\infty,-3) \cup (5,+\infty)$ y la ordenada de su vértice es 8.

Solución:

Al darnos el conjunto de negatividad tenemos de dato las raíces, en este caso: $x_1=-3$; $x_2=5$

con ellas podemos calcular la coordenada x del vértice: $x_v=\frac{-3+5}{2}=1$; también tenemos de dato $y_v=8$.

Nos queda la expresión: $y=a\,(x-1)^2+8$

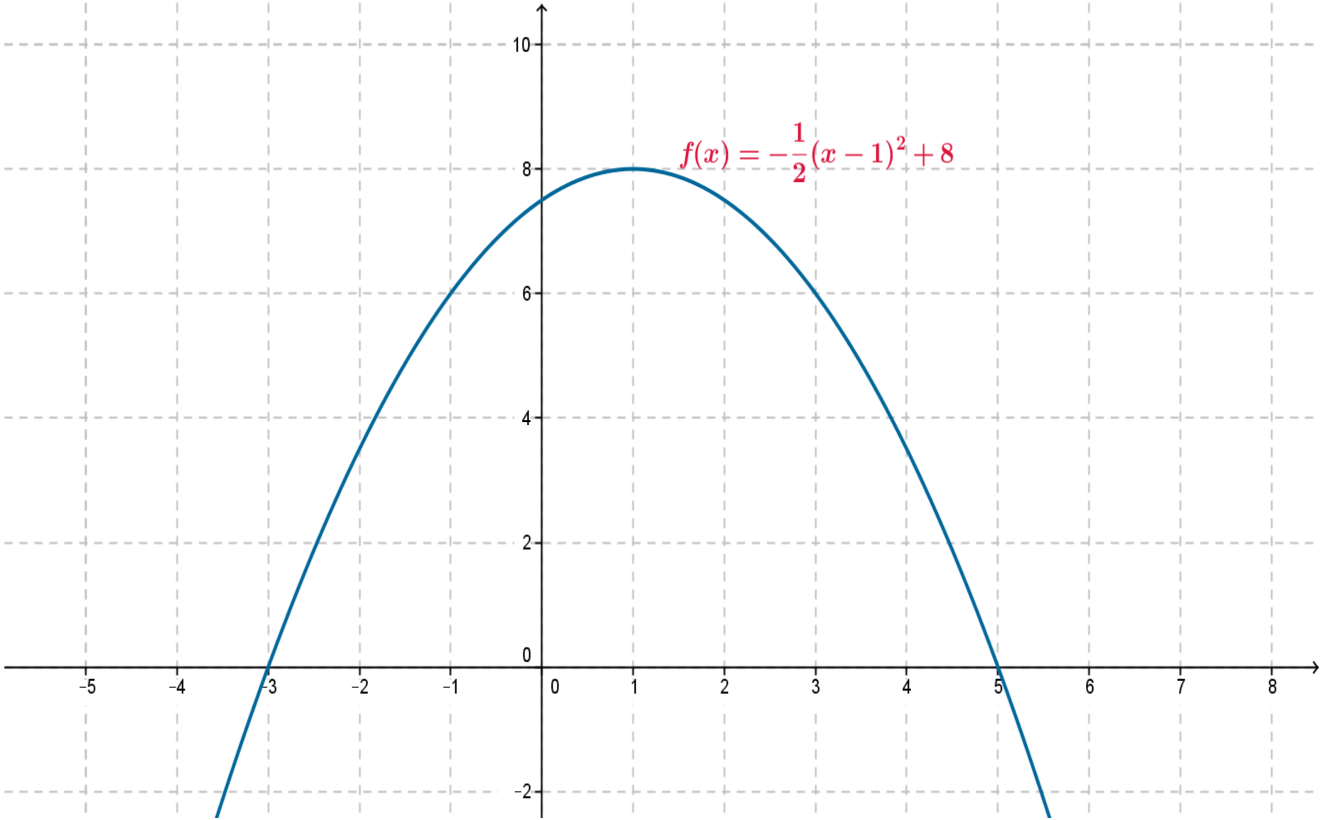
Necesitamos encontrar el valor de a; para eso podemos tomar una de las raíces y reemplazar en la función. Consideremos por ejemplo (5;0), nos queda:

$0=a\,(5-1)2+8 \Rrightarrow a=-\frac{8}{16}=-\frac{1}{2}$

Luego nuestra cuadrática es: $f(x)=-\frac{1}{2}(x-1)^2+8$

Realizamos la gráfica:

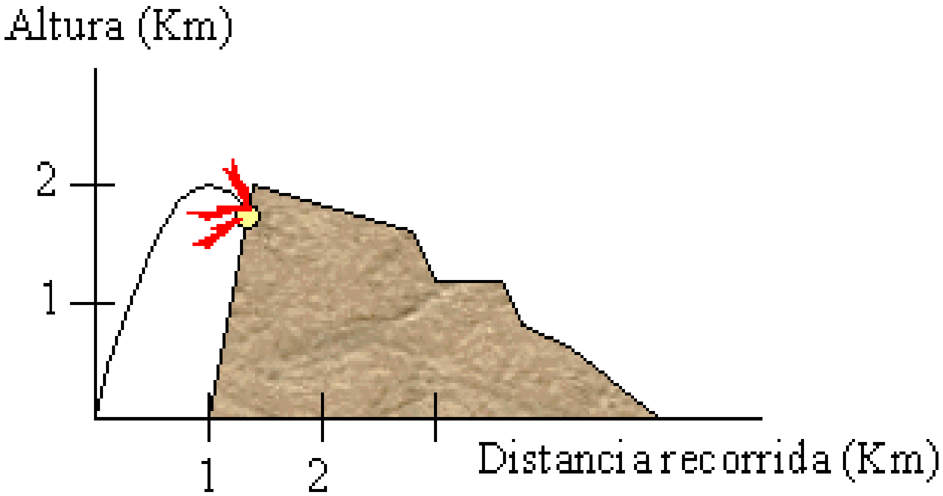
Ejemplo



Intersección entre recta y parábola

Enunciado

Lanzamos un proyectil. La altura alcanzada **y** (en Km) y los **x** kilómetros recorridos están relacionados por la
ecuación $\mathbf{y = -x^2 + (13/2)x}$. A 1 Km del lugar de
lanzamiento se encuentra una montaña donde una de
sus laderas sigue la recta de ecuación $\mathbf{y = 6x - (3/2)}$. Hallar el punto de la montaña donde se producirá el impacto.



Intersección entre recta y parábola

Resolución

El punto de impacto se puede hallar analíticamente como la intersección entre la parábola $y = -x^2 + (13/2)x$ y la recta **$y = 6x - 3/2$** .

Para hallarlo igualamos ambas funciones: **$-x^2 + (13/2)x$** = **$6x - (3/2)$** y resolvemos la ecuación cuadrática

Obteniendo $x_1 = \frac{3}{2}$ $\quad x_2 = -1$ (no tiene sentido);

entonces el impacto se producirá en el punto (1,5; 8), es decir a una distancia de 1,5km y a una altura de 8km.

Intersección entre las funciones

Enunciado

Calcular la intersección entre las funciones **f(x) = -x + 2 y g(x)=** x^2.

Resolución

Igualando ambas funciones queda

$x^2 = -x + 2 \rightarrow x^2 + x - 2 = 0$

Las soluciones son $x_1 = 1$ y $x_2 = -2$.

Calculando las imágenes para cada uno obtenemos los puntos A = (1; 1) y B = (-2; 4)