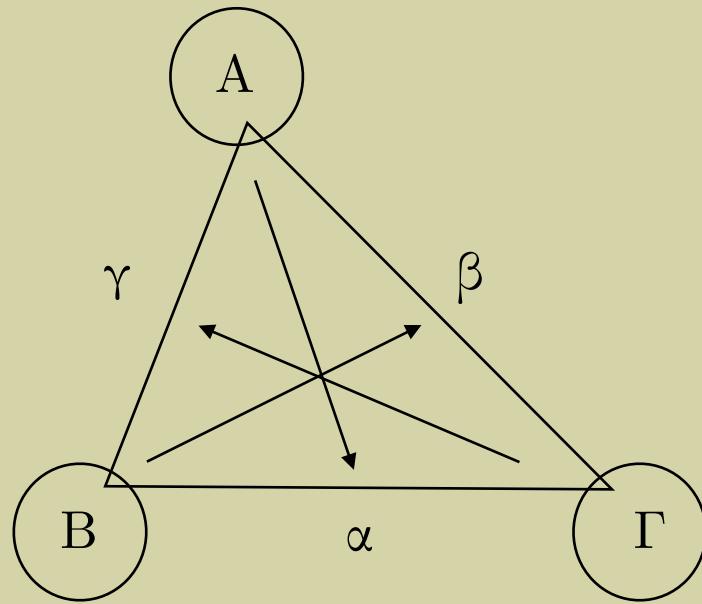


Μαθηματικά Γ' Γυμνασίου

Ισότητα Τριγώνων

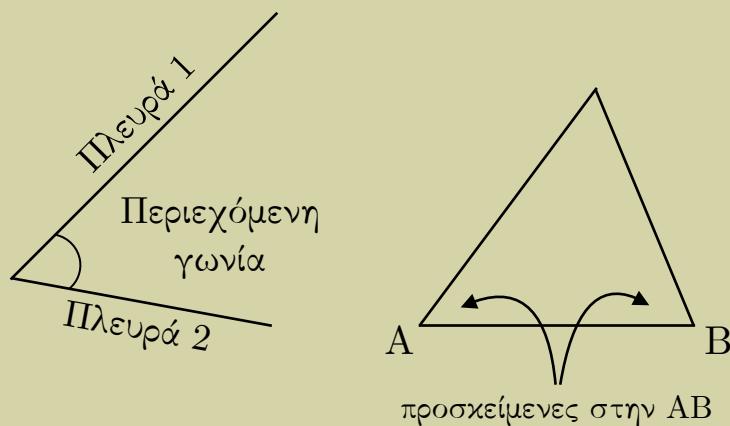
Κύρια και δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου



Σε κάθε τρίγωνο οι πλευρές και οι γωνίες του ονομάζονται **κύρια στοιχεία** του τριγώνου. Οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις γωνίες $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ συμβολίζονται με α, β και γ αντίστοιχα.

Σε κάθε τρίγωνο ισχύει ότι

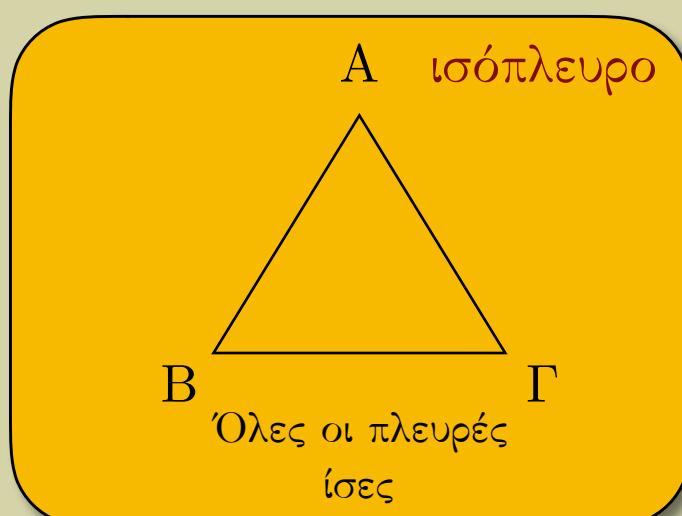
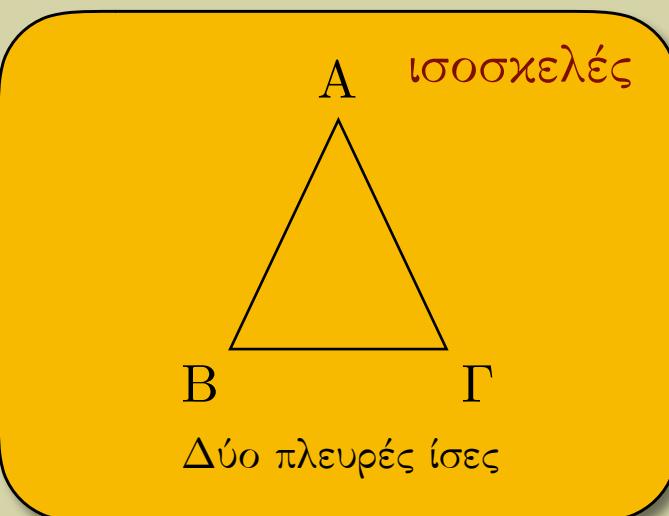
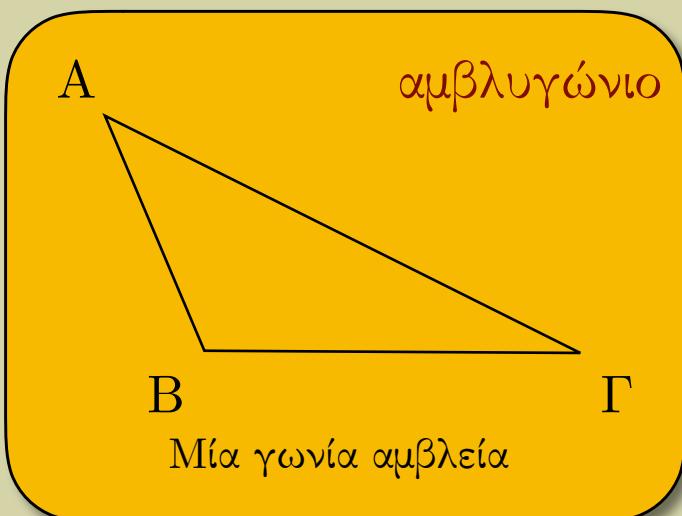
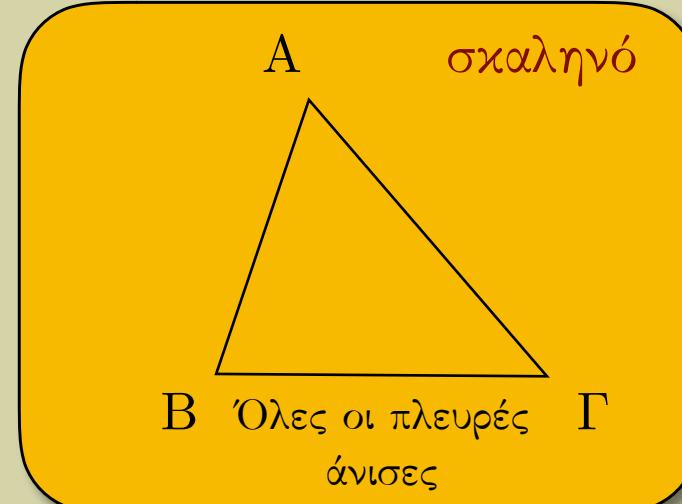
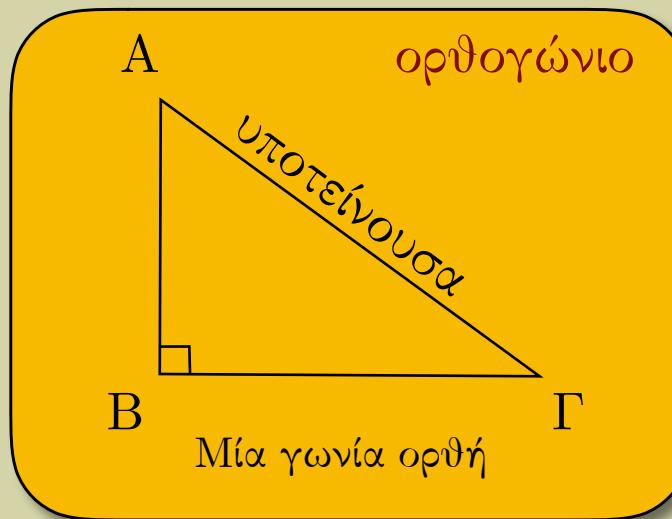
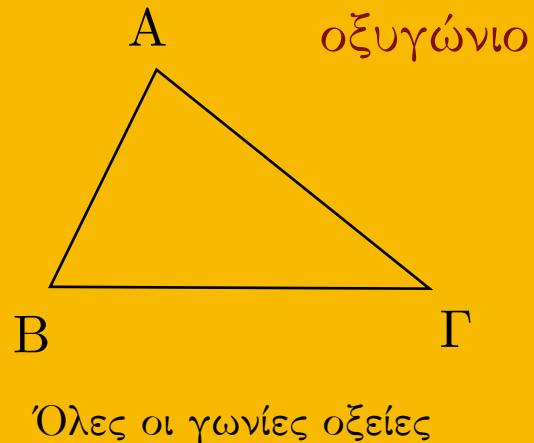
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$



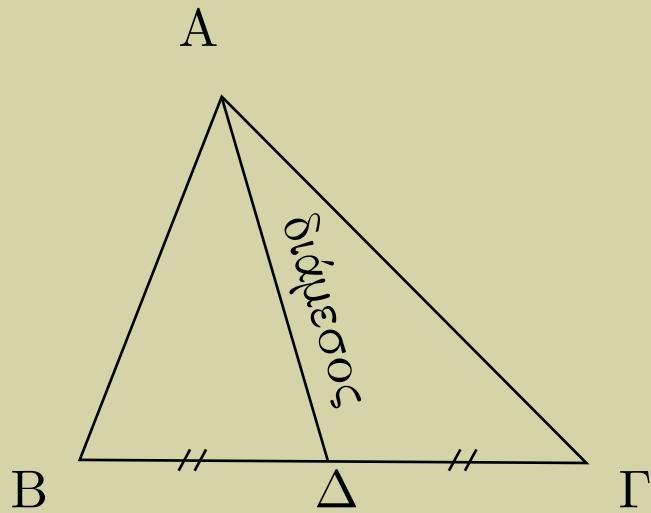
Η γωνία του τριγώνου που βρίσκεται μεταξύ δύο πλευρών λέγεται **περιεχόμενη**.

Οι γωνίες του τριγώνου που έχουν κορυφές στα άκρα μία πλευράς λέγονται **προσκείμενες** στην πλευρά αυτή.

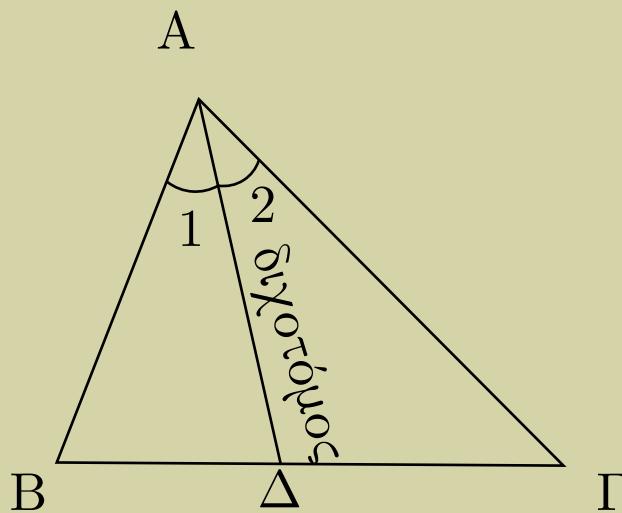
Είδη τριγώνων



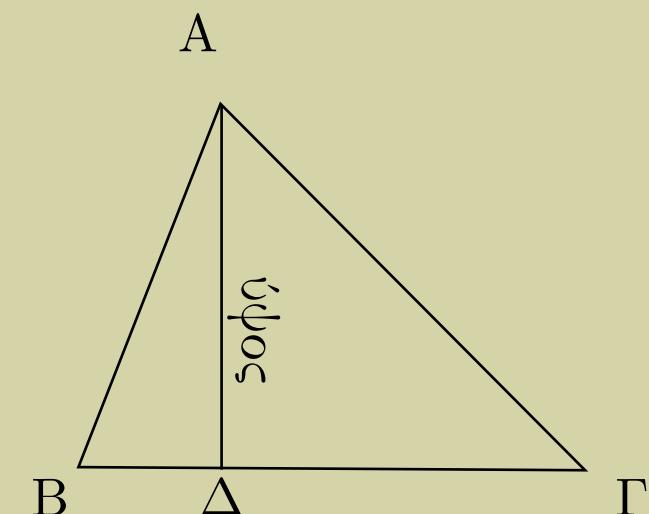
Δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου



Διάμεσος ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μία κορυφή του τριγώνου με το μέσο της απέναντι πλευράς.

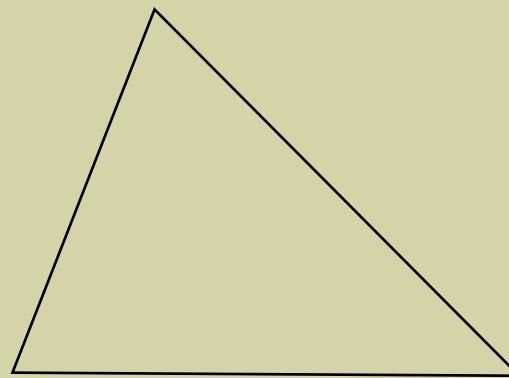
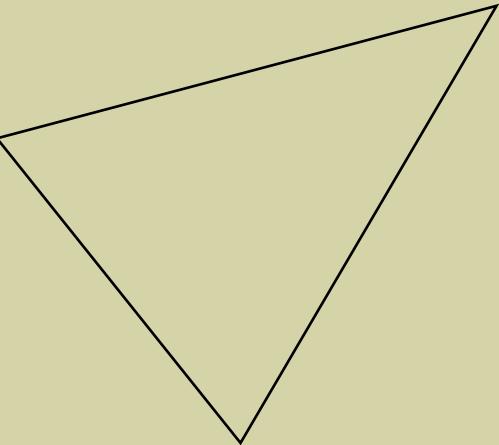


Διχοτόμος ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που φέρουμε από μία κορυφή, χωρίζει τη γωνία σε δύο ίσες γωνίες και καταλήγει στην απέναντι πλευρά.



Ύψος ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που φέρουμε από μία κορυφή, είναι κάθετο στην ευθεία της απέναντι πλευράς και καταλήγει στην ευθεία αυτή.

Ίσα τρίγωνα



Δύο τρίγωνα είναι ίσα \Leftrightarrow

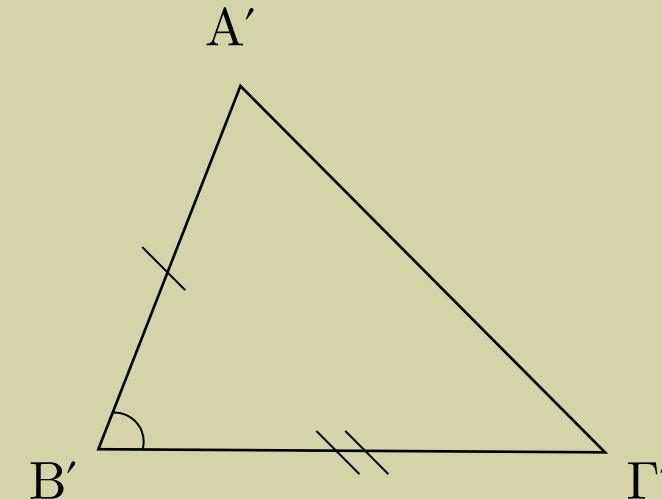
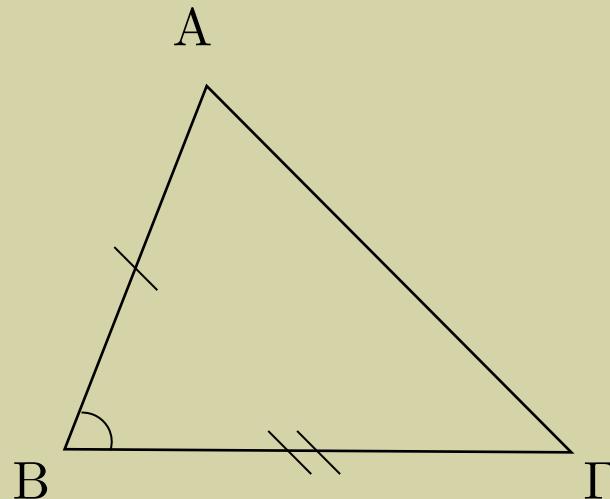
Οι πλευρές και οι
αντίστοιχες γωνίες ίσες

Μας ενδιαφέρει πότε δύο τρίγωνα είναι ίσα χωρίς να πρέπει να αποδείξουμε ότι όλες οι πλευρές και οι αντίστοιχες γωνίες τους είναι ίσες. Για το λόγο αυτό υπάρχουν κάποια **κριτήρια** με τα οποία αποδεικνύουμε αυτό που θέλουμε.

1^ο κριτήριο ισότητας (ΠΓΠ)

1^o κριτήριο ισότητας (ΠΓΠ)

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία τους ίση, τότε είναι ίσα.



1

Σε ισοσκελές τρίγωνο ABG ($AB = AG$) φέρουμε τη διχοτόμο AD .

α) Να συγκριθούν τα τρίγωνα ABD και ADG .

β) Να αποδειχθεί ότι $\widehat{B} = \widehat{G}$ και ότι η διχοτόμος AD είναι διάμεσος και ύψος.

α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ABD , ADG και παρατηρούμε ότι

έχουν:

- $AD = AD$, κοινή πλευρά
- $AB = AG$ από την υπόθεση
- $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$, αφού AD διχοτόμος της γωνίας \widehat{A} .

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία τους ίση.

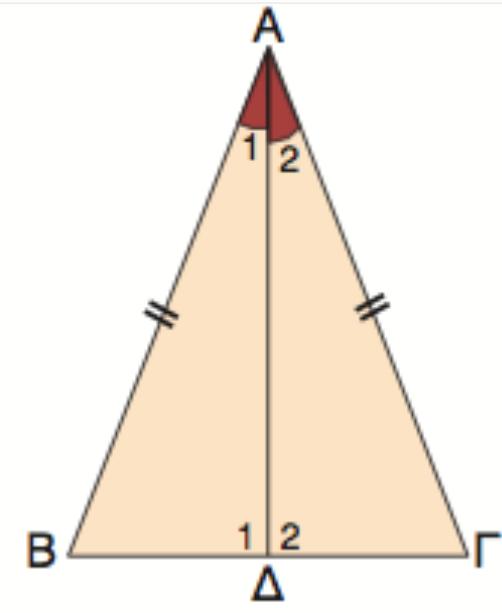
β) Επειδή τα τρίγωνα ABD και ADG είναι ίσα, θα έχουν όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, οπότε $\widehat{B} = \widehat{G}$, $B\Delta = \Delta G$ και $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Delta}_2$.

Αφού είναι $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Delta}_2$ και $\widehat{\Delta}_1 + \widehat{\Delta}_2 = 180^\circ$, θα έχουμε $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Delta}_2 = 90^\circ$, οπότε η διχοτόμος AD είναι και ύψος. Η διχοτόμος AD είναι και διάμεσος, αφού $B\Delta = \Delta G$. Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο:

α) Οι γωνίες της βάσης του είναι ίσες.

β) Η διχοτόμος, το ύψος και η διάμεσος που φέρουμε από την κορυφή προς τη βάση του συμπίπουν.

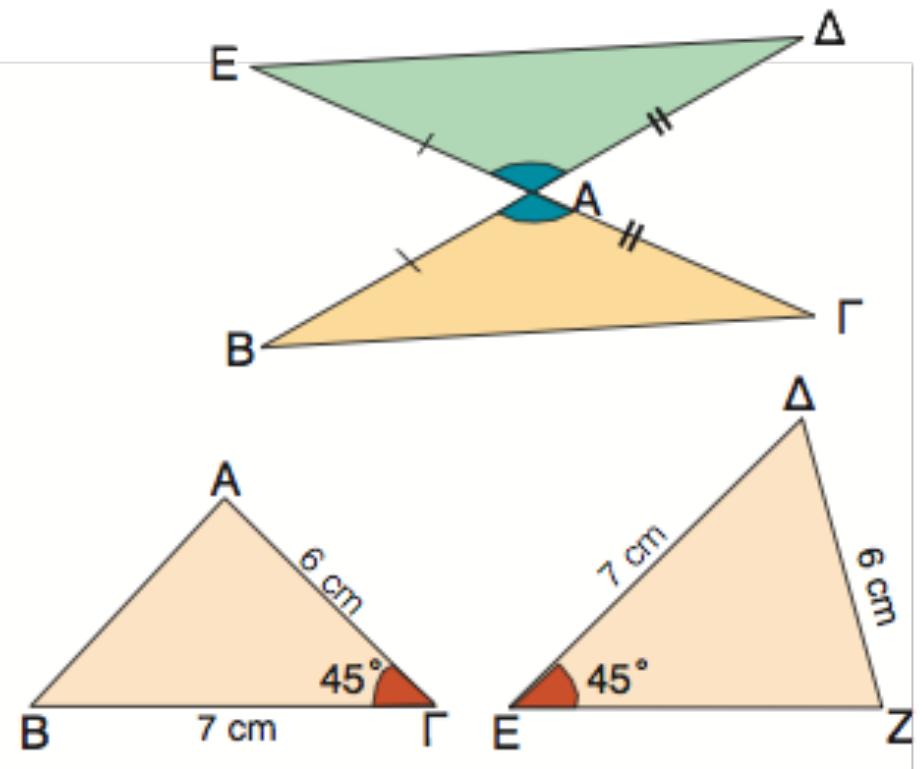


1

Να εξηγήσετε γιατί είναι ίσα τα τρίγωνα $ABΓ$ και $AEΔ$ του διπλανού σχήματος και να συμπληρώσετε τις ισότητες
 $\hat{B} = \dots$, $\hat{\Gamma} = \dots$ και $B\Gamma = \dots$.

2

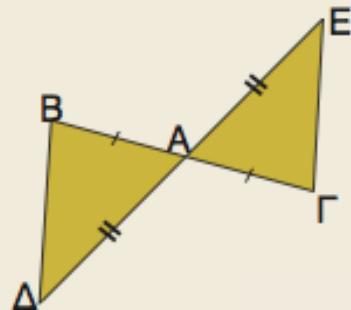
Να εξηγήσετε γιατί δεν είναι ίσα τα τρίγωνα του διπλανού σχήματος, αν και έχουν δύο πλευρές ίσες και μια γωνία ίση.



1

Στο διπλανό σχήμα είναι $AB = AG$ και $AD = AE$.

Να αποδείξετε ότι $B\Delta = GE$.



Αρκεί να δείξουμε ότι τα τρίγωνα $\triangle ABD$ και $\triangle AGE$ είναι ίσα.

(Γιατί θα έχουν ίσες πλευρές και άρα θα έχουμε σύμφωνα με την θέση!)

$$\left. \begin{array}{l} \text{Έχουμε } AB = AG \\ \quad AD = AE \end{array} \right\} \text{από υπόθεση.}$$

$$\text{πιστος } \hat{B}\hat{A}\hat{D} = \hat{G}\hat{A}\hat{E} \text{ κατα κορυφήν}$$

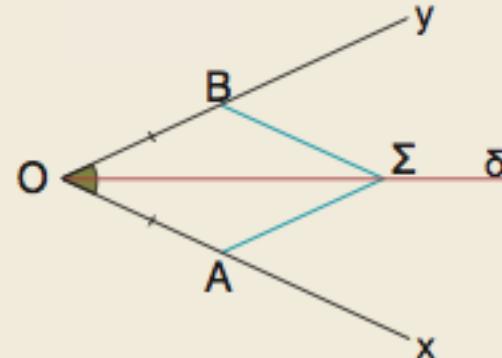
συνεπώς

$$\boxed{BD = GE}$$

\Rightarrow Από κριτήριο ΠΠΠ
τα τρίγωνα θα είναι ίσα

2

Στο διπλανό σχήμα η Οδ είναι διχοτόμος της γωνίας $x\widehat{O}y$. Αν $OA = OB$ και Σ τυχαίο σημείο της διχοτόμου, να αποδείξετε ότι $\Sigma A = \Sigma B$.



Θα συγκρίνουμε τα γεγονότα $\overset{\Delta}{OB\Sigma}$, $\overset{\Delta}{OA\Sigma}$. Έχουμε $OA = OB$ (υπόθεση)

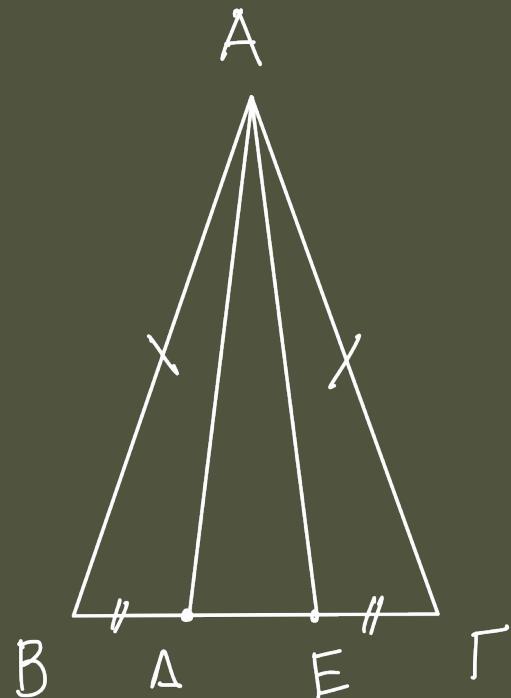
$O\Sigma$ κοινή

$\overset{\Delta}{\Sigma OB} = \overset{\Delta}{\Sigma OA}$ αφού Οδ διχοτόμος

άρα $\overset{\Delta}{OB\Sigma} = \overset{\Delta}{OA\Sigma}$ κι ετσι $\boxed{\Sigma A = \Sigma B}$

3

- Στη βάση $B\Gamma$ ενός ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ να πάρετε σημεία Δ, E , ώστε $B\Delta = \Gamma E$.
Να αποδείξετε ότι $A\Delta = AE$.



Θα συγκρίνουμε τα τρίγωνα
 $\triangle A\Delta B$ και $\triangle A\Gamma E$.

$$\left. \begin{array}{l} AB = AG \quad (\triangle A\Gamma G \text{ ισοσκελές}) \\ B\Delta = E\Gamma \quad (\text{υπόθεση}) \\ \hat{B} = \hat{\Gamma} \quad (\triangle A\Gamma G \text{ ισοσκελές}) \end{array} \right\}$$

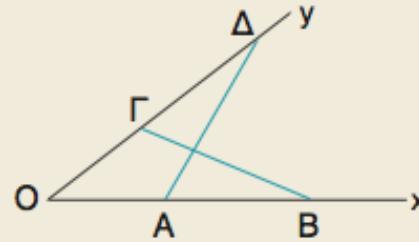
Από 1ο κριτήριο
είναι ίσα, άρα

$$A\Delta = AE$$

4

Στο διπλανό σχήμα είναι $OA = OG$ και $OB = OD$.

Να αποδείξετε ότι $BG = AD$.



Συγκρίνουμε τα $\triangle OGB$, $\triangle OAD$:

$$OA = OG \text{ (υπόθεση)}$$

$$OB = OD \text{ (- II -)}$$

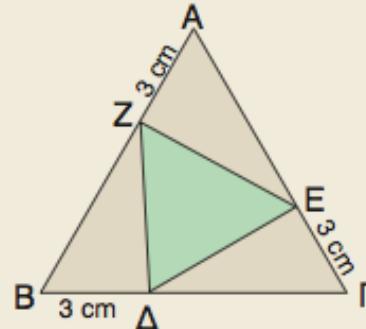
\hat{O} κοινή

Από 1ο κριτήριο
είναι ίσα . άρα

$$BG = AD$$

5

Κάθε πλευρά του ισοπλεύρου τριγώνου $AB\Gamma$ είναι 8 cm. Αν είναι $AZ = B\Delta = \Gamma E = 3$ cm, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔEZ είναι ισόπλευρο.



Σημείωσον είναι ισόπλευρο, καθε γωνια του θα είναι 60° .

$$\text{Επίσης } AB = 8 \text{ αφε } BZ = 8 - 3 = 5 \text{ αφε και } \Delta\Gamma = 5 = AE$$

$$\text{Οποτε } BZ = AE = \Delta\Gamma \text{ και}$$

$$B\Delta = E\Gamma = AZ$$

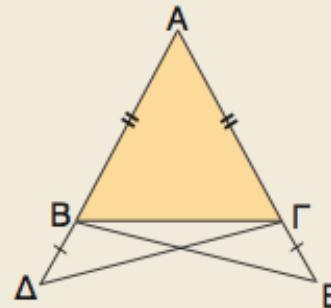
Σύμφωνα με το 1^ο κριτήριο τω χρήσνω $\triangle BZA = \triangle E\Gamma A = \triangle EZA$

Σπομένως $AZ = \Delta E = ZE$. οποτε το χρήσνω $\triangle EZA$ είναι

ισόπλευρο

6

- Στις προεκτάσεις των ίσων πλευρών AB , AG ενός ισοσκελούς τριγώνου ABG να πάρετε αντιστοίχως τμήματα $BD = GE$.
Να αποδείξετε ότι $\hat{D} = \hat{E}$.



Συγκρινούμε τα γωνία \hat{ABE} , \hat{AGD} .

\hat{A} κοινή

$$AB = AG$$

$$AE = AD \quad (AB = AG \text{ και } BD = GE)$$

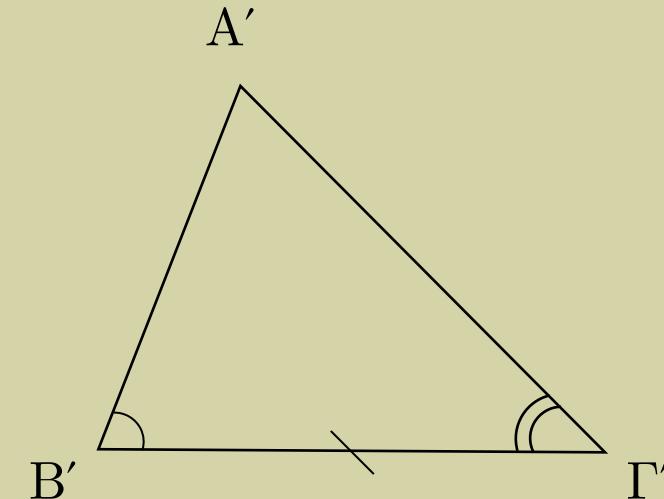
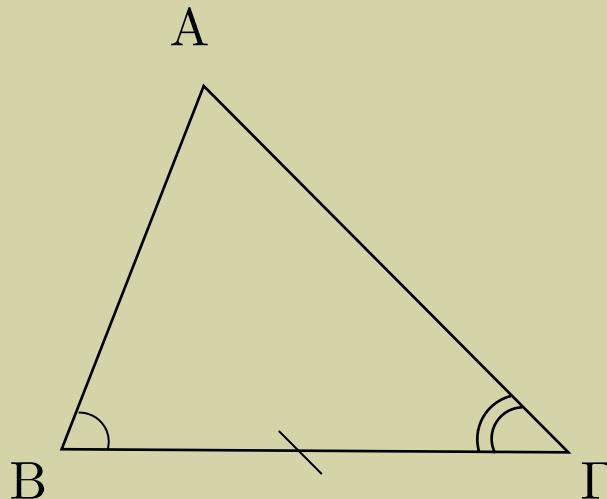
}

Αριθμοί $\hat{ABE} = \hat{AGD}$
οπότε $\hat{D} = \hat{E}$

2^ο κριτήριο ισότητας (ΓΠΓ)

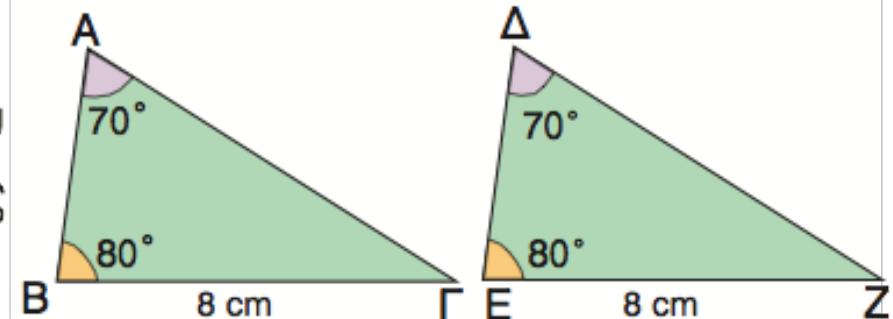
2^o κριτήριο ισότητας (ΓΠΓ)

Αν δύο τρίγωνα έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.



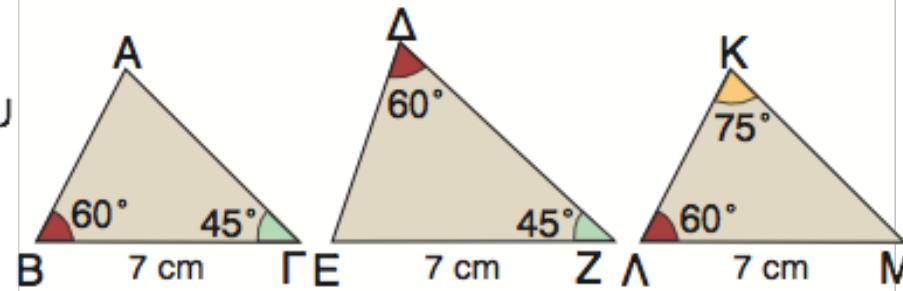
Ερωτήσεις κατανόησης

3 Να εξηγήσετε γιατί είναι ίσα τα τρίγωνα του διπλανού σχήματος και να συμπληρώσετε τις ισότητες $AB = \dots$ και $A\Gamma = \dots$

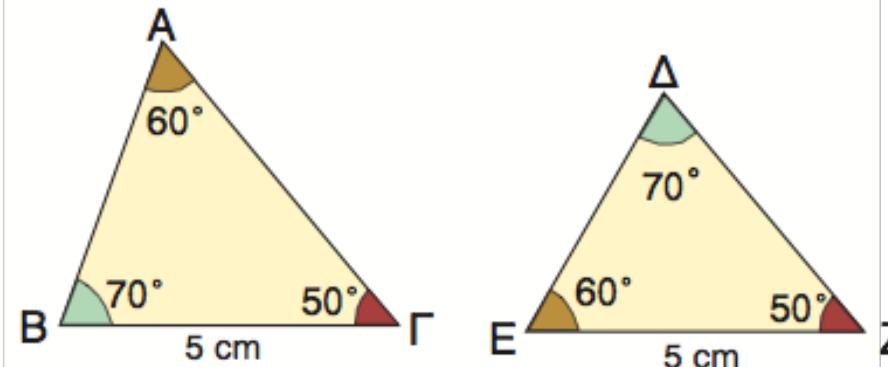


4 Να βρείτε το ζεύγος των ίσων τριγώνων του διπλανού σχήματος.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

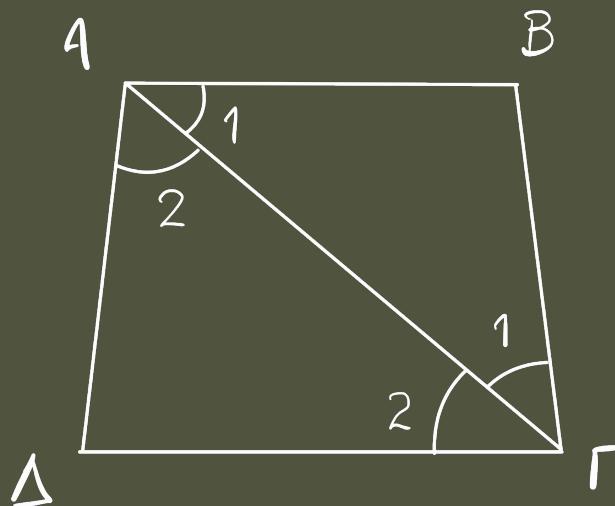


5 Είναι ίσα τα τρίγωνα του διπλανού σχήματος;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



7

- Σ' ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ η διαγώνιος $A\Gamma$ διχοτομεί τις γωνίες \hat{A} και $\hat{\Gamma}$.
Να αποδείξετε ότι $AB = A\Delta$ και $B\Gamma = \Gamma\Delta$.



Συγκεινω τα γειφωνας $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$, $\overset{\Delta}{A\Delta\Gamma}$.

$A\Gamma$ κοινή

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \quad (\text{υπόθεση})$$

$$\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2 \quad (\text{υπόθεση})$$

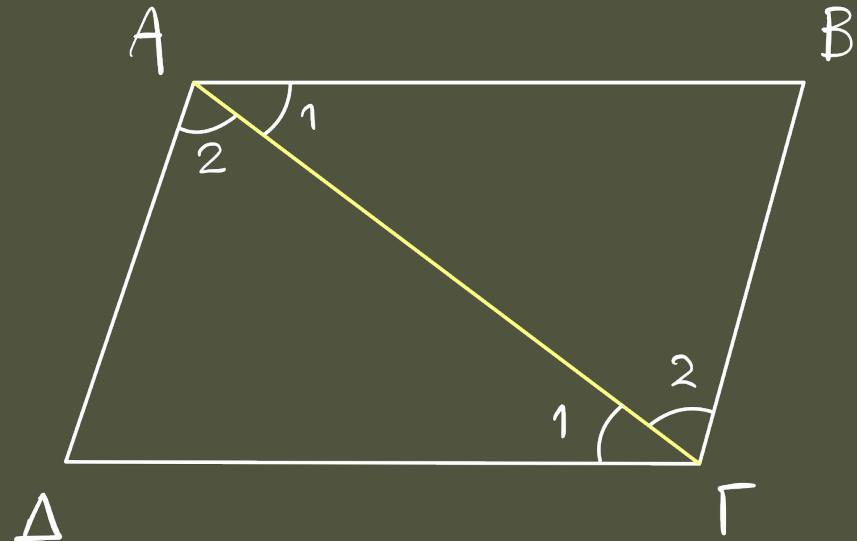
$\overset{\Delta}{AB\Gamma}$, $\overset{\Delta}{A\Delta\Gamma}$

Από ΓΠΓ έχουμε

$$B\Gamma = \Delta\Gamma,$$

8

Να αποδείξετε ότι οι απέναντι πλευρές ενός παραλληλογράμμου είναι ίσες.

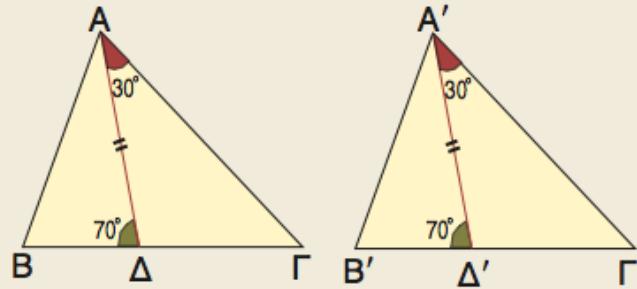


Φύρνω την $ΑΓ$ και συγκρινω τα γρίφωνα \hat{A}_1 και \hat{A}_2 και $\hat{Δ}_1$ και $\hat{Δ}_2$. Σχουρε $ΑΓ$ κοινή,
 $\hat{A}_1 = \hat{Δ}_1$ (εντος εν αλλαξ)
 $\hat{A}_2 = \hat{Δ}_2$ (—II—)
· Αρα τα γρίφωνα είναι ίσα, οπότε $AB = ΓΔ$
και $AD = BC$.

9

Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ του διπλανού σχήματος έχουν τις διχοτόμους $A\Delta$ και $A'\Delta'$ ίσες. Να αποδείξετε ότι:

- a) $AB = A'B'$
- β) τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα.



Οι $A\Delta$ και $A'\Delta'$ είναι διχοτόμοι και επορένωσ

$$\hat{B}\hat{A}\Delta = 30^\circ \text{ και } \hat{B}'\hat{A}'\Delta' = 30^\circ.$$

i) Συζερινώ τα γρίφωνα $\triangle A\hat{B}\Delta$, $\triangle A'\hat{B}'\Delta'$

$$\left. \begin{array}{l} A\Delta = A\Delta' \quad (\text{από υπόθεση}) \\ \hat{B}\hat{A}\Delta = \hat{B}'\hat{A}'\Delta' \quad (\text{από πριν}) \\ \hat{B}\hat{\Delta}A = \hat{B}'\hat{\Delta}'A' \quad (\text{υπόθεση}) \end{array} \right\} \text{Άρα } AB = A'B'$$

ii) Από το (i) ερώτημας ιχουρμε δεῖται ότι $\hat{A}\hat{B}\Delta = \hat{A}'\hat{B}'\Delta'$. αρα $\hat{B} = \hat{B}'$.

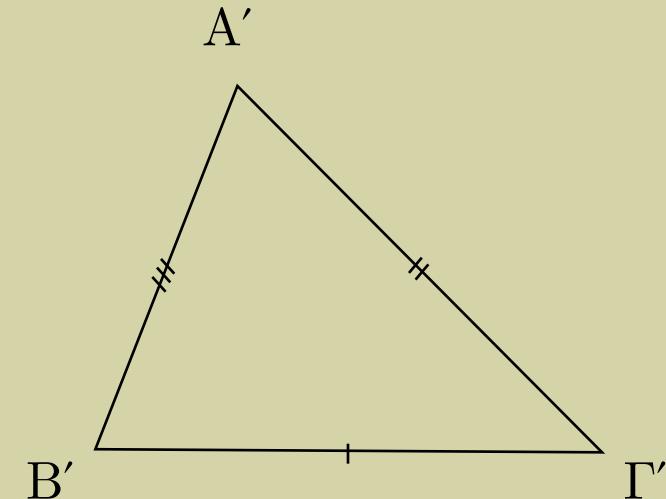
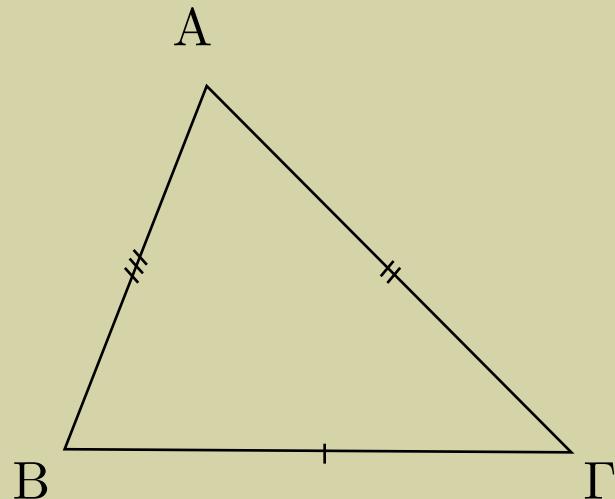
και $AB = A'B'$. Σημειών $\hat{A} = \hat{A}'$ αφού $\hat{B}\hat{A}\Delta = \hat{B}'\hat{A}'\Delta'$.

αρα $\hat{A}\hat{B}\Gamma = \hat{A}'\hat{B}'\Gamma'$ (κειμένο 2ο τηγ)

3^ο κριτήριο ισότητας (ΠΠΠ)

3^ο κριτήριο ισότητας (ΠΠΠ)

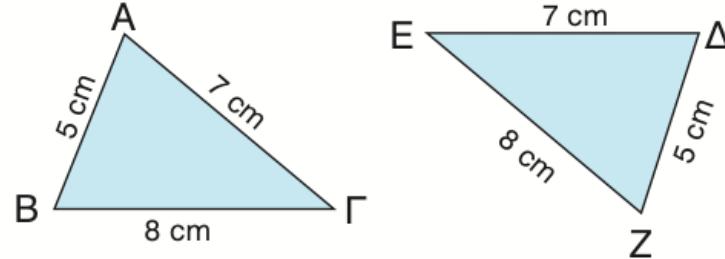
Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

6

Να εξηγήσετε γιατί είναι ίσα τα τρίγωνα του διπλανού σχήματος και να συμπληρώσετε τις ισότητες $\hat{A} = \dots$, $\hat{B} = \dots$ και $\hat{F} = \dots$



Τα τριγωνά είναι ίσα αφού έχουν ίσες πλευρές, σύμφωνα με το κριτήριο ισότητας ΠΠΠ.

Έχουμε $\hat{A} = \hat{D}$ (έναυ περιεχόμενες γωνίες σε ίσες πλευρές)

$$\hat{B} = \hat{E}$$

$$\hat{C} = \hat{F}$$

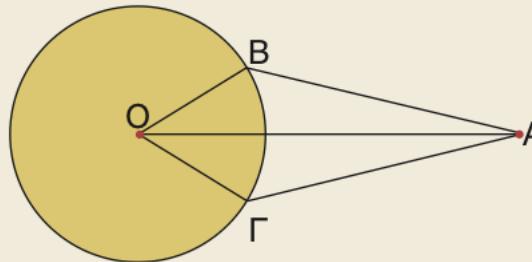
7

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

- α) Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.
- β) Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.
- γ) Σε δύο τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες.
- δ) Σε δύο ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές.
- ε) Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία, τότε θα έχουν και την τρίτη τους γωνία ίση.
- στ) Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία, τότε θα έχουν και την τρίτη τους πλευρά ίση.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

- 10 Στο διπλανό σχήμα το σημείο A ισαπέχει από τα σημεία B και Γ ενός κύκλου που έχει κέντρο το σημείο O . Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα OAB και $O\Gamma A$ είναι ίσα.



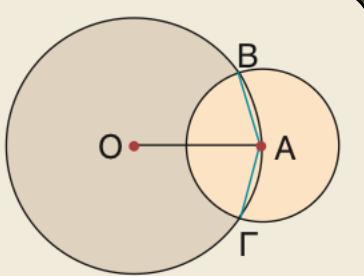
Άφού το A ισαπέχει από τα B και Γ , τότε $AB = AG$.

Συζητίνουμε τα τρίγωνα $\triangle OAB$ και $\triangle OAG$. Ισχύει ότι $AB = AG$, OA κοινή και $OB = OG$ ως ακτίνες του κύκλου. Οπότε από το κειτύριο ΠΠΠ έχουμε :

$$\triangle OAB \cong \triangle OAG.$$

11

- Αν O, A είναι τα κέντρα των κύκλων του διπλανού σχήματος, να αποδείξετε ότι η AO διχοτομεί τη γωνία $B\hat{A}G$.

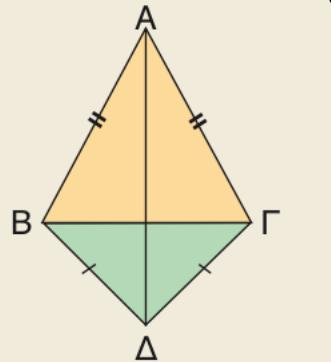


Συγκείνουμε τα τρίγωνα $\triangle OAB$ και $\triangle OAG$. Έχουμε θα κοινή, $OB=OG$ ως ακτίνες του μεγάλου κύκλου και $AB=AG$ ως ακτίνες του μικρού κύκλου.

Άρα από το κριτήριο ΠΠΠ τα τρίγωνα θα είναι ίσα, επομένως $\hat{B}AO = \hat{G}AO$. Άρα η OA διχοτομεί τη γωνία $B\hat{A}G$.

12

Τα ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta B\Gamma$ του διπλανού σχήματος έχουν κοινή βάση $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι η $A\Delta$ διχοτομεί τις γωνίες \widehat{A} και $\widehat{\Delta}$.



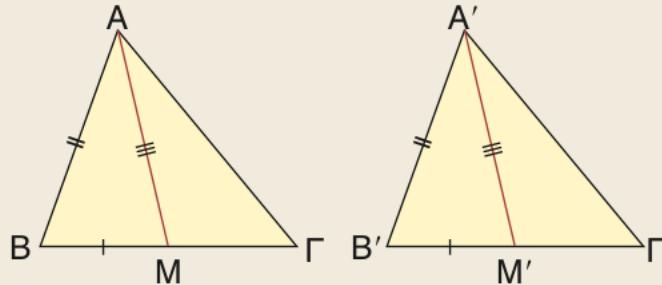
Συζητίουμε τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{AB\Delta}$ και $\overset{\Delta}{A\Gamma\Delta}$. Έχουν $AB = A\Gamma$, $B\Delta = \Delta\Gamma$ και $A\Delta$ κοινή
άρα σύμφωνα με το κριτήριο ΠΠΠ είναι ίσα και επομένως $\overset{\wedge}{BA\Delta} = \overset{\wedge}{\Delta A\Gamma}$ και
 $\overset{\wedge}{B\Delta A} = \overset{\wedge}{\Delta A\Gamma}$ άρα η $A\Delta$ διχοτομεί τις γωνίες \widehat{A} και $\widehat{\Delta}$.

13

Στα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ του διπλανού σχήματος οι διάμεσοι AM και $A'M'$ είναι ίσες. Αν $AB = A'B'$ και $BM = B'M'$, τότε να αποδείξετε ότι:

a) $\widehat{B} = \widehat{B}'$.

β) τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα.



a) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $\triangle ABM$ και $\triangle A'B'M'$:

$$AB = A'B', \quad BM = B'M', \quad AM = A'M' \quad \text{όφει από πΠΠ είναι ίσα.}$$

οπότε $\widehat{B} = \widehat{B}'$.

β) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $\triangle AB\Gamma$ και $\triangle A'B'\Gamma'$. $AB = A'B'$, $B\Gamma = B'\Gamma'$ καὶ

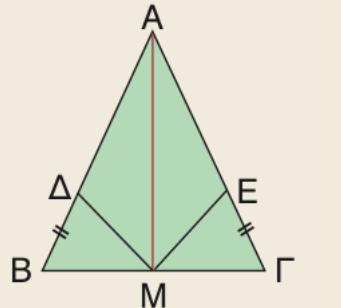
M μέσον της $B\Gamma$ και M' μέσον της $B'\Gamma'$. Επίσης από το έρωτημα

$\widehat{B} = \widehat{B}'$ οπότε: λόγω κειτερίου πΓΠ τα τρίγωνα \triangle είναι ίσα

14

Στο ισοσκελές τρίγωνο ABG το σημείο M είναι μέσο της βάσης BG . Αν είναι $BD = GE$, να αποδείξετε ότι:

- το τρίγωνο MDE είναι ισοσκελές
- τα τρίγωνα ADM και AEM είναι ίσα.



a) Συζητίουμε τα τρίγωνα MDB και MEG .

$$\left. \begin{array}{l} BD = GE \quad (\text{δεδομένο}) \\ BM = MG \quad (M \text{ μέσο } BG) \\ \hat{B} = \hat{E} \quad (\triangle ABG \text{ ισοσκελές}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Κειμήριο} \\ \text{ΠΓΠ} \end{array} \Rightarrow DM = EM \quad \text{όπως } \triangle MDE \text{ ισοσκ}$$

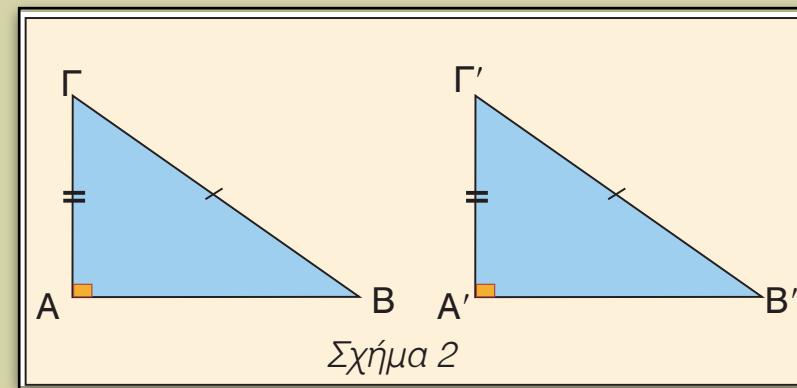
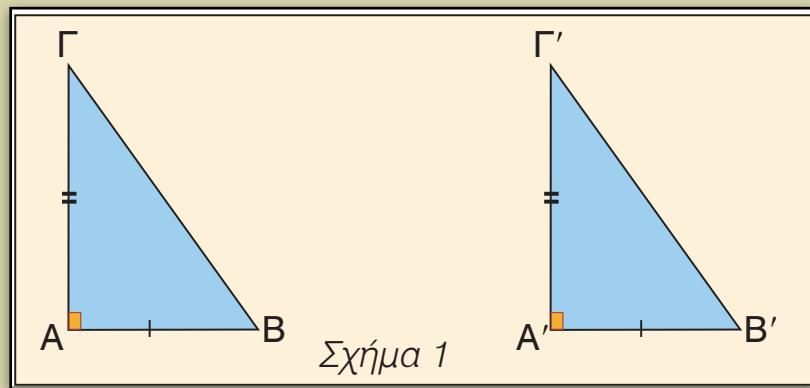
b) Συζητίωντας τα $\triangle ADM$, $\triangle AEM$:

$$\left. \begin{array}{l} AM \text{ κοινή} \\ DM = EM \\ AD = AE \quad (AB - BD = AG - GE) \end{array} \right\} \text{Κειμήριο ΠΠΠ τα τρίγ είναι ίσα}$$

Κριτήρια Ισότητας Ορθογωνίων Τριγώνων

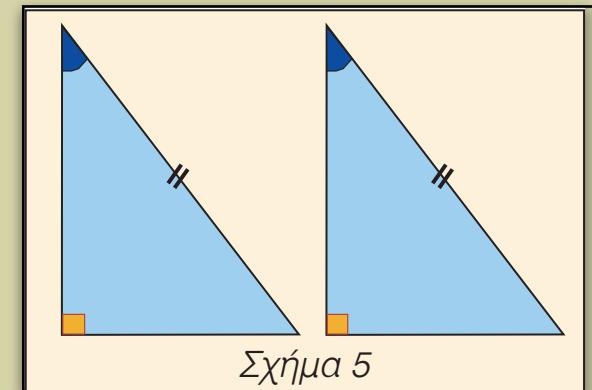
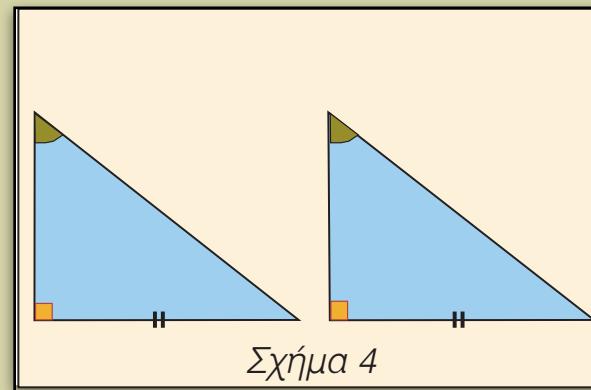
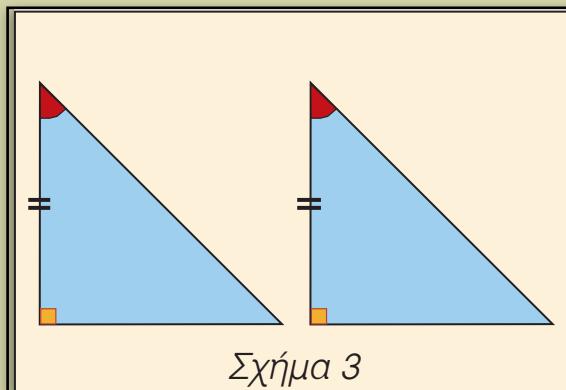
Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων

Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.



Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων

Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μία αντίστοιχη πλευρά ίση και μία αντίστοιχη οξεία γωνία ίση, τότε είναι ίσα.

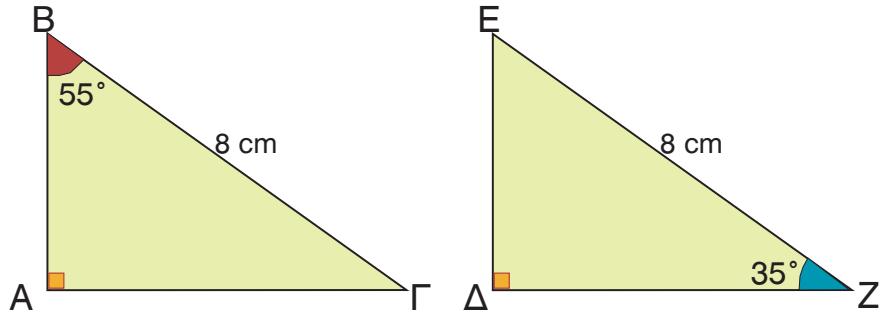


ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

8

Είναι ίσα τα ορθογώνια τρίγωνα του διπλανού σχήματος;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



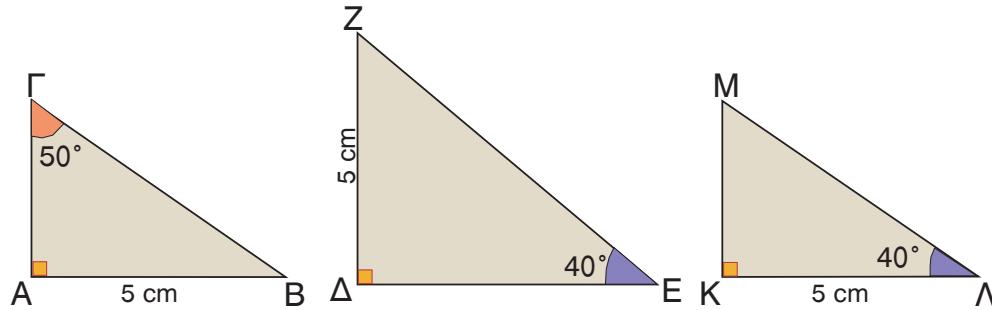
Η γωνία $\overset{\wedge}{\Gamma}$ είναι ίση με 35° αφού $55^\circ + 35^\circ = 90^\circ$.

Άρα τα τρίγωνα $\triangle A\hat{B}\Gamma$ και $\triangle E\hat{D}Z$ είναι ίσα. αφού έχουν μία πλευρά και μία ορθή γωνία ίση.

9

Να βρείτε το ζεύγος των ίσων τριγώνων.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

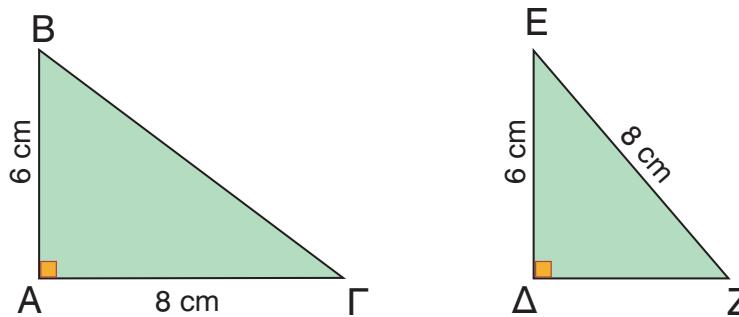


To πρώτο τρίγωνο έχει γωνία $\hat{B} = 40^\circ$ (Αφού $\hat{A} + \hat{B} + \hat{G} = 180^\circ$)

Άρα είναι ίσο με το τρίτο τρίγωνο. Έχουν μια πλευρά και μια οπή γωνία ίση.

10

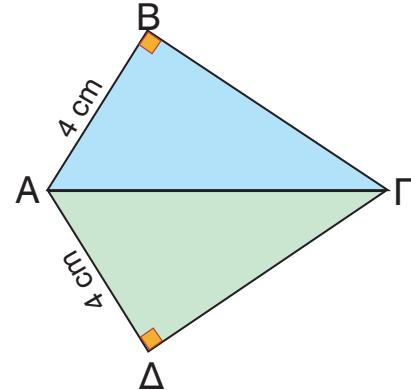
- Τα ορθογώνια τρίγωνα του διπλανού σχήματος έχουν δύο πλευρές ίσες. Να εξηγήσετε γιατί δεν είναι ίσα.



Δεν είναι ίσα όταν οι περιεχόμενες γωνίες σ' αυτές τις ιστις πλευρές δεν είναι ίσες. Στο πρώτο τρίγωνο η περιεχόμενη γωνία είναι ορθή ενώ στο δεύτερο όχι.

11

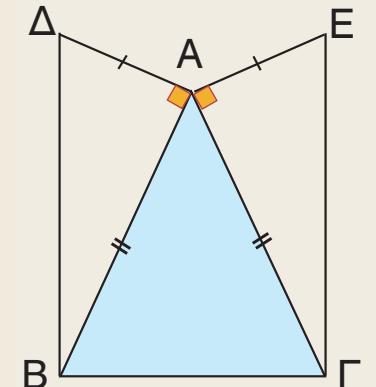
Να αιτιολογήσετε γιατί είναι ίσα τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Gamma\Delta$.



Έχουν την $A\Gamma$ κοντή και $AB = A\Delta$.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

- 15 Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) να φέρετε $A\Delta \perp AB$ και $AE \perp A\Gamma$. Αν είναι $A\Delta = AE$, να αποδείξετε ότι $B\Delta = E\Gamma$.

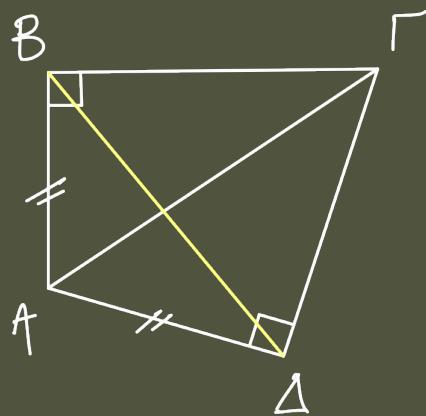


Άρκει να δείξουμε ότι τα τρίγωνα $\triangle A\Delta B$ και $\triangle A\Gamma E$ είναι ίσα
(γιαν τότε θα έχουν όλα τα σημειώσια τους ίσα)

Έχουμε $A\Delta = AE$ και $AB = A\Gamma$ και είναι ορθογώνια, αφού
 $\triangle A\Delta B = \triangle A\Gamma E$ οπότε $B\Delta = E\Gamma$

16

Σε τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι $\widehat{B} = \widehat{\Delta} = 90^\circ$ και $AB = A\Delta$. Να αποδείξετε ότι $B\Gamma = \Gamma\Delta$ και ότι η $A\Gamma$ είναι μεσοκάθετος του $B\Delta$.

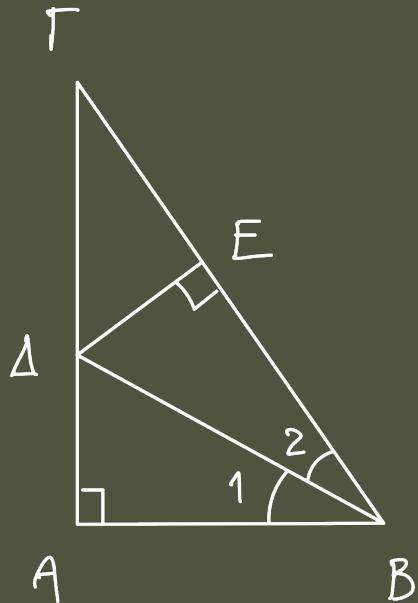


Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα
 $\triangle A\Gamma B$ και $\triangle A\Delta\Gamma$.

Έχουν $A\Gamma$ κοινή πλευρά , } Άρα
 $AB = A\Delta$ (από υπόθεση) } $\triangle A\Gamma B = \triangle A\Delta\Gamma$.
 Οπότε $B\Gamma = \Gamma\Delta$.

Τώρα, η $A\Gamma$ είναι μεσοκάθετη του $B\Delta$ αφού τόσο το A ίσο
 και το Γ 1σαπέχουν από τα άκρα B και Δ του τριγώνου.

- 17 Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 90^\circ$) να φέρετε τη διχοτόμο $B\Delta$. Αν $\Delta E \perp B\Gamma$, να αποδείξετε ότι $AB = BE$.

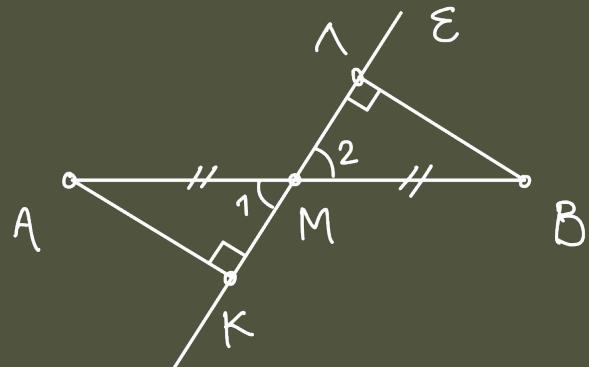


Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $\triangle BED$ και $\triangle BAD$. Είναι και τα δύο ορθογώνια, έχουν $B\Delta$ κοινή και $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$ αφού η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της \widehat{B} . Άρα είναι ίσα και επομένως

$$AB = BE$$

18

Μια ευθεία (ε) διέρχεται από το μέσον M ενός τμήματος AB . Να αποδείξετε ότι τα σημεία A , B ισαπέχουν από την ευθεία (ε).



$$\hat{M}_1 = \hat{M}_2 \quad (\text{κατακορυφή}) , \text{ οπότε}$$

Τια να δείξω ότι τα A και B ισαπέχουν από την ευθεία ε . Θα πρέπει να δείξω ότι τα τμήματα AK και LB είναι ίσα.
Οπότε συγκρίνω τα δύο ορθογώνια τρίγωνα $\triangle AKM$ και $\triangle BML$: Έχουν $AM = MB$ (Μ μέσον)

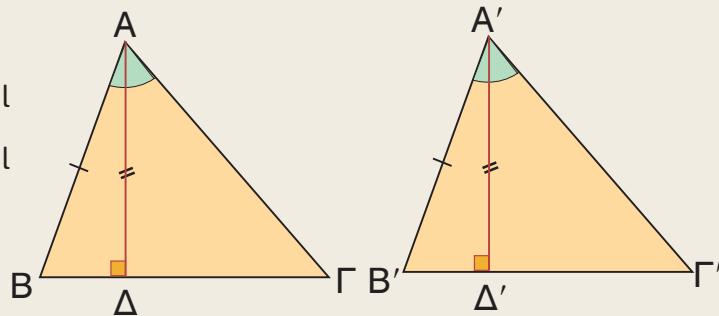
$$\triangle AKM = \triangle BML \quad \text{και ορος} \quad AK = LB .$$

19

Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν $\hat{A} = \hat{A}'$ και $AB = A'B'$. Αν τα ύψη τους $A\Delta$ και $A'\Delta'$ είναι ίσα, να αποδείξετε ότι:

a) $\hat{B} = \hat{B}'$

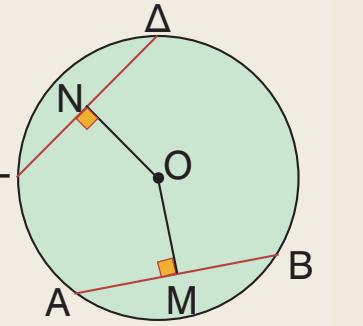
β) τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα.



- a) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{AB\Delta}$ και $\overset{\Delta}{A'B'\Delta'}$. Εχουν $AB = A'B'$ και $A\Delta = A'\Delta'$ άρα είναι ίσα και επομένως $\hat{B} = \hat{B}'$.
- β) $\overset{\Delta}{AB\Gamma} = \overset{\Delta}{A'B'\Gamma'}$ χωρίς $AB = A'B'$, $\hat{A} = \hat{A}'$ και $\hat{B} = \hat{B}'$ (από πριν)

20

Αν οι χορδές AB , $ΓΔ$ ενός κύκλου είναι ίσες, να αποδείξετε ότι και τα αποστήματά τους OM , ON είναι ίσα. Ισχύει το αντίστροφο;



Συγχρίνουμε τα τρίγωνα $ΓON$ και AOM . Είναι ορθογώνια και $OG = OA$ (ακτίνες), $TN = AM$ (μισά ισων πλευρών). Άρα τα αποστήματα ON , OM είναι ίσα.

Αντίστροφο:

Αν $ON = OM$ θέλω να δεξιώσω ότι $ΓΔ = AB$.

Τα τρίγωνα $ΓOD$ και AOB είναι ισοσκελή όταν

$AO = OB = GO = OD$ (ακτίνες) άρα τα αποστήματα

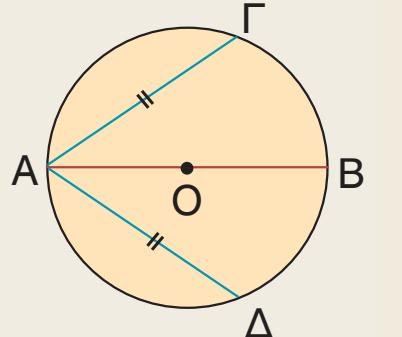
είναι και ειάρεσοι, άρα N μέσον της $ΓΔ$ και

M μέσον της AB . Οπότε συγχρίνουμε τα τρίγωνα

$ONΓ$ και OAM . Και καταλήγουμε σω ότι $ΓΔ = AB$.

21

Στο διπλανό σχήμα η AB είναι διάμετρος του κύκλου. Αν οι χορδές AG και AD είναι ίσες, να αποδείξετε ότι και οι χορδές BG και $BΔ$ είναι ίσες.



Τα τριγωνά $\triangle ABG$ και $\triangle ABD$ είναι ορθογώνια γιατί οι γωνίες $\hat{A}GB$ και $\hat{A}DB$ βρίσκονται στην ημικύκλιο. Συγκρίνουμε τα τριγωνά $\triangle ABG$ και $\triangle ABD$: AB κοινή $AG = AD$. Οπότε $BG = BD$