

# Άλγεβρα Β' Λυκείου

## Μάθημα 6 - Ασκήσεις στο 2ο κεφάλαιο

## Σχεδιάση τριωνύμου

Ένα τριώνυμο, δηλαδή μία παράσταση της μορφής  $ax^2 + bx + \gamma$  δεν είναι εύκολο να σχεδιαστεί χρησιμοποιώντας οριζόντιες και κατακόρυφες μετατοπίσεις. Όμως αν μπορέσουμε να το γράψουμε σε άλλη μορφή, τότε τα πράγματα γίνονται πολύ εύκολα.

Η διαδικασία αυτή βασίζεται στην ταυτότητα  $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$  και λέγεται συμπλήρωση τετραγώνου. Χρησιμοποιείται σε πάρα πολλές ασκήσεις όχι μόνο του Λυκείου αλλά και των πανεπιστημιακών σχολών.

## Συμπλήρωση τετραγώνου

$$(a \pm \beta)^2 = a^2 \pm 2a\beta + \beta^2$$

$$x^2 - 2x + 2 = x^2 - 2 \cdot 1 \cdot x + 2 = x^2 - 2 \cdot \underbrace{1}_{\alpha} \cdot x + \underbrace{1^2 - 1^2}_{\pm \beta \alpha \mp \beta^2} + 2 = (x-1)^2 + 1$$

$$x^2 + 2x + 3 = x^2 + 2 \cdot 1 \cdot x + 3 = \underbrace{x^2 + 2 \cdot 1 \cdot x + 1^2}_{\pm \beta \alpha \mp \beta^2} - 1^2 + 3 = (x+1)^2 + 2$$

$$x^2 + 4x + 7 = x^2 + 2 \cdot 2x + 7 = \underbrace{x^2 + 2 \cdot 2x + 4}_{\pm \beta \alpha \mp \beta^2} - 4 + 7 = (x+2)^2 + 3$$

$$x^2 - 6x + 5 = x^2 - 2 \cdot 3x + 5 = \underbrace{x^2 - 2 \cdot 3x + 9}_{\pm \beta \alpha \mp \beta^2} - 9 + 5 = (x-3)^2 - 4$$

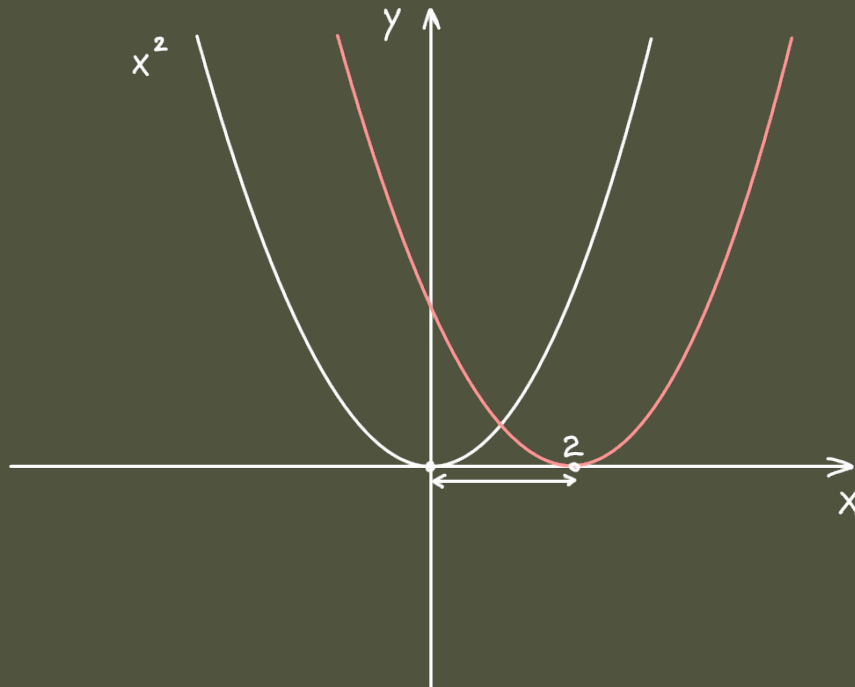
Βέβαια η άλλη επιλογή είναι να θυμόμαστε τον παρακάτω τύπο, πράγμα λίγο δύσκολο!

$$ax^2 + \beta x + \gamma = \left( \sqrt{a}x + \frac{\beta}{2\sqrt{a}} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

Να σχεδιάσετε τις παρακάτω συναρτήσεις

$$f(x) = x^2 - 5x + 6 \quad g(x) = x^2 - 4x + 4 \quad \varphi(x) = x^2 - 2x + 3$$

$$x^2 - 4x + 4 = x^2 - 2 \cdot 2x + 4 = \underbrace{x^2 - 2 \cdot 2x + 2^2}_{(x-2)^2} - 2^2 + 4 = (x-2)^2$$

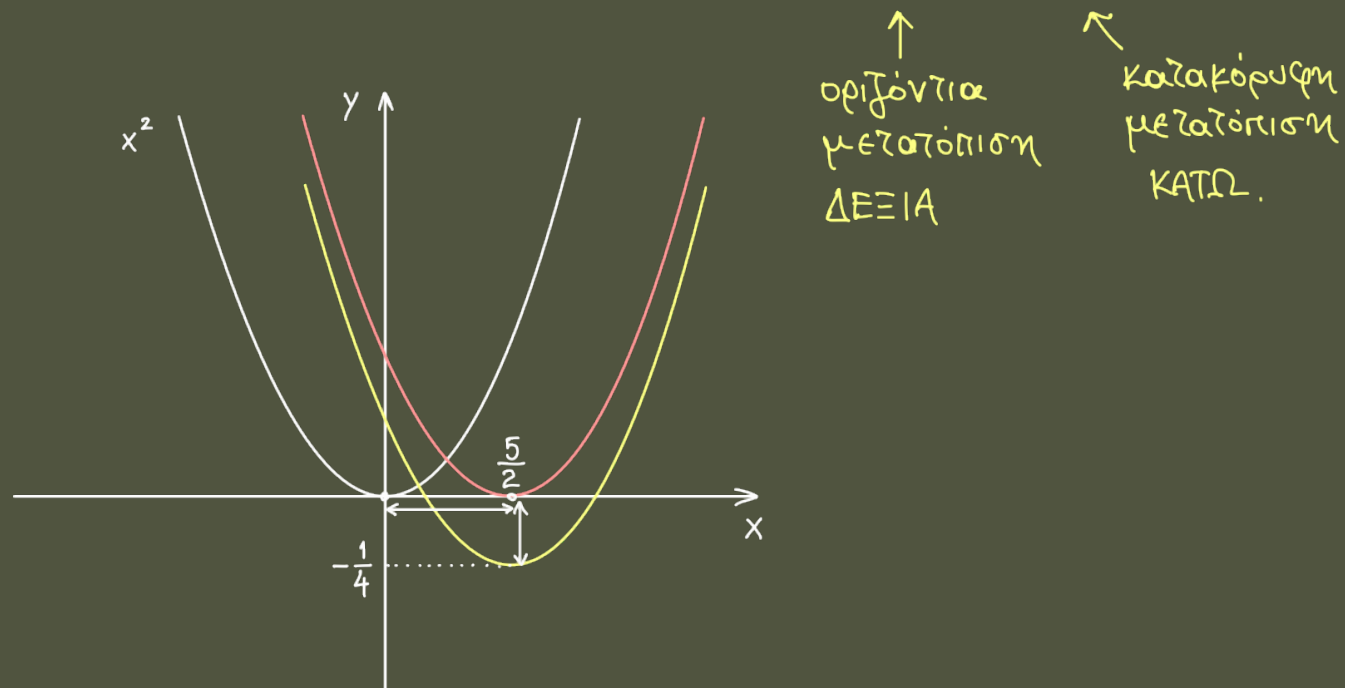


Να σχεδιάστε τις παρακάτω συναρτήσεις

$$f(x) = x^2 - 5x + 6 \quad g(x) = x^2 - 4x + 4 \quad \varphi(x) = x^2 - 2x + 3$$

$$x^2 - 5x + 6 = x^2 - 2 \cdot \frac{5}{2}x + 6 = \underbrace{x^2 - 2 \cdot \frac{5}{2}x + \frac{5^2}{2^2}}_{\text{τετράγωνο}} - \frac{5^2}{2^2} + 6 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 6$$

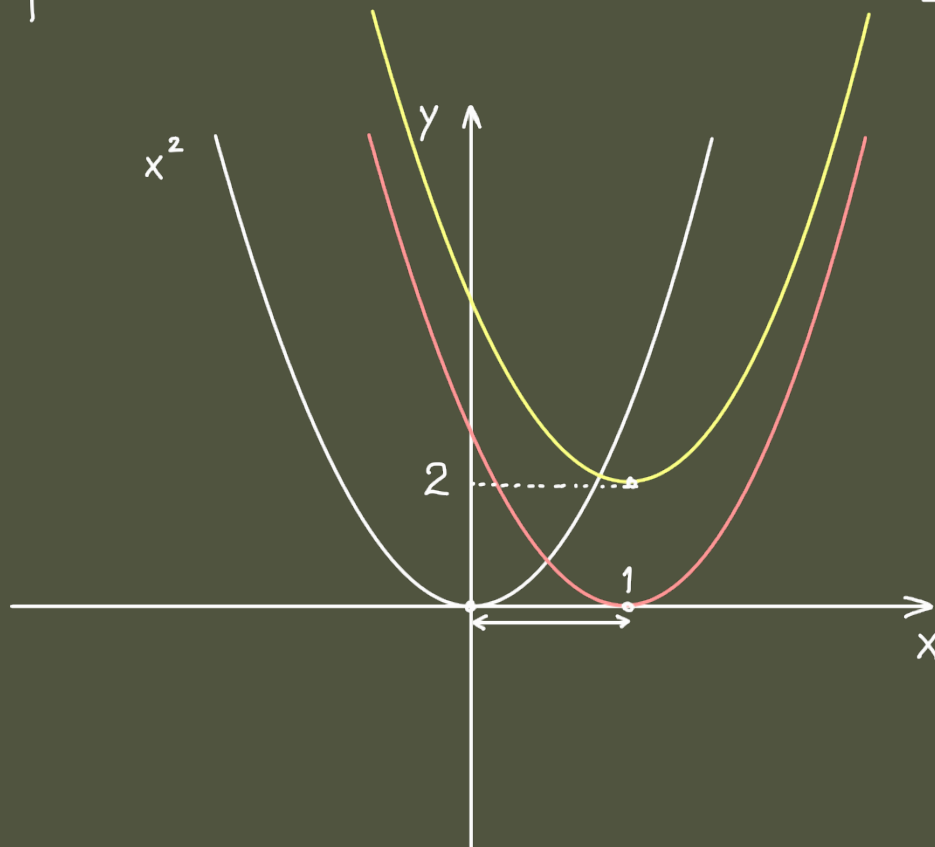
$$= \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + \frac{24}{4} = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$



Να σχεδιάσετε τις παρακάτω συναρτήσεις

$$f(x) = x^2 - 5x + 6 \quad g(x) = x^2 - 4x + 4 \quad \varphi(x) = x^2 - 2x + 3$$

$$\varphi(x) = x^2 - 2x + 3 = x^2 - 2 \cdot 1x + 3 = \underline{x^2 - 2 \cdot 1x + 1^2 - 1^2 + 3} = (x-1)^2 + 2$$



## Θέμα 2 (14971)

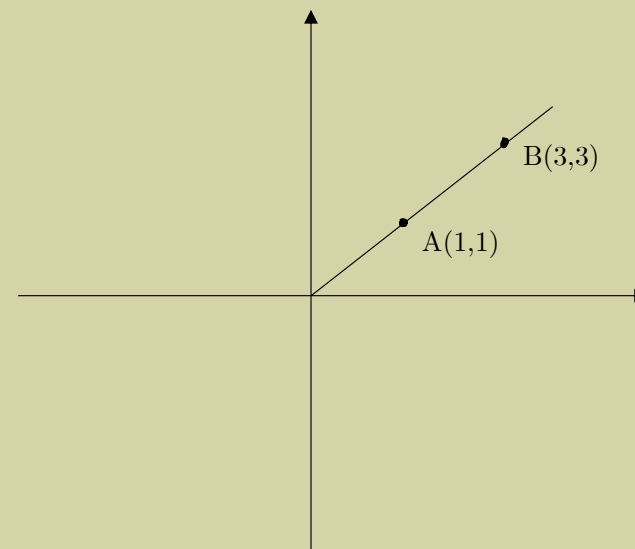
Δίνονται τα σημεία του επιπέδου  $A(1,1)$ ,  $B(3,3)$ .

i) Να αιτιολογήσετε ποιες από τις επόμενες ιδιότητες θα μπορούσε και ποιες δε θα μπορούσε να έχει μία συνάρτηση  $f$ , που ορίζεται σε όλους τους πραγματικούς αριθμούς και της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα  $A$  και  $B$ .

(a) Είναι σταθερή συνάρτηση.

(b) Είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση.

ii) Να συμπληρώσετε την παρακάτω γραφική παράσταση μίας συνάρτησης  $f$ , η οποία διέρχεται από τα  $A$ ,  $B$  και είναι περιττή.



ι) (α) Δεν μπορεί η  $f$  να είναι σταθερή συνάρτηση γιατί μια σταθερή συνάρτηση έχει σταθερό output, δηλαδή ό,τι της δίνω, δίνει το ίδιο αποτέλεσμα.  
ή αλλιώς πιο "μαθηματικά" για κάθε  $x$  ισχύει ότι  $f(x)=c$ ,  $c \in \mathbb{R}$



## Θέμα 2 (14971)

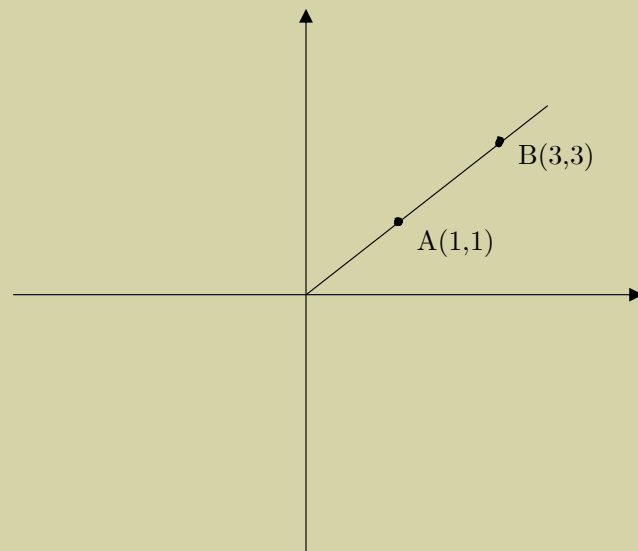
Δίνονται τα σημεία του επιπέδου  $A(1,1)$ ,  $B(3,3)$ .

i) Να αιτιολογήσετε ποιες από τις επόμενες ιδιότητες θα μπορούσε και ποιες δε θα μπορούσε να έχει μία συνάρτηση  $f$ , που ορίζεται σε όλους τους πραγματικούς αριθμούς και της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα  $A$  και  $B$ .

(a) Είναι σταθερή συνάρτηση.

(b) Είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση.

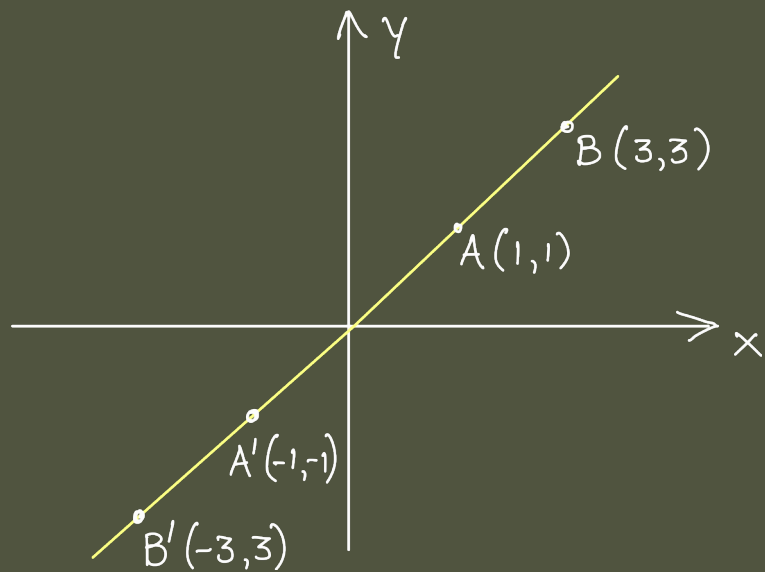
ii) Να συμπληρώσετε την παρακάτω γραφική παράσταση μίας συνάρτησης  $f$ , η οποία διέρχεται από τα  $A$ ,  $B$  και είναι περιττή.



(β) Δεν μπορεί να είναι γνησίως φθίνουσα αφού μια γνησίως φθίνουσα συνάρτηση έχει την ιδιότητα  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ .

Όμως αυτή η συνάρτηση  $1 < 3$  αλλά  $f(1)=1 < f(3)=3$ .

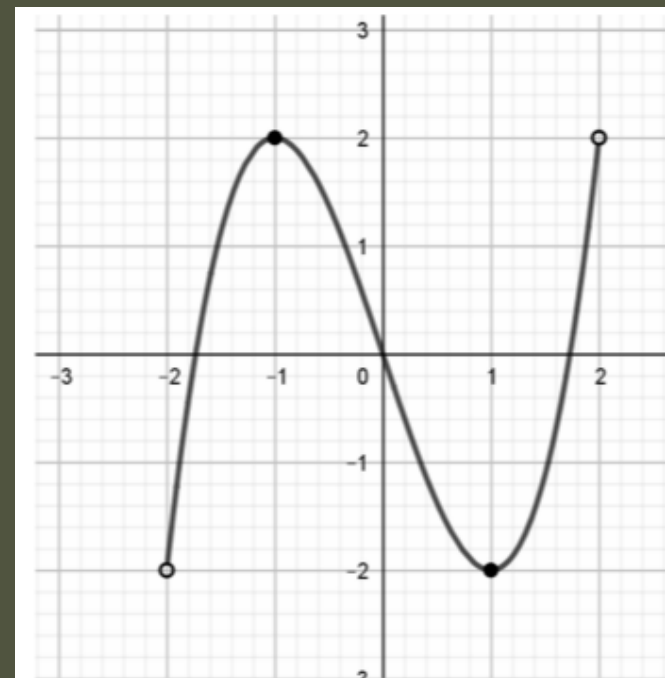
ii)



## Θέμα 2 (15112)

Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης  $f$  με πεδίο ορισμού το διάστημα  $(-2,2)$ .

- i) Να εξετάσετε αν η  $f$  είναι άρτια ή περιττή και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)
- ii) Να γράψετε τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα. (Μονάδες 8)
- iii) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της  $f$  καθώς και τις θέσεις των ακροτάτων αυτών. (Μονάδες 10)

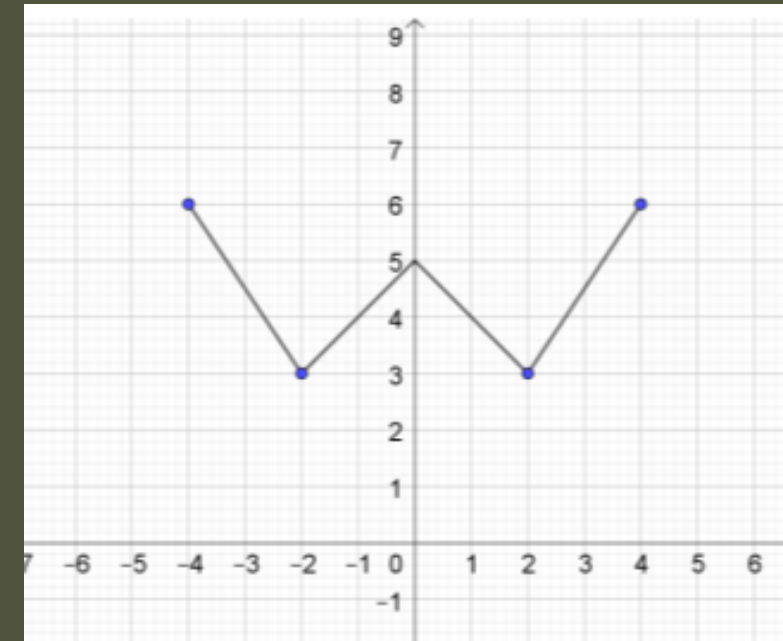


- i) Η συνάρτηση  $f$  φαίνεται να είναι περιττή, και ο λόγος είναι ότι έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων  $(0,0)$ .
- ii) Η  $f$  είναι γν. αύξουσα στα διαστήματα  $[-2,-1]$  και  $[1,2]$ .
- iii) Η μέγιστη τιμή της  $f$  είναι στο  $x=-1$  το  $y=2$  και η ελάχιστη τιμή είναι στο  $x=1$  η  $y=-2$ .

## Θέμα 2 (15024)

Η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης  $f$  με πεδίο ορισμού το  $[-4,4]$  φαίνεται στο σχήμα.

- i) Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση είναι άρτια. (Μονάδες 8)
- ii) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της  $f$ . (Μονάδες 8)
- iii) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της  $f$  καθώς και για ποιες τιμές του  $x$  την παρουσιάζει. (Μονάδες 9)



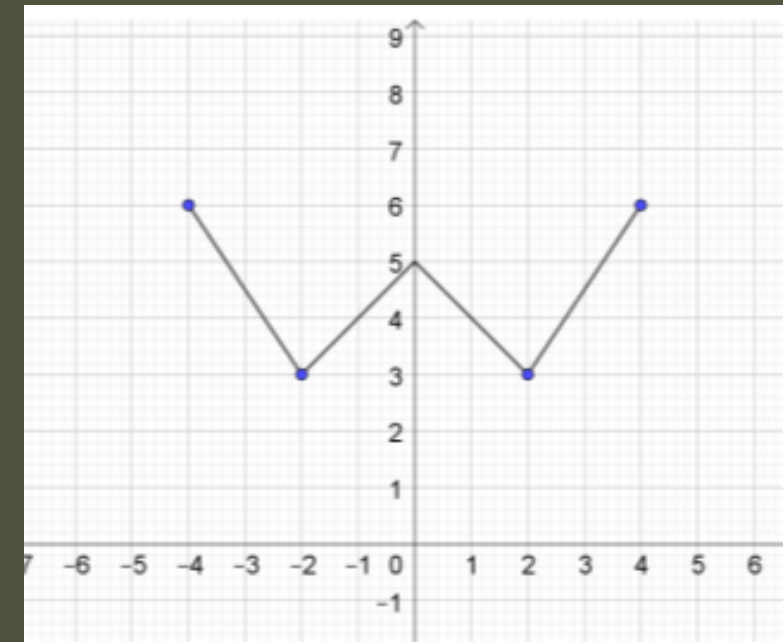
i) Η συνάρτηση  $f$  φαίνεται από το σχήμα ότι είναι άρτια γιατί έχει άξονα συμμετρίας τον  $y$ .

ii) Η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $[-4, -2]$  και  $[0, 2]$   
και γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $[-2, 0]$  και  $[2, 4]$

## Θέμα 2 (15024)

Η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης  $f$  με πεδίο ορισμού το  $[-4,4]$  φαίνεται στο σχήμα.

- i) Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση είναι άρτια. (Μονάδες 8)
- ii) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της  $f$ . (Μονάδες 8)
- iii) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της  $f$  καθώς και για ποιες τιμές του  $x$  την παρουσιάζει. (Μονάδες 9)

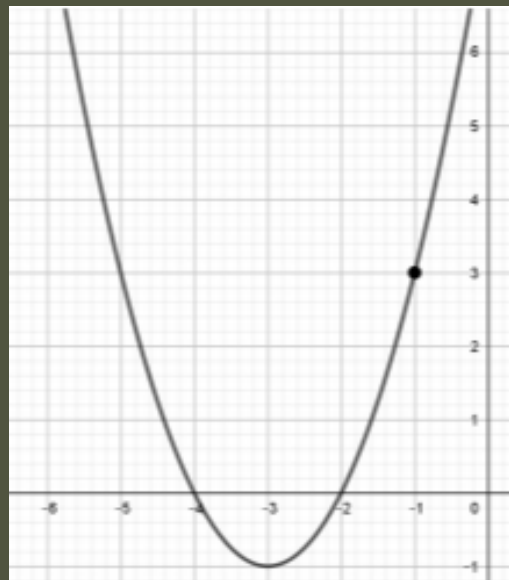
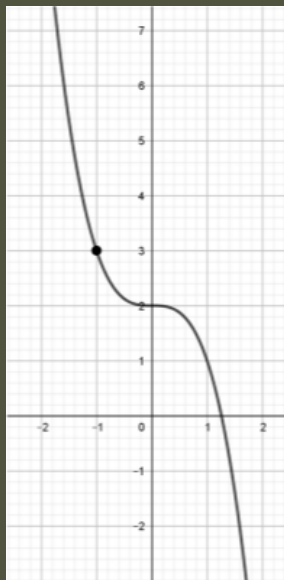
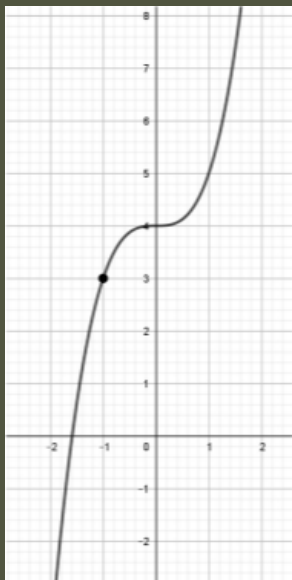


iii) Η ελάχιστη τιμή είναι το  $y=3$  τις οποίες παίρνει στο  $x=-2$  και στο  $x=2$ .

## Θέμα 2 (15115)

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  γνησίως γθίνουσα στο σύνολο  $\mathbb{R}$  με σύνολο τιμών το  $\mathbb{R}$  της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο  $A(-1,3)$ .

- i) Θα μπορούσε η γραφική παράσταση της  $f$  να διέρχεται και από το σημείο  $B(2,5)$ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)
- ii) Ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις θα μπορούσε να είναι η γραφική παράσταση της  $f$ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

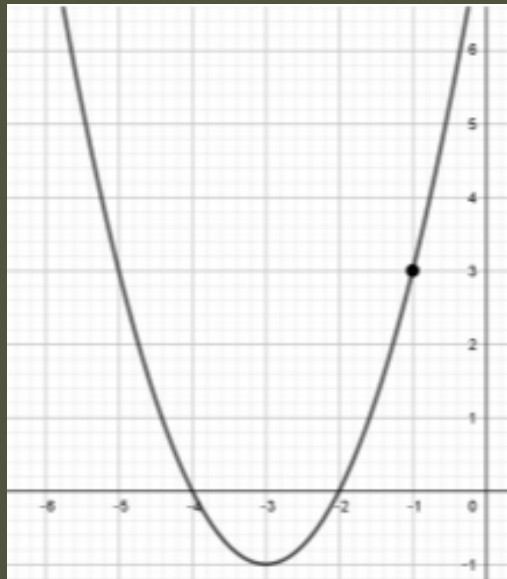
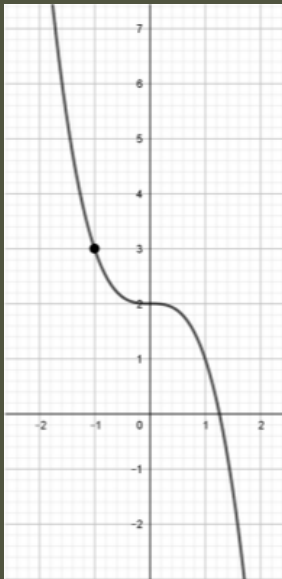
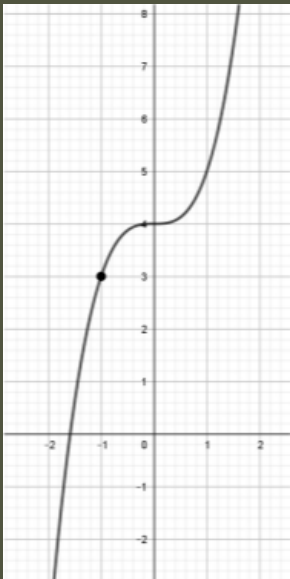


ι) Όχι, δε θα μπορούσε να διέρχεται από το σημείο  $B(2,5)$  γιατί έχουμε δεδομένο ότι η  $f$  είναι γν. γθίνουσα και ότι διέρχεται από το σημείο  $A(-1,3)$  οπότε  $-1 < 2$  και  $f(-1)=3 < f(2)=5$

## Θέμα 2 (15115)

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  γνησίως γθίνουσα στο σύνολο  $\mathbb{R}$  με σύνολο τιμών το  $\mathbb{R}$  της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο  $A(-1,3)$ .

- i) Θα μπορούσε η γραφική παράσταση της  $f$  να διέρχεται και από το σημείο  $B(2,5)$ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)
- ii) Ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις θα μπορούσε να είναι η γραφική παράσταση της  $f$ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)



ii) Η μόνη γραφική παράσταση που ταιριάζει στα δεδομένα μας είναι η  $2^x$