Función módulo o valor absoluto

El módulo o valor absoluto de un número real, se relaciona con la distancia al cero; por lo que nunca su resultado puede ser negativo; se simboliza con barras: **│x│**.

Por ejemplo:

- El número 3 está a 3 unidades del 0 entonces su valor absoluto es 3; simbólicamente: **│3│ = 3**

- El número –5 está a 5 unidades del 0 entonces su valor absoluto es 5; simbólicamente: **│-5│ = 5**

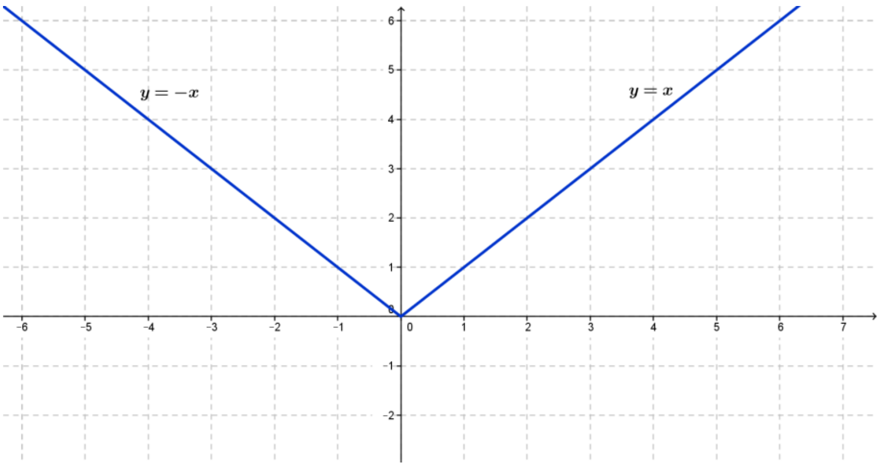
Entonces si a cada número real le asignamos su módulo nos queda definida una función llamada:

Función módulo f(x)= **│x│** donde f:R→[0,+ ∞).

La función módulo entonces tiene un único cero en x=0, evaluemos entonces que pasa antes y después de este valor. El módulo es siempre un valor positivo, por lo tanto si x es positivo su módulo coincidirá con x y si es negativo será necesario cambiarle el signo para que el resultado sea positivo. En resumen, la función módulo puede expresarse así:

$$f(x)=|x|=\begin{cases} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{si\ x \geq 0} \\ \boldsymbol{-x} & \boldsymbol{si\ x < 0} \end{cases}$$

Para graficarla tenemos dos rectas: para el cero o valores positivos de x → la recta y= x
para valores negativos de x → la recta y= -x



Se puede observar que ambas rectas se cortan en el valor x=0 (formando un vértice), que es el punto donde "partimos" la función.

Veamos ahora los corrimientos:

a) $y = |x-a|$ desplazamiento en el eje x

b) $y = |x| + b$ desplazamiento en el eje y

<u>Ejemplo</u>:

Consigna:

Para la función $y = |x+2| - 3$:

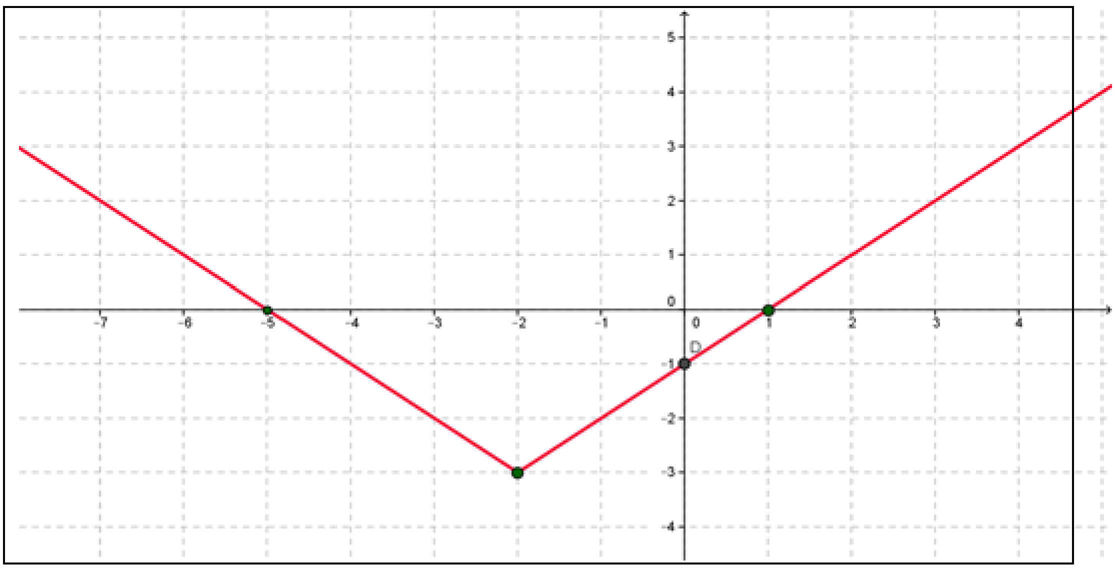
- Indicar el desplazamiento en los ejes
- Hallar la intersección con ambos ejes
- Con la información anterior graficar la función
- Determinar: imagen, C^0; C^+; C^-; $C^{\nearrow}$; $C^{\searrow}$

Resolución:

- Desplazamiento: 2 unidades hacia la izquierda (eje x) y 3 unidades hacia abajo (eje y),

  Este desplazamiento nos indica las coordenadas del vértice.

- Intersección eje x → y=0; $|x+2| - 3 = 0$ → $|x+2| = 3$ → para que el módulo nos dé como resultado 3; el valor de x debe ser. x=1 ó x= -5 ; luego la intersección con el eje x son los puntos A=(1,0) y B=(-5,0)
- Intersección con el eje y → x=0; $y = |0+2| - 3$ → y= -1, luego la intersección con el eje y es el punto P=(0;-1)
- Graficamos:

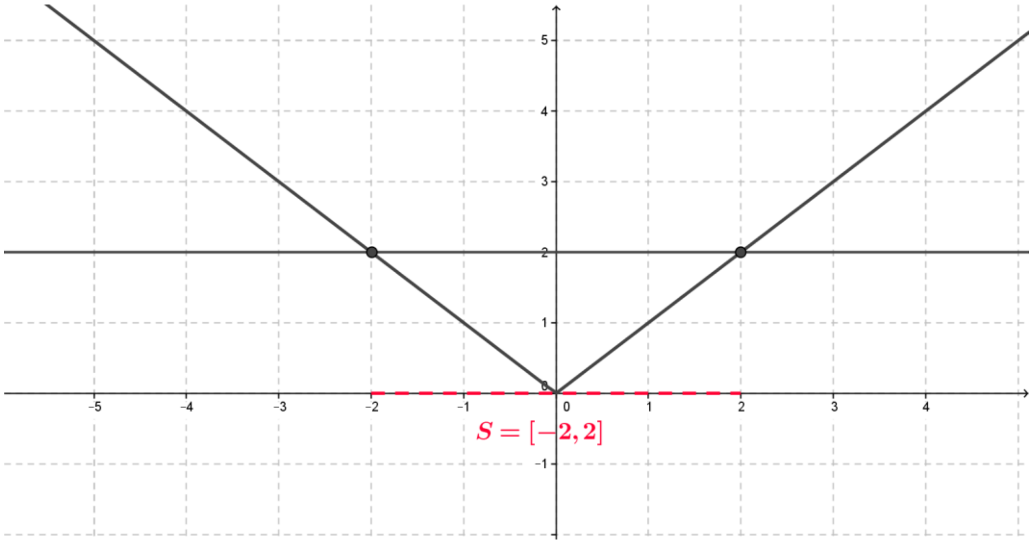


- $C^0 = \{-5; 1\}$; ; $C^+ = (-\infty, -5) \cup (1, +\infty)$; $C^- = (-5,1)$; $I^{\nearrow} = (-2,+\infty)$; $I^{\searrow} = (-\infty; -2)$

Resolvamos ahora inecuaciones:

- $|x| \leq 2$

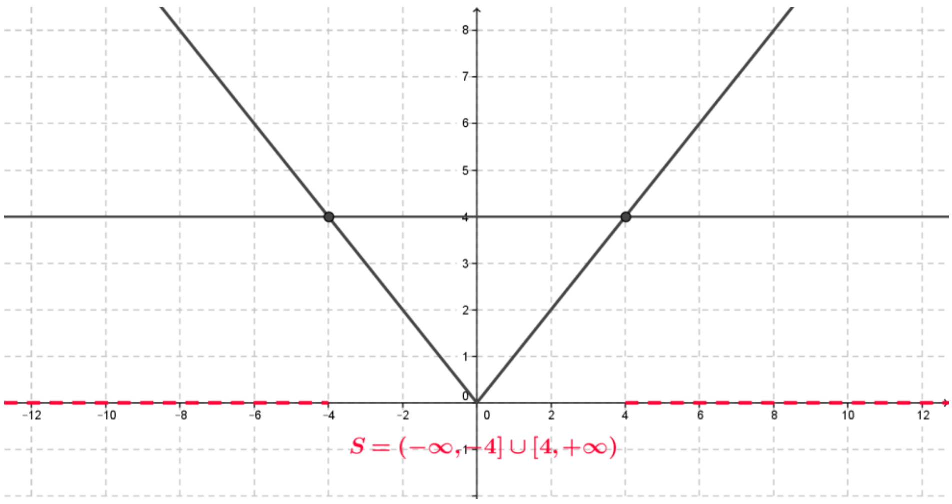
  Vamos a graficar las funciones $y=|x|$ e $y=2$



Vemos que ambas funciones se cortan en los puntos x= – 2 y en x= 2; como queremos los valores de x para los cuales la función módulo es menor o igual (está por debajo) que la recta y=2; entonces la solución es: S= [-2,2]

- $|x| \geq 4$

  Vamos a graficar las funciones $y=|x|$ e $y=4$



Vemos que ambas funciones se cortan en los puntos x= – 4 y en x= 4; como queremos los valores de x para los cuales la función módulo es mayor o igual (está por encima) que la recta y=4; entonces la solución es: S=(-∞, -4] U [4,+∞)

Podemos enunciar las siguientes propiedades:

1. $|x| \geq 0$
2. $|x| = k \rightarrow x=k$ ó $x= -k$; (k real)
3. $|x| \leq k \rightarrow -k \leq x \leq k$
4. $|x| \geq k \rightarrow x \leq -k$ ó $x \geq k$

Otras propiedades del módulo:

- $|x + y| \leq |x| + |y|$
- $|x - y| \geq |x| - |y|$
- $|x . y| = |x| . |y|$
- $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

Ejemplos:

Hallar el conjunto solución de

1) $3. |x - 2| +1 > 7$

   Resolución:

   Despejando el módulo, nos queda

   $|x - 2| > 2$

   Aplicamos la propiedad:

   $x - 2 > 2$ ó $x - 2 < -2$

   $x > 4$ ó $x < 0$

   S= $(-\infty, 0) \cup (4,+\infty)$

2) $9 - |3x - 4| > 4$

Resolución:

$-|3x - 4| > -5$ despejamos el módulo

$3x - 4| < 5$ aplicamos la propiedad

$-5 < 3x - 4 < 5$ debemos resolver dos inecuaciones

$3x - 4 < 5 \quad \wedge \quad 3x - 4 > -5$ despejando en cada ecuación, resulta:

$x < 3 \quad \wedge \quad x > -\frac{1}{3}$

$S = \left(-\frac{1}{3}, 3\right)$