Problemas de conteo

Usaremos lo aprendido de operaciones entre conjuntos como una de las formas que para contar.

Sean S y T conjuntos finitos podrían ser disjuntos o no.

- **Si S y T son disjuntos** $\Rightarrow \#(S \cup T) = \#(S) + \#(T)$

Observación

El cálculo puede extenderse a más de dos conjuntos, siempre y cuando ningún par de conjuntos compartan elementos.

<u>Ejemplos</u>

1. Un profesor de computación tiene cinco libros introductorios de cada uno de los siguientes lenguajes: APL, Basic, Fortran y Pascal. ¿Cuántos libros puede recomendar a un estudiante interesado en aprender la introducción a un primer lenguaje?

Como son libros de distintos lenguajes, no hay intersección entre ellos, por lo tanto podemos calcular el total de libros a recomendar como la suma de los cardinales de los conjuntos de cada lenguaje.

$\boldsymbol{\#(A \cup B \cup F \cup P) = \#(A) + \#(B) + \#(F) + \#(P) = 5 + 5 + 5 + 5 = 20}$

Por lo tanto, puede recomendar veinte libros para aprender alguno de los lenguajes.

2. Dados los conjuntos:

$S = \{x \in N / x = \acute{3} \text{ (múltiplos de 3)} \wedge x < 5\} = \{3\}$

$T = \{x \in N / x = \acute{2} \text{ (múltiplos de 2)} \wedge x < 9\} = \{2,4,6,8\}$

Calcula la cantidad de elementos de S o T

Observamos que los conjuntos son disjuntos, por lo tanto podemos usar la formula arriba mencionada.

$\#(S \cup T) = \#(S) + \#(T) = 1 + 4 = 5$ cantidad de elementos de S o T

- **si S y T no son disjuntos $\Rightarrow \#(S \cup T) = \#(S) + \#(T) - \#(S \cap T)$**

<u>Ejemplos</u>

3. En la Facultad de Ingeniería se cursan los días miércoles las materias Análisis Matemático I y Sistemas y Métodos. Se sabe que hay 30 alumnos inscriptos en la primera y 35 inscriptos en la segunda. Si los miércoles deben asistir en total 40 alumnos, ¿cuántos alumnos cursan las dos materias? ¿Cuántos cursan solo una de las dos?

En este caso, tenemos el total de alumnos que cursan una y otra materia, y también el total de los que cursan ese día (la unión de los que cursan las dos materias), pero hay alumnos que cursan las dos materias el día miércoles (pertenecen a la intersección). Por lo tanto, para poder calcular cuántos alumnos hay en la intersección usamos la segunda fórmula.

$\#(S \cup A) = \#(S) + \#(A) - \#(S \cap A)$

$40 = 35 + 30 - \#(\mathbf{S} \cap \mathbf{A})$

$\#(\mathbf{S} \cap \mathbf{A}) = \mathbf{65} - \mathbf{40} = \mathbf{25}$

Hay 25 alumnos que cursan las dos materias los días miércoles

Para calcular la cantidad de alumnos que solo cursan una materia, tenemos que restar al cardinal del conjunto materia, el cardinal de la intersección.

- Solo cursan Análisis Matemático 1 = 30 – 25 = 5

- Solo cursan Sistemas y Métodos = 35 – 25 = 10

4. Dados los conjuntos:

S = {$x \in \aleph$ / x = $\acute{3}$ (múltiplos de 3) $\wedge$ x < 11} = $\{3,6,9\}$

T = {$x \in \aleph$ / x = $\acute{2}$ (múltiplos de 2) $\wedge$ x < 11} = $\{2,4,6,8,10\}$

Calcula la cantidad de elementos de S U T

Observamos que los conjuntos tienen un elemento en común, por lo tanto el cardinal de la unión es

$$\#(S \cup T) = \#(S) + \#(T) - \#(S \cap T)$$

$$3 + 5 - 1$$

Principio de inclusión - exclusión

Para calcular el cardinal de la unión de n conjuntos hay que:

1. **incluir o sumar** los cardinales de cada uno de los conjuntos

2. **excluir o restar** los cardinales de todas las posibles combinaciones de las intersecciones de un número par de conjuntos

3. **incluir o sumar** los cardinales de todas las posibles combinaciones de las intersecciones de un número impar de conjuntos.

Para tres conjuntos S, T y R no disjuntos $\Rightarrow$

$$\#(S \cup T \cup R) = \#(S) + \#(T) + \#(R) - \#(S \cap T) - \#(S \cap R) - \#(R \cap T) + \#(S \cap T \cap R)$$

<u>Ejemplo</u>

Un club deportivo tiene 1.500 socios que pueden practicar fútbol, natación y básquet. Los socios que practican, por lo menos, uno de los tres deportes son 1.200. Hay 600 socios que juegan fútbol, 525 al básquet, 450 natación, 150 fútbol y básquet, 195 básquet y natación y 120 fútbol y natación. Queremos saber:

a) ¿Cuántos practican los tres deportes?

b) ¿Cuántos no practican ningún deporte?

c) La cantidad de socios que practican solamente natación.

<u>Solución</u>

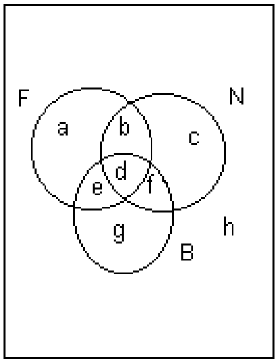
Llamemos:

U = {socios del club} (Es el marco referencial del problema)

F = {socios que practican fútbol}

N = {socios que practican natación}

B = {socios que practican básquet}



Representando mediante diagramas de Venn los conjuntos y con un rectángulo el referencial, vemos que quedan determinadas regiones. Cada región corresponde a alguna operación entre conjuntos y se pueden interpretar de la siguiente manera:

a) socios que solo practican fútbol

b) socios que practican fútbol y natación, pero no básquet

c) socios que practican solo natación

d) socios que practican los tres deportes

e) socios que practican fútbol y básquet, pero no natación

f) socios que practican natación y básquet, pero no fútbol

g) socios que solo practican básquet

h) socios que no practican ningún deporte

Ahora podemos escribir:

#(F $\cup$ N $\cup$ B) = 1.200

#(F) = 600

#(B) = 525

#(N) = 450

#(F$\cap$ B) = 150

(B $\cap$ N) = 195

#(F $\cap$ N) = 120

La cantidad de los socios que practican los tres deportes es **#**(F $\cap$ B $\cap$ N). Entonces:

$$\#(F \cup N \cup B) = \#(F) + \#(B) + \#(N) - \#(F \cap B) - \#(B \cap N) - \#(F \cap N) + \#(F \cap B \cap N)$$

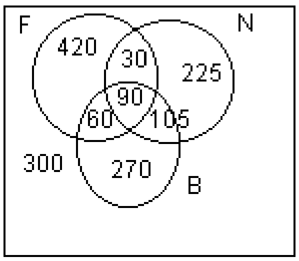
<u>Reemplazando:</u>

1.200 = 600 + 525 + 450 - 150 - 195 – 120 + **#**(F $\cap$ B $\cap$ N)

1.200 = 1.110 + **#**(F $\cap$ B $\cap$ N)

Con lo cual 1.200 – 1110 = 90 = **#**(F$\cap$B$\cap$N): es la cantidad de socios que practican los tres deportes.

Representamos mediante diagramas de Venn y ubicamos la cantidad de elementos de cada región para poder responder las dos preguntas restantes. Ubicamos primero el 90 en la intersección de los tres conjuntos. Luego, como **#**(F $\cap$ N) = 120 y 90 socios practican además básquet, la cantidad de socios que practican solo fútbol y natación es 30. Y así vamos calculando y ubicando las restantes cifras.



Este es el diagrama terminado y de él podemos obtener las respuestas que faltan:

- No practican ningún deporte 300 socios (quedó en el referencial pero no dentro de los conjuntos)

- Practican solo natación 225 socios ya que esta cifra aparece en la región de N que no es compartida por ningún otro conjunto.

Nota: No todos los problemas se resuelven de la misma manera. En algunos casos, es imprescindible hacer el diagrama que representa la situación y colocar en él los datos que obtiene del enunciado.

Otra forma de resolver problemas que involucran conjuntos es registrar la información mediante tablas llamadas diagramas de Carroll. Estas tablas son muy útiles cuando se trabaja con propiedades complementarias. El siguiente cuadro muestra la operación correspondiente a los cardinales con los que debe completarse cada región del mismo:

	B	$\overline{B}$	**Totales**
A	#(A $\cap$ B)	#(A $\cap \overline{B}$)	#(A)
$\overline{A}$	#($\overline{A} \cap$ B)	#($\overline{A} \cap \overline{B}$)	#($\overline{A}$)
Totales	#(B)	#($\overline{B}$)	#(R)

Ejemplos

- Tomando como marco universal el conjunto de las personas, el complemento del conjunto de las mujeres es el conjunto de los hombres.
- Si el universal es el conjunto de los números naturales, son complementarios los conjuntos de los números pares e impares.

Ejemplo

En una empresa en la que trabajan 216 empleados, 159 saben escribir a máquina. Del grupo de los que pueden escribir a máquina, 87 pertenecen al sector de Cómputos que cuenta con una dotación total de 124 empleados.

- ¿Cuántos empleados del sector Cómputos no escriben a máquina?

- ¿Cuántos no trabajan en el sector Cómputos?

- ¿Cuántos de los empleados que no pertenecen a Cómputos saben escribir a máquina y cuántos no?

Evidentemente tenemos dos propiedades: “escribir a máquina” y “trabajar en Cómputos”. Sus complementarias serían "no escribir a máquina" y "no trabajar en Cómputos".

Construimos una tabla con la información del problema teniendo en cuenta que cada casillero significa que se cumplen las dos propiedades al mismo tiempo.

	Escribir a máquina	No escribir a máquina	**Totales**
Trabajar en Computación	**87**	37	**124**
No trabajar en Computación	72	20	92
Totales	**159**	57	**216**

Para completar la tabla y obtener los resultados pedidos solo tenemos que hacer algunas sumas y restas:

- Si en la empresa hay 216 empleados en total y 124 trabajan en Cómputos, entonces 216 – 124 = 92 empleados no trabajan en computación.
- Si 159 escriben a máquina y 87 de ellos trabajan en computación, ¿cuántos escriben a máquina y no trabajan en computación? 159 – 87 = 72.

Ya podemos agregar estos valores a la tabla y calcular los restantes realizando más sumas y restas. Los números, que son los datos iniciales, están en negrita y los que hemos agregado, no. ¿Y las respuestas? Las obtenemos mirando la tabla y buscando el casillero que cumpla con las propiedades pedidas. Entonces:

- 37 empleados de Computación no escriben a máquina
- 92 empleados de la empresa no trabajan en el sector Cómputos
- 72 empleados que no trabajan en computación escriben a máquina y 20 no.