Razonamientos

Razonamiento deductivo válido

Razonamiento: Es un conjunto finito de proposiciones $\mathbf{p_i}$ llamadas **premisas**, de las cuales se afirma que deriva la proposición **q**, llamada **conclusión**.

Partimos de conocimientos existentes o conjeturas que se formulan como proposiciones (premisas) y, a partir de ellas, tratamos de obtener un conocimiento nuevo, una conclusión, que es otra proposición. Las expresiones "luego", "por lo tanto", "en consecuencia" acompañan a la conclusión.

Ejemplo

Sea el siguiente razonamiento

Si estudiás, aprobás.

Estudiás.

Por lo tanto, aprobás.

Las premisas son

p_1: Si estudiás, aprobás $\quad p \rightarrow q$

p_2: Estudiás $\quad p$

La conclusión es $\quad$ _________

c: apruebas $\quad q$

Los razonamientos tienen asociado una proposición que queda determinada por un condicional, donde el antecedente es la conjunción de las premisas y el consecuente es la conclusión.

$$(\mathbf{p_1} \wedge \mathbf{p_2}) \rightarrow \mathbf{c}$$

Razonamiento deductivo: se considera razonamiento deductivo cuando todas las premisas son verdaderas y se puede deducir la verdad de la conclusión. Solo los razonamientos deductivos pretenden que sus premisas ofrezcan fundamentos concluyentes.

Razonamiento deductivo válido: Un razonamiento deductivo es válido si no es posible que, cuando las premisas sean verdaderas la conclusión resulte falsa o, lo que es equivalente, probar que el condicional cuyo antecedente es la conjunción de las premisas y cuyo consecuente es la conclusión, es tautológico.

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow c$$

En el razonamiento deductivo válido existe una **relación de implicación**, es decir, las premisas y la conclusión se relacionan de manera tal, que la verdad de la conclusión se desprende **necesariamente** de la verdad de las premisas.

Observación: De un razonamiento se puede decir que es **válido o no**, pero no que es verdadero o falso.

Validez del razonamiento

Para demostrar la validez de un razonamiento se puede proceder de cuatro formas:

1. Tabla de verdad

Primero, se construye una tabla de valores de verdad para el condicional. Luego, se analiza el valor de verdad de la implicación solo en los renglones significativos de la tabla, o sea aquellos en los que todas las premisas sean verdaderas. No es necesario analizar los renglones donde las premisas sean falsas dado que en la implicación, si el antecedente es falso, la implicación resulta verdadera (recordar tabla de verdad para la implicación).

Ejemplo: $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$

[(p	$\rightarrow$	q)	$\wedge$	p]	$\rightarrow$	q
V	V	V	V	V	**V**	V
V	F	F	F	V	**V**	F
F	V	V	F	F	**V**	V
F	V	F	F	F	**V**	F

Vemos que la implicación resulta una tautología, por lo tanto el razonamiento es válido. Esta técnica para establecer la validez de un razonamiento se vuelve engorrosa a medida que aumenta el número de proposiciones simples de las premisas. Por lo tanto, es útil considerar otros métodos.

2. Método directo

Partiendo de suponer que las premisas son verdaderas, debemos tratar de probar que la conclusión es necesariamente verdadera.

Ejemplo

p_1: Si estudiás, aprobás.

p_2: Estudiás.

c: Aprobás.

En símbolos	Suposición	Deducción	Deducción
$p_1 : p \rightarrow q$	$V(p_1) = V$ (1)	De (2) se desprende que la proposición **p** es verdadera.	Como V(**p**)=V Y como $V(p \rightarrow q) = V$, Entonces V(q)=V
$P_2 : p$	$V(p_2) = V$ (2)		
c: q	V(c) = ?		**V(c) = V**

El valor de verdad de la premisa 2 es verdadero, por lo tanto la proposición "estudiás" resulta verdadera. Si la premisa 1 es verdadera, como el antecedente es verdadero, entonces el consecuente también debe ser verdadero. Por lo tanto, la proposición "aprobás" es verdadera, con lo que resulta verdadera la conclusión y con ello el razonamiento valido.

Observación: Para empezar, elegimos una premisa a partir de la cual podamos deducir los valores de verdad de las proposiciones simples que la componen. En el ejemplo consideramos la premisa 2 verdadera, por lo tanto la proposición **p** es verdadera. Si p es verdadera y la premisa 1 es verdadera, entonces el único valor de verdad posible de **q** es verdadero. De esta forma, llegamos a demostrar que la conclusión (q) es verdadera y, por lo tanto, el razonamiento es válido.

3. Método por reducción al absurdo

Para analizar la validez de un razonamiento por el absurdo, suponemos que las premisas son verdaderas y la conclusión falsa y, a partir de allí, debemos llegar a una contradicción. Tomando el ejemplo anterior se analiza de la siguiente forma:

En símbolos	Suposición	Deducción	CONTRADICCION
p_1: $p \rightarrow q$	$V(p_1) = V$ (1)	De (2) se desprende que la proposición **p** es verdadera	De (1) $V(q) = V$ De (3) $V(q) = F$
p_2: p	$V(p_2) = V$ (2)	Como V(**p**)=V Y como $V(p \rightarrow q) = V$, Entonces **V(q)=V**	
c: q	**V (c)= F (3)**		

Suponemos que **q** (la conclusión) es falsa. Entonces si la premisa 1 es verdadera **p** tiene que ser falsa, con lo que llegamos a que la premisa 2 es falsa. Al suponer que la conclusión es falsa, llegamos a una contradicción para el valor de verdad de **p**, por lo tanto decimos que el razonamiento es válido.

4. Reglas de inferencia

Llamamos regla de inferencia a todo esquema válido de razonamiento independientemente del valor de verdad de las proposiciones que la componen. Toda regla de inferencia es tautológica.

Modus Ponens p_1: $\mathbf{p \rightarrow q}$ p_2: $\mathbf{p}$ ——— c: $\mathbf{q}$	**Modus Tollens** p_1: $\mathbf{p \rightarrow q}$ p_2: $\mathbf{\sim q}$ ——— c: $\mathbf{\sim p}$
Conjunción p_1 : $\mathbf{p}$ p_2 : $\mathbf{q}$ ——— c: $\mathbf{p \wedge q}$	**Simplificación** p_1 : $\mathbf{p \wedge q}$ ——— c: $\mathbf{p}$
Adición p_1 : $\mathbf{p}$ ——— c: $\mathbf{p \vee q}$	**Silogismo hipotético** p_1: $\mathbf{p \rightarrow q}$ p_2: $\mathbf{q \rightarrow r}$ ——— c: $\mathbf{p \rightarrow r}$
Silogismo disyuntivo p_1 : $\mathbf{p \vee q}$ p_2 : $\mathbf{\sim p}$ ——— c: $\mathbf{q}$	**Dilema constructivo** p_1 : $\mathbf{p \rightarrow q}$ p_2 : $\mathbf{r \rightarrow s}$ p_3 : $\mathbf{p \vee r}$ ——— c: $\mathbf{q \vee s}$
Regla de demostración por casos p_1: $\mathbf{p \rightarrow r}$ p_2: $\mathbf{q \rightarrow r}$ ——— c: $\mathbf{(p \vee q) \rightarrow r}$	**Dilema destructivo** p_1 : $\mathbf{p \rightarrow q}$ p_2 : $\mathbf{r \rightarrow s}$ p_3 : $\mathbf{\sim q \vee \sim s}$ ——— c: $\mathbf{\sim p \vee \sim r}$

Teoremas

Los teoremas son razonamientos válidos, donde las premisas conforman la hipótesis y la conclusión es la tesis.

Para demostrar un teorema, se puede aplicar estos métodos.

• Si se acepta la falsedad de la tesis (no T) y de ella se deduce la falsedad de la hipótesis (no H), estamos aplicando el método indirecto.

• Si se acepta la verdad de la hipótesis y, aplicando propiedades y definiciones se deduce la verdad de la tesis, estamos aplicando el método directo.

Función proposicional

Una función proposicional es una expresión que contiene:

- Un **sujeto** indeterminado que simbolizaremos con una o más **variables**: x, y, z, etc...

- Un **predicado** que simbolizaremos con mayúscula, que puede ser: un adjetivo, un sustantivo o un verbo.

- Una función proposicional no es una proposición, ya que al no conocer el valor de la o las variables no podemos decir si es verdadera o falsa. Los simbolizamos E(x).

Ejemplos

• p(x): "x es un número natural" es una función proposicional con una variable.

Si reemplazamos a x por 2 nos queda:

"2 es un número natural", que es una proposición verdadera.

En cambio, si reemplazamos a x por –5 obtenemos:

"-5 es un número natural", que es una proposición falsa.

• q(x; y): $x + y > 0$

En este ejemplo la función proposicional tiene dos variables y queda representada por q(x; y)

Si una función proposicional p(x) está definida en un conjunto, entonces todos los elementos del mismo que hacen verdadera a p(x) se denominan **conjunto de verdad** de p(x).

En algunos lenguajes de computación, como Pascal o C, aparecen estructuras de decisión (si p entonces q) en los que la hipótesis es una función proposicional, que se convierte en una proposición según el valor de la variable en ese punto del programa.

Pasaje de una función proposicional a una proposicion

Una función proposicional se puede transformar en proposición por medio de:

a) Ejemplificación

Cuando la variable se sustituye por valores o elementos específicos de cierto conjunto llamado referencial.

Notación: los valores o elementos se simbolizan con a, b, c, etc.

Ejemplo

E(x): x es un número impar

a: 5

E(a): 5 es un número impar

b) Cuantificación

Se utilizan dos tipos de cuantificadores u operadores:

- Cuantificador u operador universal: transforma a la función proposicional en una proposición general o universal.

Notación: $\forall x$

Se lee: para todo, todos, todo, cualquiera, cualquiera sea, cualquier, los.

Ejemplo

Todos los números reales son positivos: $\forall x$: p(x)

Observación: la variable es ligada porque tiene cuantificador y está bajo su alcance.

Valor de verdad: Es verdadera cuando **todas** las proposiciones asociadas a la función proposicional son verdaderas, o sea que **todos** los elementos del conjunto referencial hacen verdadera la función proposicional.

En el ejemplo, la proposición resulta falsa ya que existen infinitos números n

- <u>Cuantificador u operador existencial</u>: transforma la función proposicional en una proposición particular o existencial.

Notación: $\exists x$

Se lee: existe, existe algún, algunos, algún, algo, hay, ciertos, muchos, pocos.

Ejemplo

Algunos números son enteros: $\exists x$: p(x)

Observación: la variable es ligada porque tiene cuantificador y está bajo su alcance.

Valor de verdad: es verdadera si y solo si al menos una de las proposiciones asociadas a la función proposicional es verdadera (si es verdadera por lo menos para un elemento del conjunto referencial).

Observación: una función proposicional que tiene dos o más variables queda transformada en una proposición cada una de estas variables si está cuantificada. De lo contrario, seguirá siendo una función proposicional, pero con menos variables libres. Una función proposicional q(x; y) de dos variables queda transformada en proposición, por ejemplo, de la siguiente manera $\exists x \exists y / q(x;y)$ que puede abreviarse $\exists x, y / q(x;y)$

Si se usan dos o más variables acotadas por el mismo cuantificador, el orden en el que se presentan las variables es indistinto.

$$\forall x \forall y : p(x;y) \Leftrightarrow \forall y \forall x : p(x;y)$$
$$\exists x \exists y / p(x;y) \Leftrightarrow \exists y \exists x / p(x;y)$$

No ocurre lo mismo si la proposición implica ambos cuantificadores (debe tenerse cuidado con el orden en el que se colocan, ya que de acuerdo a este varia el significado).

La proposición $\forall x \in Z, \exists y \in Z / x + y = 8$ indica que para cada valor entero de **x** existe un valor entero de **y** tal que la suma de ambos es 8. Esta proposición resulta verdadera ya que una vez que elegimos el valor de **x** podemos encontrar el valor de **y = 8 – x** que verifique la función proposicional. De esta manera, cada valor de **x** produce un valor distinto de **y.** En cambio, la proposición $\exists y \in Z, \forall x \in Z / x + y = 8$ hace referencia a que existe un valor de **y** (único) para cualquier **x**, que sumados den 8. Esta proposición es falsa, ya que una vez que se elige el valor de **y** habrá un solo valor de **x** que, sumado a aquel, de 8.

Negación de cuantificadores

Negación de un cuantificador universal

a) No es cierto que todos los números reales sean positivos.

$$\sim [\forall x:\ p(x)] \Leftrightarrow [\exists x /\ \sim p(x)]$$

Algunos números reales no son positivos.

b) No es cierto que los números reales no sean positivos.

$$\sim [\forall x:\ \sim p(x)] \Leftrightarrow [\exists (x) /\ p\ (x)]$$

Algunos números reales son positivos.

Negación de un cuantificador existencial

c) No es cierto que algunos números sean enteros.

$$\sim [\exists x /\ p(x)] \Leftrightarrow [\forall x:\ \sim p(x)]$$

Todos los números no son enteros, o bien ningún número es entero.

d) No es cierto que algunos no sean enteros.

$$\sim [\exists x /\ \sim p(x)] \Leftrightarrow [\forall x:\ p(x)]$$

Todos los números son enteros.