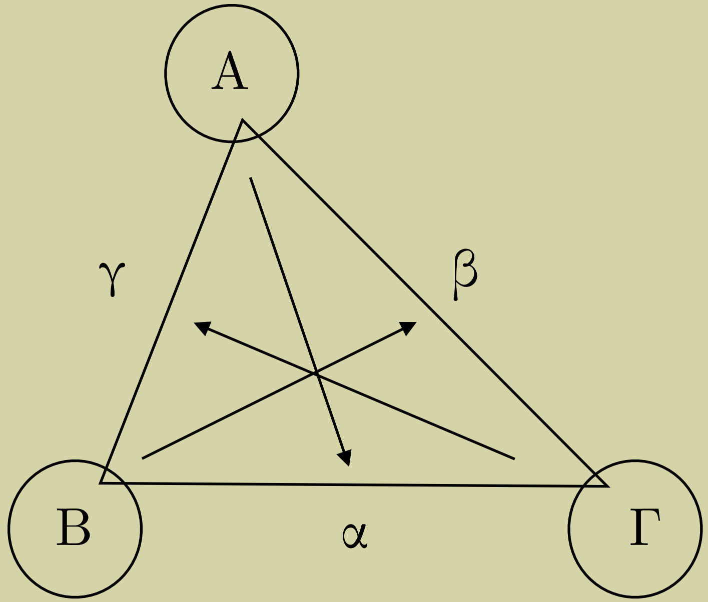
Μαθηματικά Γ' Γυμνασίου

Ισότητα Τριγώνων

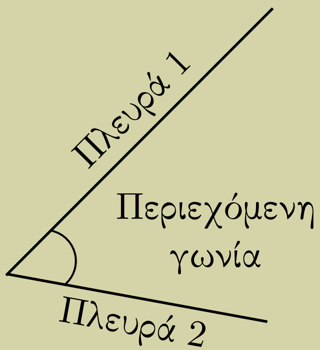
Κύρια και δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου

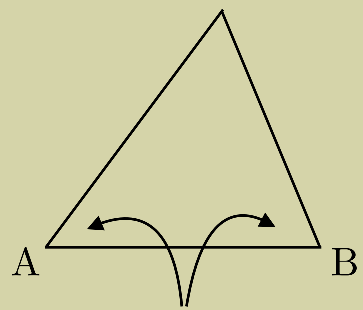


Σε κάθε τρίγωνο οι πλευρές και οι γωνίες του ονομάζονται **κύρια στοιχεία** του τριγώνου. Οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις γωνίες $\hat{A}, \hat{B}, \hat{\Gamma}$ συμβολίζονται με α, β και γ αντίστοιχα.

Σε κάθε τρίγωνο ισχύει ότι

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o$$



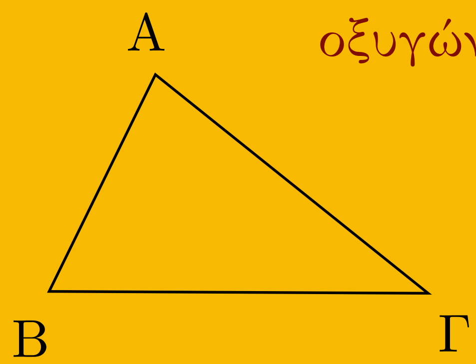


Η γωνία του τριγώνου που βρίσκεται μεταξύ δύο πλευρών λέγεται **περιεχόμενη**.

Οι γωνίες του τριγώνου που έχουν κορυφές στα άκρα μία πλευράς λέγονται **προσκείμενες** στην πλευρά αυτή.

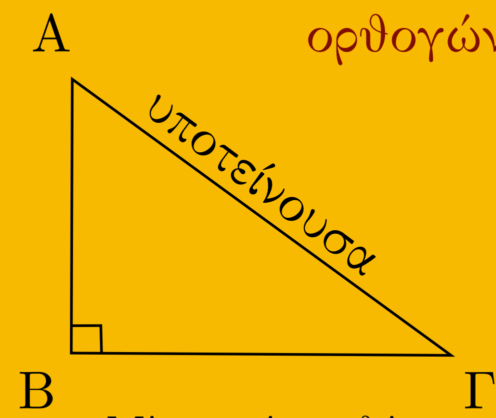
Είδη τριγώνων

οξυγώνιο



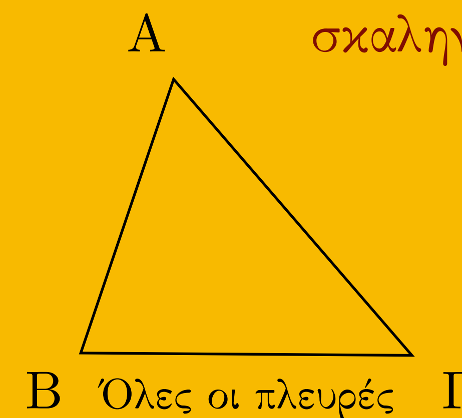
Όλες οι γωνίες οξείες

ορθογώνιο



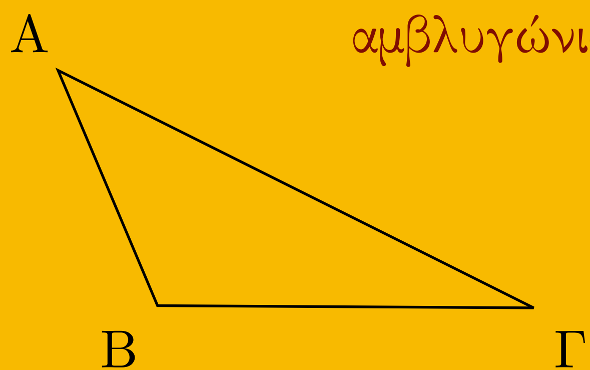
Μία γωνία ορθή

σκαληνό



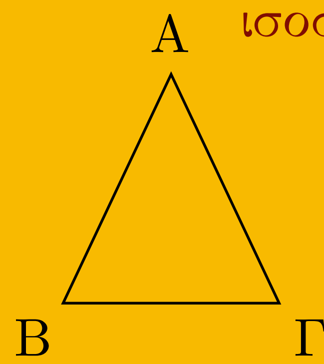
Όλες οι πλευρές άνισες

αμβλυγώνιο



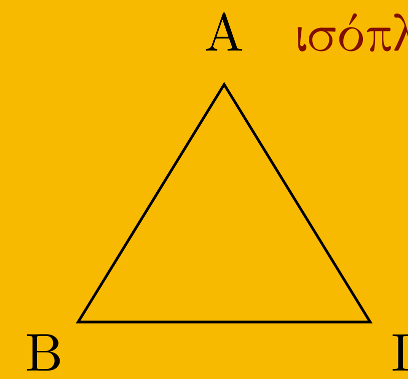
Μία γωνία αμβλεία

ισοσκελές



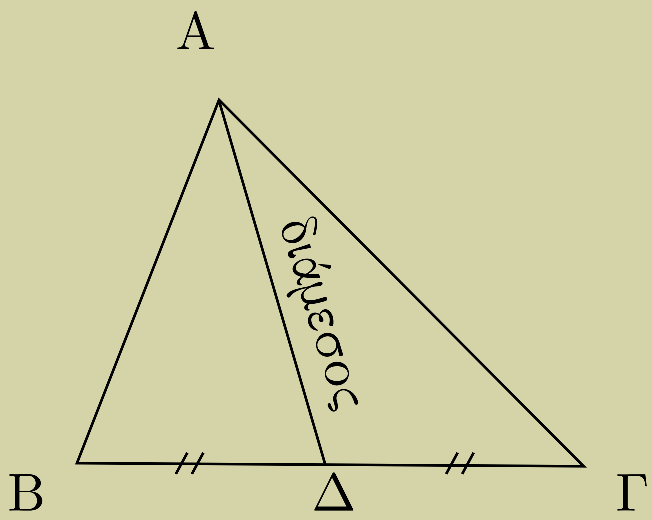
Δύο πλευρές ίσες

ισόπλευρο

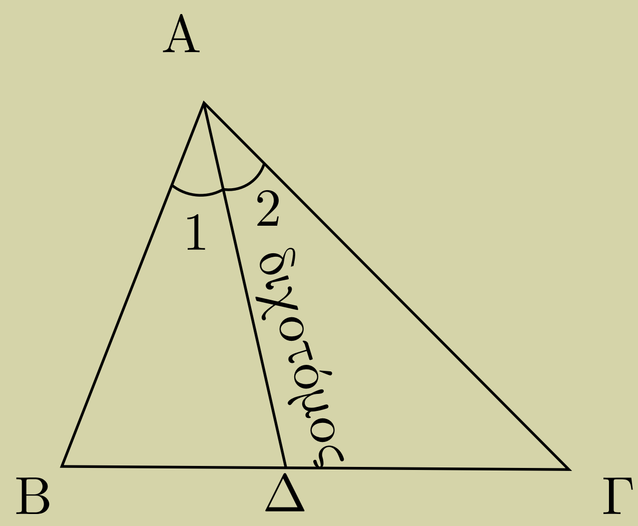


Όλες οι πλευρές ίσες

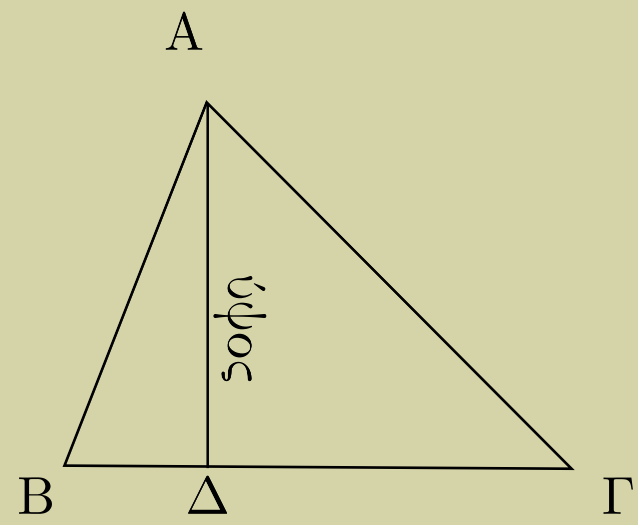
Δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου



Διάμεσος ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μία κορυφή του τριγώνου με το μέσο της απέναντι πλευράς.

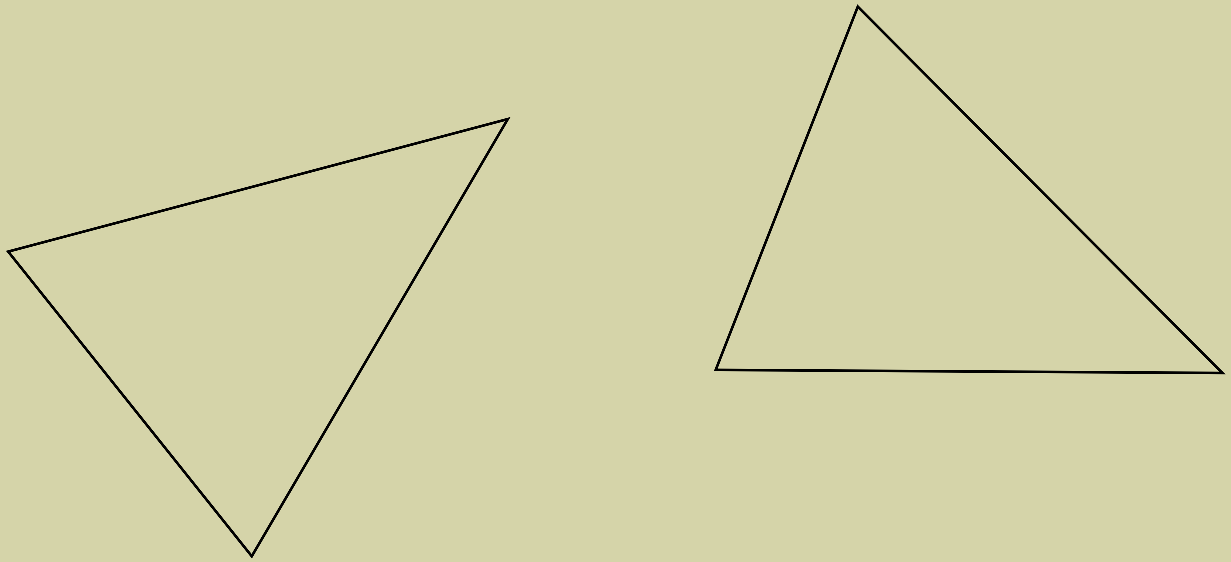


Διχοτόμος ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που φέρουμε από μία κορυφή, χωρίζει τη γωνία σε δύο ίσες γωνίες και καταλήγει στην απέναντι πλευρά.



Ύψος ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που φέρουμε από μία κορυφή, είναι κάθετο στην ευθεία της απέναντι πλευράς και καταλήγει στην ευθεία αυτή.

Ίσα τρίγωνα



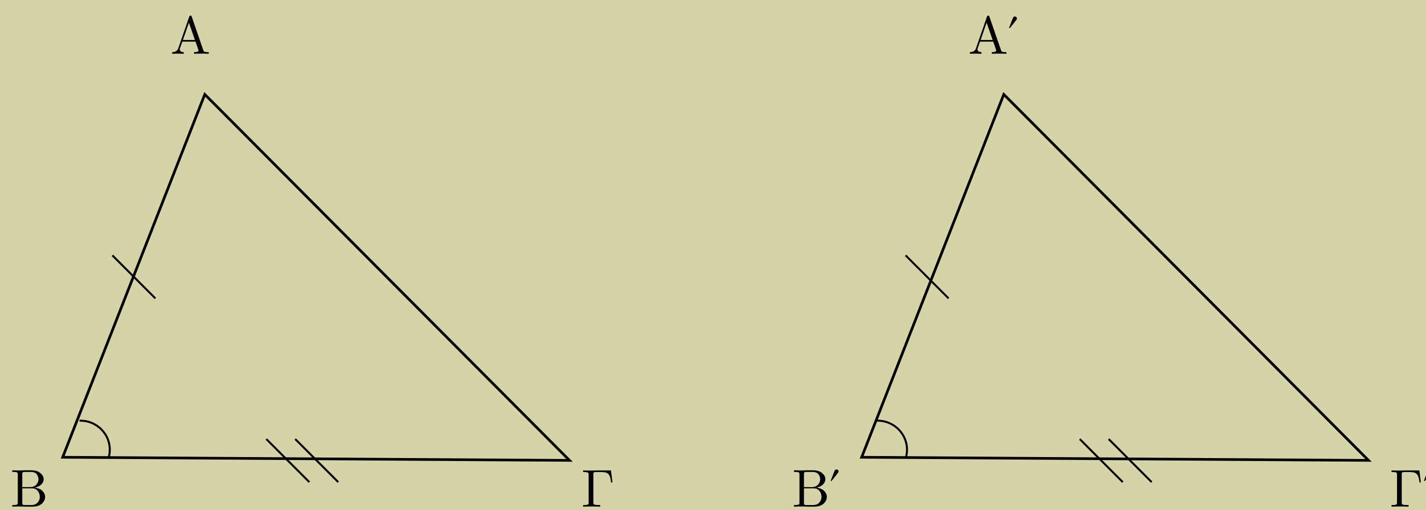
Δύο τρίγωνα είναι ίσα $\Leftrightarrow$ Οι πλευρές και οι ανατίστοιχες γωνίες ίσες

Μας ενδιαφέρει πότε δύο τρίγωνα είναι ίσα χωρίς να πρέπει να αποδείξουμε ότι όλες οι πλευρές και οι αντίστοιχες γωνίες τους είναι ίσες. Για το λόγο αυτό υπάρχουν κάποια **κριτήρια** με τα οποία αποδεικνύουμε αυτό που θέλουμε.

1ο κριτήριο ισότητας (ΠΓΠ)

1ο κριτήριο ισότητας (ΠΓΠ)

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία τους ίση, τότε είναι ίσα.

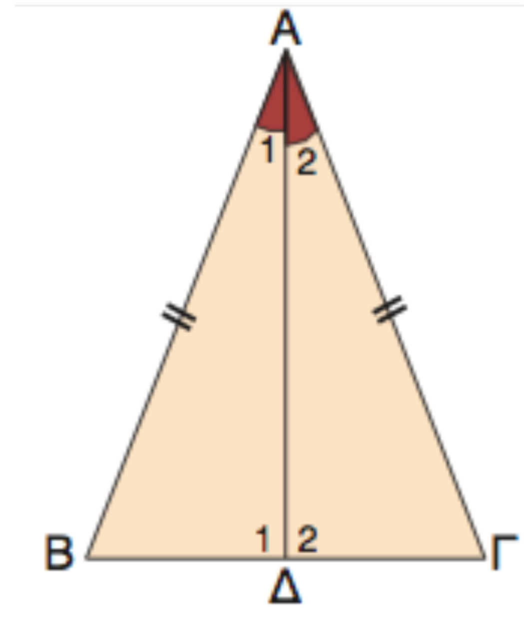


1 **Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) φέρουμε τη διχοτόμο ΑΔ.**
α) Να συγκριθούν τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ.
β) Να αποδειχθεί ότι $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ και ότι η διχοτόμος ΑΔ είναι διάμεσος και ύψος.

α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΔΓ και παρατηρούμε ότι έχουν:

- ΑΔ = ΑΔ, κοινή πλευρά
- ΑΒ = ΑΓ από την υπόθεση
- $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$, αφού ΑΔ διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$.

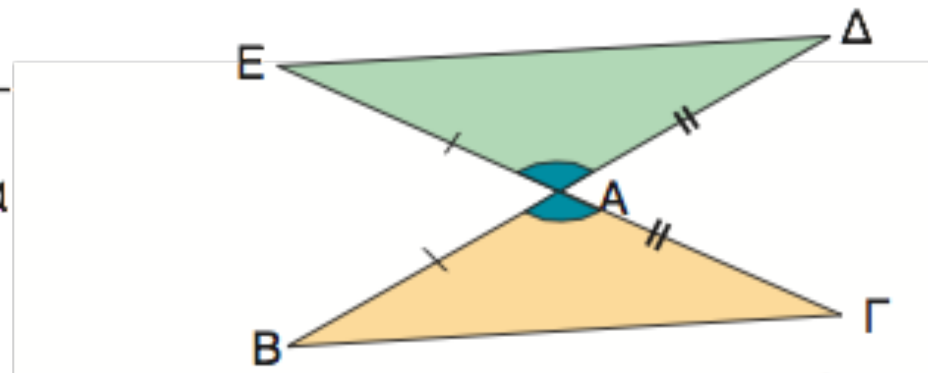
Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία τους ίση.



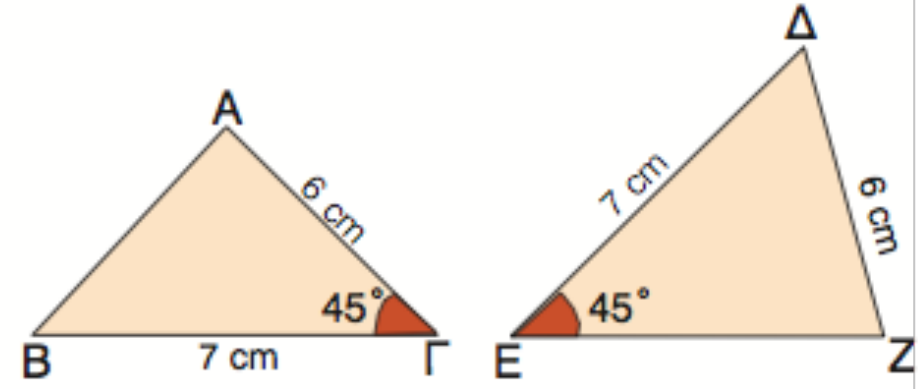
β) Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ είναι ίσα, θα έχουν όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, οπότε $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$, ΒΔ = ΔΓ και $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Delta}_2$.
Αφού είναι $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Delta}_2$ και $\widehat{\Delta}_1 + \widehat{\Delta}_2 = 180°$, θα έχουμε $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Delta}_2 = 90°$, οπότε η διχοτόμος ΑΔ είναι και ύψος. Η διχοτόμος ΑΔ είναι και διάμεσος, αφού ΒΔ = ΔΓ.
Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο:
α) Οι γωνίες της βάσης του είναι ίσες.
β) Η διχοτόμος, το ύψος και η διάμεσος που φέρουμε από την κορυφή προς τη βάση του συμπίπτουν.

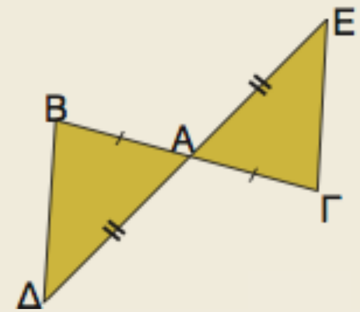
1 Να εξηγήσετε γιατί είναι ίσα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΕΔ του διπλανού σχήματος και να συμπληρώσετε τις ισότητες
$\hat{B} = \ldots\ldots$, $\hat{\Gamma} = \ldots\ldots$ και $B\Gamma = \ldots\ldots$.



2 Να εξηγήσετε γιατί δεν είναι ίσα τα τρίγωνα του διπλανού σχήματος, αν και έχουν δύο πλευρές ίσες και μια γωνία ίση.



1 Στο διπλανό σχήμα είναι ΑΒ = ΑΓ και ΑΔ = ΑΕ.
Να αποδείξετε ότι ΒΔ = ΓΕ.



Αρκεί να δείξουμε ότι τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{\text{ΑΒΔ}}$ και $\overset{\triangle}{\text{ΑΓΕ}}$ είναι ίσα

(τότε θα έχουν ίσες πλευρές και άρα θα έχουμε δείξει αυτό που θέλει!)

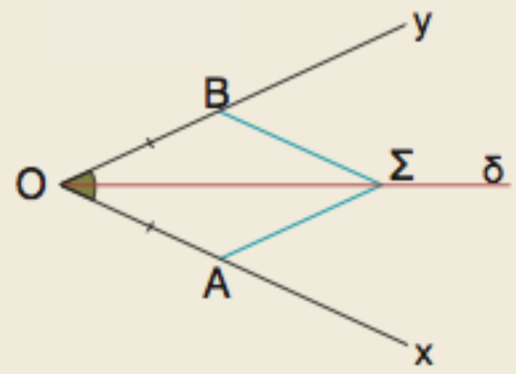
Έχουμε $\left.\begin{array}{l} ΑΒ = ΑΓ \\ ΑΔ = ΑΕ \end{array}\right\}$ από υπόθεση.

επίσης $Β\hat{Α}Δ = Γ\hat{Α}Ε$ κατά κορυφήν

$\Rightarrow$ Απο κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα θα είναι ίσα

συνεπώς $\boxed{ΒΔ = ΓΕ}$

2 Στο διπλανό σχήμα η Οδ είναι διχοτόμος της γωνίας $x\hat{O}y$. Αν ΟΑ = ΟΒ και Σ τυχαίο σημείο της διχοτόμου, να αποδείξετε ότι ΣΑ = ΣΒ.



Θα συγκρίνουμε τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{OB\Sigma}$, $\overset{\triangle}{OA\Sigma}$. Έχουμε

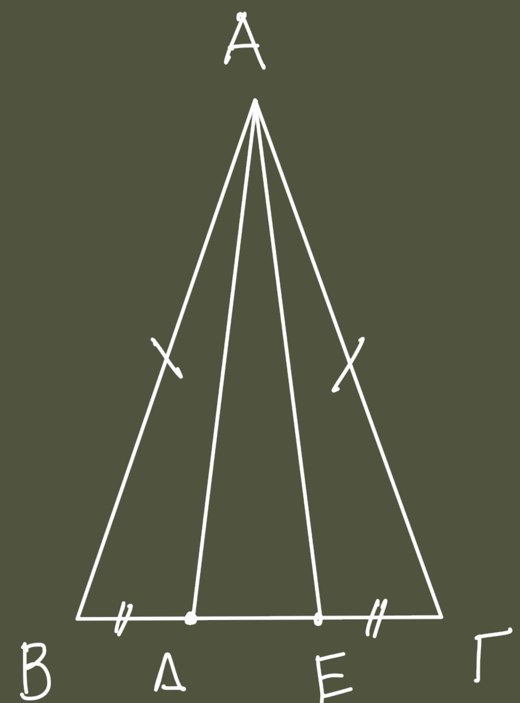
$OA = OB$ (υπόθεση)

$O\Sigma$ κοινή

$\Sigma\hat{O}B = \Sigma\hat{O}A$ αφού Οδ διχοτόμος

άρα $\overset{\triangle}{OB\Sigma} = \overset{\triangle}{OA\Sigma}$ κι έτσι $\boxed{\Sigma A = \Sigma B}$

3 Στη βάση ΒΓ ενός ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ να πάρετε σημεία Δ, Ε, ώστε ΒΔ = ΓΕ. Να αποδείξετε ότι ΑΔ = ΑΕ.



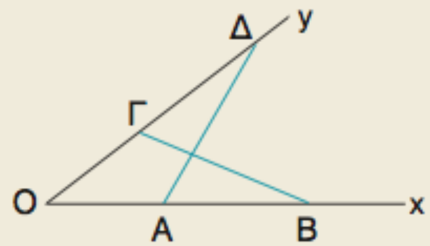
Θα συγκρίνουμε τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{\text{ΑΔΒ}}$ και $\overset{\triangle}{\text{ΑΕΓ}}$.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{ΑΒ} = \text{ΑΓ} & (\overset{\triangle}{\text{ΑΒΓ}} \text{ ισοσκελές}) \\ \text{ΒΔ} = \text{ΕΓ} & (\text{υπόθεση}) \\ \hat{\text{Β}} = \hat{\text{Γ}} & (\overset{\triangle}{\text{ΑΒΓ}} \text{ ισοσκελές}) \end{array}\right\}$$

Απο 1ο κριτήριο είναι ίσα, άρα

$\boxed{\text{ΑΔ} = \text{ΑΕ}}$

4 Στο διπλανό σχήμα είναι ΟΑ = ΟΓ και ΟΒ = ΟΔ.
Να αποδείξετε ότι ΒΓ = ΑΔ.



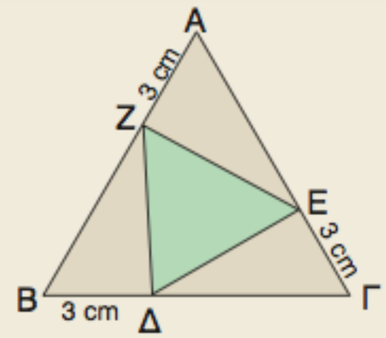
Συγκρίνουμε τα $\overset{\triangle}{ΟΓΒ}$, $\overset{\triangle}{ΟΑΔ}$:

$$\left.\begin{array}{l} ΟΑ = ΟΓ \text{ (υπόθεση)} \\ ΟΒ = ΟΔ \text{ (-‖-)} \\ \hat{Ο} \text{ κοινή} \end{array}\right\}$$

Από 1ο κριτήριο είναι ίσα, άρα

$$\boxed{ΒΓ = ΑΔ}$$

5 Κάθε πλευρά του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ είναι 8 cm. Αν είναι ΑΖ = ΒΔ = ΓΕ = 3 cm, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ισόπλευρο.



Εφόσον είναι ισόπλευρο, κάθε γωνία του θα είναι $60°$.

Επίσης $AB = 8$ άρα $BZ = 8-3 = 5$ άρα και $\Delta\Gamma = 5 = AE$

Οπότε $BZ = AE = \Delta\Gamma$ και

$B\Delta = E\Gamma = AZ$

Σύμφωνα με το 1ο κριτήριο τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{ZB\Delta} = \overset{\triangle}{\Delta E\Gamma} = \overset{\triangle}{EZA}$

Επομένως $\Delta Z = \Delta E = ZE$. οπότε το τρίγωνο $\overset{\triangle}{\Delta ZE}$ είναι ισόπλευρο.

Ασκήσεις:

1) Να δείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ισοσκελούς τριγώνου σχηματίζουν ισοσκελές τρίγωνο.

2) Να λύσετε την άσκηση 6 σελίδας 195