Función exponencial

Una función exponencial se define de la siguiente forma:

$$f: R \to R^{+} / f(x) = a^{x} \quad \text{siendo } a > 0 \text{ y } a \neq 1$$

El número a se denomina base de la función exponencial.

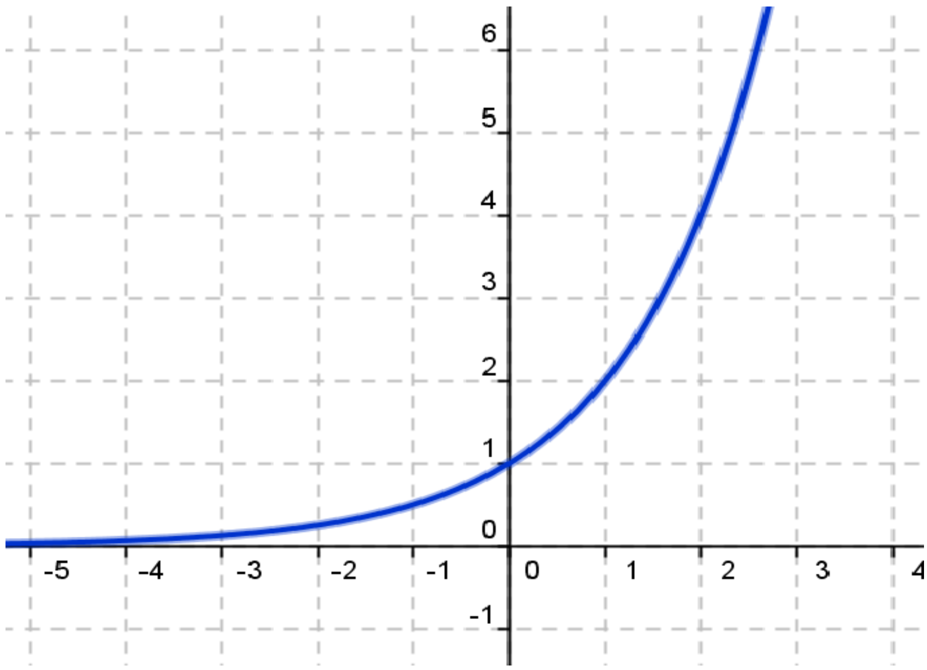
El dominio de una función exponencial es el conjunto de los números reales.

Los gráficos de esta función pueden dividirse en dos grupos, según sea la base mayor o menor que 1. Para analizar su forma tomaremos dos funciones como ejemplo, una de cada grupo:

1) $f(x) = 2^{x}$

Observemos la siguiente tabla de valores, y luego identifiquemos los puntos correspondientes en el gráfico:

x	F(x)
-1	½
-2	¼
0	1
1	2
2	4



En el gráfico podemos observar lo siguiente:

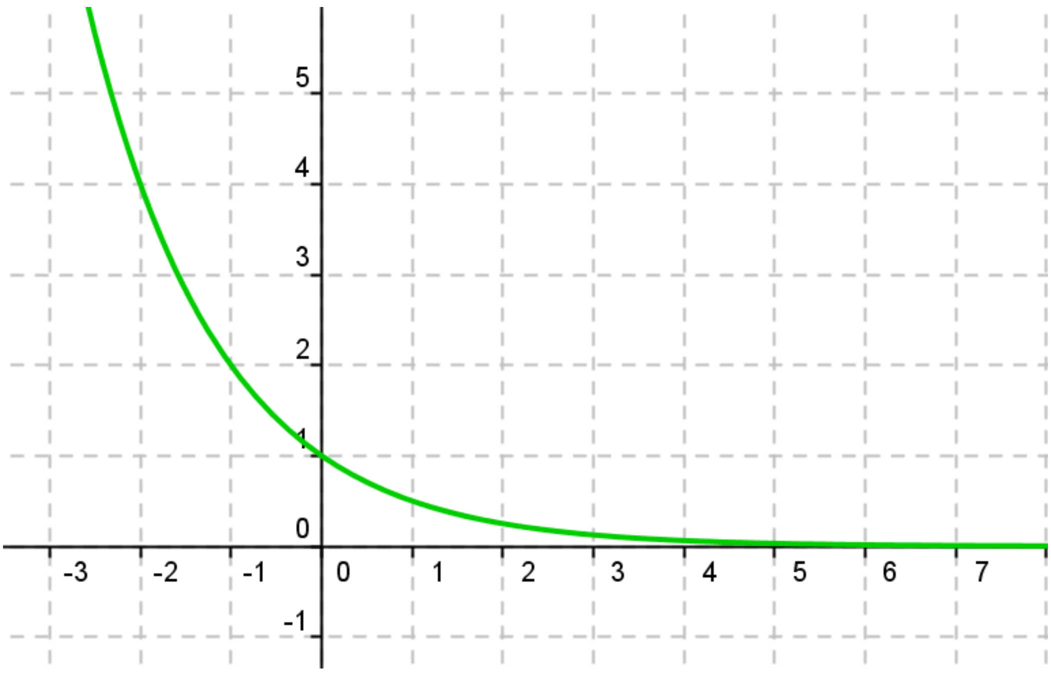
- Cuanto mayores son los valores que le damos a x mayores son las imágenes, por lo tanto podemos decir que la función exponencial de base mayor que 1 es **creciente**.

- Cuanto más pequeños son los valores que le damos a x, las imágenes se acercan cada vez más a cero. Gráficamente la curva se acerca cada vez más al eje x. En estos casos decimos que el eje x (y = 0) es **asíntota horizontal izquierda** al gráfico de la función.

2) $f(\mathrm{x}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{x}}$

Observemos la siguiente tabla de valores y luego identifiquemos los puntos correspondientes en el gráfico:

x	f(x)
-1	2
-2	4
0	1
1	½
2	¼



En el gráfico podemos observar lo siguiente:

- Cuanto mayores son los valores que le damos a x las imágenes son más pequeñas, por lo tanto, podemos decir que la función exponencial de base menor que 1 es **decreciente**.

- Cuanto más grandes son los valores que le damos a x las imágenes se acercan a cero; gráficamente la curva se acerca cada vez más al eje x. En estos casos decimos que el eje x es **asíntota horizontal derecha** al gráfico de la función.

Observando los gráficos de las dos funciones podemos decir:

- El punto de intersección del gráfico con el eje y es el (0; 1)

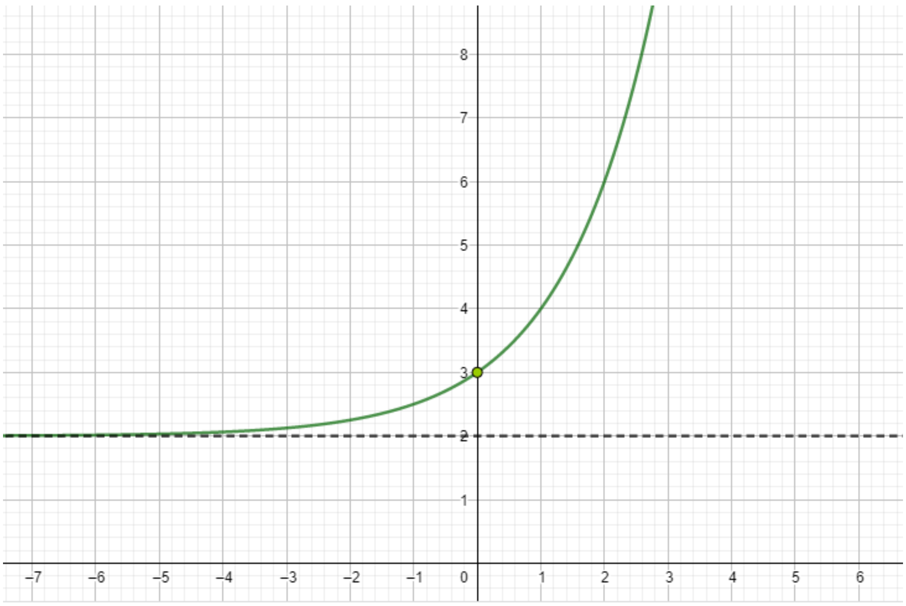
- El gráfico no corta al eje x

- El conjunto imagen en ambos casos es R^+

De la misma forma que en las funciones analizadas anteriormente, cualquier constante que multiplique o se sume a la función o a su argumento produce desplazamientos en el gráfico, como se puede observar en los siguientes ejemplos:

- Si se le suma una constante a la función, el grafico se desplaza hacia arriba (si la constante es positiva) o hacia abajo (si la constante es negativa), desplazándose también la asíntota horizontal y modificando el conjunto imagen.

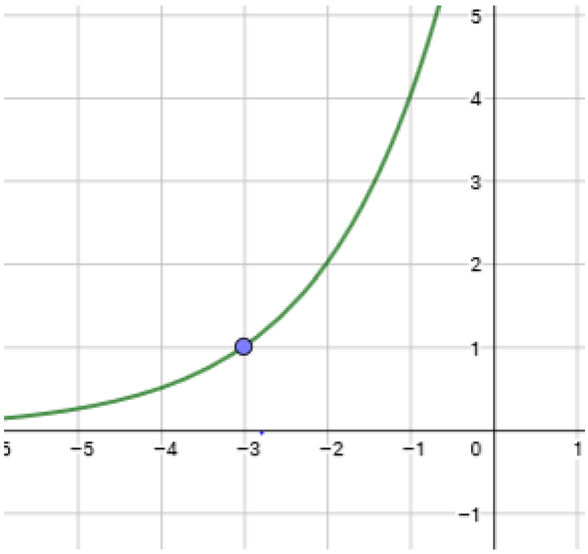
  En el ejemplo, $f(x) = 2^x + 2$, el 2 que suma a la función hace que la asíntota sea y = 2 y el conjunto imagen $(2;\ +\infty)$



- Si se le suma una constante a la variable, el grafico se desplaza hacia la derecha (si la constante es negativa) o hacia la izquierda (si la constante es positiva).

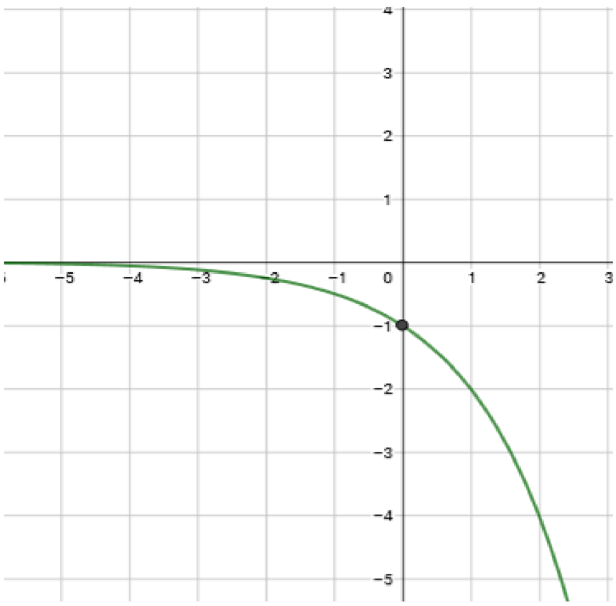
  En el ejemplo, $f(x) = 2^{x+3}$, el gráfico se desplaza hacia la izquierda tres unidades.

  (Podemos tomar como referencia el punto (0, 1) de la función $y = 2^x$ que esta desplazado en el punto (-3, 1))



- Si se multiplica por un número a la función, esta crece más rápido si el número es mayor que uno, o más lento si esta entre cero y uno. Si el número es negativo, la función decrece en forma simétrica con respecto al eje x

  En el ejemplo, $y = -2^x$, queda decreciente y simétrica a $y = 2^x$ con respecto al eje x. El conjunto imagen es R-



PROPIEDADES DE LAS POTENCIAS

1. Todo número elevado a la cero es uno, excepto el cero:

$$a^0 = 1, \forall a \neq 0$$

2. El producto de dos potencias de la misma base es igual a otra potencia de igual base y exponente igual a la suma de los exponentes dados:

$$a^b . a^c = a^{b+c}$$

Ejemplo: $3^4 . 3^5 = 3^9$

3. El cociente de dos potencias de la misma base es igual a otra potencia de igual base y exponente igual a la resta de los exponentes dados:

$$a^b : a^c = a^{b-c}$$

Ejemplo: $3^7 : 3^5 = 3^2$

4. El exponente negativo indica que hay que invertir la base:

$$a^{-1} = \frac{1}{a}, \ \ \forall a \neq 0$$

Ejemplo: $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

5. La potencia de una potencia se resuelve elevando a la base al producto entre las dos potencias:

$$(a^b)^c = a^{b.c}$$

Ejemplo: $(3^4)^2 = 3^8$

ECUACIONES EXPONENCIALES

$2^{x+1} + 2^{x-2} = \frac{9}{2}$ aplicamos propiedades de potencias de igual base

$2^x . 2^1 + 2^x 2^{-2} = \frac{9}{2}$

$2^x . (2^1 + 2^{-2}) = \frac{9}{2}$ sacamos factor común 2^x y resolvemos la suma

$2^x . \frac{9}{4} = \frac{9}{2}$

$2^{x} = \frac{9}{2}.\frac{4}{9}$ despejamos 2^{x}

$2^{x} = 2 \rightarrow x = 1$ si las bases son iguales, los exponentes tienen que ser iguales

Nota: si las bases de las exponenciales no fueran iguales, se utiliza el logaritmo para despejar x, cuya definición y propiedades veremos a continuación.

La función exponencial admite función inversa. La función inversa de la exponencial es la función logarítmica, que permite calcular el exponente al cual fue elevada la base para obtener cierto resultado.