Γεωμετρία Α' Λυκείου:

Ύλη για το διαγώνισμα Α' τετραμήνου

3.1 Στοιχεία και είδη τριγώνων

- ***σκαληνό***, όταν έχει όλες τις πλευρές του άνισες (σχ.2),
- ***ισοσκελές***, όταν έχει δύο πλευρές του ίσες (σχ.3). Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ η πλευρά ΒΓ λέγεται ***βάση*** του και το Α ***κορυφή*** του,
- ***ισόπλευρο***, όταν έχει όλες τις πλευρές του ίσες (σχ.4).

Ερωτήσεις Σ-Λ

Ένα τρίγωνο, ανάλογα με το είδος των γωνιών του, λέγεται

- ***οξυγώνιο***, όταν έχει όλες τις γωνίες του οξείες (σχ.5),
- ***ορθογώνιο***, όταν έχει μια γωνία ορθή (σχ.6). Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο η πλευρά που βρίσκεται απέναντι από την ορθή γωνία λέγεται ***υποτείνουσα*** και οι άλλες δύο λέγονται ***κάθετες πλευρές*** του τριγώνου,
- ***αμβλυγώνιο***, όταν έχει μια γωνία αμβλεία (σχ.7).

► Δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου

Διάμεσος ενός τριγώνου λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μια κορυφή με το μέσο της απέναντι πλευράς. Στο σχ.8 το ευθύγραμμο τμήμα ΑΜ είναι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην πλευρά α του τριγώνου ΑΒΓ και συμβολίζεται με μ_α. Οι διάμεσοι που αντιστοιχούν στις πλευρές β και γ συμβολίζονται με μ_β και μ_γ αντίστοιχα.

Διχοτόμος μιας γωνίας ενός τριγώνου λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα της διχοτόμου της γωνίας, από την κορυφή της μέχρι την απέναντι πλευρά. Στο σχ.9 το ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ του τριγώνου και συμβολίζεται με δ_α. Οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου συμβολίζονται με δ_β και δ_γ αντίστοιχα.

Ερωτήσεις Σ-Λ

Ύψος τριγώνου λέγεται το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα, που φέρεται από μια κορυφή προς την ευθεία της απέναντι πλευράς. Τα ύψη που φέρονται από τις κορυφές Α, Β και Γ συμβολίζονται αντίστοιχα με υ_α, υ_β και υ_γ.

Στο σχ.10 το ΑΔ είναι το ύψος από την κορυφή Α. Το σημείο Δ λέγεται ***προβολή*** του Α πάνω στην ευθεία ΒΓ ή και ***ίχνος*** της καθέτου, που φέρεται από το Α στην ευθεία ΒΓ.

Οι διάμεσοι, οι διχοτόμοι και τα ύψη ενός τριγώνου λέγονται **δευτερεύοντα στοιχεία** του.

Κριτήρια ισότητας τριγώνων

- **Δύο ίσα τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους και τις γωνίες τους ίσες μία προς μία.**
- **Σε δύο ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες και αντίστροφα.**

Οι ίσες πλευρές που βρίσκονται απέναντι από ίσες γωνίες λέγονται ***αντίστοιχες*** ή ***ομόλογες***. Ερωτήσεις Σ-Λ

3.2 1ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων

ΘΕΩΡΗΜΑ Ι (1ο Κριτήριο – ΠΓΠ)

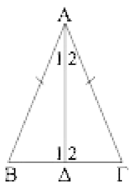
Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι ίσα.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ι

Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο:

- Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες.
- Η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι διάμεσος και ύψος.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Σχήμα 12

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ (σχ.12).

Φέρουμε τη διχοτόμο του ΑΔ. Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ έχουν ΑΒ = ΑΓ, ΑΔ κοινή και $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (ΠΓΠ), επομένως είναι ίσα, οπότε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$. (1)

Από την ίδια ισότητα τριγώνων προκύπτει ότι ΒΔ = ΔΓ, οπότε η ΑΔ είναι διάμεσος και $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$. Από την τελευταία ισότητα και επειδή $\hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 = 180°$ προκύπτει ότι $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = 90°$, οπότε συμπεραίνουμε ότι το ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου.

ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΙ

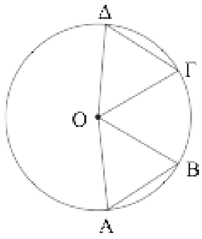
Οι γωνίες ισόπλευρου τριγώνου είναι ίσες.

ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΙΙ

Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ε η μεσοκάθετος ενός τμήματος ΑΒ (σχ.13) και Μ ένα σημείο της. Τα τρίγωνα ΜΚΑ και ΜΚΒ έχουν ΚΑ = ΚΒ, ΜΚ κοινή και $\hat{K}_1 = \hat{K}_2 = 90°$ (ΠΓΠ), επομένως είναι ίσα, οπότε ΜΑ = ΜΒ. (2)



Σχήμα 14

ΠΟΡΙΣΜΑ IV

Αν δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα, τότε και οι χορδές τους είναι ίσες.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $\overset{\frown}{ΑΒ}$ και $\overset{\frown}{ΓΔ}$ δύο ίσα τόξα ενός κύκλου (Ο, ρ) (σχ.14). Τότε είναι $Α\hat{Ο}Β = Γ\hat{Ο}Δ$. Τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ έχουν ΟΑ = ΟΓ(= ρ), ΟΒ = ΟΔ(= ρ) και $Α\hat{Ο}Β = Γ\hat{Ο}Δ$. Επομένως είναι ίσα, οπότε ΑΒ = ΓΔ. (3)

3.3 2ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων

ΘΕΩΡΗΜΑ (2ο Κριτήριο – ΓΠΓ)

Αν δύο τρίγωνα έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

Ερώτηση Σ-Λ

3.4 3ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων

ΘΕΩΡΗΜΑ (3ο Κριτήριο – ΠΠΠ)

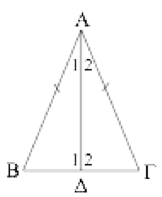
Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

Ερώτηση Σ-Λ

ΠΟΡΙΣΜΑ I

Η διάμεσος ισοσκελούς τριγώνου, που αντιστοιχεί στη βάση του, είναι διχοτόμος και ύψος.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



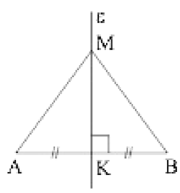
Σχήμα 18

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και ΑΔ η διάμεσός του (σχ.18). Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ έχουν ΑΒ = ΑΓ, ΑΔ κοινή και ΒΔ = ΔΓ, άρα (ΠΠΠ) είναι ίσα, οπότε $\hat{Α}_1 = \hat{Α}_2$, και $\hat{Δ}_1 = \hat{Δ}_2$. Από τις ισότητες αυτές προκύπτει αντίστοιχα ότι η ΑΔ είναι διχοτόμος και ύψος. (4)

ΠΟΡΙΣΜΑ II

Κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός τμήματος ανήκει στη μεσοκάθετό του.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



Σχήμα 19

Έστω ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ (σχ.19), Μ ένα σημείο, ώστε ΜΑ = ΜΒ και Κ το μέσο του ΑΒ. Τότε το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ισοσκελές και η ΜΚ διάμεσός του, οπότε, σύμφωνα με το προηγούμενο πόρισμα, η ΜΚ θα είναι και ύψος, δηλαδή η ΜΚ είναι μεσοκάθετος του ΑΒ. (5)

Από το παραπάνω πόρισμα και το πόρισμα ΙΙΙ του θεωρήματος Ι (§3.2) προκύπτει ότι **η μεσοκάθετος ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από τα άκρα του τμήματος.** Ερώτηση Σ-Λ

ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΙΙ

Αν οι χορδές δύο τόξων ενός κύκλου, μικρότερων του ημικυκλίου, είναι ίσες, τότε και τα τόξα είναι ίσα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω δύο τόξα $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ ενός κύκλου (Ο, ρ) μικρότερα του ημικυκλίου, με ΑΒ = ΓΔ. Τότε τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ (σχ.20) έχουν: ΟΑ = ΟΓ (= ρ), ΟΒ = ΟΔ (= ρ) και ΑΒ = ΓΔ, άρα (ΠΠΠ) είναι ίσα. Επομένως, $A\hat{O}B = \Gamma\hat{O}\Delta$, οπότε $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$. (6)

ΠΟΡΙΣΜΑ IV

Αν οι χορδές δύο τόξων ενός κύκλου μεγαλύτερων του ημικυκλίου είναι ίσες, τότε και τα τόξα είναι ίσα. Ερώτηση Σ-Λ

3.6 Κριτήρια ισότητας ορθογώνιων τριγώνων

Επειδή δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μια γωνία ίση, την ορθή, από το 1ο (ΠΓΠ) και 2ο (ΓΠΓ) κριτήριο ισότητας τυχαίων τριγώνων προκύπτει άμεσα ότι:

- **Δύο ορθογώνια τρίγωνα, που έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία, είναι ίσα. (σχ.24)**
- **Δύο ορθογώνια τρίγωνα, που έχουν μια κάθετη πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία ίσες μία προς μία, είναι ίσα. (σχ.25)** Ερώτηση Σ-Λ

Η ισότητα ορθογώνιων τριγώνων εξασφαλίζεται ακόμη και από τα επόμενα θεωρήματα.

ΘΕΩΡΗΜΑ Ι

Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα. Ερώτηση Σ-Λ

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ

Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μία κάθετη πλευρά αντίστοιχα ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα. Ερώτηση Σ-Λ

Ερώτηση Σ-Λ

ΠΟΡΙΣΜΑ Ι

Το ύψος ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχεί στη βάση είναι διάμεσος και διχοτόμος της γωνίας της κορυφής.

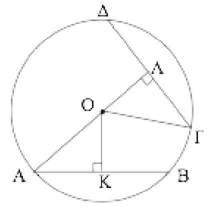
Ερώτηση Σ-Λ

ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΙ

Η κάθετος που φέρεται από το κέντρο ενός κύκλου προς μια χορδή του διχοτομεί τη χορδή και το αντίστοιχο τόξο της.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙΙ

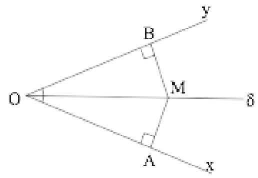
Δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες αν και μόνο αν τα αποστήματά τους είναι ίσα.



Ερώτηση Σ-Λ

ΘΕΩΡΗΜΑ IV

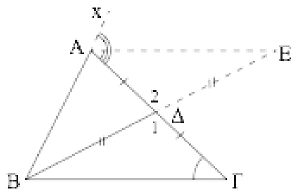
Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της και αντίστροφα κάθε εσωτερικό σημείο της γωνίας που ισαπέχει από τις πλευρές είναι σημείο της διχοτόμου.



3.10 Σχέση εξωτερικής και απέναντι γωνίας

ΘΕΩΡΗΜΑ

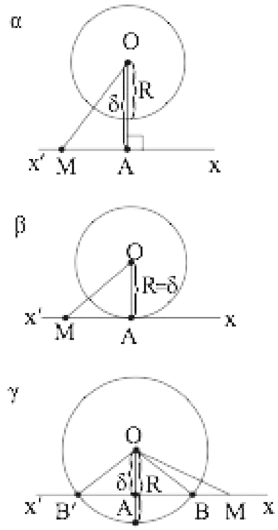
Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από καθεμία από τις απέναντι γωνίες του τριγώνου.



Ερώτηση Σ-Λ

3.14 Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου

Θεωρούμε έναν κύκλο (Ο, R) μια ευθεία x′x και την απόσταση δ = ΟΑ του κέντρου Ο από την x′x (σχ.58). Μεταξύ των δ και R ισχύει μία από τις σχέσεις: δ > R, δ = R και δ < R. Θα εξετάσουμε τη γεωμετρική ερμηνεία καθεμίας από τις σχέσεις αυτές.



Σχήμα 58

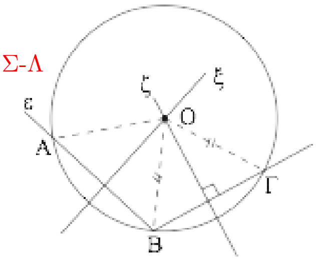
- Έστω δ > R (σχ.58α). Τότε το Α είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου, οπότε και κάθε άλλο σημείο Μ της ευθείας είναι εξωτερικό, αφού ΟΜ > ΟΑ > R. Επομένως, η x′x δεν έχει κανένα κοινό σημείο με τον κύκλο και λέγεται ***εξωτερική*** ευθεία του κύκλου.
- Έστω δ = R (σχ.58β). Τότε το Α είναι κοινό σημείο της ευθείας με τον κύκλο, ενώ κάθε άλλο σημείο Μ της x′x είναι εξωτερικό σημείο του (Ο, R), αφού ΟΜ > ΟΑ = R. Επομένως, η x′x έχει ένα μόνο κοινό σημείο με τον κύ-

κλο και λέγεται ***εφαπτομένη*** του κύκλου στο σημείο Α. Το σημείο Α λέγεται ***σημείο επαφής*** της ευθείας με τον κύκλο. Επίσης, στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η ευθεία x′x εφάπτεται του κύκλου (O, R) στο σημείο Α. Είναι φανερό ότι:

Η ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής είναι κάθετη στην εφαπτομένη.

Ερώτηση Σ-Λ

Η εφαπτομένη του κύκλου σε κάθε σημείο του είναι μοναδική.



Σχήμα 59

- Έστω $\delta < R$ (σχ.58γ). Τότε το Α είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου. Πάνω στην ημιευθεία Αx θεωρούμε ένα σημείο Μ, ώστε $AM = R$. Τότε το Μ είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου, αφού $OM > AM = R$. Έτσι η ημιευθεία Αx, αφού διέρχεται από ένα εσωτερικό σημείο, το Α, και ένα εξωτερικό, το Μ, είναι φανερό ότι έχει ένα μοναδικό κοινό σημείο με τον κύκλο, το Β. Όμοια και η ημιευθεία Αx′ έχει ένα κοινό σημείο με τον κύκλο, το Β′.

Επομένως, η x′x έχει δύο κοινά σημεία με τον κύκλο. Στην περίπτωση αυτή η ευθεία x′x, λέγεται ***τέμνουσα του κύκλου*** και τα κοινά της σημεία με τον κύκλο λέγονται σημεία ***τομής*** της με τον κύκλο. Επίσης λέμε ότι η ευθεία ***τέμνει*** τον κύκλο.

Ορισμός

Ανακεφαλαιώνοντας έχουμε:

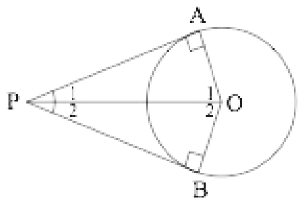
- **Αν $\delta > R$, η ευθεία δεν έχει κοινά σημεία με τον κύκλο.**
- **Αν $\delta = R$, η ευθεία έχει ένα μόνο κοινό σημείο με τον κύκλο.**
- **Αν $\delta < R$, η ευθεία έχει δύο κοινά σημεία με τον κύκλο.**

Με τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο αποδεικνύονται και τα αντίστροφα των παραπάνω συμπερασμάτων. Με την ίδια επίσης μέθοδο αποδεικνύεται και το επόμενο θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ Ι

Μια ευθεία και ένας κύκλος έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία.

3.15 Εφαπτόμενα τμήματα



Σχήμα 60

Έστω ένας κύκλος (Ο, ρ) και ένα εξωτερικό του σημείο Ρ. Στην §6.7 θα δούμε ότι από το Ρ φέρονται δύο εφαπτόμενες του κύκλου. Αν Α, Β είναι τα σημεία επαφής αυτών με τον κύκλο (σχ.60), τότε τα τμήματα ΡΑ και ΡΒ λέγονται ***εφαπτόμενα τμήματα*** του κύκλου από το σημείο Ρ και η ευθεία ΡΟ ***διακεντρική ευθεία*** του σημείου Ρ. Ισχύει το εξής θεώρημα: Ορισμοί

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ

Τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου, που άγονται από σημείο εκτός αυτού είναι ίσα μεταξύ τους.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Τα τρίγωνα ΑΟΡ και ΒΟΡ (σχ.60) έχουν $\hat{A} = \hat{B} = 90°$, ΟΡ κοινή και ΟΑ = ΟΒ (= ρ), άρα είναι ίσα, οπότε ΡΑ = ΡΒ. (7)

ΠΟΡΙΣΜΑ

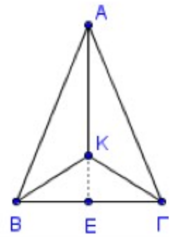
Ερωτήσεις Σ-Λ

Αν Ρ είναι ένα εξωτερικό σημείο ενός κύκλου, τότε η διακεντρική ευθεία του:

i) είναι μεσοκάθετος της χορδής του κύκλου με άκρα τα σημεία επαφής,

ii) διχοτομεί τη γωνία των εφαπτόμενων τμημάτων και τη γωνία των ακτίνων που καταλήγουν στα σημεία επαφής.

1591. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$ και Κ εσωτερικό σημείο του τριγώνου τέτοιο, ώστε $ΚΒ = ΚΓ$.

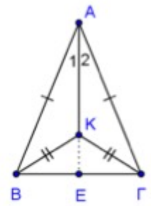


α) Να αποδείξετε ότι: τα τρίγωνα ΒΑΚ και ΚΑΓ είναι ίσα. **(Μονάδες 12)**

β) Να αποδείξετε ότι η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΑΓ. **(Μονάδες 6)**

γ) Η προέκταση της ΑΚ τέμνει την ΒΓ στο Ε. Να αποδείξετε ότι η ΚΕ είναι διάμεσος του τριγώνου ΒΚΓ. **(Μονάδες 7)**

Λύση



α) Τα τρίγωνα ΒΑΚ και ΚΑΓ έχουν:
- την πλευρά ΑΚ κοινή
- $ΑΒ = ΑΓ$ και
- $ΚΒ = ΚΓ$.

-Με βάση το κριτήριο Π-Π-Π τα τρίγωνα είναι ίσα.

β) Επειδή τα τρίγωνα ΒΑΚ και ΚΑΓ είναι ίσα, έχουν και $Α_1 = Α_2$, άρα η ΑΕ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΑΓ.

γ) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές η ΑΕ θα είναι και ύψος και διάμεσος. Άρα η ΚΕ είναι διάμεσος στο ισοσκελές τρίγωνο ΒΚΓ.

1598. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ και ΓΑ τριγώνου ΑΒΓ, παίρνουμε τα τμήματα $ΑΔ = ΑΒ$ και $ΑΕ = ΑΓ$. Να αποδείξετε ότι:

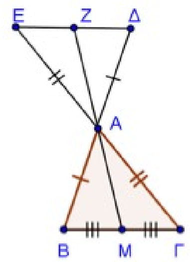
α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ίσα. **(Μονάδες 12)**

β) Αν ΑΜ είναι η διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ και η προέκταση της ΑΜ τέμνει την ΕΔ στο Ζ, να δείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΑΒΜ είναι ίσα. **(Μονάδες 7)**

ii. $\mathbf{ΖΔ = \frac{ΕΔ}{2}}$. **(Μονάδες 6)**

Λύση



α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ έχουν:
1) $ΑΔ = ΑΒ$
2) $ΑΕ = ΑΓ$
3) $ΒΑΓ = ΔΑΕ$ ως κατακορυφήν

Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

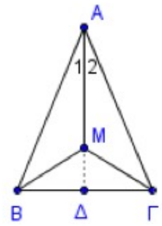
β) i. Τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΑΒΜ έχουν:
1) $ΑΔ = ΑΒ$
2) $ΒΑΜ = ΔΑΖ$ ως κατακορυφήν και
3) $Β = Δ$ γιατί τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ίσα.

Με βάση το κριτήριο ΓΠΓ τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΑΒΜ είναι ίσα.

ii. Επειδή τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΑΒΜ είναι ίσα έχουν και $ΔΖ = ΒΜ$. Όμως $ΒΜ = \frac{ΑΒ}{2}$ και $ΑΒ = ΔΕ$ γιατί τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ίσα, άρα $ΔΖ = \frac{ΔΕ}{2}$.

1601. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$ και σημείο Μ εσωτερικό του τριγώνου τέτοιο, ώστε $MB = M\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΒΑΜ και ΜΑΓ είναι ίσα. **(Μονάδες 12)**
β) Η ΑΜ είναι διχοτομεί τη γωνία ΒΜΓ. **(Μονάδες 13)**

Λύση

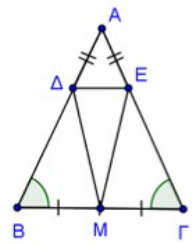


α) Τα τρίγωνα ΒΑΜ και ΜΑΓ έχουν:
1) την πλευρά ΑΚ κοινή
2) $AB = A\Gamma$ και
3) $MB = M\Gamma$.
Με βάση το κριτήριο Π-Π-Π τα τρίγωνα είναι ίσα.

β) Επειδή τα τρίγωνα ΒΑΜ και ΚΑΓ είναι ίσα, έχουν και $A_1 = A_2$, άρα η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΑΓ, άρα είναι ύψος και διάμεσος του.
Στο ισοσκελές τρίγωνο ΒΜΓ, η ΑΔ είναι ύψος και διάμεσος, άρα είναι και διχοτόμος της γωνίας ΒΚΓ.

1621. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$ και στις ίσες πλευρές ΑΒ, ΑΓ παίρνουμε αντίστοιχα τμήματα $A\Delta = \frac{1}{3}AB$ και $AE = \frac{1}{3}A\Gamma$. Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι:
α) τα τμήματα ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα. **(Μονάδες 5)**
β) τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΜΕΓ είναι ίσα. **(Μονάδες 10)**
γ) το τρίγωνο ΔΕΜ είναι ισοσκελές. **(Μονάδες 10)**

Λύση



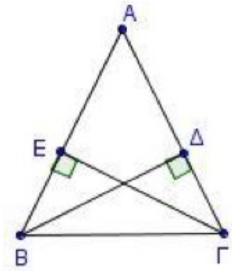
α) Επειδή $AB = A\Gamma$ και $A\Delta = AE$, είναι και
$AB - A\Delta = A\Gamma - AE \Leftrightarrow B\Delta = \Gamma E$

β) Τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΜΕΓ έχουν:
1) $B\Delta = \Gamma E$
2) $BM = M\Gamma$ γιατί το Μ είναι μέσο της ΒΓ και
3) $B = \Gamma$ γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.
Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

γ) Επειδή τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΜΕΓ είναι ίσα, έχουν και $M\Delta = ME$, οπότε το τρίγωνο ΜΔΕ είναι ισοσκελές.

1545. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$ και τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ. Να αποδείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΓΕΒ είναι ίσα. **(Μονάδες 15)**
β) $A\Delta = AE$ **(Μονάδες 10)**

Λύση



α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΔΓ και ΓΕΒ έχουν:
1) την πλευρά ΒΓ κοινή και
2) $B = \Gamma$ γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ
Άρα τα τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία ίσες και είναι ίσα.

β) Επειδή τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΓΕΒ είναι ίσα, έχουν και $BE = \Gamma\Delta$.
Όμως είναι $AB = A\Gamma$, άρα είναι και $AB - BE = A\Gamma - \Gamma\Delta \Leftrightarrow AE = A\Delta$.

1547. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$. Από το μέσο Μ της βάσης του ΒΓ φέρουμε κάθετα τμήματα ΜΔ και ΜΕ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $ΜΔ = ΜΕ$ (Μονάδες 12)

β) το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 13)

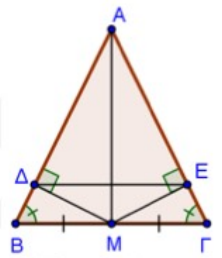
Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΜΔΒ και ΜΕΓ έχουν:

1) $ΜΒ = ΜΓ$ γιατί το Μ είναι μέσο του ΒΓ και

2) $Β = Γ$ βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου

Δηλαδή τα τρίγωνα έχουν τις υποτείνουσες τους ίσες και μια οξεία γωνία του ενός είναι ίση με μια οξεία γωνία του άλλου, άρα είναι ίσα, οπότε έχουν και $ΜΔ = ΜΕ$.



β) Επειδή τα τρίγωνα ΜΔΒ και ΜΕΓ είναι ίσα, έχουν και $ΔΒ = ΕΓ$.
Όμως $ΑΒ = ΑΓ$, άρα και $ΑΒ - ΔΒ = ΑΓ - ΕΓ \Leftrightarrow ΑΔ = ΑΕ$, οπότε το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

1568. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ που αντιστοιχούν στις πλευρές του ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Αν το τρίγωνο είναι ισοσκελές με $ΑΒ = ΑΓ$, τότε τα ύψη ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) Αν τα ύψη ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα, τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $ΑΒ = ΑΓ$. (Μονάδες 13)

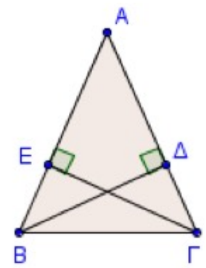
Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΕΓ και ΒΔΓ έχουν:

1) την πλευρά ΒΓ κοινή και

2) $Β = Γ$ γιατί το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση τη ΒΓ, αφού έχει $ΑΒ = ΑΓ$

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $ΒΔ = ΓΕ$.



β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΕΓ και ΒΔΓ έχουν:

1) την πλευρά ΒΓ κοινή και

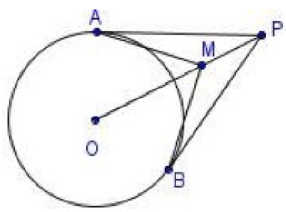
2) $ΒΔ = ΓΕ$

Δηλαδή τα τρίγωνα έχουν τις υποτείνουσες τους ίσες και μια κάθετη πλευρά του ενός είναι ίση με μια κάθετη πλευρά του άλλου, άρα είναι ίσα, οπότε έχουν και $Β = Γ$.
Το τρίγωνο ΑΒΓ έχει δύο γωνίες του ίσες, οπότε είναι ισοσκελές και έχει $ΑΒ = ΑΓ$.

1617. Από εξωτερικό σημείο Ρ ενός κύκλου (Ο, ρ) φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Αν Μ είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο του ευθυγράμμου τμήματος ΟΡ, να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ΡΑΜ και ΡΜΒ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) $ΜΑΟ = ΜΒΟ$. (Μονάδες 13)



Λύση

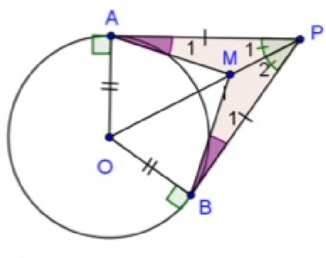
α) Τα τρίγωνα ΡΑΜ και ΡΜΒ έχουν:

1) τη πλευρά ΡΜ κοινή

2) $ΡΑ = ΡΒ$ γιατί είναι τα εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από το Ρ προς τον κύκλο

3) $Ρ_1 = Ρ_2$ γιατί η διακεντρική ευθεία ΡΟ διχοτομεί την γωνία των εφαπτομένων

Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα.



β) Επειδή τα τρίγωνα ΡΑΜ και ΡΜΒ είναι ίσα, έχουν και
$Α_1 = Β_1$. Όμως $ΟΑΜ = ΟΒΜ = 90$ γιατί οι ακτίνες που καταλήγουν στα σημεία επαφής είναι κάθετες στις εφαπτομένες, άρα $ΜΑΟ = 90 - Α_1 = 90 - Β_1 = ΜΒΟ$.