Άλγεβρα Β’ Λυκείου

4.2 Διαίρεση Πολυωνύμων

Αλγοριθμική διαίρεση

Γνωρίζουμε από το Γυμνάσιο την έννοια της Ευκλείδειας ή αλγοριθμικής διαίρεσης μεταξύ θετικών ακέραιων αριθμών. Συγκεκριμένα γνωρίζουμε ότι:

Για κάθε ζεύγος φυσικών αριθμών Δ και δ με $\delta \neq 0$, υπάρχουν δύο μοναδικοί φυσικοί αριθμοί π και υ, τέτοιοι ώστε

$$\Delta = \delta\pi + \upsilon, \qquad 0 \leq \upsilon < \delta \tag{1}$$

Η ισότητα αυτή είναι γνωστή ως **ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης**. Ο Δ λέγεται **διαιρετέος**, ο δ **διαιρέτης**, ο π **πηλίκο** και ο υ **υπόλοιπο** της διαίρεσης.

$$10 : 3 = ?$$

$$\underset{\Delta}{10} = \underset{\delta}{3} \cdot \underset{\pi}{3} + \underset{\upsilon}{1}$$

Η έννοια της διαίρεσης των πολυωνύμων είναι ανάλογη με την Ευκλείδεια διαίρεση που αναφέραμε παραπάνω. Συγκεκριμένα ισχύει:

ΘΕΩΡΗΜΑ

(Ταυτότητα της διαίρεσης) Για κάθε ζεύγος πολυωνύμων Δ(x) και δ(x) με $\delta(x) \neq 0$ υπάρχουν δύο μοναδικά πολυώνυμα π(x) και υ(x), τέτοια ώστε:

$$\Delta(x) = \delta(x)\pi(x) + \upsilon(x), \tag{2}$$

όπου το υ(x) ή είναι το μηδενικό πολυώνυμο ή έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του δ(x).

Όπως και στη διαίρεση μεταξύ φυσικών αριθμών το Δ(x) λέγεται **διαιρετέος**, το δ(x) **διαιρέτης**, το π(x) **πηλίκο** και το υ(x) **υπόλοιπο** της διαίρεσης.

Παράδειγμα διαίρεσης πολυωνύμων

1. Κάνουμε το σχήμα της διαίρεσης και γράφουμε τα δύο πολυώνυμα.

$$\begin{array}{r|l} x^3-5x^2+2x-1 & x-3 \\ \cline{2-2} & \end{array}$$

2. Βρίσκουμε τον πρώτο όρο x^2 του πηλίκου διαιρώντας τον πρώτο όρο x^3 του διαιρετέου με τον πρώτο όρο x του διαιρέτη.

$$\begin{array}{r|l} x^3-5x^2+2x-1 & x-3 \\ \cline{2-2} & x^2 \end{array}$$

3. Πολλαπλασιάζουμε το x^2 με x – 3 και το γινόμενο $x^3 - 3x^2$ το αφαιρούμε από το διαιρετέο. Βρίσκουμε έτσι το πρώτο μερικό υπόλοιπο $-2x^2 + 2x - 1$.

$$\begin{array}{r|l} x^3-5x^2+2x-1 & x-3 \\ \cline{2-2} -x^3+3x^2 & x^2 \\ \cline{1-1} -2x^2+2x-1 & \end{array}$$

4. Επαναλαμβάνουμε τα βήματα 2 και 3 με νέο διαιρετέο το $-2x^2 + 2x - 1$. Βρίσκουμε έτσι το δεύτερο μερικό υπόλοιπο $-4x-1$.

$$\begin{array}{r|l} x^3-5x^2+2x-1 & x-3 \\ \cline{2-2} -x^3+3x^2 & x^2-2x \\ \cline{1-1} -2x^2+2x-1 & \\ 2x^2-6x & \\ \cline{1-1} -4x-1 & \end{array}$$

5. Τέλος επαναλαμβάνουμε τα βήματα 2 και 3 με νέο διαιρετέο το $-4x - 1$. Βρίσκουμε έτσι το τελικό υπόλοιπο -13 και το πηλίκο $x^2 - 2x - 4$.

$$\begin{array}{r|l} x^3-5x^2+2x-1 & x-3 \\ \cline{2-2} -x^3+3x^2 & x^2-2x-4 \\ \cline{1-1} -2x^2+2x-1 & \\ 2x^2-6x & \\ \cline{1-1} -4x-1 & \\ 4x-12 & \\ \cline{1-1} -13 & \end{array}$$

Παρατηρούμε ότι ισχύει η ισότητα:

$$x^3 - 5x^2 + 2x - 1 = (x-3) \cdot (x^2-2x-4) + (-13)$$

(διαιρετέος) = (διαιρέτης) • (πηλίκο) + (υπόλοιπο)

που εκφράζει την ταυτότητα της διαίρεσης.

Αν ακολουθήσουμε την παραπάνω διαδικασία για τα πολυώνυμα $4x^4 + x^2 - 3x - 1$ και $2x^2 + x$, έχουμε:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
4x^4 & +0x^3 & +x^2 & -3x & -1 & 2x^2 + x \\ \cline{6-6}
-4x^4 & -2x^3 & & & & 2x^2 - x + 1 \\ \cline{1-5}
 & -2x^3 & +x^2 & -3x & -1 & \\
 & 2x^3 & +x^2 & & & \\ \cline{1-5}
 & & 2x^2 & -3x & -1 & \\
 & & -2x^2 & -x & & \\ \cline{1-5}
 & & & -4x & -1 &
\end{array}
$$

Ομοίως για τα πολυώνυμα $2x^3 + 2x^2 - x - 1$ και $2x^2 - 1$ έχουμε

$$
\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & +2x^2 & -x & -1 & 2x^2 - 1 \\ \cline{5-5}
-2x^3 & & +x & & x + 1 \\ \cline{1-4}
 & 2x^2 & & -1 & \\
 & -2x^2 & & +1 & \\ \cline{1-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

Παρατηρήσεις:

1. Βάζουμε όλες τις δυνάμεις του x ακόμη κι αυτές που λείπουν (έχουν συντελεστή μηδέν)
2. Η διαίρεση σταματάει όταν το υπόλοιπο βγεί μικρότερου βαθμού από το διαιρέτη ή όταν βγει μηδέν

Γενικά, αν σε μια διαίρεση είναι $υ(x)=0$, τότε η διαίρεση λέγεται **τέλεια** και η ταυτότητα της διαίρεσης γράφεται

$$Δ(x)=δ(x)\cdot π(x)$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το $δ(x)$ **διαιρεί** το $Δ(x)$ ή ότι το $δ(x)$ είναι **παράγοντας** του $Δ(x)$ ή ότι το $Δ(x)$ **διαιρείται με το** $δ(x)$ ή ακόμη ότι το $δ(x)$ είναι **διαιρέτης** του $Δ(x)$. Έτσι για παράδειγμα το $2x^2-1$ είναι παράγοντας ή διαιρέτης του $2x^3+2x^2-x-1$.

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να κάνετε τις παρακάτω διαιρέσεις και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης σε κάθε περίπτωση.

i) $(3x^3+6x^2-17x+20):(x+3)$ **ii)** $(x^4-81):(x-3)$

iii) $(24x^5+20x^3-16x^2-15):(6x^2+5)$ **iv)** $(2x^4+4x^3-5x^2+3x-2):(x^2+2x-3)$

v) $x^4:(x-1)^3$ **vi)** $(x^5+7):(x^3-1)$

(i)

$$
\begin{array}{rrrr|l}
\cancel{3x^3} & +6x^2 & -17x & +20 & x+3 \\ \cline{5-5}
-\cancel{3x^3} & -9x^2 & & & 3x^2-3x-8 \\ \cline{1-2}
 & -\cancel{3x^2} & -17x & +20 & \\
 & +\cancel{3x^2} & +9x & & \\ \cline{2-3}
 & & -\cancel{8x} & +20 & \\
 & & \cancel{+8x} & +24 & \\ \cline{3-4}
 & & & 44 &
\end{array}
$$

Άρα :

$$3x^3+6x^2-17x+20=(3x^2-3x+8)(x+3)+44.$$