

Μαθηματικά Γ' Γυμνασίου

Παραγοντοποίηση

Ανάπτυγμα Τετραγώνου

ε) Ανάπτυγμα τετραγώνου

Οι ταυτότητες $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ και $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ γράφονται και ως εξής:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

Σύμφωνα με τις ταυτότητες αυτές, μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε μια παράσταση που είναι ανάπτυγμα τετραγώνου (τέλειο τετράγωνο), π.χ.

$$x^2 + 4x + 4 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 = (x + 2)^2$$

$$y^2 - 6y + 9 = y^2 - 2 \cdot y \cdot 3 + 3^2 = (y - 3)^2$$

Οι παραστάσεις $(x + 2)^2$
και $(y - 3)^2$ είναι γινόμενα
παραγόντων, αφού
 $(x + 2)^2 = (x + 2)(x + 2)$ και
 $(y - 3)^2 = (y - 3)(y - 3)$

Παραδείγματα

Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:

α) $4a^2 + 12a + 9$

β) $a^2 - 10ab + 25b^2$

γ) $-4y^2 + 4y - 1$

Λύση

α) $4a^2 + 12a + 9 = (2a)^2 + 2 \cdot 2a \cdot 3 + 3^2 = (2a + 3)^2$

$$\begin{aligned}\beta) \alpha^2 - 10\alpha\beta + 25\beta^2 &= \alpha^2 - 2 \cdot \alpha \cdot 5\beta + (5\beta)^2 = \\ &= (\alpha - 5\beta)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma) -4y^2 + 4y - 1 &= -(4y^2 - 4y + 1) = \\ &= -[(2y)^2 - 2 \cdot 2y \cdot 1 + 1^2] = \\ &= -(2y - 1)^2\end{aligned}$$

Γράφουμε κάθε παράσταση
ως ανάπτυγμα τετραγώνου της
μορφής
 $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ ή $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

Ερώτηση κατανόησης

8

Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες.

α) $x^2 + 6x + 9 = (\dots\dots\dots)^2$

β) $4a^2 - 4a + 1 = (\dots\dots\dots)^2$

γ) $y^4 - 2y^2 + 1 = (\dots\dots\dots)^2$

δ) $25 + 10x^3 + x^6 = (\dots\dots\dots)^2$

15

Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $x^2 - 2x + 1$ β) $y^2 + 4y + 4$ γ) $\omega^2 - 6\omega + 9$ δ) $a^2 + 10a + 25$

ε) $1 - 4\beta + 4\beta^2$ στ) $9x^4 + 6x^2 + 1$ ζ) $4y^2 - 12y + 9$ η) $16x^2 + 8xy + y^2$

θ) $25\alpha^2 - 10\alpha\beta + \beta^2$ ι) $(\alpha + \beta)^2 - 2(\alpha + \beta) + 1$ ια) $\frac{y^2}{9} - 2y + 9$ ιβ) $x^2 + x + \frac{1}{4}$

α) $x^2 - 2x + 1 = x^2 - 2 \cdot 1x + 1^2 = (x-1)^2$

β) $y^2 + 4y + 4 = y^2 + 2 \cdot 2y + 2^2 = (y+2)^2$

γ) $\omega^2 - 6\omega + 9 = \omega^2 - 2 \cdot 3\omega + 3^2 = (\omega-3)^2$

δ) $a^2 + 10a + 25 = a^2 + 2 \cdot 5a + 5^2 = (a+5)^2$

ε) $1 - 4\beta + 4\beta^2 = 4\beta^2 - 4\beta + 1 = (\underbrace{2\beta}^2) - 2 \cdot \underbrace{2\beta}_1 + \underbrace{1}_1^2 = (2\beta-1)^2$

στ) $9x^4 + 6x^2 + 1 = (3x^2)^2 + 2 \cdot 3x^2 + 1^2 = (3x^2 + 1)^2$

ζ) $4y^2 - 12y + 9 = (2y)^2 - 2 \cdot 6y + 3^2 = (2y-3)^2$

η) $16x^2 + 8xy + y^2 = (4x)^2 + 2 \cdot 4xy + y^2 = (4x+y)^2$

θ) $25\alpha^2 - 10\alpha\beta + \beta^2 = (5\alpha)^2 - 2 \cdot 5\alpha\beta + \beta^2 = (5\alpha-\beta)^2$

ι) $(\alpha+\beta)^2 - 2(\alpha+\beta) + 1 = (\alpha+\beta-1)^2$

ια) $\frac{y^2}{9} - 2y + 9 = \left(\frac{y}{3}\right)^2 - 2 \cdot 1y + 3^2 = \left(\frac{y}{3}-3\right)^2$

ιβ) $x^2 + x + \frac{1}{4} = x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$

16 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:
α) $3x^2 + 24x + 48$ β) $-y^2 + 4y - 4$ γ) $2\alpha^2 - 8\alpha\beta + 8\beta^2$ δ) $4\alpha^3 + 12\alpha^2 + 9\alpha$

$$\alpha) \quad 3x^2 + 24x + 48 = 3(x^2 + 8x + 16) = 3(x^2 + 2 \cdot 4x + 4^2) = 3(x + 4)^2$$

$$\beta) \quad -y^2 + 4y - 4 = -(y^2 - 4y + 4) = -(y^2 - 2 \cdot 2y + 2^2) = -(y - 2)^2$$

$$\gamma) \quad 2\alpha^2 - 8\alpha\beta + 8\beta^2 = 2(\alpha^2 - 4\alpha\beta + 4\beta^2) = 2(\alpha^2 - 2 \cdot 2\alpha\beta + (2\beta)^2) = \\ = 2(\alpha - 2\beta)^2$$

$$\delta) \quad 4\alpha^3 + 12\alpha^2 + 9\alpha = \alpha(4\alpha^2 + 12\alpha + 9) = \alpha((2\alpha)^2 + 2 \cdot 2\alpha \cdot 3 + 3^2) = \alpha(2\alpha + 3)^2$$

Ασκήσεις:

1) Να γίνουν γινόμενο:

α) $x^4 - 2x^2 + 1$

β) $3a^2 - 6a + 3$

γ) $4a^3 + 24a^2 + 36a$

δ) $9x^2 + 4 - 12x$

ε) $4x^4 + 4x^2 + 1$

στ) $x - 20xy + 100xy^2$

ζ) $x + x^3 - 2x^2$

2) Να γίνουν γινόμενο οι παραστάσεις :

α. $x^2 + 2x + 1$

β. $x^2 - 4x - 4$

γ. $-4x^2 - 4x - 1$

δ. $\kappa^2 - 2\kappa\lambda + \lambda^2$

ε. $4a^2 + 12a + 9$

στ. $25a^2 - 20a\beta + 4\beta^2$

ζ. $16x^2 + 40xy + 25y^2$

η. $-25x^2 + 40xy - 16y^2$

θ. $49a^2 - 14a\beta + \beta^2$

ι. $25\kappa^2 - 60\kappa\lambda + 36\lambda^2$

ια. $a^2\beta^2 - 14a\beta + 49$

ιβ. $x^2y^2 - 8xy + 16$

ιγ. $4x^2 + 9 + 12x$

ιδ. $\psi^2 + 9\chi^2 - 6\chi\psi$