Teoría de conjuntos

Conjunto

Llamaremos conjunto a cualquier familia, finita o infinita, de elementos.

Notación: Designaremos a los conjuntos con letras mayúsculas, y a los elementos con minúsculas.

Ejemplo

El conjunto A formado por los elemento 2**,** 4, 6 y 8 se escribe A = {2, 4, 6, 8}

Para abreviar, escribimos los elementos entre llaves y separados por puntos y comas.

2 es un elemento de A

3 no es un elemento de A

Pertenencia: Relación entre un elemento y un conjunto**.** Si a es un elemento del conjunto X, decimos que a **pertenece** a X y lo escribimos: $a \in X$

Su negación se anotará: $a \notin X$

Ejemplo

$\sqrt{2} \notin Q$

$\sqrt{2} \in R$

Observación: Conjunto, elemento y pertenencia son términos primitivos, es decir, son términos que se aceptan sin definición formal, ya que al querer definirlos caeríamos en un círculo vicioso.

© Universidad de Palermo. Prohibida la reproducción total o parcial de imágenes y textos.

Si consideramos las siguientes proposiciones, podemos analizar si son verdaderas o falsas:

a) $6 \in \{2, 4, 6, 8\}$ es verdadera, ya que 6 es un elemento del conjunto.

b) Perú $\in$ {x/x es un país de Europa} es falsa, ya que Perú no es un país de Europa.

c) Amazonas $\notin$ {x/x es un río de América} es falsa, ya que el Amazonas es un río de América.

Formas de definir un conjunto

Por extensión

Si consideramos el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$, vemos que aparecen enumerados todos sus elementos. En este caso, diremos que el conjunto está definido por **extensión**. Es decir, un conjunto está definido por extensión si, y solo si se enumeran todos los elementos que lo constituyen.

Por comprensión

Un conjunto está definido por **comprensión** cuando se da la propiedad que deben cumplir todos sus elementos. Un conjunto se define por comprensión mediante una función proposicional y está formado por todos los elementos que hacen verdadera dicha función.

Ejemplo

El conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ podría ser definido como $A = \{x / x \in N \wedge x \leq 3\}$.

({x / x.....} se lee: el conjunto formado por todas las x tales que...)

Observación: Todos los elementos que cumplen con la propiedad que define al conjunto, pertenecen al mismo.

Si queremos definir por comprensión el conjunto B = {a, e, o}, no podemos definirlo como {x / x es vocal} ya que este nuevo conjunto es {a, e, i, o, u}. Tendríamos que definirlo como B = {x / x es una de las vocales fuertes del alfabeto}.

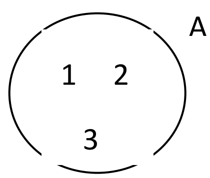
© Universidad de Palermo. Prohibida la reproducción total o parcial de imágenes y textos.

Representación Gráfica: Diagrama de Venn

Podemos representar gráficamente un conjunto mediante un diagrama de Venn , es decir, mediante una curva o un polígono cerrado cualquiera que rodea los elementos del mismo.

<u>Ejemplo</u>

A = {1, 2, 3}



Conjuntos numéricos

Naturales: N = {1, 2, 3, 4,.....}

Naturales con el cero $\mathbf{N_0}$ = {0, 1, 2, 3,....}

Enteros: Z = $N_0 \cup$ {-1, -2, -,3, -4,.....}

Racionales: Q = { $\frac{p}{q}$ / p $\ni$ Z $\wedge$ q $\in$ Z - {0}}

Están formados por todos los números que pueden expresarse como fracción, incluyendo a los enteros.

Irracionales: I

Está formado por todos los números que no se pueden expresar como fracción, o sea que tienen infinitas cifras decimales no periódicas como las raíces que no son exactas ($\sqrt{2}$), los números e, π, etc.

Reales: $\Re$ **=** Q $\cup$ I

© Universidad de Palermo. Prohibida la reproducción total o parcial de imágenes y textos.

Conjunto Referencial

Es el conjunto del cual se toman los elementos para definir un conjunto por extensión o por comprensión.

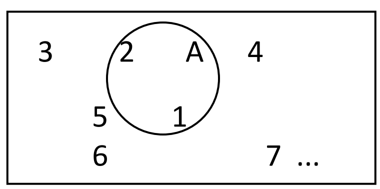
Notación: R, U

Representación gráfica **R**

<u>Ejemplo</u>

Para determinar los elementos del conjunto A = {x $\in$ N/ $2x-1<5$} estamos tomando como referencia el conjunto de los números naturales N.

A = {1, 2} R



Conjuntos especiales

Conjunto vacío

Si bien en el lenguaje ordinario la palabra “conjunto” se usa para colecciones de elementos, aceptamos que se llame conjunto vacío a aquel que carece de elementos y se simboliza ϕ o {}.

<u>Ejemplo</u>

A = {x / x es una mosca que mide 9 Km.}

A = ϕ = { }

© Universidad de Palermo. Prohibida la reproducción total o parcial de imágenes y textos.

Conjunto unitario

Un conjunto que está formado por un solo elemento se llama conjunto unitario.

<u>Ejemplo</u>

$A = \{x \in N \wedge 2 < x \leq 3\} = \{3\}$

Cardinal de un conjunto

Se denomina **cardinal** de un conjunto a la cantidad de elementos del mismo. En el ejemplo anterior, el cardinal de A es uno pues contiene un elemento.

Notación

#(A) = 1, donde **#(A)** representa el cardinal del conjunto A

Relaciones entre conjuntos

Inclusión amplia

Sean A y B dos conjuntos, si todo elemento de A pertenece también a B, diremos que A está **incluido ampliamente** en B, o que B **incluye ampliamente** a A, o que A es un **subconjunto o forma parte** de B.

Notación

$\mathbf{A \subseteq B}$ A es un **subconjunto o forma parte** de B **o** $\mathbf{B \supseteq A}$ B **incluye ampliamente** a A.

Simbólicamente:

$\mathbf{A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x: (x \in A \Rightarrow x \in B)}$

$\mathbf{A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x: (x \notin B \Rightarrow x \notin A)}$

(por contrarrecíproco)

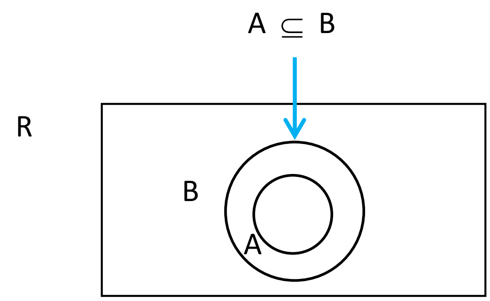
$\mathbf{A \not\subset B \Leftrightarrow \exists x / \ x \in A \wedge x \notin B}$

(Negación de la equivalencia de la implicación)

© Universidad de Palermo. Prohibida la reproducción total o parcial de imágenes y textos.

Las tres definiciones anteriores son equivalentes.

Gráficamente



Ejemplo

Dados los conjuntos A = {1, 3, 5} y B = {1, 3, 5, 7, 9}

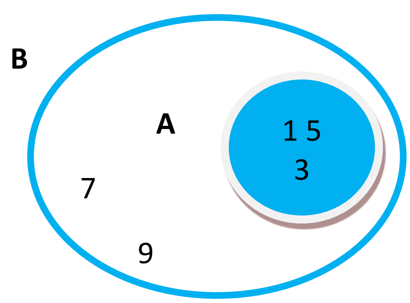
$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x: x \in A \Rightarrow x \in B$ (todos los elementos de A pertenecen a B)

$$1 \in A \Rightarrow 1 \in B$$

$$3 \in A \Rightarrow 3 \in B$$

$$5 \in A \Rightarrow 5 \in B$$

Vemos que todos los elementos de A que hacen verdadero en antecedente también hacen verdadero el consecuente, por lo tanto verifican la definición.



Inclusión estricta

Sean A y B dos conjuntos**,** si todo elemento de A pertenece también a B, y existe un elemento de B que no pertenece a A, diremos que A está **incluido estrictamente** en B, o que B **incluye estrictamente** a A, o que A es un **subconjunto propio** o **forma parte propia** de B.

© Universidad de Palermo. Prohibida la reproducción total o parcial de imágenes y textos.

Notación

$A \subset B$ A está **incluido estrictamente** en B

$B \supset A$ B **incluye estrictamente a** A

Simbólicamente

$$\mathbf{A \subset B \Leftrightarrow [\ (\forall x: x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (\exists x /\ x \in B \wedge x \notin A)\ ]}$$

<u>Ejemplo</u>

Dados los conjuntos A = {1, 3, 5}   B = {1, 3, 5, 7, 9}

$$\mathbf{A \subset B \Leftrightarrow (\forall x: x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (\exists x /\ x \in B \wedge x \notin A)}$$

Todos los elementos de A pertenecen a B, y existen el 7 y el 9 que pertenecen a B y no pertenecen a A.

Igualdad entre conjuntos

Dos conjuntos A y B son iguales si tienen los mismos elementos, es decir:

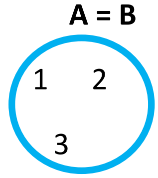
$$\mathbf{A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A}$$

<u>Ejemplo</u>

Dados los conjuntos A = {1, 3, 5} y B = {1, 3, 5, 1, 5}, vemos que son iguales ya que todo elemento de A pertenece a B y todo elemento de B pertenece a A.

A = B

<u>Representación gráfica</u>



Propiedades

- El conjunto vacío está incluido en todos los conjuntos.

- El conjunto vacío es único.

© Universidad de Palermo. Prohibida la reproducción total o parcial de imágenes y textos.

Conjunto de partes

Dado el conjunto A, podemos formar un nuevo conjunto constituido por todos los subconjuntos del conjunto A. Este conjunto se llama **partes de A** o p**otencial de A.**

Simbólicamente

P(A) = {X / X $\subseteq$ A}

<u>Ejemplo</u>

Si A = {1, 2, 3}, entonces P(A) = {ϕ, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, {1, 2, 3}}

<u>Observaciones</u>

a) P(A) es un conjunto cuyos elementos son conjuntos

b) Si k es el cardinal de A, entonces el cardinal de P(A) es 2^k, es decir:

$\# P(A) = 2^{\#(A)}$

c) Si X $\in$ P(A) $\Rightarrow$ X $\subseteq$ A.

d) A $\in$ P(A), $\forall$A.

e) ϕ $\in$P(A), $\forall$A.

1. Dado el conjunto A = {6, 2, 8, 4, 3}, todos los subconjuntos de A que se puedan construir con sus elementos, es decir el conjunto potencia, es:

P(A) = { {6},{2},{8},{4},{3},{6,2},{6,8},{6,4},{6,3},{2,8},{2,4},{2,3},{8,4},{8,3},{4,3},

{6,2,8},{6,2,4},{6,2,3},{6,8,4},{6,8,3},{6,4,3},{2,8,4},{2,8,3},{8,4,3},{6,2,8,4},{6,2,8,3},

{2,8,4,3,},{6,8,4,3,},{6,2,4,3,},{6,2,8,4,3},{ }}

Podemos verificar que la cantidad de subconjuntos que pertenecen a P(A) es 2^5 = 32, y que cada elemento de P(A) es un subconjunto de A. Además, el mismo conjunto A y el vacío pertenecen a P(A).

Operaciones entre conjuntos

Al realizar una operación entre dos conjuntos, obtenemos como resultado otro conjunto.

© Universidad de Palermo. Prohibida la reproducción total o parcial de imágenes y textos.

Intersección

La **intersección** entre dos conjuntos A y B es otro conjunto formado por los elementos que pertenecen a ambos conjuntos.

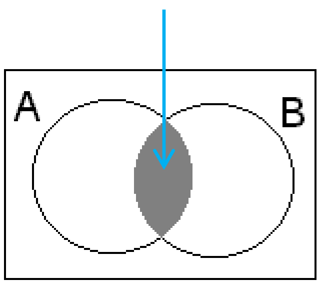
Simbólicamente:

$A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\}$

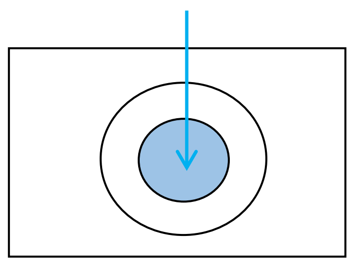
Gráficamente:

$A \cap B$

R



$A \cap B$

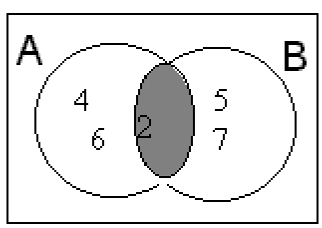


Si $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$

<u>Ejemplo</u>

Sean los conjuntos: A = {2, 4, 6} y B = {2, 5, 7} , entonces $A \cap B = \{2\}$

R

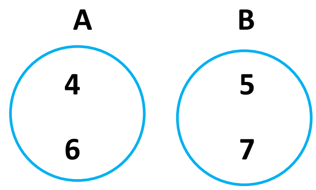


Importante: Dos conjuntos A y B se dicen **disjuntos** si $A \cap B = \phi$, o sea, si no tienen elementos en común.

<u>Ejemplos</u>

Sean los conjuntos A = {4, 6} y B = {5, 7}, entonces $A \cap B = \{\ \}$

© Universidad de Palermo. Prohibida la reproducción total o parcial de imágenes y textos.



El conjunto de los números naturales pares y el de los impares son disjuntos.

Observemos los resultados de la intersección en la siguiente tabla:

$\cap$	{a, b}	{a}	{b}	ϕ
{a, b}	{a, b}	{a}	{b}	ϕ
{a}	{a}	{a}	ϕ	ϕ
{b}	{b}	ϕ	{b}	ϕ
ϕ	ϕ	ϕ	ϕ	ϕ

Podemos verificar las propiedades debajo enunciadas, correspondientes a la intersección.

Propiedades

1. Idempotencia: $A \cap A = A$
2. Asociatividad: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
3. Conmutatividad: $A \cap B = B \cap A$
4. Elemento neutro (conjunto referencial): $A \cap R = R \cap A = A$
5. $A \cap \phi = \phi, \forall A$

Unión

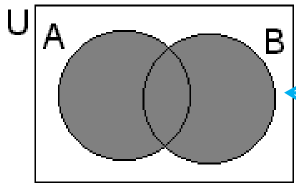
La **unión** entre dos conjuntos A y B, es otro conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A, a B o a ambos.

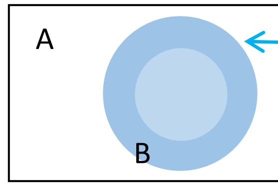
Simbólicamente:

$A \cup B = \{x / x \in A \vee x \in B\}$

© Universidad de Palermo. Prohibida la reproducción total o parcial de imágenes y textos.

Gráficamente:



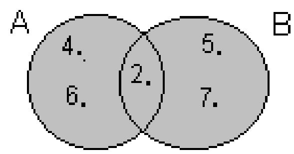


Si $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$

Ejemplo

Sean los conjuntos A = {2, 4, 6} y B = {2, 5, 7} entonces $A \cup B$ = {2, 4, 5, 6, 7}

$A \cup B$



Completar la siguiente tabla escribiendo los resultados correspondientes en cada casilla.

$\cup$	{a, b}	{a}	{b}	ϕ
{a, b}	{a, b}	{a, b}	{a, b}	{a, b}
{a}	{a, b}	{a}	{a, b}	{a}
{b}	{a, b}	{a, b}	{b}	{b}
ϕ	{a, b}	{a}	{b}	ϕ

En esta tabla se pueden verificar las propiedades abajo enunciadas correspondientes a la unión

Propiedades

1. Idempotencia: $A \cup A = A$
2. Asociatividad: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

© Universidad de Palermo. Prohibida la reproducción total o parcial de imágenes y textos.

3. Conmutatividad: $A \cup B = B \cup A$
4. Elemento neutro: $A \cup \phi = \phi \cup A = A, \forall A$

Propiedad distributiva de la unión respecto de la intersección y viceversa

a) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

b) $(A \cap B) \cup C = (A \cup B) \cap (B \cup C)$

Podemos verificar gráficamente las propiedades anteriores.

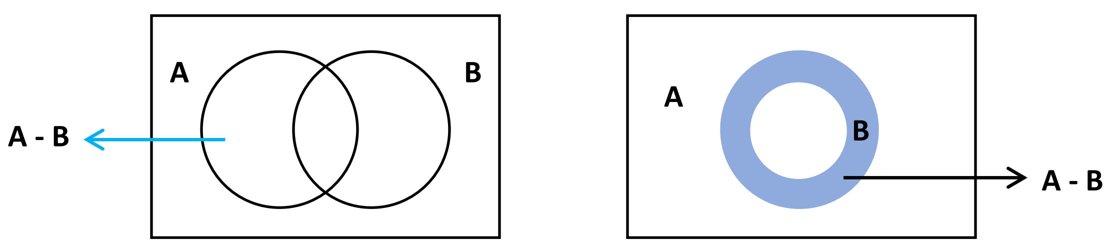
Diferencia

Llamaremos **diferencia** entre los conjuntos A y B al conjunto formado por los elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B.

Simbólicamente

$\mathbf{A - B = \{x \,/\, x \in A \wedge x \notin B\}}$

Gráficamente

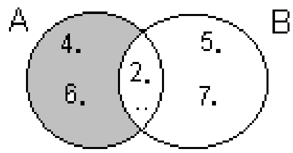


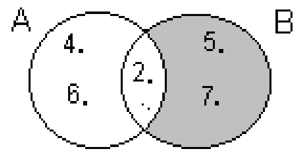
Ejemplo

Dados los conjuntos $A = \{2, 4, 6\}$ y $B = \{2, 5, 7\}$, entonces

$A - B = \{4, 6\}$ $\qquad\qquad$ $B - A = \{5, 7\}$

© Universidad de Palermo. Prohibida la reproducción total o parcial de imágenes y textos.





Podemos observar que la diferencia entre A y B es distinta que la diferencia entre B y A. Se puede demostrar que la diferencia de conjuntos no es conmutativa

Observación

Si A $\subseteq$ B, entonces A – B = ϕ

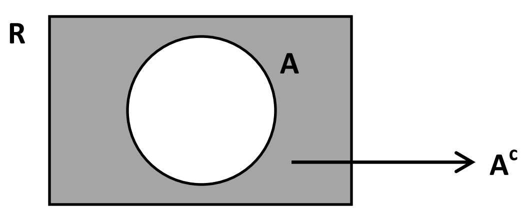
Complemento

Llamaremos **complemento** de un conjunto A, al conjunto formado por todos los elementos que pertenecen al conjunto referencial y que no pertenece al conjunto A. Podemos definirlo como la diferencia entre el referencial y A

Simbólicamente

A^c = R – A

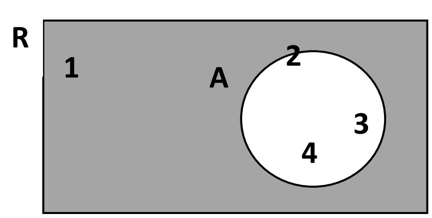
Gráficamente



Ejemplo

Consideremos los siguientes conjuntos:

$$R = \{x / x \in N \wedge x < 5\} = \{1,2,3,4\}$$
$$A = \{x / x \in R \wedge x \, es \; multiplo \; de \; 2\} = \{2,4\}$$
$$A^c = \{1,3\}$$



© Universidad de Palermo. Prohibida la reproducción total o parcial de imágenes y textos.

Propiedades

1. $(\phi)^c = R$.
2. $R^c = \phi$.
3. $(A^c)^c = A$ (involución).

Relación entre la teoría de conjuntos y la lógica proposicional

Existe una relación muy estrecha entre la teoría de conjuntos y la lógica proposicional. Para mostrar dicha relación, denotemos con letras mayúsculas A, B los conjuntos, y en minúsculas a, b sus propiedades características, es decir, la proposición lógica que caracteriza a los elementos de cada conjunto:

a: todos los elementos que pertenecen a A.
b: todos los elementos que pertenecen a B.

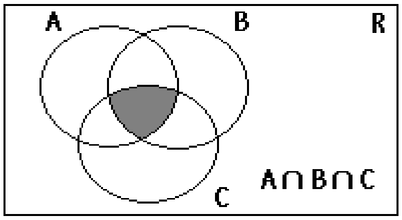
Entonces se tiene la siguiente correspondencia:

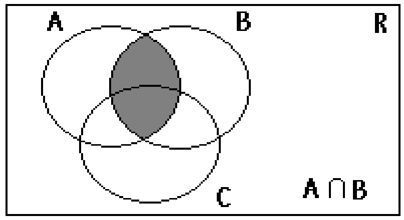
CONJUNTOS	$A \subseteq B$	$A = B$	$A \cup B$	$A \cap B$	A'	$A - B$
PROPOSICIONES	$a \Rightarrow b$	$a \Leftrightarrow b$	$a \vee b$	$a \wedge b$	a'	$a \wedge b'$

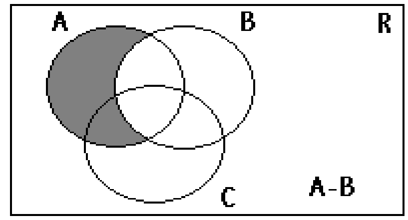
Operaciones con tres conjuntos

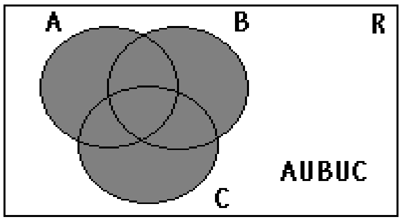
En los siguientes gráficos están representadas las distintas operaciones entre tres conjuntos:

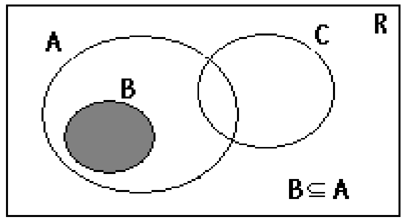
© Universidad de Palermo. Prohibida la reproducción total o parcial de imágenes y textos.

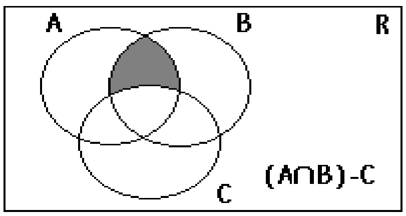


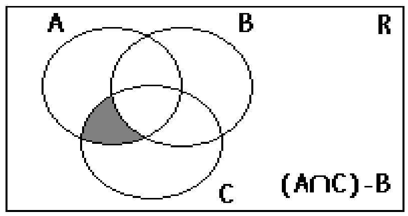


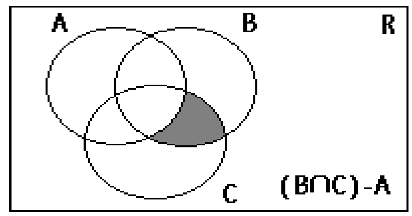


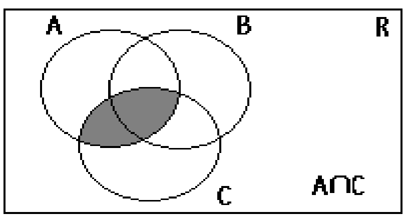


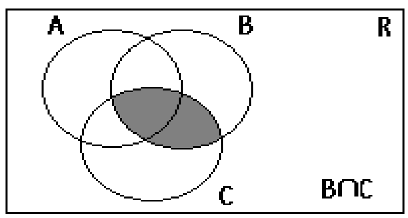


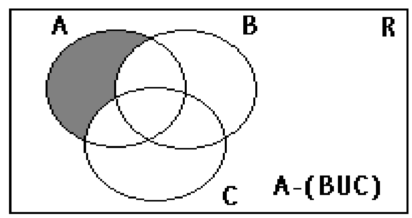


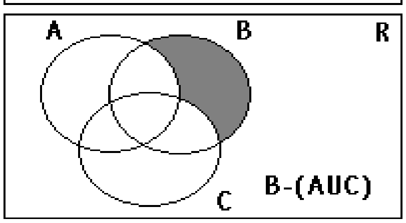


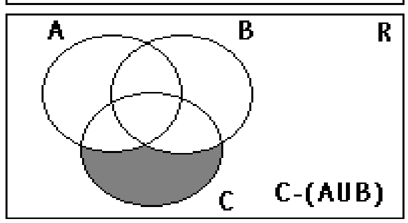












Sean los conjuntos **A** = {3, 5, 6}, **B** = {2, 4, 5, 7} y **C** = {3, 5, 8, 7, 9}

Resolver las siguientes operaciones entre conjuntos:

- Primero, graficamos la situación entre los tres conjuntos, y luego observamos los elementos que pertenecen a las regiones correspondientes a las operaciones.

$A \cup B \cup C$ = {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

$A \cap B$ = {5}

$A \cap C$ = {3, 5}

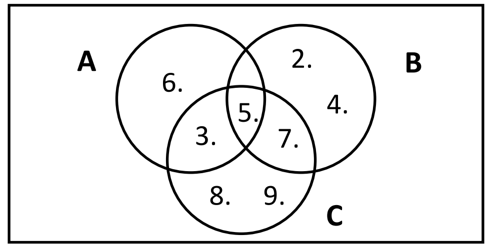
© Universidad de Palermo. Prohibida la reproducción total o parcial de imágenes y textos.

$B \cap C = \{5, 7\}$

$A \cap B \cap C = \{5\}$ $A - B = \{6, 3\}$

$B - (A \cup C) = \{2, 4\}$

$B - (A \cap C) = \{2, 4, 7\}$



Leyes de De Morgan

Las Leyes de De Morgan se aplican para el complemento de la unión y de la intersección. Pueden demostrarse usando las leyes lógicas de De Morgan aplicadas a las proposiciones que resultan de la definición de las operaciones entre conjuntos

1. El complemento de la unión entre dos conjuntos es igual a la intersección de los complementos de ambos conjuntos.

$$\mathbf{(A \cup B)^c = A^c \cap B^c}$$

2. El complemento de la intersección entre dos conjuntos es igual a la unión de los complementos de ambos conjuntos.

$$\mathbf{(A \cap B)^c = A^c \cup B^c}$$

© Universidad de Palermo. Prohibida la reproducción total o parcial de imágenes y textos.