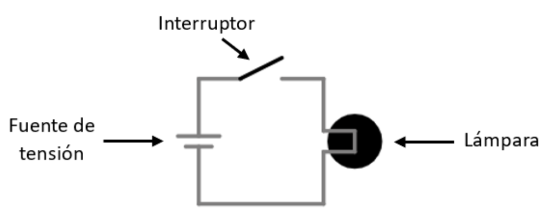
Compuertas lógicas y álgebra de Boole

Señales digitales binarias

Los sistemas o dispositivos digitales son aquellos en los cuales la información que manipulan es representada mediante cantidades físicas que pueden tomar únicamente cantidad finita de valores, es decir, señales discretas (llamadas señales digitales).

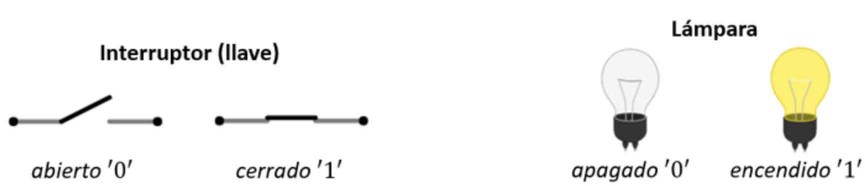
En particular, se conoce como *señales digitales binarias* a las señales que pueden tomar solamente dos valores o estados (0 y 1). Un ejemplo son las señales eléctricas, como la tensión o la corriente.

Se tiene un circuito eléctrico con un interruptor (o llave), que solo tiene dos posibles posiciones*, abierto y cerrado,* conectado a una fuente de tensión (por ejemplo, una batería) y a una lámpara, la cual tiene solo dos estados posibles: *apagado y encendido.*



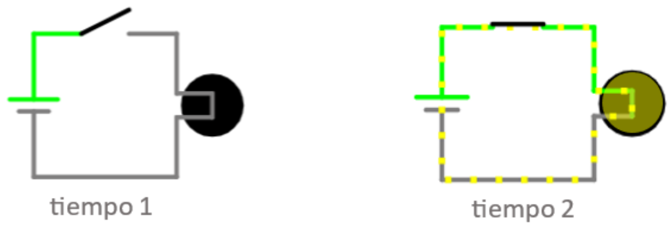
[1]

Si el interruptor está *abierto,* se indicará con el valor $'0'$, mientras que si está *cerrado* se indicará con el valor $'1'$. Por otro lado, si la lámpara está *apagada,* tomará el valor $'0'$, y si está *encendida* tomará el valor $'1'$.



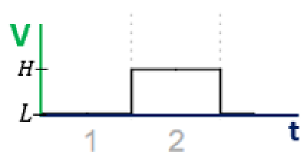
[2]

En un tiempo 1, cuando el interruptor está *abierto,* no deja circular la corriente y no le llega tensión a la lámpara, por lo que esta estará *apagada*. En un tiempo 2, cuando el interruptor está *cerrado,* la corriente puede circular y le llega tensión a la lámpara, por lo que esta estará *encendida*.



[1]

A continuación, se puede ver un diagrama que muestra la tensión (V) en la lámpara en función del tiempo (**t**). El tiempo 1 corresponde a un nivel de tensión bajo (V_L), mientras que el tiempo 2 corresponde a un nivel de tensión alto (V_H) .



[3]

Compuertas lógicas

Las compuertas lógicas son los elementos básicos de los sistemas digitales. Estas trabajan con señales digitales binarias. Las señales de tensión eléctrica podrán tomar un estado $High$ (alto) o un estado Low (bajo). Utilizando la lógica positiva, cuando el estado sea Low (bajo), se lo indicará con el valor $'0'$ (cero lógico), mientras que si el estado es $High$ (alto) se lo indicará con el valor $'1'$ (uno lógico).

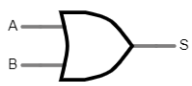
Se verá el funcionamiento de cada una de las compuertas lógicas. Para esto, se utilizarán las letras A y B para las señales de entrada, mientras que la letra S hará referencia a la señal de salida.

Compuerta $\boldsymbol{OR}$

La compuerta OR corresponde a la suma lógica.

Para comprender el funcionamiento, será más sencillo pensarlo como un circuito eléctrico.

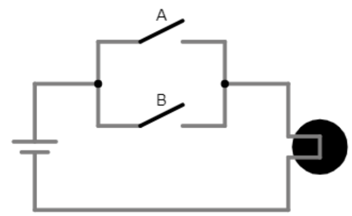
Símbolo lógico



[1]

$$S = A + B$$

Circuito eléctrico



[1]

¿Cuándo se encenderá la lámpara?

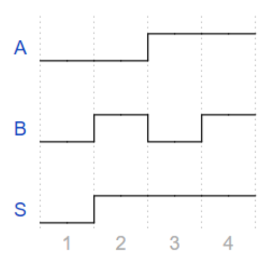
La lámpara se encenderá cuando el interruptor A **o** el interruptor B estén cerrados. Es decir, con que uno de los dos esté cerrado bastará para que la lámpara se encienda. El único caso en que la lámpara permanece apagada es cuando ninguno de los dos interruptores está cerrado. Por lo tanto, S únicamente será $'0'$ cuando A y B sean $'0'$; en cualquier otro caso S será $'1'$.

Con esto es posible armar la tabla de verdad, que muestra todos los casos posibles de las señales de entrada y, en consecuencia, su señal de salida, y el diagrama temporal, que muestra las señales de tensión de entrada en función del tiempo y, en consecuencia, su señal de salida.

Tabla de verdad

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{S = A + B}$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Diagrama temporal



[3]

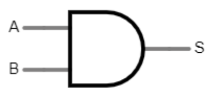
Es importante no confundir la suma lógica $(1 + 1 = 1)$ con la suma aritmética, ya sea binaria $(1 + 1 = 10)$ o en un sistema de numeración de base mayor a 2 $(1+1 = 2)$.

Compuerta $\boldsymbol{AND}$

La compuerta AND corresponde al producto lógico.

Nuevamente, para comprender el funcionamiento se plantea como un circuito eléctrico.

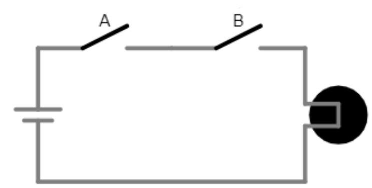
Símbolo lógico



[1]

$$S = A\,.\,B$$

Circuito eléctrico



[1]

¿Cuándo se encenderá la lámpara?

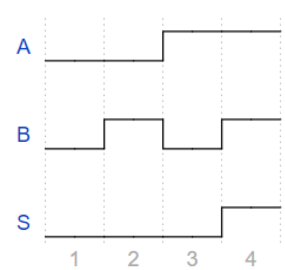
La lámpara se encenderá cuando el interruptor A **y** el interruptor B estén cerrados. Es decir, el único caso en que la lámpara se enciende es cuando los dos interruptores están cerrados; en cualquier otro caso la lámpara permanecerá apagada.

Por lo tanto, S únicamente será $'1'$ cuando A y B sean $'1'$; en cualquier otro caso S será $'0'$.

Tabla de verdad

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{S = A\,.\,B}$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Diagrama temporal

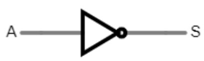


[3]

*Compuerta **NOT** (inversora)*

La compuerta NOT, también conocida como compuerta inversora, corresponde al complemento lógico. Como su nombre lo indica, esta compuerta se encarga de invertir el estado de la señal de entrada A (**<u>no</u>** A). Es decir, si la señal de entrada A, en un determinado momento, está en un estado $'0'$, en ese caso la salida S será $'1'$; por el contrario, si el estado de la señal de entrada A es $'1'$, entonces la salida S será $'0'$.

<u>Símbolo lógico</u>



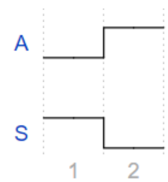
[1]

$$\mathrm{S} = \overline{\mathrm{A}} = \mathrm{A}'$$

<u>Tabla de verdad</u>

A	$S = \overline{A}$
0	1
1	0

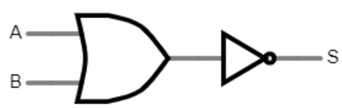
<u>Diagrama temporal</u>



[3]

*Compuerta **NOR***

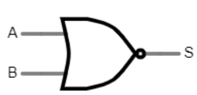
La compuerta NOR corresponde al complemento de la suma lógica. Con lo cual, esta compuerta tendrá como salida la inversa (o la negación) de la compuerta OR. Es decir, es una combinación de dos compuertas.



[1]

Por lo tanto, S únicamente será $'1'$ cuando A y B sean $'0'$, en cualquier otro caso S será $'0'$.

<u>Símbolo lógico</u>



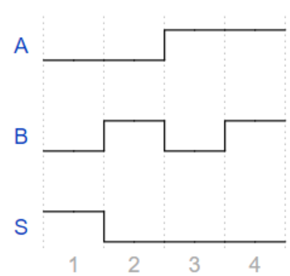
[1]

$$\mathrm{S} = \overline{\mathrm{A}+\mathrm{B}} = (\mathrm{A}+\mathrm{B})'$$

<u>Tabla de verdad</u>

A	B	$S = \overline{A+B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

<u>Diagrama temporal</u>



[3]

Nótese que siempre que se agrega el “circulo” ⚬ estamos ante una la negación.

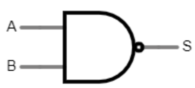
Compuerta $\boldsymbol{NAND}$

La compuerta $NAND$ corresponde al complemento del producto lógico. Con lo cual, esta compuerta tendrá como salida la inversa (o la negación) de la compuerta AND.

[1]

Por lo tanto, S únicamente será $'0'$ cuando A y B sean $'1'$, en cualquier otro caso S será $'1'$.

Símbolo lógico



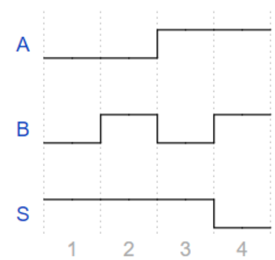
[1]

$$S = \overline{A\,.\,B} = (A\,.\,B)'$$

Tabla de verdad

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{S = \overline{A\,.\,B}}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Diagrama temporal



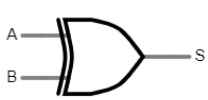
[3]

Compuerta $\boldsymbol{XOR}$ *(OR exclusiva)*

La compuerta XOR, también conocida como OR *exclusiva,* corresponde a la suma lógica exclusiva.

En esta compuerta, la señal de salida S será $'1'$ cuando las señales de entrada A y B sean distintas; en el caso de que A y B tengan el mismo estado la señal de salida S será $'0'$ (A **o** B, **pero no ambas**).

Símbolo lógico



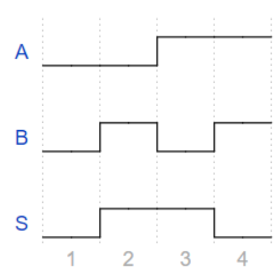
[1]

$$S = A \oplus B = \bar{A}\,.\,B + A\,.\,\bar{B} = A'.\,B + A\,.\,B'$$

Tabla de verdad

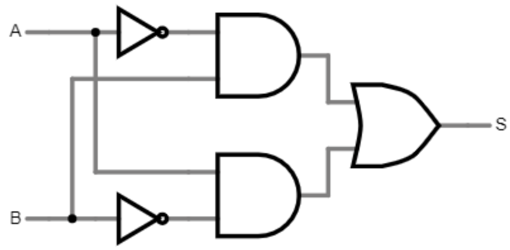
$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{S = A \oplus B}$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Diagrama temporal



[3]

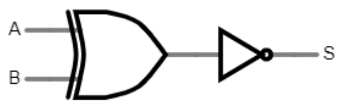
El comportamiento de la compuerta XOR también puede lograrse usando otro tipo de compuertas, por ejemplo, NOT, AND y OR.



[1]

Compuerta $\boldsymbol{XNOR}$ *(NOR exclusiva)*

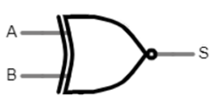
La compuerta $XNOR$, también conocida como NOR *exclusiva*, corresponde al complemento de la suma lógica exclusiva. Con lo cual, esta compuerta tendrá como salida la inversa (o la negación) de la compuerta XOR.



[1]

Por lo tanto, en esta compuerta, la señal de salida S será $'1'$ cuando las señales de entrada A y B sean iguales; en el caso de que A y B tengan distintos estados la señal de salida S será $'0'$.

Símbolo lógico



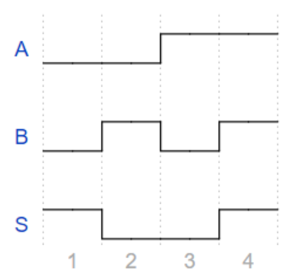
[1]

$S = \overline{A \oplus B} = (A \oplus B)' =$
$\bar{A} \, . \, \bar{B} + A \, . \, B = A' . B' + A \, . \, B$

Tabla de verdad

$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{S = \overline{A \oplus B}}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Diagrama temporal



[3]

Álgebra de Boole

El álgebra de Boole o álgebra booleana es la base matemática lógica, es decir, la matemática empleada en los sistemas digitales. A continuación, se verán las reglas o propiedades que constituyen el álgebra de Boole (álgebra lógica), las cuales relacionan las operaciones lógicas AND, OR y NOT.

Postulados

El álgebra de Boole se compone de una serie postulados o axiomas. Estos son premisas que se toman como base para un razonamiento, cuya verdad se admite sin pruebas. [4]

Propiedad conmutativa

El orden de los factores no afecta ni a la suma lógica ni al producto lógico.

$A + B = B + A$
$A \,.\, B = B \,.\, A$

Propiedad distributiva

El producto lógico se puede distribuir respeto de la suma lógica, y la suma lógica se puede distribuir respecto del producto lógico.

$A.(B + C) = A.B + AC$
$A + (B.C) = (A + B).(A + C)$

Una manera de verificar que $\boldsymbol{A + (B.C)}$ es equivalente a $\boldsymbol{(A + B).(A + C)}$ es verificar que ambas expresiones lógicas corresponden a una misma tabla de verdad.

Será de utilidad tener presente el funcionamiento (las tablas de verdad) de las compuertas lógicas AND y OR.

[4] Definición de postulado tomada de wordreference.com

Para realizar la tabla correspondiente a $\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}.\boldsymbol{C})$, se debe armar una tabla en la que se contemplen todas las posibilidades de combinación de todas las variables A, B y C (2^n *siendo n la cantidad de variables* $\rightarrow 2^3 = 8$). Para esto, primero se debe resolver la operación del paréntesis $(\boldsymbol{B}.\boldsymbol{C})$. El producto lógico dará como resultado $'1'$ cuando tanto B como C sean $'1'$; en cualquier otro caso el resultado será $'0'$. Luego, se resuelve la suma lógica entre el resultado obtenido de $(\boldsymbol{B}.\boldsymbol{C})$ y $\boldsymbol{A}$. La suma lógica dará como resultado $'0'$ cuando el producto $(\boldsymbol{B}.\boldsymbol{C})$ y $\boldsymbol{A}$ sean $'0'$; en cualquier otro caso el resultado será ‘1’.

	$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{C}$	$\boldsymbol{B}.\boldsymbol{C}$	$\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}.\boldsymbol{C})$
0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0
2	0	1	0	0	0
3	0	1	1	1	1
4	1	0	0	0	1
5	1	0	1	0	1
6	1	1	0	0	1
7	1	1	1	1	1

De igual manera, se realiza la tabla correspondiente a $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}).(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C})$. En este caso, primero se deberá resolver las dos sumas lógicas y luego realizar el producto lógico entre sus resultados.

	$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{C}$	$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}$	$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}).(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C})$
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	0
2	0	1	0	1	0	0
3	0	1	1	1	1	1
4	1	0	0	1	1	1
5	1	0	1	1	1	1
6	1	1	0	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1

Dado que las tablas de verdad de las dos expresiones son iguales, se verifica la equivalencia.

Propiedad identidad

$A + 0 = A$
$A\,.1 = A$

Propiedad complemento

La suma lógica entre una variable y su complemento dará como resultado $'1'$. El producto lógico entre una variable y su complemento dará como resultado $'0'$.

$A + \bar{A} = 1$
$A\,.\;\bar{A} = 0$

Nuevamente, una manera sencilla de verificar que $\boldsymbol{A + \bar{A}}$ es $\boldsymbol{'1'}$ es haciendo la tabla de verdad.

	$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{\bar{A}}$	$\boldsymbol{A + \bar{A}}$
0	0	1	1
1	1	0	1

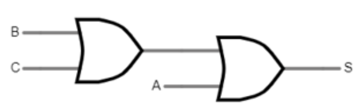
Se verifica que en todos los casos el resultado es $'1'$.

Propiedad asociativa

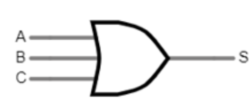
Siempre que se trate de una misma operación lógica, se podrá utilizar esta propiedad.

$A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C$
$A.(B.C) = (A.B).C = A.B.C = ABC$

De $\boldsymbol{A + (B + C) = A + B + C}$ se deduce la siguiente equivalencia:



$\boldsymbol{S = A + (B + C)}$



$\boldsymbol{S = A + B + C}$ [1]

Teoremas

A partir de los postulados anteriores es posible deducir algunos teoremas del álgebra de Boole.

Principio de dualidad

En cualquier propiedad del álgebra de Boole pueden invertirse las sumas lógicas por productos lógicos (y viceversa) y los unos por los ceros (y viceversa), y esta seguirá siendo válida.

Propiedad idempotencia

$A + A = A$
$A\ .\ A = A$

Para verificar que $A\ .\ A$ es equivalente a A, teniendo en cuenta que es un teorema, podremos utilizar los postulados.

Se parte A.

$\mathit{Por\ identidad} \rightarrow \boldsymbol{A} = A.1$

$\mathit{Por\ complemento} \rightarrow A.1 = A.(A + \bar{A})$

$\mathit{Por\ distributiva} \rightarrow A.(A + \bar{A}) = A.A + A.\bar{A}$

$\mathit{Por\ complemento} \rightarrow A.A + A.\bar{A} = A.A + 0$

$\mathit{Por\ identidad} \rightarrow A.A + 0 = \boldsymbol{A.A}$

Se llega a comprobar entonces que $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\ .\ \boldsymbol{A}$

Se debe tener en cuenta que este puede no ser el único camino para comprobar esta equivalencia.

Propiedad de los elementos nulos

$A + 1 = 1$
$A\ .0 = 0$

Propiedad involutiva

El complemento del complemento de la variable es la variable en sí misma.

$$\bar{\bar{A}} = A$$

Propiedad absorción

$$A + (A \,.\, B) = A$$

$$A \,.\, (A + B) = A$$

Propiedad de De Morgan

$$\overline{(A + B)} = \bar{A} \,.\, \bar{B}$$

$$\overline{(A \,.\, B)} = \bar{A} + \bar{B}$$

Propiedad transposición

$$A.B + \bar{A}.C = (A + C).(\bar{A} + B)$$

Propiedad consenso

$$A.B + \bar{A}.C + B.C = A.B + \bar{A}.C$$

$$(A + B).(\bar{A} + C).(B + C) = (A + B).(\bar{A} + C)$$

En este apunte se optó por demostrar algunas de las propiedades o reglas del álgebra de Boole. De igual manera, se podrán comprobar el resto de las propiedades.

[1] Circuitos realizados en https://www.falstad.com/circuit/

[2] Interruptores en https://www.falstad.com/circuit/ y lámparas en https://www.tinkercad.com/

[3] Diagramas temporales realizados en https://wavedrom.com/