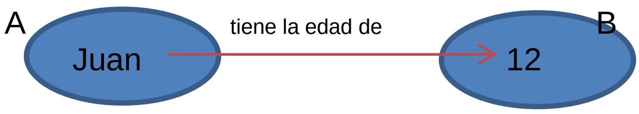
Funciones

Tanto en la naturaleza como en fenómenos creados por el hombre ocurren situaciones en las cuales se relacionan distintas magnitudes entre sí (espacio, tiempo, dinero, peso, etc.).

Las funciones sirven para analizar estas situaciones y en muchos casos permiten predecir cómo será su evolución.

Una **función** definida de un conjunto A en un conjunto B, es una relación que asigna a cada uno de los elementos “x” de A uno y sólo un elemento “y” en B. Esta relación se puede establecer mediante una característica o una condición que se le asigna a los elementos del primer conjunto en el segundo, como por ejemplo Juan “tiene la edad de” 12 años. En el conjunto A podrían estar los nombres de los alumnos de un curso y en B los números que representen las edades:



Si trabajamos con conjuntos numéricos, la relación entre los elementos de los dos conjuntos se establece mediante una formula.

Por ejemplo, si a los elementos de A (a los que llamamos en general x) le hacemos corresponder su doble e B (a los elementos de B los llamamos en general y), la fórmula que usamos es $y = 2.x$

En este ejemplo, al valor 4 de x le corresponde el valor 8 de y (al que llamamos imagen). Dicho de otra forma, la imagen de 4 es 8.

Para que la función quede bien definida, además de la fórmula que relaciona los valore de x con los de y, tenemos que indicar cuales son todos los posibles valores de x (dominio de la función) y cuales los valores de y (conjunto de llegada).

La forma en que definimos una función simbólicamente es:

$$f: A \to B /\ y = f(x)$$

Dominio **conjunto de llegada**

Qué leemos: f que va de A en B tal que y es igual a f(x), o sea que **y** es la imagen de **x** a través de la función f

El **Dominio** de una función f es el conjunto de todos los valores de la variable independiente “x” que se relacionan a través de la función con algún elemento “y”. Lo notamos **Dom f**.

La **imagen** de una función f es el conjunto de todos los valores de la variable dependiente “y” que son imagen de algún valor x del dominio. Lo notamos **Im f. (puede estar incluido en el conjunto de llegada).**

Una función se puede definir de distintas formas:

- **Por comprensión**: indicando dominio, conjunto de llegada y la fórmula mediante la cual se relacionan los valores de x con los de y. Por ejemplo:

$$f: D \to R / f(x) = 5x - 4$$

  Para calcular la imagen de cada elemento del dominio x, reemplazamos ese valor en la fórmula de la siguiente forma
  $\mathrm{f}(2) = 5.2 - 4 = 6$ Esto nos indica que la imagen de 2 es igual a 6 y se puede representar por el par ordenado $(2; 6)$

- **Por extensión:** nombrando todos los pares ordenados que muestran la relación entre la variable independiente y la variable dependiente (recordemos que la primera componente de los pares ordenados corresponde a x y la segunda a la variable y). Esta forma es más usada si el dominio de la función es un conjunto finito. Ejemplo:

$$\boldsymbol{f} = \{(\mathbf{1}; \mathbf{1})(\mathbf{2}; \mathbf{6})(\mathbf{0}; \mathbf{-4})(\mathbf{-1}; \mathbf{-9})\}$$

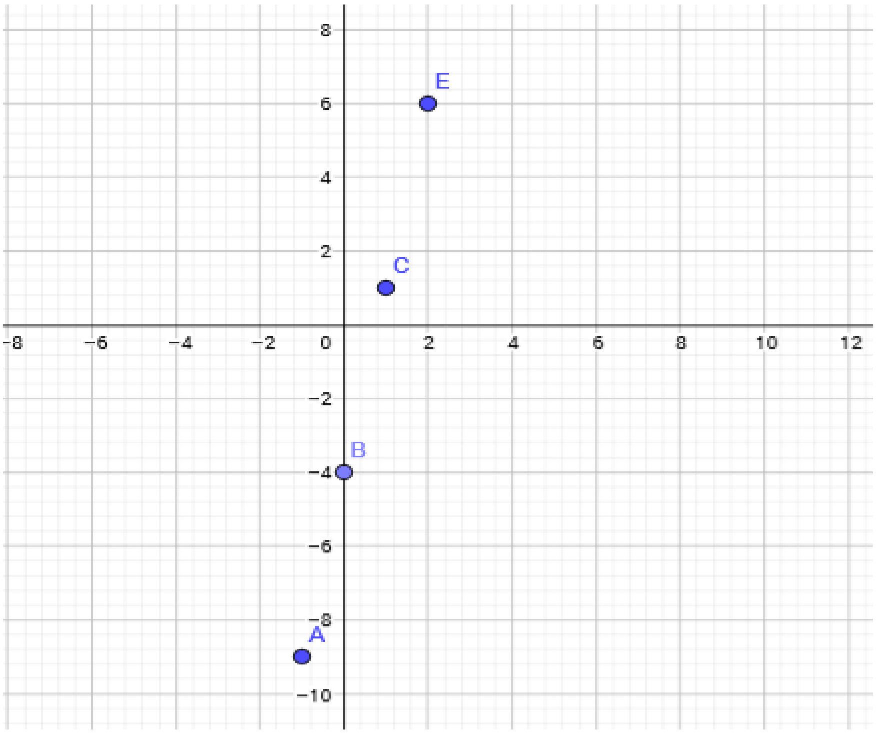
  Dom f = $\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{0}, \mathbf{-1}\}$
  Im f = $\{\mathbf{1}, \mathbf{6}, \mathbf{-4}, \mathbf{-9}\}$

- **Mediante un diagrama de Venn:** se representan el dominio y el conjunto de llegada en diagramas de Venn y mediante flechas se relacionan los valores de la variable independiente con los de la variable dependiente. También esta forma se usa si los conjuntos son finitos. La función definida por comprensión en el punto anterior se representa en diagramas de Venn de la siguientes forma:

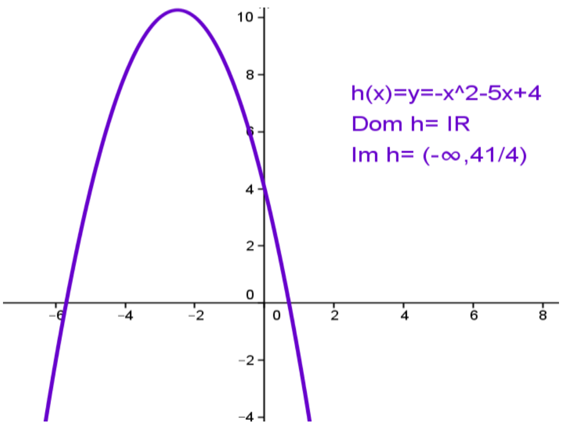
  También se puede indicar esta relación entre los valores de los dos conjuntos mediante una tabla:

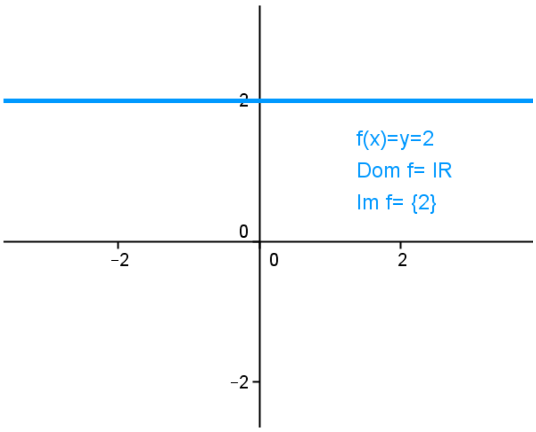
x	y
1	1
2	6
0	-4
-1	-9

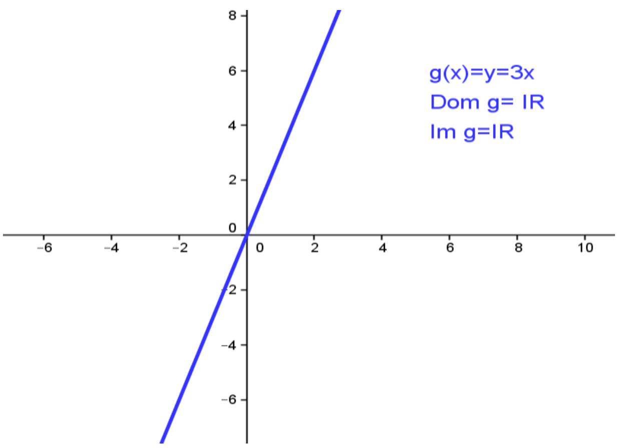
- **A través de un gráfico en un sistema de ejes cartesianos:** los pares ordenados que muestran la relación entre la variable independiente y la variable dependiente se representan gráficamente mediante un punto en un sistema de ejes cartesianos (recordemos que la variable independiente se representa sobre el eje horizontal o eje de abscisas x y la variable dependiente sobre el eje vertical o eje de ordenadas y). La unión de todos los puntos que definen a la función forma el gráfico de la misma (esto solo se hace si el dominio es un subconjunto de los números reales). Si representamos la función anterior, solo marcamos 4 puntos:

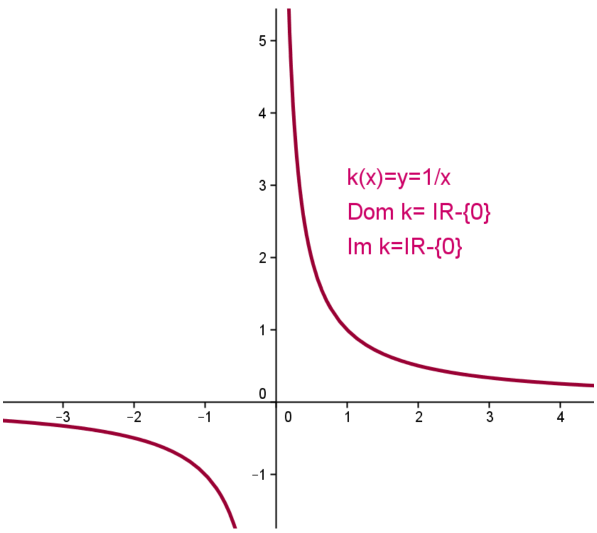


Otros ejemplos:





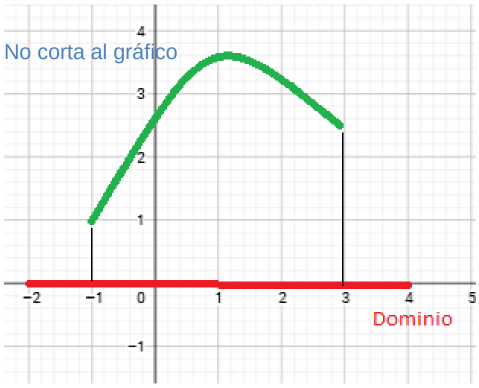




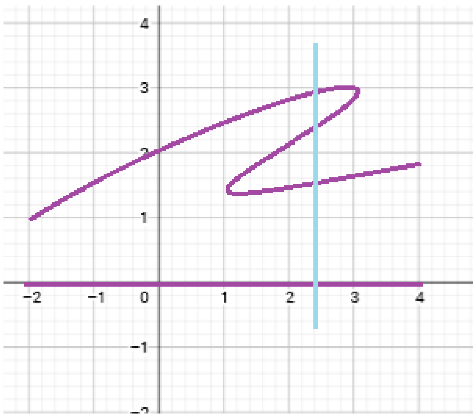
Para que el gráfico represente una función debemos tener en cuenta las dos condiciones de la definición: existencia y unicidad.

La condición de existencia indica que TODOS los elementos del dominio deben tener imagen. Para verificar esta condición gráficamente toda recta paralela al eje y trazada por los puntos del dominio debe tocar el gráfico.

La condición de unicidad indica que la imagen de cada elemento del dominio debe ser ÚNICA. Para verificar esta condición gráficamente toda recta paralela al eje y debe tocar al gráfico de la función en un solo punto.



Este gráfico no corresponde a una función, ya que hay elementos del dominio que no tienen imagen (no cumple con existencia). Si quisiéramos que el gráfico represente a una función podemos redefinir el dominio como el intervalo [-1;3]

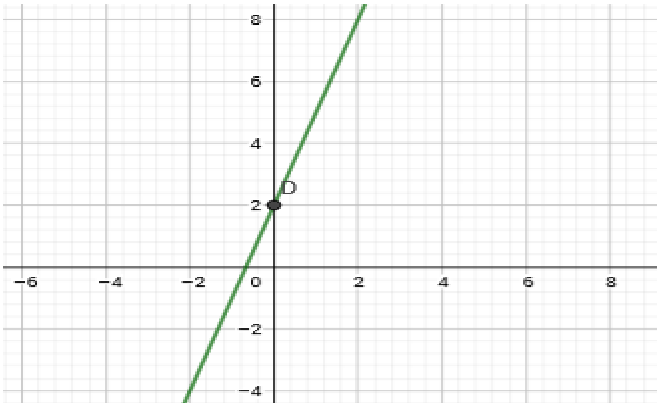


Este gráfico no corresponde a una función, ya que hay elementos del dominio que tienen más de una imagen (no cumple con unicidad)

- **Ordenada al origen**

La ordenada al origen de una función corresponde al punto cuya abscisa (x) es cero. Gráficamente es el punto donde el gráfico de la función corta al eje y. Aclaremos que este punto pertenece a la función si x = 0 pertenece al dominio de la misma.

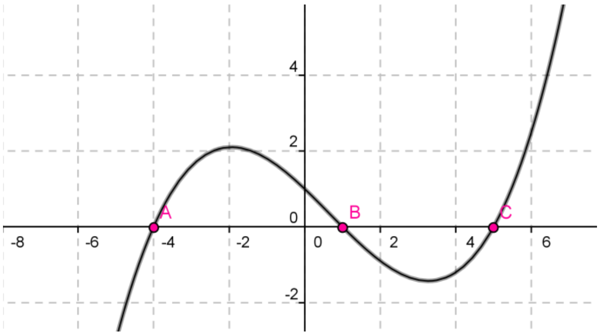
En el siguiente gráfico, la ordenada al origen es el punto (0; 2):



- **Ceros o raíces de una función**

Llamamos **ceros o raíces** de una función f a los valores de x para los cuales se cumple que f(x) = 0. Los ceros de una función son las abscisas de los puntos en los cuales su gráfica tiene contacto con el eje de las x.

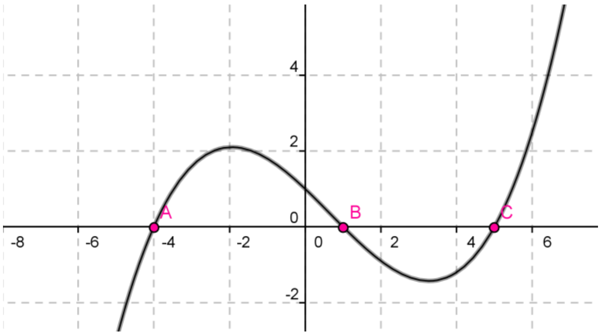
En el gráfico corresponden a los puntos A, B y C, cuyas abscisas son -4,1 y 5 y se nota Co = {-4, 1, 5}



- **Conjuntos de positividad y negatividad de una función**

Llamamos **conjunto de positividad** de una función **f (C^+)** al conjunto de todos los valores de x que tienen imagen positiva, o sea aquellos para los cuales se cumple que f(x) > 0. Para este conjunto de valores de "x" la función queda gráficamente por encima del eje de abscisas.

Llamamos **conjunto de negatividad** de una función **f (C^-)** al conjunto de todos los valores de x que tienen imagen negativa, o sea aquellos para los cuales se cumple que f(x) < 0. Para este conjunto de valores de "x" la función queda gráficamente por debajo del eje de abscisas:



$C^{+} = (-4;\ 1) \cup (5;\ +\infty) \quad C^{-} = (-\infty;\ -4) \cup (1;\ 5)$

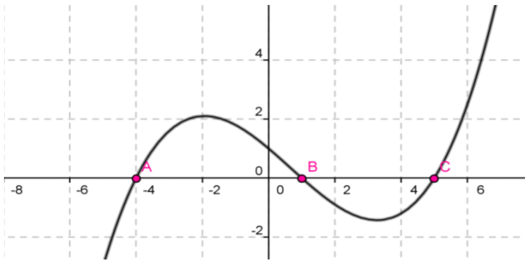
- **Intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función**

Llamamos **intervalo de crecimiento** de una función f, y notamos **Ic**, al conjunto de valores de x para los que se verifica que si $x_2 > x_1$ entonces $f(x_2) > f(x_1)$, o sea que a mayores valores de x corresponden mayores valores de y. Gráficamente se puede observar que en este intervalo la curva "sube" de izquierda a derecha.

Llamamos **intervalo de decrecimiento** de una función f, y notamos **Id**, al conjunto de valores de "x" para los cuales se verifica que si $x_2 > x_1$ entonces $f(x_2) < f(x_1)$, o sea que a mayores valores de x corresponden menores valores de y. Gráficamente se puede observar que en este intervalo la curva "baja" de izquierda a derecha.

Una función puede tener intervalos de crecimiento, de decrecimiento y otros en los que se mantiene estable. En estos últimos, cuando "x" aumenta, "y" se mantiene constante.

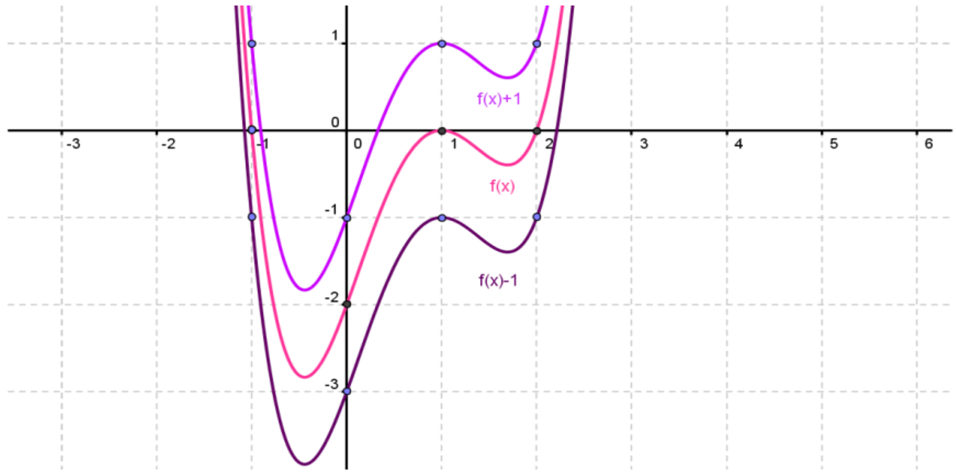
$\mathrm{Ic} = (-\infty;\ -2)$ y $(3;\ +\infty) \quad \mathrm{Id} = (-2;\ 3)$



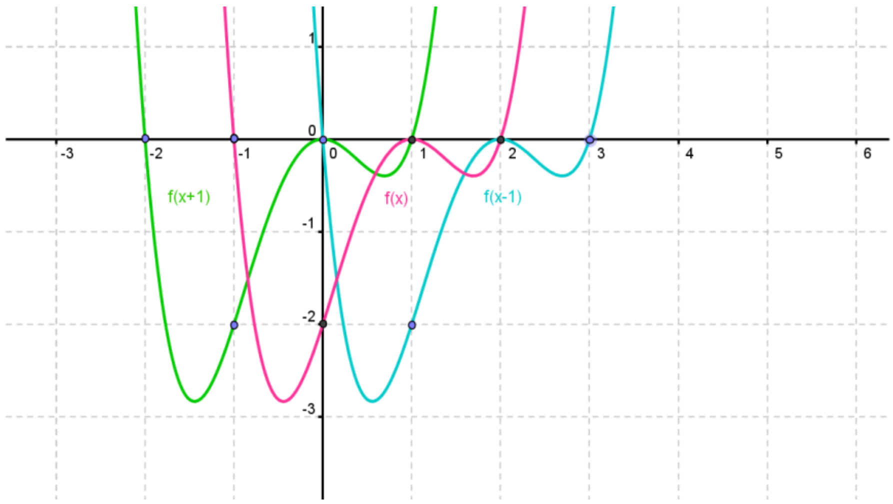
DESPLAZAMIENTOS O CORRIMIENTOS DE UNA FUNCIÓN

Sea f(x) una función cuyo gráfico es el siguiente (en color rosa). Podemos generalizar lo que le ocurre al gráfico de f si agregamos constantes a la función

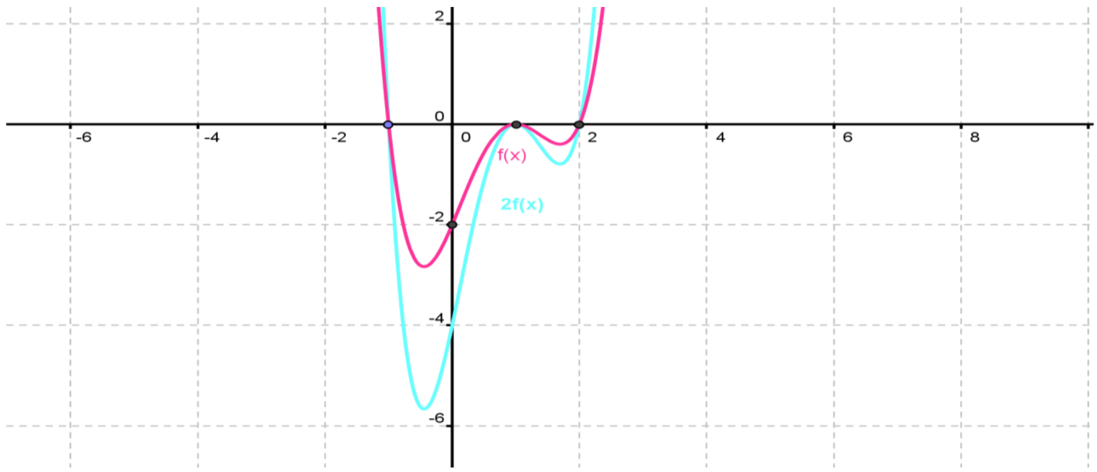
- **f(x) + b**
  Si $b > 0$ el gráfico de la función se desplaza verticalmente "b" lugares hacia arriba ↑
  Si $b < 0$ el gráfico de la función se desplaza verticalmente "b" lugares hacia abajo ↓



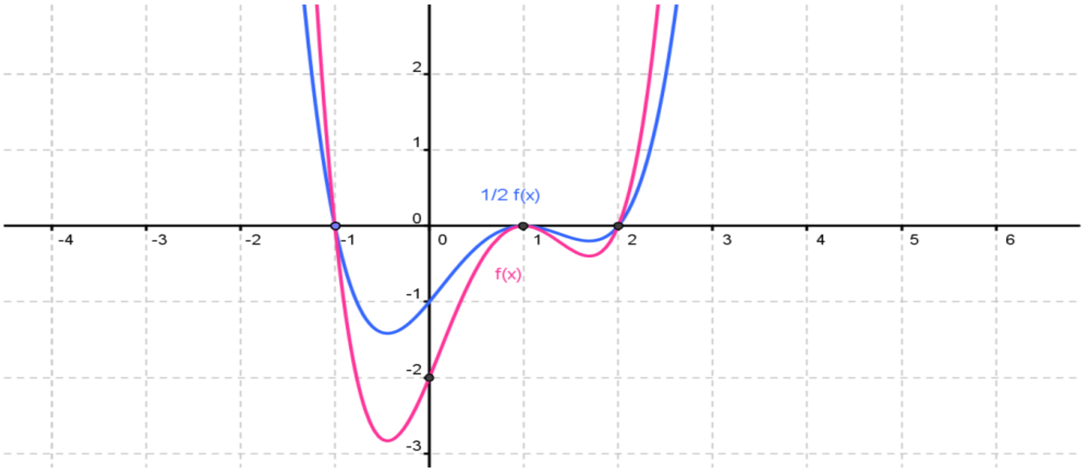
- **f(x + c)**
  Si c > 0 el gráfico de la función se desplaza horizontalmente “c” lugares a la izquierda←
  Si c < 0 el gráfico de la función se desplaza horizontalmente “c” lugares a la derecha →



- **a * f(x)**
  Si |a| > 1 el gráfico de la función se comprime contra el eje “y”



Si 0< |a| <1 el gráfico de la función se achata contra el eje “x”



Si a < 0 el gráfico de la función se invierte con respecto al eje “x”