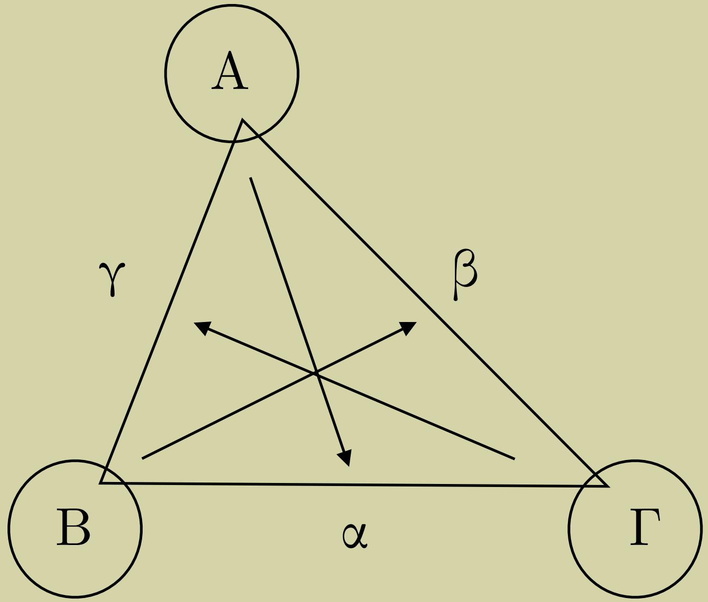
Μαθηματικά Γ’ Γυμνασίου

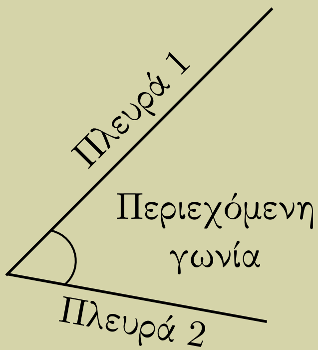
Ισότητα Τριγώνων

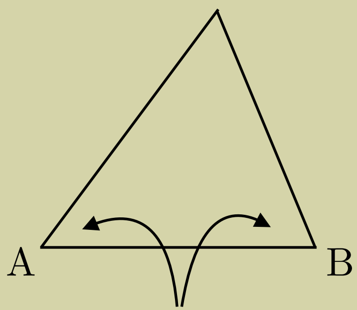
Κύρια και δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου



Σε κάθε τρίγωνο οι πλευρές και οι γωνίες του ονομάζονται **κύρια στοιχεία** του τριγώνου. Οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις γωνίες $\hat{A}, \hat{B}, \hat{\Gamma}$ συμβολίζονται με α, β και γ αντίστοιχα.

> Σε κάθε τρίγωνο ισχύει ότι
>
> $$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^o$$



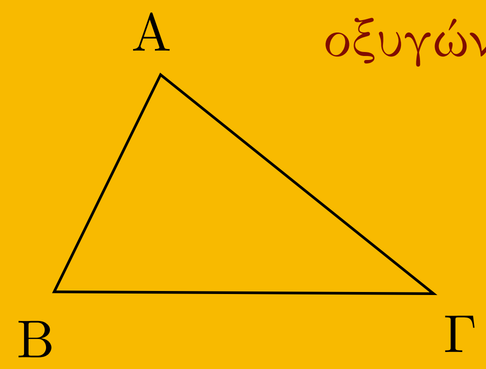


Η γωνία του τριγώνου που βρίσκεται μεταξύ δύο πλευρών λέγεται **περιεχόμενη**.

Οι γωνίες του τριγώνου που έχουν κορυφές στα άκρα μία πλευράς λέγονται **προσκείμενες** στην πλευρά αυτή.

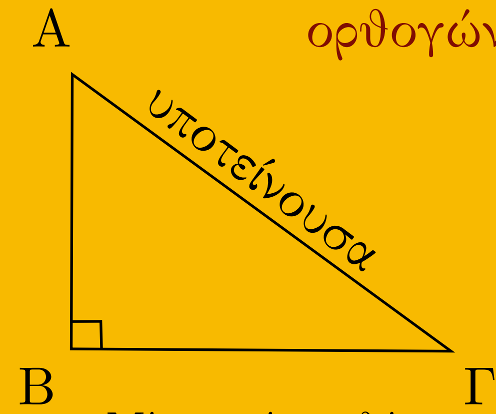
Είδη τριγώνων

οξυγώνιο



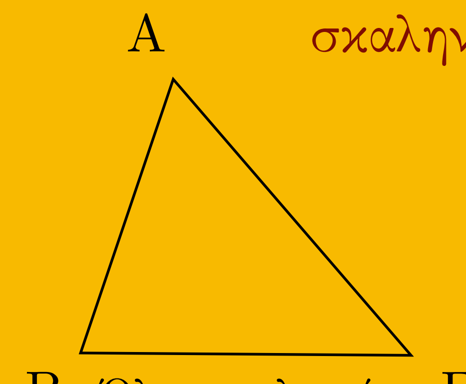
Όλες οι γωνίες οξείες

ορθογώνιο



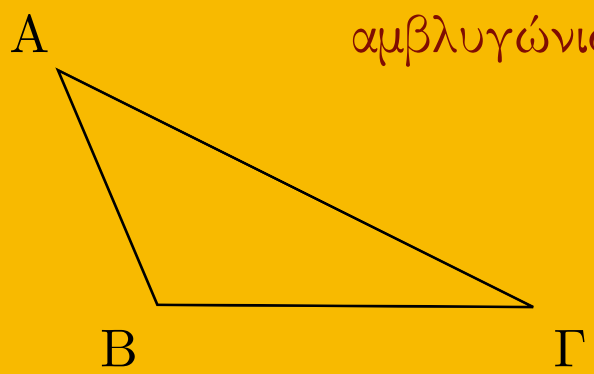
Μία γωνία ορθή

σκαληνό



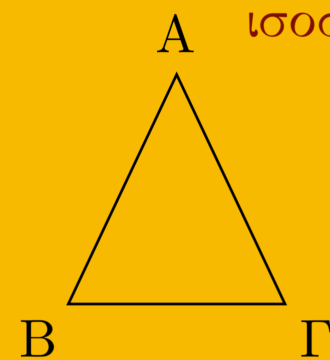
Όλες οι πλευρές άνισες

αμβλυγώνιο



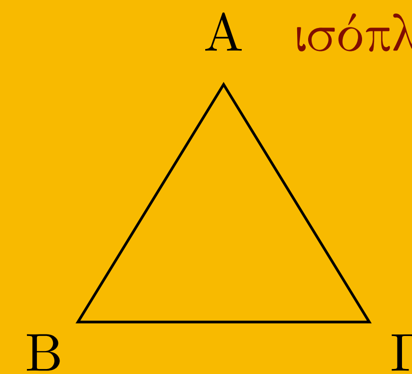
Μία γωνία αμβλεία

ισοσκελές



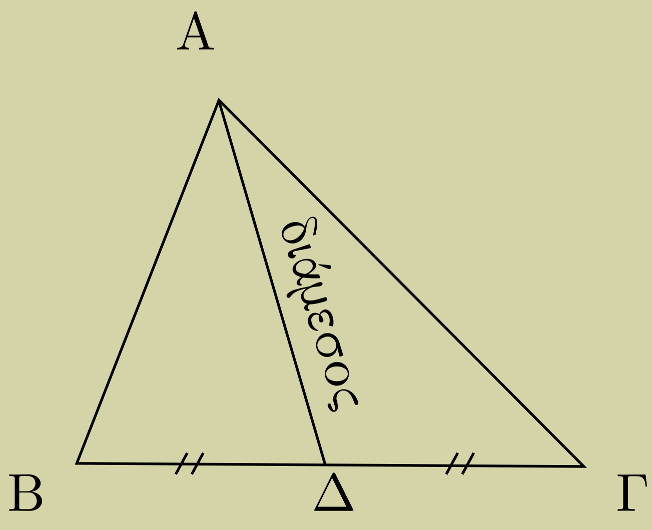
Δύο πλευρές ίσες

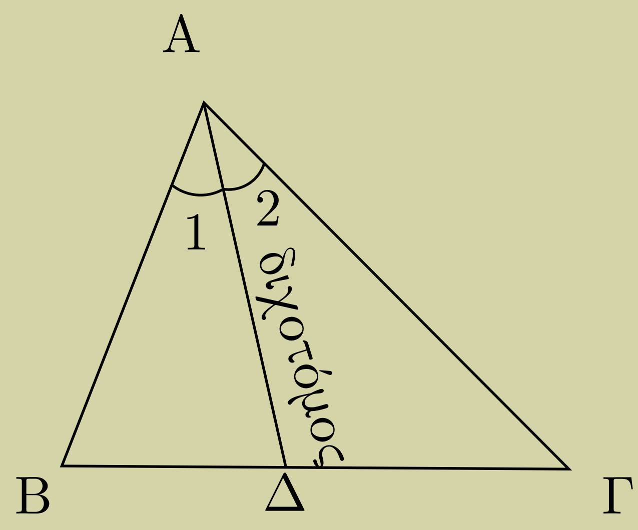
ισόπλευρο

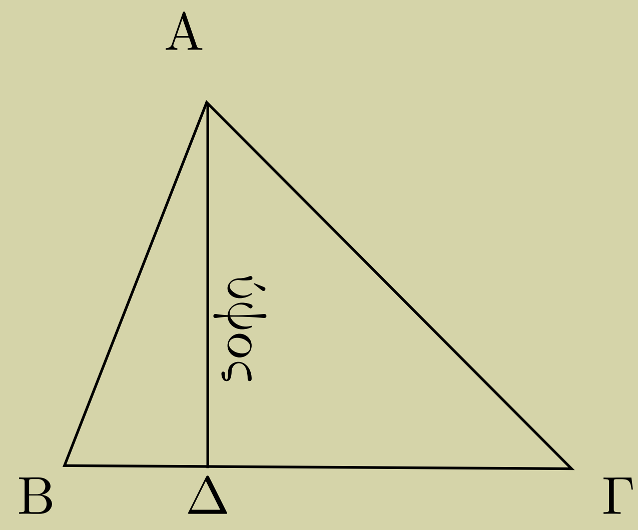


Όλες οι πλευρές ίσες

Δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου





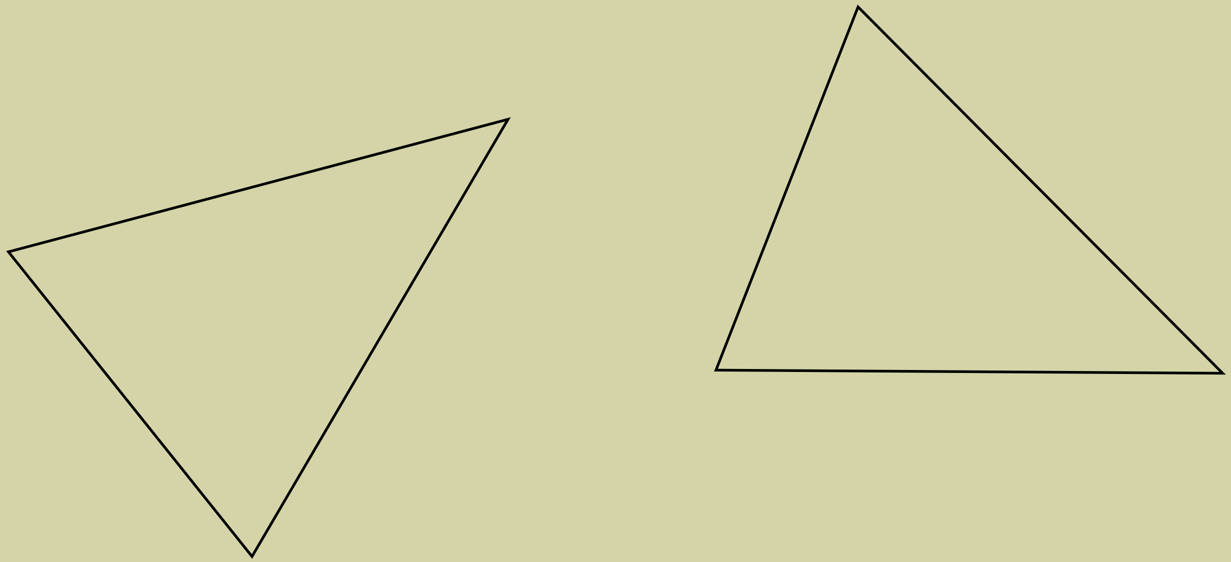


Διάμεσος ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μία κορυφή του τριγώνου με το μέσο της απέναντι πλευράς.

Διχοτόμος ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που φέρουμε από μία κορυφή, χωρίζει τη γωνία σε δύο ίσες γωνίες και καταλήγει στην απέναντι πλευρά.

Ύψος ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που φέρουμε από μία κορυφή, είναι κάθετο στην ευθεία της απέναντι πλευράς και καταλήγει στην ευθεία αυτή.

Ίσα τρίγωνα



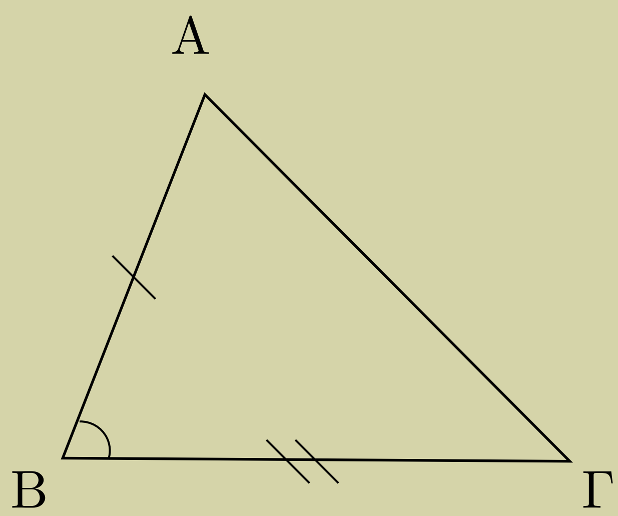
Δύο τρίγωνα είναι ίσα $\Leftrightarrow$ Οι πλευρές και οι ανατίστοιχες γωνίες ίσες

Μας ενδιαφέρει πότε δύο τρίγωνα είναι ίσα χωρίς να πρέπει να αποδείξουμε ότι όλες οι πλευρές και οι αντίστοιχες γωνίες τους είναι ίσες. Για το λόγο αυτό υπάρχουν κάποια **κριτήρια** με τα οποία αποδεικνύουμε αυτό που θέλουμε.

$1^{\text{ο}}$ κριτήριο ισότητας (ΠΓΠ)

1ο κριτήριο ισότητας (ΠΓΠ)

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία τους ίση, τότε είναι ίσα.



1 **Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) φέρουμε τη διχοτόμο ΑΔ.**

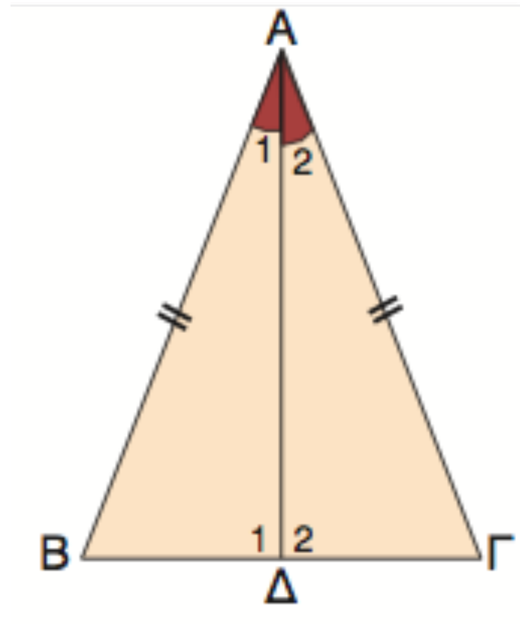
α) Να συγκριθούν τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ.

β) Να αποδειχθεί ότι $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ και ότι η διχοτόμος ΑΔ είναι διάμεσος και ύψος.

α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΔΓ και παρατηρούμε ότι έχουν:

- ΑΔ = ΑΔ, κοινή πλευρά
- ΑΒ = ΑΓ από την υπόθεση
- $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, αφού ΑΔ διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία τους ίση.



β) Επειδή τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ είναι ίσα, θα έχουν όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, οπότε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, ΒΔ = ΔΓ και $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$.
Αφού είναι $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$ και $\hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 = 180°$, θα έχουμε $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = 90°$, οπότε η διχοτόμος ΑΔ είναι και ύψος. Η διχοτόμος ΑΔ είναι και διάμεσος, αφού ΒΔ = ΔΓ.
Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

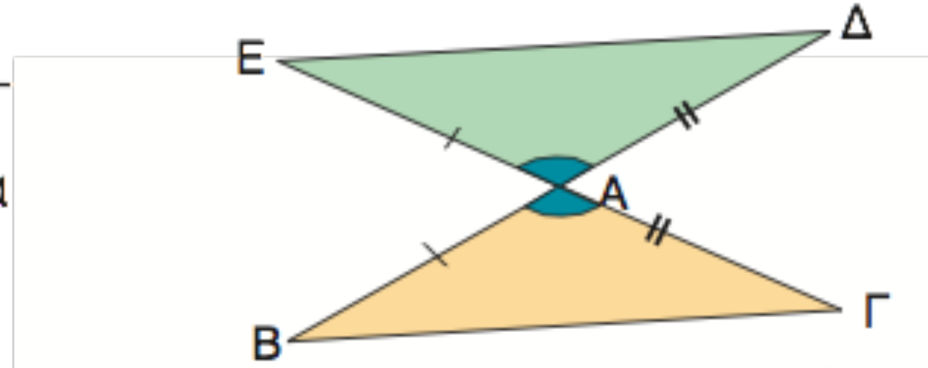
Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο:

α) Οι γωνίες της βάσης του είναι ίσες.

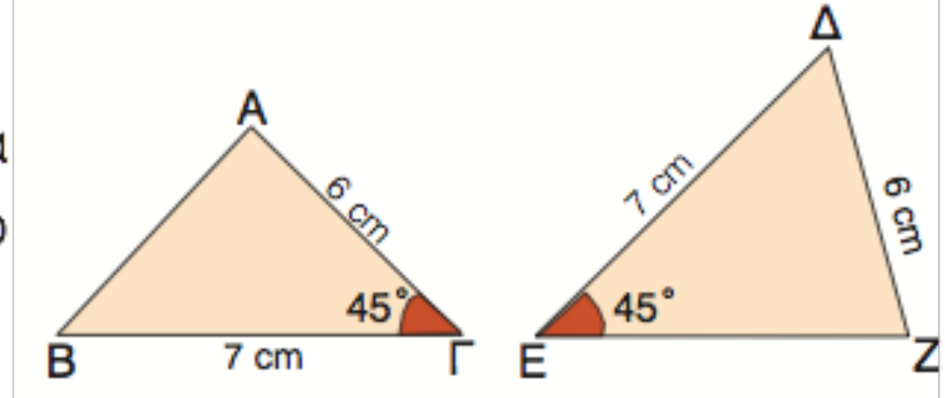
β) Η διχοτόμος, το ύψος και η διάμεσος που φέρουμε από την κορυφή προς τη βάση του συμπίπτουν.

1 Να εξηγήσετε γιατί είναι ίσα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΕΔ του διπλανού σχήματος και να συμπληρώσετε τις ισότητες

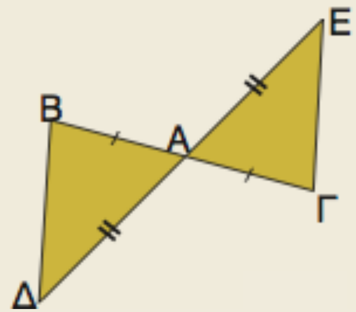
$\widehat{B}$ = ..., $\widehat{\Gamma}$ = ... και ΒΓ = ...



2 Να εξηγήσετε γιατί δεν είναι ίσα τα τρίγωνα του διπλανού σχήματος, αν και έχουν δύο πλευρές ίσες και μια γωνία ίση.



1 Στο διπλανό σχήμα είναι ΑΒ = ΑΓ και ΑΔ = ΑΕ.
Να αποδείξετε ότι ΒΔ = ΓΕ.



Αρκεί να δείξουμε ότι τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{\mathrm{A}\mathrm{B}\Delta}$ και $\overset{\triangle}{\mathrm{A}\Gamma\mathrm{E}}$ είναι ίσα

(τότε θα έχουν ίσες πλευρές και άρα θα έχουμε δείξει αυτό που θέλει!)

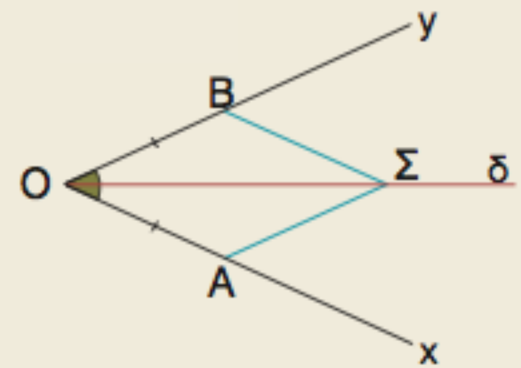
Έχουμε $\left.\begin{array}{l} \mathrm{AB} = \mathrm{A}\Gamma \\ \mathrm{A}\Delta = \mathrm{AE} \end{array}\right\}$ από υπόθεση.

επίσης $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta = \Gamma\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E}$ κατά κορυφήν

$\Rightarrow$ Από κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα θα είναι ίσα

συνεπώς $\boxed{\mathrm{B}\Delta = \Gamma\mathrm{E}}$

2 Στο διπλανό σχήμα η Οδ είναι διχοτόμος της γωνίας $x\hat{O}y$. Αν ΟΑ = ΟΒ και Σ τυχαίο σημείο της διχοτόμου, να αποδείξετε ότι ΣΑ = ΣΒ.



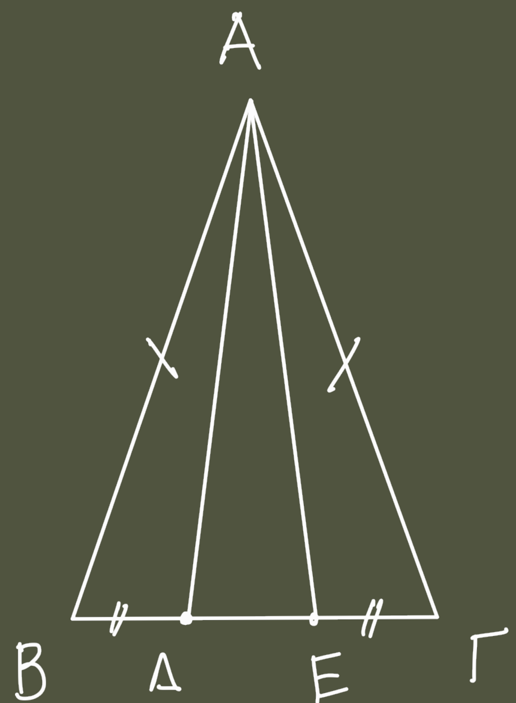
Θα συγκρίνουμε τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{OB\Sigma}$, $\overset{\triangle}{OA\Sigma}$. Έχουμε ΟΑ = ΟΒ (υπόθεση)

ΟΣ κοινή

$\Sigma\hat{O}B = \Sigma\hat{O}A$ αφού Οδ διχοτόμος

άρα $\overset{\triangle}{OB\Sigma} = \overset{\triangle}{OA\Sigma}$ κι έτσι $\boxed{\Sigma A = \Sigma B}$

3 Στη βάση ΒΓ ενός ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ να πάρετε σημεία Δ, Ε, ώστε ΒΔ = ΓΕ. Να αποδείξετε ότι ΑΔ = ΑΕ.



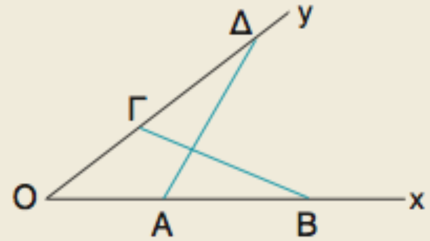
Θα συγκρίνουμε τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{A\Delta B}$ και $\overset{\triangle}{AE\Gamma}$.

$$\left.\begin{array}{ll} AB = A\Gamma & (\overset{\triangle}{AB\Gamma} \text{ ισοσκελές}) \\ B\Delta = E\Gamma & (\text{υπόθεση}) \\ \hat{B} = \hat{\Gamma} & (\overset{\triangle}{AB\Gamma} \text{ ισοσκελές}) \end{array}\right\}$$

Από 1ο κριτήριο είναι ίσα, άρα

$$\boxed{A\Delta = AE}$$

4 Στο διπλανό σχήμα είναι ΟΑ = ΟΓ και ΟΒ = ΟΔ.
Να αποδείξετε ότι ΒΓ = ΑΔ.



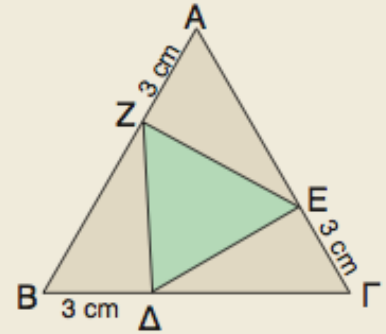
Συγκρίνουμε τα $\overset{\triangle}{\text{ΟΓΒ}}$, $\overset{\triangle}{\text{ΟΑΔ}}$:

$$\left.\begin{array}{l} \text{ΟΑ} = \text{ΟΓ} \ (\text{υπόθεση}) \\ \text{ΟΒ} = \text{ΟΔ} \ (\text{-\,||\,-}) \\ \hat{\text{Ο}} \ \text{κοινή} \end{array}\right\}$$

Από 1ο κριτήριο είναι ίσα . άρα

$\boxed{\text{ΒΓ} = \text{ΑΔ}}$

5 Κάθε πλευρά του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ είναι 8 cm. Αν είναι ΑΖ = ΒΔ = ΓΕ = 3 cm, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ισόπλευρο.



Εφόσον είναι ισόπλευρο, κάθε γωνία του θα είναι 60°.

Επίσης $AB = 8$ άρα $BZ = 8 - 3 = 5$ άρα και $\Delta\Gamma = 5 = AE$

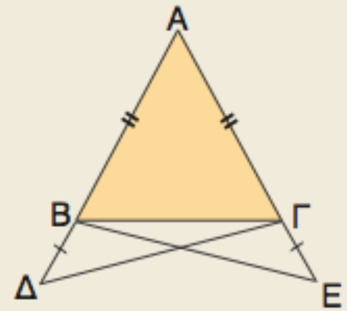
Οπότε $BZ = AE = \Delta\Gamma$ και

$B\Delta = E\Gamma = AZ$

Σύμφωνα με το 1ο κριτήριο τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{ZB\Delta} = \overset{\triangle}{\Delta E\Gamma} = \overset{\triangle}{EZA}$

Επομένως $\Delta Z = \Delta E = ZE$. οπότε το τρίγωνο $\overset{\triangle}{\Delta ZE}$ είναι ισόπλευρο.

6 Στις προεκτάσεις των ίσων πλευρών ΑΒ, ΑΓ ενός ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ να πάρετε αντιστοίχως τμήματα ΒΔ = ΓΕ.
Να αποδείξετε ότι $\hat{\Delta} = \hat{E}$.



Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{ABE}$, $\overset{\triangle}{A\Gamma\Delta}$.

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} \text{ κοινή} \\ AB = A\Gamma \\ AE = A\Delta \quad (AB=A\Gamma \text{ και } B\Delta=\Gamma E) \end{array}\right\}$$

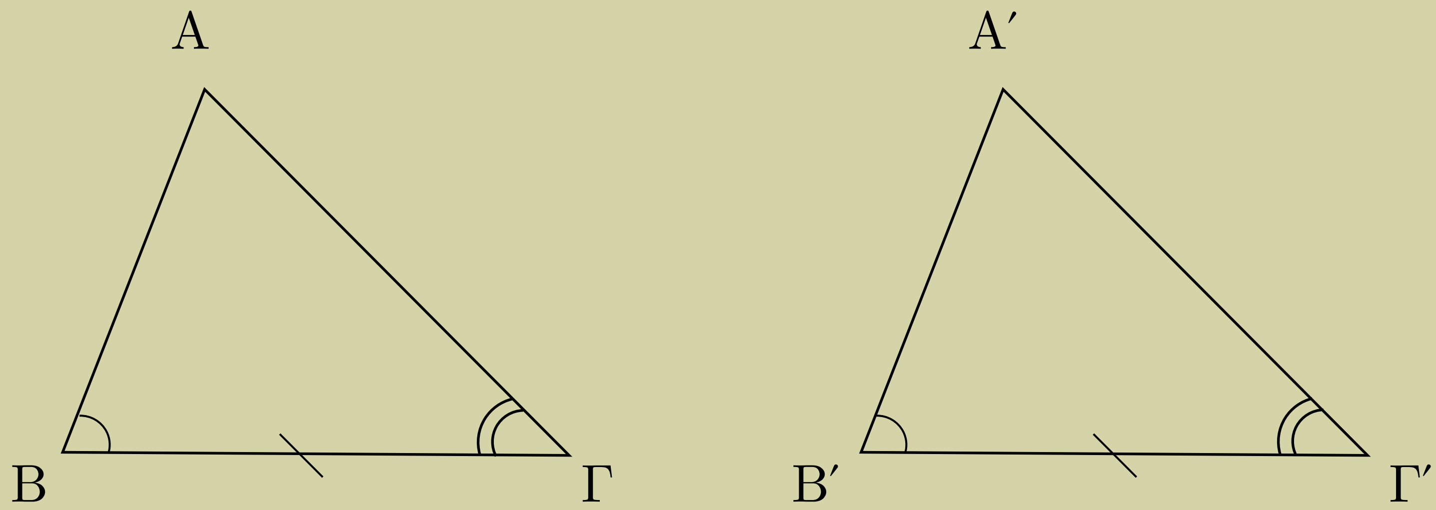
Άρα $\overset{\triangle}{ABE} = \overset{\triangle}{A\Gamma\Delta}$

οπότε $\hat{\Delta} = \hat{E}$.

2ο κριτήριο ισότητας (ΓΠΓ)

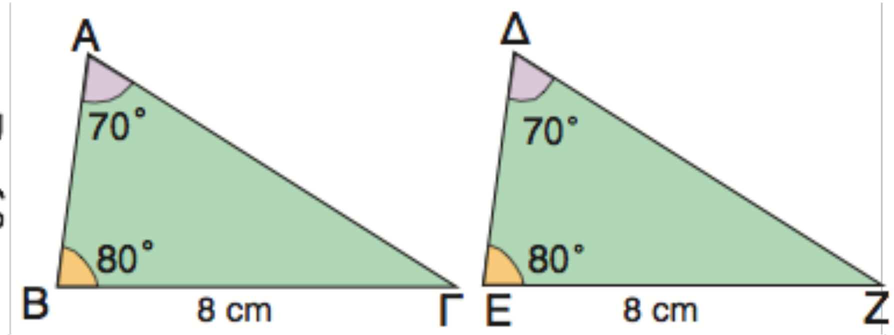
2ο κριτήριο ισότητας (ΓΠΓ)

Αν δύο τρίγωνα έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

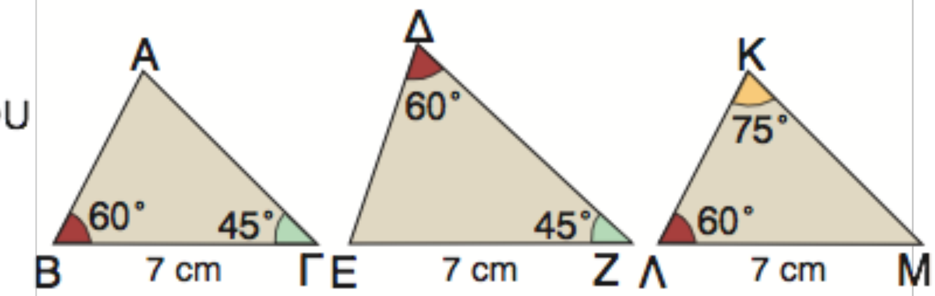


Ερωτήσεις κατανόησης

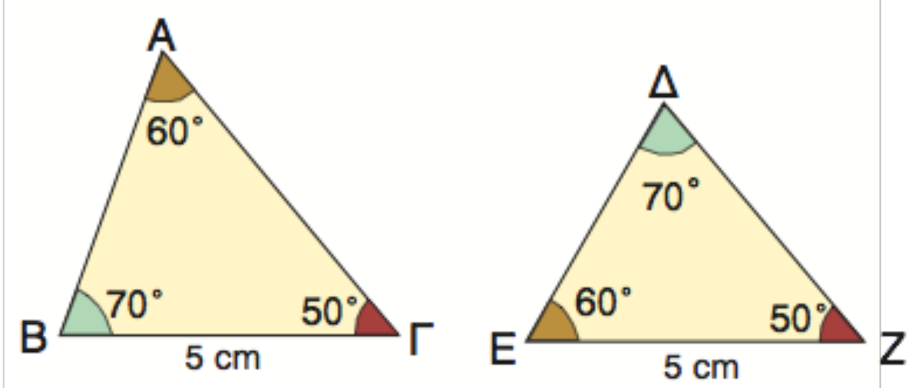
3 Να εξηγήσετε γιατί είναι ίσα τα τρίγωνα του διπλανού σχήματος και να συμπληρώσετε τις ισότητες ΑΒ = ... και ΑΓ = ...



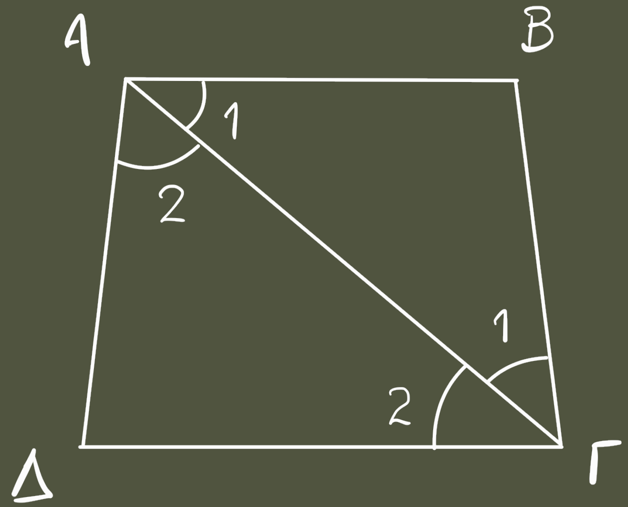
4 Να βρείτε το ζεύγος των ίσων τριγώνων του διπλανού σχήματος.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



5 Είναι ίσα τα τρίγωνα του διπλανού σχήματος;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



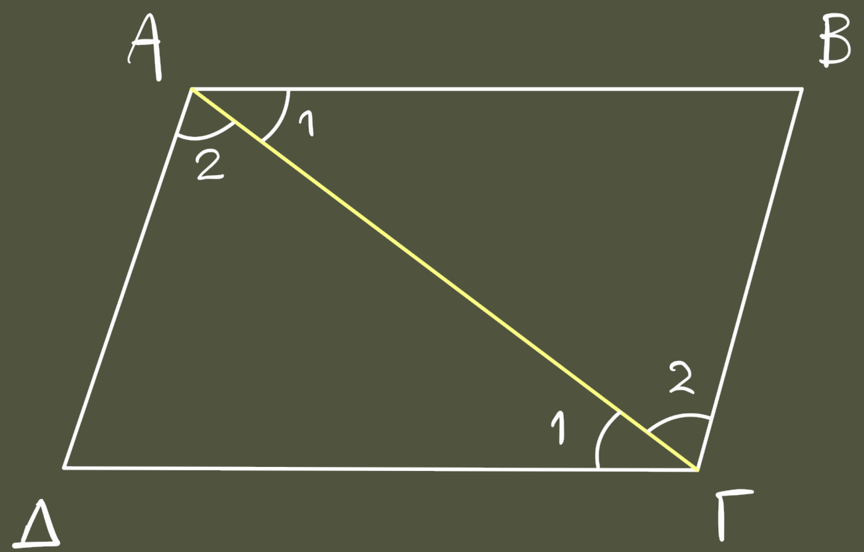
7 Σ’ ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ η διαγώνιος ΑΓ διχοτομεί τις γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι ΑΒ = ΑΔ και ΒΓ = ΓΔ.



Συγκρίνω τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$, $\overset{\Delta}{A\Delta\Gamma}$.

$$\left.\begin{array}{ll} A\Gamma \text{ κοινή} & \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 & (\text{υπόθεση}) \\ \hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2 & (\text{υπόθεση}) \end{array}\right\} \text{ Απο ΓΠΓ έχουμε } B\Gamma = \Delta\Gamma,$$

8 Να αποδείξετε ότι οι απέναντι πλευρές ενός παραλληλογράμμου είναι ίσες.



Φέρνω την ΑΓ και συγκρίνω τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$ και $\overset{\triangle}{ΑΔΓ}$. Έχουμε ΑΓ κοινή,

$\hat{Α}_1 = \hat{Γ}_1$ (εντός εναλλάξ)

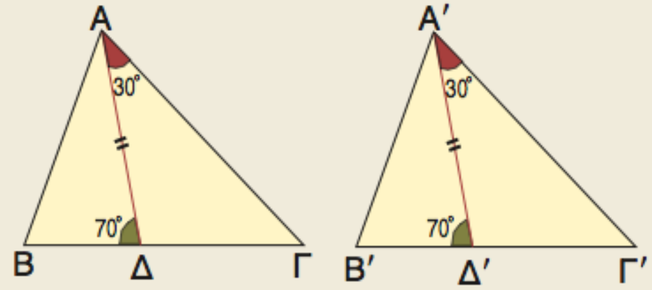
$\hat{Α}_2 = \hat{Γ}_2$ (—״—)

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε $ΑΒ = ΓΔ$ και $ΑΔ = ΒΓ$.

9 Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ του διπλανού σχήματος έχουν τις διχοτόμους ΑΔ και Α′Δ′ ίσες. Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΒ = Α′Β′

β) τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ είναι ίσα.



Οι ΑΔ και Α′Δ′ είναι διχοτόμοι και επομένως

$B\hat{A}\Delta = 30^\circ$ και $B'\hat{A'}\Delta' = 30^\circ$.

i) Συγκρίνω τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{AB\Delta}$, $\overset{\triangle}{A'B'\Delta'}$

$A\Delta = A\Delta'$ (από υπόθεση)

$B\hat{A}\Delta = B'\hat{A'}\Delta'$ (από πριν)

$B\hat{\Delta}A = B'\hat{\Delta'}A'$ (υπόθεση)

Άρα $AB = A'B'$.

ii) Από το (i) ερώτημα έχουμε δείξει ότι $\overset{\triangle}{AB\Delta} = \overset{\triangle}{A'B'\Delta'}$. άρα $\hat{B} = \hat{B'}$.

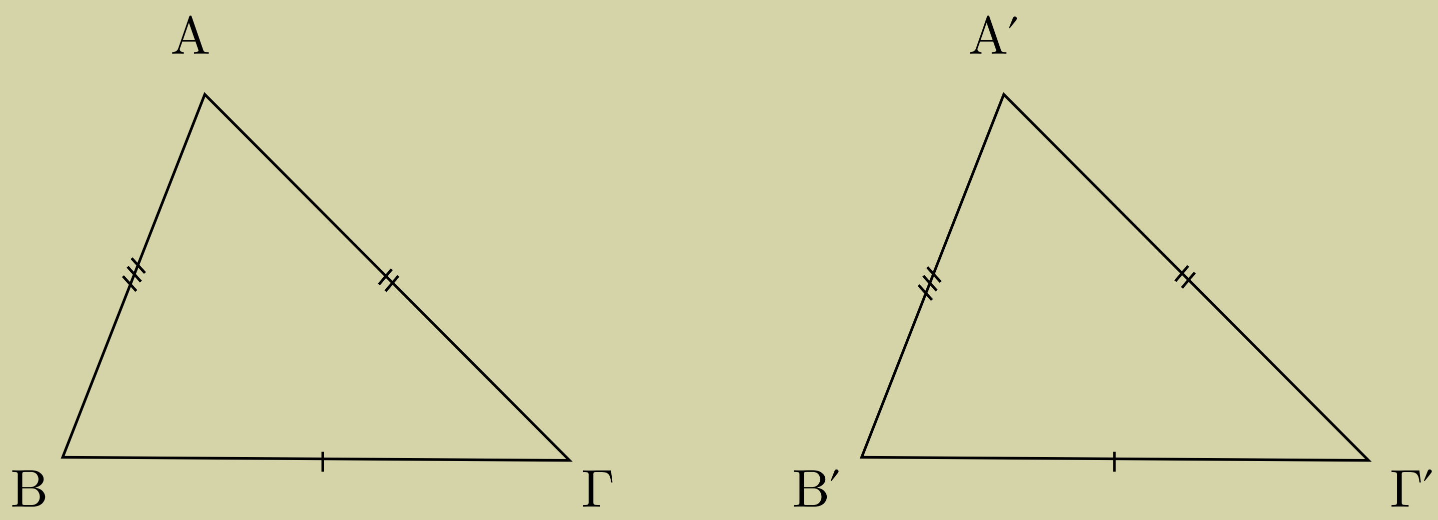
και $AB = A'B'$. Επίσης $\hat{A} = \hat{A'}$ αφού $B\hat{A}\Delta = B'\hat{A'}\Delta'$.

άρα $\overset{\triangle}{AB\Gamma} = \overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$ (κριτήριο 2ο ΓΠΓ)

3ο κριτήριο ισότητας (ΠΠΠ)

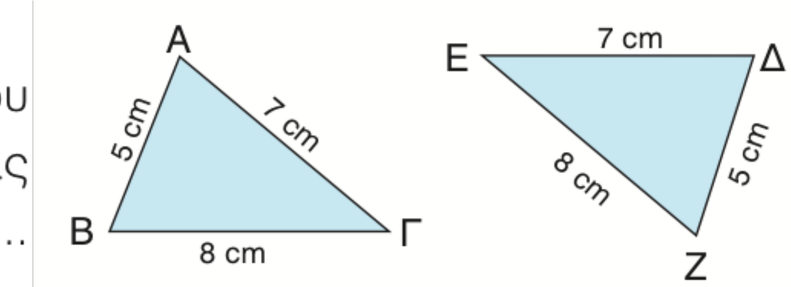
3ο κριτήριο ισότητας (ΠΠΠ)

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

6 Να εξηγήσετε γιατί είναι ίσα τα τρίγωνα του διπλανού σχήματος και να συμπληρώσετε τις ισότητες $\hat{A} = \ldots\ldots$, $\hat{B} = \ldots\ldots$ και $\hat{\Gamma} = \ldots\ldots$



Τα τρίγωνα είναι ίσα αφού έχουν ίσες πλευρές, σύμφωνα με το κριτήριο ισότητας ΠΠΠ.

Έχουμε $\hat{A} = \hat{\Delta}$ (είναι περιεχόμενες γωνίες σε ίσες πλευρές)

$\hat{B} = \hat{Z}$

$\hat{\Gamma} = \hat{E}$

7 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

α) Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα. ☐

β) Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα. ☐

γ) Σε δύο τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες. ☐

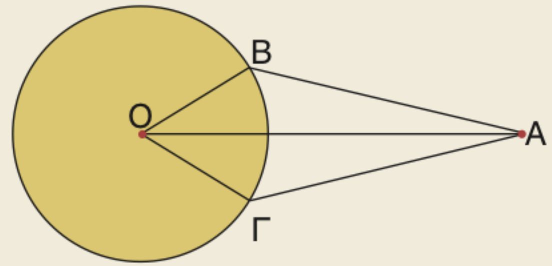
δ) Σε δύο ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές. ☐

ε) Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία, τότε θα έχουν και την τρίτη τους γωνία ίση. ☐

στ) Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία, τότε θα έχουν και την τρίτη τους πλευρά ίση. ☐

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

10 Στο διπλανό σχήμα το σημείο Α ισαπέχει από τα σημεία Β και Γ ενός κύκλου που έχει κέντρο το σημείο Ο. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΑΓ είναι ίσα.

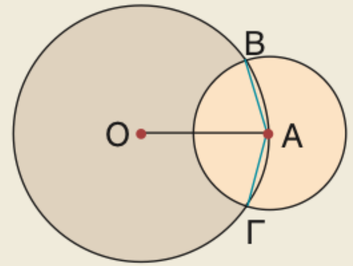


Αφού το Α ισαπέχει απο τα Β και Γ, τότε $AB = A\Gamma$.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{OAB}$ και $\overset{\triangle}{OA\Gamma}$. Ισχύει ότι $AB = A\Gamma$, ΟΑ κοινή και $OB = O\Gamma$ ως ακτίνες του κύκλου. Οπότε απο το κριτήριο ΠΠΠ έχουμε:

$\overset{\triangle}{OAB} = \overset{\triangle}{OA\Gamma}$.

11 Αν Ο, Α είναι τα κέντρα των κύκλων του διπλανού σχήματος, να αποδείξετε ότι η ΑΟ διχοτομεί τη γωνία $B\hat{A}\Gamma$.

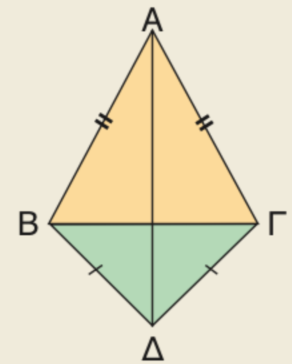


Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{OAB}$ και $\overset{\triangle}{OA\Gamma}$. Έχουμε ΟΑ κοινή, ΟΒ=ΟΓ ως ακτίνες του μεγάλου κύκλου και ΑΒ=ΑΓ ως ακτίνες του μικρού κύκλου

Άρα απο το κριτήριο ΠΠΠ τα τρίγωνα θα είναι ίσα, επομένως

$B\hat{A}O = \Gamma\hat{A}O$. άρα η ΟΑ διχοτομεί τη $B\hat{A}\Gamma$.

12 Τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΓ του διπλανού σχήματος έχουν κοινή βάση ΒΓ. Να αποδείξετε ότι η ΑΔ διχοτομεί τις γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Delta}$.



Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{AB\Delta}$ και $\overset{\triangle}{A\Gamma\Delta}$. Έχουν $AB=A\Gamma$, $B\Delta=\Delta\Gamma$ και $A\Delta$ κοινή

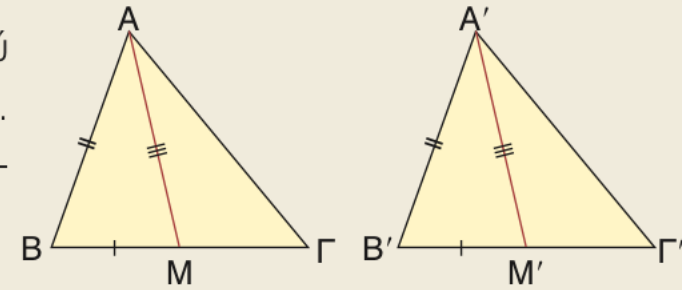
άρα σύμφωνα με το κριτήριο ΠΠΠ είναι ίσα και επομένως $B\hat{A}\Delta=\Delta\hat{A}\Gamma$ και

$B\hat{\Delta}A=\Delta\hat{A}\Gamma$ άρα η ΑΔ διχοτομεί τις γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Delta}$.

13 Στα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ του διπλανού σχήματος οι διάμεσοι ΑΜ και Α′Μ′ είναι ίσες. Αν $AB = A'B'$ και $BM = B'M'$, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $\widehat{B} = \widehat{B}'$.

β) τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ είναι ίσα.



α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{ABM}$ και $\overset{\triangle}{A'B'M'}$:

$AB = A'B'$, $BM = B'M'$, $AM = A'M'$ άρα απο ΠΠΠ είναι ίσα.

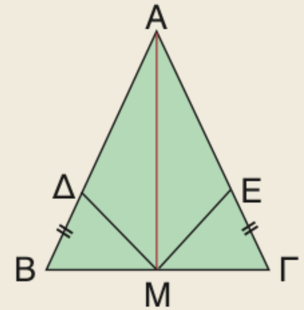
οπότε $\widehat{B} = \widehat{B}'$.

β) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ και $\overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$. $AB = A'B'$, $B\Gamma = B'\Gamma'$ γιατί M μέσον της ΒΓ και M′ μέσον της Β′Γ′. Επίσης απο 1ο ερώτημα $\widehat{B} = \widehat{B}'$ οπότε : λόγω κριτηρίου ΠΓΠ τα τρίγωνα θα είναι ίσα

14 Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ το σημείο Μ είναι μέσο της βάσης ΒΓ. Αν είναι ΒΔ = ΓΕ, να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΜΔΕ είναι ισοσκελές

β) τα τρίγωνα ΑΔΜ και ΑΕΜ είναι ίσα.



α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{M\Delta B}$ και $\overset{\Delta}{ME\Gamma}$.

$$\left.\begin{array}{ll} B\Delta = \Gamma E & (\text{δεδομένο}) \\ BM = M\Gamma & (M \text{ μέσο } B\Gamma) \\ \hat{B} = \hat{\Gamma} & (\overset{\Delta}{AB\Gamma} \text{ ισοσκελές}) \end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{κριτήριο} \\ \text{ΠΓΠ}\end{array} \Rightarrow \Delta M = EM \text{ άρα } \Delta ME \text{ ισοσκ}$$

β) Συγκρίνω τα $\overset{\Delta}{A\Delta M}$, $\overset{\Delta}{AEM}$:

$$\left.\begin{array}{ll} AM \text{ κοινή} & \\ \Delta M = EM & \\ A\Delta = AE & (AB - B\Delta = A\Gamma - AE) \end{array}\right\} \text{Κριτήριο ΠΠΠ τα τριγ είναι ίσα}$$