Función logarítmica

$$f: R^{+} \rightarrow R / f(x) = \log_a x, \qquad \text{siendo } a > 0 \text{ y } a \neq 1$$

El dominio de la función logarítmica es el conjunto de los reales positivos, es decir que sólo se puede calcular el logaritmo de un número positivo.

Al igual que la función exponencial, los gráficos de la función logarítmica pueden dividirse en dos grupos, según la base sea mayor o menor que 1.

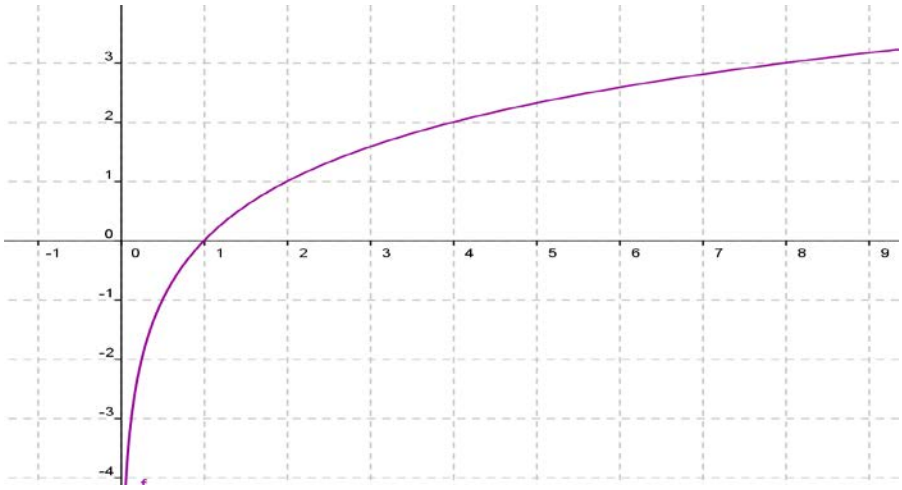
Tomemos un ejemplo de una función de cada grupo para analizar la forma del gráfico del logaritmo.

1)

$f(x) = \log_2 x$

Observemos la siguiente tabla de valores y luego identifiquemos los puntos en el correspondiente gráfico:

x	f(x)
¼	-2
½	-1
1	0
2	1
4	2



En el gráfico podemos observar lo siguiente:

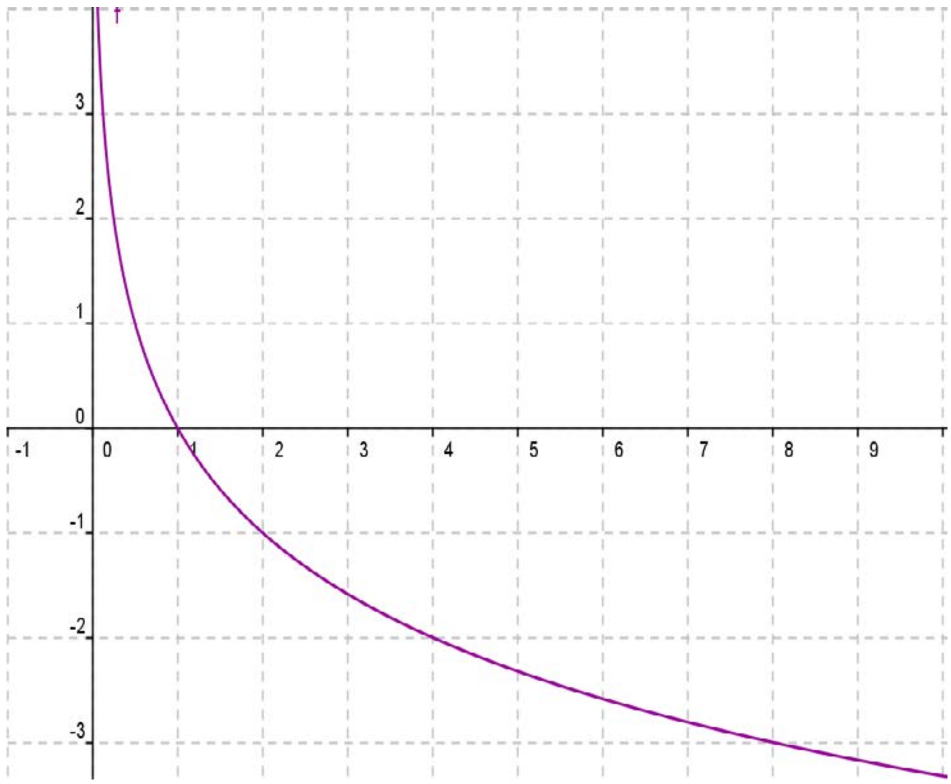
- Cuanto mayores son los valores que le damos a x, mayores son las imágenes, por lo tanto podemos decir que la función logarítmica de base mayor que 1 es **creciente**.

- Cuanto más cercanos son a cero los valores que le damos a x las imágenes son cada vez más pequeñas (tienden a $-\infty$). Gráficamente la curva se acerca cada vez más al eje y. En estos casos decimos que el eje y es **asíntota vertical** al gráfico de la función.

2)

$f(x) = \log_{1/2} x$

x	f(x)
¼	2
½	1
1	0
2	-1
4	-2



En el gráfico podemos observar lo siguiente:

- Cuanto mayores son los valores que le damos a x las imágenes son más pequeñas, por lo tanto, podemos decir que la función logarítmica de base menor que 1 es **decreciente**.

- Cuanto más cercanos a cero son los valores que le damos a x las imágenes toman valores cada vez más grandes (tienden a $+\infty$). Gráficamente la curva se acerca cada vez más al eje y. En estos casos decimos que el eje y es **asíntota vertical** al gráfico de la función.

Observando los gráficos de las dos funciones podemos decir:

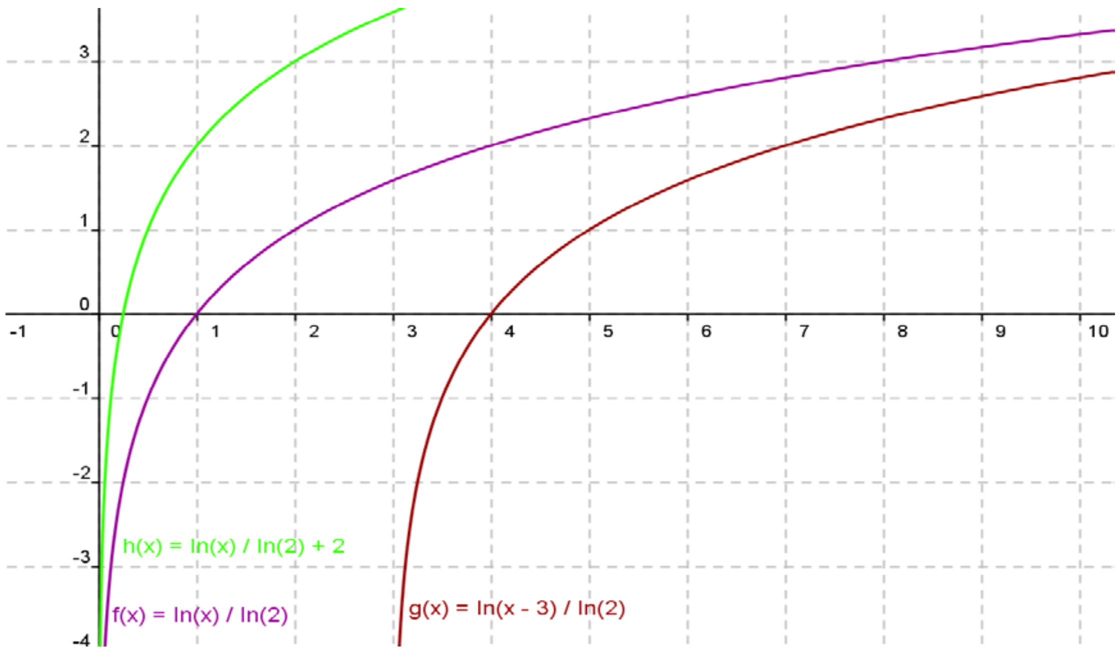
1. El punto de intersección del gráfico con el eje x es el (1; 0) (el logaritmo de 1 en cualquier base es cero)

2. El gráfico no corta al eje y

3. El conjunto imagen en ambos casos es $\Re$

Los desplazamientos que sufre la función logaritmo pueden observarse en los siguientes ejemplos:

(tener en cuenta que si sumamos o multiplicamos por algún número al argumento de la función puede cambiar el dominio)



Recordemos la definición:

$$\log_a b = c \quad \Leftrightarrow a^c = b$$

Propiedades de los logaritmos

1. El logaritmo de 1 en cualquier base es cero
2. El logaritmo de la base es 1
3. El logaritmo de un producto es la suma de los logaritmos de los factores $\log_z(m.n) = \log_a m + \log_a n$
4. El logaritmo de un cociente es la diferencia de los logaritmos del dividendo y del divisor $\log_z(m/n) = \log_a m - \log_a n$
5. El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base de dicha potencia $\log_a b^n = n.\log_a b$

Cambio de base

Para cambiar la base del logaritmo de un número podemos aplicar la siguiente fórmula:

$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ siendo c la nueva base elegida.

Esta fórmula nos es útil para calcular el logaritmo en cualquier base usando la calculadora, ya que en ésta encontramos sólo las funciones logarítmicas de base10 (log x) y base e (ln x).

Ecuaciones logarítmicas

Para resolver una ecuación logarítmica primero debemos determinar el campo de existencia, o sea, los valores posibles que puede tomar la variable. Estos valores se determinan teniendo en cuenta que el logaritmo solo se puede aplicar a valores positivos.

Ejemplo:

$\log_3(2x - 6) = 2$

Campo de existencia:

$$2x - 6 > 0 \rightarrow x > 3$$

Significa que la solución de la ecuación debe ser un número mayor a 3, sino no puede ser solución.

Resolución:

$\log_3(2x - 6) = 2$ aplicando definición de logaritmo

$3^2 = 2x - 6$

$9 = 2x - 6$ despejando x

$x = \frac{15}{2}$ como el valor hallado es mayor que 3, entonces es solución

$S = \left\{\frac{15}{2}\right\}$