

Μαθηματικά Γ' Γυμνασίου

1.10 - Πράξεις ρητών παραστάσεων

Πολλαπλασιασμός - Διαίρεση

A Πολλαπλασιασμός – Διαίρεση ρητών παραστάσεων

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Να κάνετε τις πράξεις: $4 \cdot \frac{3}{5}$, $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}$, $\frac{2}{5} : \frac{4}{7}$
2. Με ανάλογο τρόπο να κάνετε και τις παρακάτω πράξεις:

$$2x \cdot \frac{3xy}{5\omega}, \quad \frac{3x^2}{2a\beta} \cdot \frac{2a^2\beta}{9xy}, \quad \frac{9x}{y+1} : \frac{3x^2}{5y+5}$$

Πολλαπλασιασμός

Για να πολλαπλασιάσουμε έναν ακέραιο αριθμό με ένα κλάσμα ή για να πολλαπλασιάσουμε δύο κλάσματα, χρησιμοποιούμε τους εξής κανόνες.

$$a \cdot \frac{\beta}{\gamma} = \frac{a\beta}{\gamma} \quad \text{και} \quad \frac{a}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{a\gamma}{\beta\delta}$$

Με τον ίδιο τρόπο πολλαπλασιάζουμε και μια ακέραια με μια ρητή παράσταση ή δύο ρητές παραστάσεις.

Για παράδειγμα, $3x \cdot \frac{5x^2}{2y} = \frac{3x \cdot 5x^2}{2y} = \frac{15x^3}{2y}$ και

$$\frac{x^2 - 1}{3x + 3} \cdot \frac{2x}{x - 1} = \frac{(x^2 - 1) \cdot 2x}{(3x + 3)(x - 1)} = \frac{2x(x-1)(x+1)}{3(x+1)(x-1)} = \frac{2x}{3}$$

Διαιρεση

Για να διαιρέσουμε δύο κλάσματα χρησιμοποιούμε τον παρακάτω κανόνα

$$\frac{a}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{a}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma} = \frac{a\delta}{\beta\gamma}$$

Με τον ίδιο τρόπο διαιρούμε και δύο ρητές παραστάσεις. Για παράδειγμα,

$$\frac{x}{x+1} : \frac{2x^2}{x^2-1} = \frac{x}{x+1} \cdot \frac{x^2-1}{2x^2} = \frac{x(x^2-1)}{(x+1) \cdot 2x^2} = \frac{x(x-1)(x+1)}{2x^2(x+1)} = \frac{x-1}{2x}$$

Σύνθετα κλάσματα

Το σύνθετο κλάσμα $\frac{\frac{a}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}}$, ως γνωστόν, εκφράζει το πηλίκο $\frac{a}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta}$ που είναι ίσο με

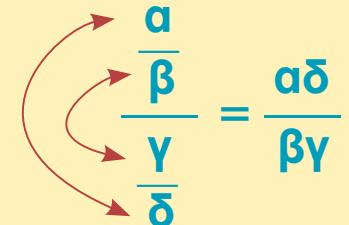
$\frac{a}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma}$ και επομένως ισχύει

$$\frac{\frac{a}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{a\delta}{\beta\gamma}$$

Τον ίδιο κανόνα χρησιμοποιούμε και στις ρητές παραστάσεις.

$$\text{Για παράδειγμα, } \frac{\frac{2a^2}{x}}{\frac{4a}{x^2}} = \frac{2a^2x^2}{4ax} = \frac{ax}{2}$$

Mνημονικός κανόνας

$$\frac{\frac{a}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{a\delta}{\beta\gamma}$$


ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1

Να βρεθούν τα γινόμενα: α) $(5x^2 + 5x) \cdot \frac{3x}{2x + 2}$ β) $\frac{x^2 - 2x + 1}{3x + 6} \cdot \frac{x^2 + 2x}{x - 1}$

Λύση

$$\text{α)} (5x^2 + 5x) \cdot \frac{3x}{2x + 2} = \frac{(5x^2 + 5x)3x}{2x + 2} = \frac{5x(x+1)3x}{2(x+1)} = \frac{15x^2}{2}$$

$$\text{β)} \frac{x^2 - 2x + 1}{3x + 6} \cdot \frac{x^2 + 2x}{x - 1} = \frac{(x^2 - 2x + 1)(x^2 + 2x)}{(3x + 6)(x - 1)} = \frac{(x-1)^2 x(x+2)}{3(x+2)(x-1)} = \frac{(x-1)x}{3} = \frac{x^2 - x}{3}$$

2

Να γίνουν οι πράξεις:

$$\text{α)} \frac{x^2 - a^2}{x} : \frac{x^3 - a^3}{x^2}$$

$$\text{β)} \frac{\frac{a^2 - x^2}{a^2}}{\frac{2a + 2x}{a}}$$

Λύση

$$\text{α)} \frac{x^2 - a^2}{x} : \frac{x^3 - a^3}{x^2} = \frac{x^2 - a^2}{x} \cdot \frac{x^2}{x^3 - a^3} = \frac{(x^2 - a^2)x^2}{x(x^3 - a^3)} = \frac{\cancel{x}(x-a)(x+a)x^2}{\cancel{x}(x-a)(x^2 + xa + a^2)} =$$

$$= \frac{(x+a)x}{x^2 + ax + a^2} = \frac{x^2 + ax}{x^2 + ax + a^2}$$

$$\text{β)} \frac{\frac{a^2 - x^2}{a^2}}{\frac{2a + 2x}{a}} = \frac{a(a^2 - x^2)}{a^2(2a + 2x)} = \frac{a(a-x)(a+x)}{2a^2(\cancel{a+x})} = \frac{a-x}{2a}$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

$$\alpha) x \cdot \frac{1}{y} = \frac{x}{xy}$$

Λ

$$\beta) x \cdot \frac{1}{y} = \frac{x}{y}$$

Σ

$$\gamma) 3x : \frac{2}{x} = \frac{3}{2}$$

Λ

$$\delta) 3x : \frac{2}{x} = \frac{3x^2}{2}$$

Σ

$$\epsilon) \frac{x-1}{y} \cdot \frac{5}{x-1} = \frac{5}{y}$$

Σ

$$\sigma) \frac{a}{x} \cdot \frac{x-2}{x} = \frac{ax-2}{x^2}$$

Λ

$$\zeta) \frac{a}{a^2+1} \cdot \frac{a^2+1}{a} = 0$$

Λ

$$\eta) \frac{a}{\beta+2} : \frac{a}{\beta+2} = 1$$

Σ

2 Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

$$\alpha) 3x \cdot \frac{2x}{y} = \frac{6x^2}{y}$$

$$\beta) \frac{x}{y} \cdot \frac{1}{xy} = \frac{1}{y^2}$$

$$\gamma) \frac{4x}{y} : \frac{4x}{\omega} = \frac{\omega}{y}$$

$$\delta) \frac{x+2}{x-1} \cdot \frac{x-1}{x+2} = 1$$

$$\varepsilon) \frac{x+2}{x-1} : \frac{x+2}{x-1} = 1$$

$$\sigma) \frac{x}{y} : \frac{x+2}{y} = \frac{x}{x+2}$$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να υπολογίσετε τα γινόμενα:

$$\text{α) } \frac{1}{x^2} \cdot \frac{x}{y}$$

$$\text{β) } \frac{9x}{4y} \cdot \frac{1}{3x}$$

$$\text{γ) } 12x^2 \cdot \frac{1}{9x}$$

$$\text{δ) } \frac{2\alpha^3}{3\beta^2} \cdot \frac{6\beta}{4\alpha^2}$$

$$\text{ε) } (-5\omega^2) \cdot \frac{3}{10\omega}$$

$$\text{στ) } \left(-\frac{3\alpha\beta}{2\beta}\right) \cdot \left(-\frac{4}{\alpha^2}\right)$$

$$\text{α) } \frac{1}{x^2} \cdot \frac{x}{y} = \frac{1 \cdot x}{x^2 \cdot y} = \frac{\cancel{x}}{\cancel{x^2} \cdot y} = \frac{1}{xy}$$

$$\text{β) } \frac{9x}{4y} \cdot \frac{1}{3x} = \frac{9x \cdot 1}{4y \cdot 3x} = \frac{\cancel{9} \cancel{x}}{\cancel{4} \cancel{3} \cancel{x} \cancel{y}} = \frac{3}{4y}$$

$$\text{γ) } 12x^2 \cdot \frac{1}{9x} = \frac{4 \cancel{12} \cancel{x} \cdot 1}{3 \cancel{9} \cancel{x}} = \frac{4x}{3}$$

$$\text{δ) } \frac{2\alpha^2}{3\beta^2} \cdot \frac{6\beta}{4\alpha^2} = \frac{\cancel{2} \cancel{\alpha^2} \cancel{\beta}}{\cancel{3} \cancel{\alpha^2} \cancel{\beta^2}} = \frac{1}{\beta}$$

$$\text{ε) } (-5\omega^2) \cdot \frac{3}{10\omega} = \frac{-15\omega^2}{2 \cancel{10} \cancel{\omega}} = \frac{-3\omega}{2}$$

$$\text{στ) } \left(-\frac{3\alpha\beta}{2\beta}\right) \cdot \left(-\frac{4}{\alpha^2}\right) = + \frac{6 \cancel{12} \cancel{\alpha}}{\cancel{2} \cancel{\alpha^2}} = \frac{6}{\alpha}$$

2

Na káneite tis διαιρέσεις:

$$\alpha) 8x : \frac{6}{x}$$

$$\beta) \frac{1}{y^2} : \left(-\frac{3}{y}\right)$$

$$\gamma) \left(-\frac{\alpha^2}{\beta^3}\right) : 3\alpha^2 \quad \delta) \left(-\frac{x^3}{2\omega}\right) : \left(-\frac{x^2}{4\omega^2}\right)$$

$$\alpha) 8x : \frac{6}{x} = \frac{8x}{\frac{6}{x}} = \frac{\cancel{8x}}{\cancel{6}} = \frac{4\cancel{8x}^2}{3\cancel{x}} = \frac{4x^2}{3}$$

$$\beta) \frac{1}{y^2} : \left(-\frac{3}{y}\right) = \frac{\frac{1}{y^2}}{-\frac{3}{y}} = -\frac{\cancel{y}^2}{3\cancel{y}^2} = -\frac{1}{3y}$$

$$\gamma) \left(-\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right) : 3\alpha^2 = \frac{-\frac{\alpha^2}{\beta^2}}{3\alpha^2} = -\frac{\cancel{\alpha}^2}{3\beta^2\cancel{\alpha}^2} = -\frac{1}{3\beta^2}$$

$$\delta) \left(-\frac{x^2}{2\omega}\right) : \left(-\frac{x^2}{4\omega^2}\right) = \frac{-\frac{x^2}{2\omega}}{-\frac{x^2}{4\omega^2}} = \frac{4\omega\cancel{x}^2}{2\cancel{x}^2\omega^2} = 2\omega$$

3

Na upoloγísete ta γinómeva:

$$\alpha) \frac{2x+6}{x^2} \cdot \frac{4x}{x+3}$$

$$\beta) \frac{y-5}{y+2} \cdot \frac{2+y}{5-y}$$

$$\gamma) \frac{x-\omega}{x^2\omega^3} \cdot \frac{x^3\omega^2}{x^2-\omega^2}$$

$$\delta) \frac{a^2-4}{a^2+a-6} \cdot \frac{a+3}{a^2+2a}$$

$$\varepsilon) \frac{x^2+x}{x^2-4} \cdot \frac{x^2+5x+6}{x^2+3x}$$

$$\sigma) \frac{4y^2-9}{4y^2-12y+9} \cdot \frac{y^2+3y}{2y^2+3y}$$

$$\alpha) \frac{2x+6}{x^2} \cdot \frac{4x}{x+3} = \frac{(2x+6) \cdot 4x}{x^2 \cdot (x+3)} = \frac{2(x+3) \cancel{4}}{\cancel{x} \cancel{(x+3)}} = \frac{8}{x}$$

$$\beta) \frac{y-5}{y+2} \cdot \frac{2+y}{5-y} = \frac{(y-5)(y+2)}{(y+2)[- (y-5)]} = \frac{\cancel{y-5}}{-\cancel{(y-5)}} = -1$$

$$\gamma) \frac{x-\omega}{x^2\omega^3} \cdot \frac{x^2\omega^2}{x^2-\omega^2} = \frac{(x-\omega) \cdot x^2\omega^2}{x^2\omega^3 \cdot (x^2-\omega^2)} = \frac{\cancel{(x-\omega)} \cdot \cancel{x^2}\cancel{\omega^2}}{\cancel{x^2}\cancel{\omega^3} \cancel{(x-\omega)}(x+\omega)} = \frac{1}{\omega}$$

δ , ε kai σ . Ektos iðns.

4

Να κάνετε τις διαιρέσεις:

$$\alpha) \frac{x+4}{5} : \frac{x+4}{15}$$

$$\beta) \frac{2y-1}{y+1} : \frac{1-2y}{1+y}$$

$$\gamma) \left(-\frac{\omega+2}{\omega}\right) : (\omega+2)$$

$$\delta) \frac{\alpha+1}{\beta^2} : \frac{(\alpha+1)^2}{\beta}$$

$$\varepsilon) \frac{x+y}{x^2-xy} : \frac{x^2+xy}{x-y}$$

$$\sigma) \frac{x^2-4}{x^3+8} : \frac{x-2}{x^2-2x+4}$$

$$\alpha) \frac{x+4}{5} : \frac{x+4}{15} = \frac{\cancel{x+4}}{\cancel{x+4}} = \frac{15 \cancel{(x+4)}}{5 \cancel{(x+4)}} = 3$$

$$\beta) \frac{2y-1}{y+1} : \frac{1-2y}{1+y} = \frac{\cancel{2y-1}}{\cancel{1-2y}} = \frac{(2y-1)(1+y)}{(1-2y)(1+y)} = \frac{-\cancel{(1-2y)}}{\cancel{1-2y}} = -1$$

$$\gamma) \left(-\frac{\omega+2}{\omega}\right) : (\omega+2) = -\frac{\cancel{\omega+2}}{\omega} = -\frac{\cancel{\omega+2}}{\omega \cancel{(\omega+2)}} = -\frac{1}{\omega}$$

$$\delta) \frac{\alpha+1}{\beta^2} : \frac{(\alpha+1)^2}{\beta} = \frac{\cancel{\alpha+1}}{\cancel{(\alpha+1)^2}} = \frac{\cancel{\beta} \cancel{(\alpha+1)}}{\cancel{\beta} \cancel{(\alpha+1)^2}} = \frac{1}{\beta(\alpha+1)}$$

$$\varepsilon) \frac{x+y}{x^2-xy} : \frac{x^2+xy}{x-y} = \frac{\frac{x+y}{x^2-xy}}{\frac{x^2+xy}{x-y}} = \frac{(x+y)(x-y)}{(x^2-xy)(x^2+xy)} = \frac{(x+y)\cancel{(x-y)}}{x \cancel{(x-y)} \times \cancel{(x+y)}} = \frac{1}{x^2}$$

στ) Εκτός ιδης

5

Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$\text{α) } \left(\frac{x-2}{x+1} \cdot \frac{4x+4}{x+2} \right) : \frac{8x-8}{x+2} \quad \text{β) } \frac{x+2}{x-1} : \left(\frac{2x+6}{x-1} \cdot \frac{x+2}{x+3} \right) \quad \text{γ) } \left(\frac{x+2}{x-1} : \frac{2x+6}{x-1} \right) \cdot \frac{x+2}{x+3}$$

$$\begin{aligned} \text{α) } & \left(\frac{x-2}{x+1} \cdot \frac{4x+4}{x+2} \right) : \frac{8x-8}{x+2} = \frac{(x-2)(4x+4)}{(x+1)(x+2)} : \frac{8x-8}{x+2} = \frac{(x-2) \cdot 4 \cdot (x+1)}{(x+1)(x+2)} : \frac{8(x-1)}{x+2} = \frac{\cancel{4}(x-2)}{\cancel{8}(x-1)} \\ & = \frac{\cancel{4}(x-2)(x+2)}{\cancel{4}\cancel{8}(x-1)(x+2)} = \frac{x-2}{4(x-1)}. \end{aligned}$$

$$\text{β) } \frac{x+2}{x-1} : \left(\frac{2x+6}{x-1} \cdot \frac{x+2}{x+3} \right) = \frac{x+2}{x-1} : \left(\frac{2(x+3)(x+2)}{(x-1)(x+3)} \right) = \frac{\frac{x+2}{x-1}}{\frac{2(x+2)}{x-1}} = \frac{(x+2)(x+1)}{(x+1)2(x+2)} = \frac{1}{2}$$

$$\text{γ) } \left(\frac{x+2}{x-1} : \frac{2x+6}{x-1} \right) \cdot \frac{x+2}{x+3} = \frac{\frac{x+2}{x-1}}{\frac{2x+6}{x-1}} \cdot \frac{x+2}{x+3} = \frac{(x+2)(x+1)}{(x+1)(2x+6)} \cdot \frac{x+2}{x+3} = \frac{x+2}{2(x+3)} \cdot \frac{x+2}{x+3} = \frac{(x+2)^2}{2(x+3)^2}$$

Ασκήσεις:

1) Να γίνουν οι πράξεις:

$$\frac{2\alpha - 2}{\alpha^2 - 3\alpha} \cdot \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 1} : \frac{\alpha^2 + \alpha}{\alpha^2 - 9} = \frac{3x}{x^2 - 1} \cdot \frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 - 6x} \cdot \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 2} =$$
$$\frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 + \alpha\beta} = \frac{2\alpha^2}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^2\beta - 25\beta}{\alpha^2 + 5\alpha} =$$
$$\frac{\alpha^2 - \alpha}{\alpha + \beta} = \frac{4\beta^2}{\alpha^2 - \alpha\beta}$$

Πρόσθεση - Αφαίρεση

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

1. Να κάνετε τις πράξεις: $\frac{7}{9} + \frac{19}{9} - \frac{11}{9}$, $\frac{3}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3}$.

2. Με ανάλογο τρόπο να κάνετε και τις παρακάτω πράξεις:

$$\frac{3x}{x-2} + \frac{2x-1}{x-2} - \frac{7+x}{x-2}, \quad \frac{3}{2a} + \frac{1}{6ab} - \frac{1}{3b}.$$

Για να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε ομώνυμα κλάσματα, χρησιμοποιούμε τους εξής κανόνες

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta} \quad \text{και} \quad \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\alpha - \gamma}{\beta}$$

Με τον ίδιο τρόπο προσθέτουμε ή αφαιρούμε και ρητές παραστάσεις που έχουν τον ίδιο παρονομαστή. Για παράδειγμα,

$$\begin{aligned} \frac{3x}{x-2} + \frac{2x-1}{x-2} - \frac{7+x}{x-2} &= \frac{3x + (2x-1) - (7+x)}{x-2} = \\ &= \frac{3x + 2x - 1 - 7 - x}{x-2} = \frac{4x - 8}{x-2} = \frac{4(x-2)}{x-2} = 4 \end{aligned}$$

Αν όμως οι ρητές παραστάσεις δεν έχουν τον ίδιο παρονομαστή, τότε βρίσκουμε το Ε.Κ.Π. των παρονομασών και τις μετατρέπουμε σε ρητές παραστάσεις με τον ίδιο παρονομαστή, όπως και στα αριθμητικά κλάσματα.

Για παράδειγμα, αν θέλουμε να υπολογίσουμε το άθροισμα $\frac{2}{3x^2 - 3x} + \frac{5}{6x} - \frac{2}{3x - 3}$ εργαζόμαστε ως εξής:

- Παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές.

$$3x^2 - 3x = 3x(x - 1) \text{ και } 3x - 3 = 3(x - 1)$$

- Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π. των παρονομασών.

$$\text{Ε.Κ.Π.} = 6x(x - 1)$$

- Μετατρέπουμε τα κλάσματα σε ομώνυμα.

$$\frac{2}{3x^2 - 3x} + \frac{5}{6x} - \frac{2}{3x - 3} = \underbrace{\frac{2}{3x(x-1)}}_{\text{E.K.P.}} + \underbrace{\frac{5}{6x}}_{\text{E.K.P.}} - \underbrace{\frac{2}{3(x-1)}}_{\text{E.K.P.}} =$$

- Εκτελούμε τις πράξεις και τις δυνατές απλοποιήσεις.

$$= \frac{4 + 5(x-1) - 4x}{6x(x-1)} = \frac{4 + 5x - 5 - 4x}{6x(x-1)} = \frac{x-1}{6x(x-1)} = \frac{1}{6x}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{5}{6} = \frac{2}{\alpha-\beta} - \frac{\alpha}{\alpha+\beta} - \frac{4\alpha}{\alpha^2-\beta^2} = \frac{\alpha}{\beta\gamma} - \frac{\beta}{\alpha\gamma} - \frac{\gamma}{\alpha\beta} = .$$

$$\frac{\frac{4}{2}}{3} + \frac{\frac{3}{3}}{4} - \frac{\frac{2}{2}}{6} = \frac{8+9-10}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{\alpha-\beta} - \frac{\alpha}{\alpha+\beta} - \frac{4\alpha}{\alpha^2-\beta^2} &= \frac{\cancel{\alpha+\beta}}{2} - \frac{\cancel{\alpha-\beta}}{\alpha+\beta} - \frac{\cancel{4\alpha}}{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)} = \frac{2(\alpha+\beta) - \alpha(\alpha+\beta) - 4\alpha}{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)} \\ &= \frac{\cancel{2\alpha} + 2\beta - \cancel{\alpha^2} - \alpha\beta - \cancel{4\alpha}}{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)} = \frac{-\cancel{2\alpha} + \cancel{2\beta} - \cancel{\alpha^2} - \cancel{\alpha\beta}}{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)} = \frac{2(\beta-\alpha) + \alpha(\beta-\alpha)}{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)} = \\ &= \frac{(\beta-\alpha)(2+\alpha)}{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)} = \frac{-(\cancel{\alpha-\beta})(2+\alpha)}{\cancel{(\alpha-\beta)}(\alpha+\beta)} = -\frac{2+\alpha}{\alpha+\beta}. \end{aligned}$$

$$\frac{\frac{\alpha}{\alpha}}{\beta\gamma} - \frac{\frac{\beta}{\beta}}{\alpha\gamma} - \frac{\frac{\gamma}{\gamma}}{\alpha\beta} = \frac{\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2}{\alpha\beta\gamma}$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

a) $\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x+1} = 1$

Σ

β) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{x+y}$

Λ

γ) $\frac{a+4}{a} - \frac{4}{a} = 1$

Σ

δ) $\frac{a+\beta}{a-\beta} + \frac{a+\beta}{\beta-a} = 0$

Σ

ε) $1 + \frac{x}{\omega} = \frac{1+x}{\omega}$

Λ

στ) $\frac{a}{x} - \frac{a+2}{x} = \frac{2}{x}$

Λ

2 Ένας μαθητής έγραψε τις παρακάτω ισότητες και ο καθηγητής του είπε ότι σε μία από τις δύο έκανε ένα λάθος. Μπορείτε να εντοπίσετε το λάθος αυτό;

α) $\frac{a}{a-\beta} + \frac{\beta}{\beta-a} = \frac{a}{a-\beta} - \frac{\beta}{a-\beta} = \frac{a-\beta}{a-\beta} = 1$

β) $\frac{3x+2}{x+1} - \frac{(2x-1)}{x+1} = \frac{3x+2-2x-1}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} = 1$

3 Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

α) $\frac{x}{x+6} - \frac{x}{\cancel{x+6}} = 0$

$\beta)$

$\frac{x}{x+6} + \frac{6}{\cancel{x+6}} = 1$

$\gamma)$

$\frac{x}{\cancel{x+1}} + \frac{x}{x+1} = \frac{2x}{x+1}$

δ) $\frac{6}{\cancel{x+2}} - \frac{5}{x+2} = \frac{1}{x+2}$

$\varepsilon)$

$\frac{2x-1}{x} + \frac{1}{\cancel{x}} = 2$

$\sigmaτ)$

$\frac{3x+8}{x} - \frac{8}{\cancel{x}} = 3$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1 Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha) \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

$$\beta) \frac{3}{x+1} - \frac{2}{x}$$

$$\gamma) \frac{1}{y^2} - \frac{1}{y}$$

$$\delta) \frac{1}{\omega^2} - \frac{2}{\omega^2 + 1}$$

$$\alpha) \frac{\frac{y}{1}}{\frac{1}{x}} + \frac{\frac{x}{1}}{\frac{1}{y}} = \frac{y+x}{xy}$$

$$\beta) \frac{\frac{x}{3}}{\frac{1}{x+1}} - \frac{\frac{x+1}{2}}{\frac{1}{x}} = \frac{3x - 2(x+1)}{x(x+1)} = \frac{3x - 2x - 2}{x(x+1)} = \frac{x-2}{x(x+1)}$$

$$\gamma) \frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{y^2}} - \frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{y}} = \frac{1-y}{y^2}$$

$$\delta) \frac{\frac{1}{\omega^2+1}}{\frac{1}{\omega^2}} - \frac{\frac{2}{\omega^2}}{\frac{1}{\omega^2+1}} = \frac{\omega^2+1 - 2\omega^2}{\omega^2(\omega^2+1)} = \frac{1-\omega^2}{\omega^2(\omega^2+1)}$$

2

Na upoloygiseite tis paraostaseis:

$$\alpha) \frac{2x}{2x-6} - \frac{3}{x-3}$$

$$\beta) \frac{y-6}{y^2+2y} - \frac{4}{y+2}$$

$$\gamma) \frac{3\omega+6}{\omega^2-4} - \frac{4}{2\omega-4}$$

$$\delta) \frac{1}{2x+12} + \frac{x}{36-x^2}$$

$$\varepsilon) \frac{9x}{x^2-x\omega} + \frac{3\omega}{\omega^2-x\omega}$$

$$\sigma) \frac{a+7}{a^2+4a+3} - \frac{3}{a+1}$$

$$\alpha) \frac{2x}{2x-6} - \frac{3}{x-3} = \frac{\cancel{2x}}{2(x-3)} - \frac{\cancel{3}}{x-3} = \frac{2x-6}{2(x-3)} = \frac{\cancel{2(x-3)}}{\cancel{2(x-3)}} = 1$$

$$\beta) \frac{y-6}{y^2+2y} - \frac{4}{y+2} = \frac{\cancel{y-6}}{y(y+2)} - \frac{\cancel{4}}{y+2} = \frac{(y+2)(y-6)-4y}{y(y+2)} = \frac{y^2-6y+2y-12-4y}{y(y+2)}$$

$$= \frac{y^2-8y-12}{y(y+2)}$$

$$\gamma) \frac{3\omega+6}{\omega^2-4} - \frac{4}{2\omega-4} = \frac{\cancel{3\omega+6}}{(\omega-2)(\omega+2)} - \frac{\cancel{4}}{2(\omega-2)} = \frac{2(3\omega+6)-4(\omega+2)}{2(\omega-2)(\omega+2)} = \frac{2 \cdot 3(\omega+2)-4(\omega+2)}{2(\omega-2)(\omega+2)} =$$

$$= \frac{\cancel{(\omega+2)}(6-4)}{2(\omega-2)\cancel{(\omega+2)}} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}(\omega-2)} = \frac{1}{\omega-2}$$

2

Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$\text{a) } \frac{2x}{2x-6} - \frac{3}{x-3}$$

$$\text{β) } \frac{y-6}{y^2+2y} - \frac{4}{y+2}$$

$$\text{γ) } \frac{3\omega+6}{\omega^2-4} - \frac{4}{2\omega-4}$$

$$\text{δ) } \frac{1}{2x+12} + \frac{x}{36-x^2}$$

$$\text{ε) } \frac{9x}{x^2-x\omega} + \frac{3\omega}{\omega^2-x\omega}$$

$$\text{στ) } \frac{a+7}{a^2+4a+3} - \frac{3}{a+1}$$

$$\delta) \quad \frac{1}{2x+12} + \frac{x}{36-x^2} = \frac{\cancel{6-x}}{\cancel{2}(x+6)} + \frac{\cancel{2}}{\cancel{x}(6-x)(6+x)} = \frac{6-x+2x}{2(6-x)(6+x)} = \frac{\cancel{6+x}}{2(6-x)\cancel{(6+x)}} = \frac{1}{2(6-x)}$$

$$\varepsilon) \quad \frac{9x}{x^2-x\omega} + \frac{3\omega}{\omega^2-x\omega} = \frac{9x}{x(x-\omega)} + \frac{3\omega}{\omega(\omega-x)} = \frac{\cancel{\omega}}{\cancel{x}(x-\omega)} - \frac{\cancel{x}}{\omega(x-\omega)} = \frac{9\omega x - 3\omega x}{\omega x(x-\omega)}$$

$$= \frac{\cancel{6\omega x}}{\cancel{\omega x}(x-\omega)} = \frac{6}{x-\omega}$$

στ) Εκτός όλης.

3

Να απλοποιήσετε τα κλάσματα:

$$\alpha) \frac{x - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}}$$

$$\beta) \frac{y - 2 + \frac{1}{y}}{y - \frac{1}{y}}$$

$$\gamma) \frac{\omega + 1 + \frac{1}{\omega}}{1 - \frac{1}{\omega^3}}$$

$$\delta) \frac{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}}{\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta}}$$

$$\alpha) \frac{x - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{\frac{x^2 - 1}{x}}{\frac{x + 1}{x}} = \frac{x(x^2 - 1)}{x(x + 1)} = \cancel{x} \frac{(x-1)(x+1)}{\cancel{x}(x+1)} = x - 1$$

$$\beta) \frac{y - 2 + \frac{1}{y}}{y - \frac{1}{y}} = \frac{\frac{y^2 - 2y + 1}{y}}{\frac{y^2 - 1}{y}} = \frac{\frac{(y-1)^2}{y}}{\frac{(y-1)(y+1)}{y}} = \cancel{y} \frac{(y-1)^2}{\cancel{y}(y-1)(y+1)} = \frac{y-1}{y+1}$$

$$\gamma) \frac{\omega + 1 + \frac{1}{\omega}}{1 - \frac{1}{\omega^3}} = \frac{\frac{\omega^2 + \omega + 1}{\omega}}{\frac{\omega^3 - 1}{\omega^3}} = \frac{\cancel{\omega}^2 (\omega^2 + \omega + 1)}{\cancel{\omega} (\omega^3 - 1)} = \frac{\omega^2 (\omega^2 + \omega + 1)}{\omega^3 - 1} \quad \text{έχει του συνέχειας}$$

αλλα εινου εκλογη ιδης.

$$\delta) \frac{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}}{\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\frac{\beta - \alpha}{\alpha \beta}}{\frac{\beta^2 - \alpha^2}{\alpha \beta}} = \frac{\cancel{\alpha}(\beta - \alpha)}{\cancel{\alpha} \cancel{\beta} (\beta^2 - \alpha^2)} = \frac{\cancel{(\beta - \alpha)}}{\cancel{(\beta - \alpha)} (\beta + \alpha)} = \frac{1}{\beta + \alpha}$$

4

Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$\text{a) } \frac{x-2}{x} + \frac{4}{x-2} - \frac{8}{x^2-2x}$$

$$\text{β) } \frac{3}{x+2y} - \frac{2}{x-2y} + \frac{2x+16y}{x^2-4y^2}$$

$$\gamma) \frac{y^2-6}{y^2-5y+6} - \frac{2}{y-2} + \frac{3}{y-3}$$

$$\delta) \frac{x^2}{x-y} + \frac{y^2}{x+y} - \frac{2xy^2}{x^2-y^2}$$

$$\text{a) } \frac{x-2}{x} + \frac{4}{x-2} - \frac{8}{x^2-2x} = \frac{\cancel{x-2}}{\cancel{x}} + \frac{x}{\cancel{x-2}} - \frac{8}{x(x-2)} = \frac{(x-2)^2 + 4x - 8}{x(x-2)} =$$

$$= \frac{x^2 - 4x + 4 + 4x - 8}{x(x-2)} = \frac{x^2 - 4}{x(x-2)} = \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x}\cancel{(x-2)}} = \frac{x+2}{x}$$

$$\text{β) } \frac{3}{x+2y} - \frac{2}{x-2y} + \frac{2x+16y}{x^2-4y^2} = \frac{\cancel{x-2y}}{\cancel{x+2y}} - \frac{x+2y}{\cancel{x-2y}} + \frac{1}{\frac{2(x+8y)}{(x-2y)(x+2y)}}$$

$$= \frac{3(x-2y) - 2(x+2y) + 2(x+8y)}{(x-2y)(x+2y)} = \frac{\cancel{3x-6y} \cancel{-2x-4y} \cancel{+2x+16y}}{(x-2y)(x+2y)} =$$

$$= \frac{3x + 6y}{(x-2y)(x+2y)} = \frac{3\underline{(x+2y)}}{(x-2y)\underline{(x+2y)}} = \frac{3}{x-2y}$$

4

Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$\text{a) } \frac{x-2}{x} + \frac{4}{x-2} - \frac{8}{x^2-2x}$$

$$\text{β) } \frac{3}{x+2y} - \frac{2}{x-2y} + \frac{2x+16y}{x^2-4y^2}$$

$$\gamma) \frac{y^2-6}{y^2-5y+6} - \frac{2}{y-2} + \frac{3}{y-3}$$

$$\delta) \frac{x^2}{x-y} + \frac{y^2}{x+y} - \frac{2xy^2}{x^2-y^2}$$

γ) Εκτός υλης.

$$\begin{aligned}
 \text{ε)} \quad & \frac{x^2}{x-y} + \frac{y^2}{x+y} - \frac{2xy^2}{x^2-y^2} = \frac{\overbrace{x+y}^{x^2}}{x-y} + \frac{\overbrace{x-y}^{y^2}}{x+y} - \frac{1}{\cancel{(x-y)(x+y)}} = \frac{x^2(x+y) + y^2(x-y) - 2xy^2}{(x-y)(x+y)} \\
 & = \frac{x^3 + x^2y + y^2x - y^3 - 2xy^2}{(x-y)(x+y)} = \frac{\widehat{x^3} + \widehat{x^2y} - \widehat{xy^2} - \widehat{y^3}}{(x-y)(x+y)} = \\
 & = \frac{x^2(x+y) - y^2(x+y)}{(x-y)(x+y)} = \frac{\cancel{(x+y)}(x^2-y^2)}{\cancel{(x-y)}\cancel{(x+y)}} = \frac{\cancel{(x+y)}(x-y)}{\cancel{x-y}}
 \end{aligned}$$

5

Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha) \left(\frac{x+3}{2x+1} - \frac{x}{2x-1} \right) \left(1 + \frac{1}{4x-3} \right)$$

$$\beta) \left[\frac{x+3}{x^2-1} + \frac{x-3}{(x-1)^2} \right] : \frac{x^2-3}{(x-1)^2}$$

$$\gamma) \left(1 - \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \right) \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} \right)$$

$$\delta) \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} - 1 \right) : \left(\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha} \right)$$

$$\begin{aligned}
 \alpha) & \left(\frac{2x-1}{x+3} - \frac{2x+1}{2x-1} \right) \left(1 + \frac{1}{4x-3} \right) = \frac{(2x-1)(x+3) - x(2x+1)}{(2x+1)(2x-1)} \cdot \frac{4x-3 + 1}{4x-3} \\
 & = \frac{\cancel{2x^2} + 6x - x - 3 - \cancel{2x^2} - x}{(2x+1)(2x-1)} \cdot \frac{4x-2}{4x-3} = \frac{\cancel{4x-3}}{(2x+1)(2x-1)} \cdot \frac{\cancel{4x-2}}{\cancel{4x-3}} \\
 & = \frac{2(\cancel{2x-1})}{(2x+1)\cancel{(2x-1)}} = \frac{2}{2x+1}
 \end{aligned}$$

5

Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha) \left(\frac{x+3}{2x+1} - \frac{x}{2x-1} \right) \left(1 + \frac{1}{4x-3} \right)$$

$$\beta) \left[\frac{x+3}{x^2-1} + \frac{x-3}{(x-1)^2} \right] : \frac{x^2-3}{(x-1)^2}$$

$$\gamma) \left(1 - \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \right) \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} \right)$$

$$\delta) \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} - 1 \right) : \left(\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha} \right)$$

$$\begin{aligned}
 \beta) & \left[\frac{x+3}{x^2-1} + \frac{x-3}{(x-1)^2} \right] : \frac{x^2-3}{(x-1)^2} = \left[\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)(x+1)}} + \frac{\cancel{x+1}}{\cancel{(x-1)^2}} \right] : \frac{x^2-3}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)(x+3) - (x+1)(x-3)}{(x-1)^2(x+1)} : \frac{x^2-3}{(x-1)^2} \\
 &= \frac{x^2+3x-x-3 - (x^2-3x+x-3)}{(x-1)^2(x+1)} : \frac{x^2-3}{(x-1)^2} = \frac{\cancel{x^2+3x-x-3} - \cancel{x^2-3x+x-3}}{(x-1)^2(x+1)} : \frac{\cancel{x^2-3}}{(x-1)^2} \\
 &= \frac{4x}{(x-1)^2(x+1)} : \frac{\cancel{x^2-3}}{(x-1)^2} = \frac{\frac{4x}{(x-1)^2(x+1)}}{\frac{x^2-3}{(x-1)^2}} = \frac{4x \cancel{(x-1)^2}}{(x-1)^2(x+1)(x^2-3)} = \frac{4x}{(x+1)(x^2-3)}
 \end{aligned}$$

5

Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha) \left(\frac{x+3}{2x+1} - \frac{x}{2x-1} \right) \left(1 + \frac{1}{4x-3} \right)$$

$$\beta) \left[\frac{x+3}{x^2-1} + \frac{x-3}{(x-1)^2} \right] : \frac{x^2-3}{(x-1)^2}$$

$$\gamma) \left(1 - \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \right) \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} \right)$$

$$\delta) \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} - 1 \right) : \left(\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha} \right)$$

$$\gamma) \left(1 - \frac{1}{\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2}} \right) \left(\frac{\alpha - \beta}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha - \beta} \right) = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \cdot \frac{\alpha(\alpha - \beta) + \beta(\alpha + \beta)}{\beta(\alpha - \beta)} = \frac{(\alpha - \beta)^2}{\alpha^2 + \beta^2} \cdot \frac{\cancel{\alpha^2 - \alpha\beta + \alpha\beta + \beta^2}}{\beta(\alpha - \beta)} =$$

$$= \frac{(\alpha - \beta)^2}{\cancel{\alpha^2 + \beta^2}} \cdot \frac{\cancel{\alpha^2 + \beta^2}}{\cancel{\beta(\alpha - \beta)}} = \frac{\alpha - \beta}{\beta}$$

$$\delta) \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} - 1 \right) : \left(\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha} \right) = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta}{\alpha\beta} : \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha\beta} = \frac{\frac{\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta}{\alpha\beta}}{\frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha\beta}} = \frac{(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta)\cancel{\alpha\beta}}{(\alpha^3 + \beta^3)\cancel{\alpha\beta}} =$$

$$= \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta}{\alpha^3 + \beta^3}$$

Ασκήσεις:

1) Να γίνουν οι πράξεις:

$$\frac{3}{2\alpha+2} - \frac{2}{3\alpha-3} + \frac{5\alpha+3}{6\alpha^2-6} = \frac{\alpha-\beta}{\alpha\beta} + \frac{\beta-\gamma}{\beta\gamma} + \frac{\gamma-\alpha}{\alpha\gamma} =$$