Άλγεβρα Β' Λυκείου

4.1 Πολυώνυμα

Η έννοια του πολυωνύμου

Μονώνυμο

• Καλούμε **μονώνυμο του x** κάθε παράσταση της μορφής αx^{ν}, όπου α είναι ένας πραγματικός αριθμός και ν ένας θετικός ακέραιος.
Μονώνυμο του x καλούμε επίσης και κάθε πραγματικό αριθμό.

Για παράδειγμα, οι παραστάσεις: $2x^3$, $-\frac{3}{5}x^5$, $0x^4$, $2x$ και οι αριθμοί: 2, -3, 0 είναι μονώνυμα του x.

Πολυώνυμο

• Καλούμε **πολυώνυμο του x** κάθε παράσταση της μορφής:

$$\alpha_{\nu}x^{\nu}+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0,$$

όπου ν είναι ένας φυσικός αριθμός και α_0, α_1, ..., α_{ν} είναι πραγματικοί αριθμοί.

Έτσι για παράδειγμα, οι παραστάσεις $3x^3+2x^2-x+2$, $0x^2-5x+1$, $5x^3-\frac{2}{3}x^2+0x+\frac{1}{3}$ και οι αριθμοί 2, 0 κτλ. είναι πολυώνυμα του x.

Όροι, συντελεστές, σταθερός όρος, σταθερά πολυώνυμα, μηδενικό πολυώνυμο

Όροι του πολυωνύμου

$$\alpha_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

όροι του πολυωνύμου

Συντελεστές

$$\alpha_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

συντελεστές του πολυωνύμου

οι αριθμοί μπροστά από τα x

άρα οι αριθμοί $a_\nu, a_{\nu-1}, \ldots, a_1, a_0$ είναι οι συντελεστές ενώ συγκεκριμένα ο a_0 λέγεται **σταθερός όρος** του πολυωνύμου

Όροι, συντελεστές, σταθερός όρος, σταθερά πολυώνυμα, μηδενικό πολυώνυμο

Συντελεστές

$$\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

συντελεστές του πολυωνύμου

οι αριθμοί μπροστά από τα x

άρα οι αριθμοί $a_\nu, a_{\nu-1}, \ldots, a_1, a_0$ είναι οι συντελεστές ενώ συγκεκριμένα ο a_0 λέγεται **σταθερός όρος** του πολυωνύμου

αν όλοι οι συντελεστές είναι μηδέν τότε το πολυώνυμο είναι το **μηδενικό** πολυώνυμο ενώ αν όλοι εκτός από το a_0 είναι μηδεν, τότε το πολυώνυμο είναι το **σταθερό** πολυώνυμο (δεν έχει καθόλου x)

Παραδείγματα:

$3x^3 + 2x^2 - x + 2$, Συντελεστές: 3, 2, -1, 2

$0x^2 - 5x + 1$ Συντελεστές: 0, -5, 1

$5x^3 - \frac{2}{3}x^2 + 0x + \frac{1}{3}$ Συντελεστές: 5, $-\frac{2}{3}$, 0, $\frac{1}{3}$

2 Συντελεστές: 2 (σταθερό πολυώνυμο)

0 Συντελεστές: 0 (σταθερό πολυώνυμο, μηδενικό)

Ισότητα Πολυωνύμων

Η ισότητα μεταξύ δυο πολυωνύμων ορίζεται ως εξής:

Δυο πολυώνυμα

$$\alpha_\mu x^\mu + \ldots\ldots\ldots\ldots + \alpha_1 x + \alpha_0 \text{ και } \beta_\nu x^\nu + \ldots\ldots\ldots\ldots + \beta_1 x + \beta_0, \text{ με } \mu \geq \nu$$

θα λέμε ότι είναι ίσα όταν:

$$\alpha_0 = \beta_0, \quad \alpha_1 = \beta_1, \quad \ldots.., \quad \alpha_\nu = \beta_\nu \text{ και } \alpha_{\nu+1} = \alpha_{\nu+2} = \ldots. = \alpha_\mu = 0$$

Για παράδειγμα τα πολυώνυμα $0x^4 + 0x^3 + 2x^2 - x + 1$ και $2x^2 - x + 1$ είναι ίσα. Επίσης τα πολυώνυμα $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ και $2x + 3$ είναι ίσα αν και μόνο αν $\gamma=3$, $\beta=2$ και $\alpha=0$.

Να βρείτε τους συντελεστές των παρακάτω πολυωνύμων καθώς και το σταθερό τους όρο:

i) $2x^2 + x - 1$

ii) $-3x^5 + \sqrt{3}x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x - 1$

iii) $-\dfrac{3}{2}x^2 + 2\sqrt{3}x + 1$

iv) $3(a^2 + 1)x^2 + (a^2 - 1)x - \dfrac{3}{4}$

Α' Ομάδας σελίδας 131 σχολικού βιβλίου

1. Ποιες από τις παρακάτω παραστάσεις είναι πολυώνυμα του x:

i) $1-x^3$ **ii)** $\alpha^3-3\alpha^2x+3\alpha x^2-x^3$

iii) $x+\frac{1}{x}$ **iv)** $x^4-2x^{\frac{1}{3}}+4x-1$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1° i) Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το πολυώνυμο $P(x)=(\lambda^2-1)x^3+(\lambda^2-3\lambda+2)x+\lambda-1$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

ii) Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες τα πολυώνυμα $Q(x)=\lambda^2x^3+(\lambda-2)x^2+3$ και $R(x)=(5\lambda-6)x^3+(\lambda^2-4)x^2+\lambda+1$ είναι ίσα.

ΛΥΣΗ

i) Το P(x) θα είναι το μηδενικό πολυώνυμο, για εκείνες τις τιμές του λ για τις οποίες συναληθεύουν οι εξισώσεις:

$$\lambda^2-1=0,\ \ \lambda^2-3\lambda+2=0 \text{ και } \lambda-1=0$$

Η κοινή λύση των εξισώσεων αυτών είναι η $\lambda = 1$. Επομένως για $\lambda = 1$ το πολυώνυμο P(x) είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

ii) Τα Q(x) και R(x) θα είναι ίσα για εκείνες τις τιμές του λ για τις οποίες συναληθεύουν οι εξισώσεις:

$$\lambda^2=5\lambda-6, \qquad \lambda-2=\lambda^2-4 \qquad \text{και} \qquad 3=\lambda+1$$

Η κοινή λύση των εξισώσεων αυτών είναι η $\lambda=2$. Επομένως για $\lambda=2$ τα πολυώνυμα Q(x) και R(x) είναι ίσα.

2° Αν $P(x) = x^2 + 3x + \alpha^2 - 1$, να βρεθούν οι τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $P(-1) = 1$.

ΛΥΣΗ

Έχουμε

$$\begin{aligned} P(-1) = 1 &\Leftrightarrow (-1)^2 + 3(-1) + \alpha^2 - 1 = 1 \\ &\Leftrightarrow \alpha^2 - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha = -2 \quad \text{ή} \quad \alpha = 2 \end{aligned}$$

Επομένως οι ζητούμενες τιμές είναι οι: –2, 2.

3. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$, το πολυώνυμο

$$P(x) = (4\mu^3 - \mu)x^3 + 4\left(\mu^2 - \frac{1}{4}\right)x - 2\mu + 1$$

είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

Για να είναι μηδενικό το πολυώνυμο, πρέπει οι συντελεστές να είναι μηδέν.

Οπότε:

$$\left.\begin{aligned} 4\mu^3 - \mu &= 0 \\ \mu\left(\mu^2 - \frac{1}{4}\right) &= 0 \\ -2\mu + 1 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} &\mu(4\mu^2 - 1) = 0 \\ &\mu\left(\mu - \frac{1}{2}\right)\left(\mu + \frac{1}{2}\right) = 0 \\ &2\mu = 1 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} &\mu(2\mu - 1)(2\mu + 1) = 0 \\ &\mu\left(\mu - \frac{1}{2}\right)\left(\mu + \frac{1}{2}\right) = 0 \\ &\mu = \frac{1}{2} \end{aligned}\right\}$$

$\mu = 0$ ή $\mu = \frac{1}{2}$ ή $\mu = -\frac{1}{2}$

4. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ τα πολυώνυμα $P(x) = (\alpha^2 - 3\alpha)x^3 + x^2 + \alpha$ και $Q(x) = -2x^3 + \alpha^2 x^2 + (\alpha^3 - 1)x + 1$ είναι ίσα.

Για να είναι ίσα, θα πρέπει να έχουν ίδιους συντελεστές, οπότε:

x^3 : $\alpha^2 - 3\alpha = -2 \Leftrightarrow \alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0$ $\quad \Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1$

$$\alpha_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2} \begin{cases} \nearrow 2 \\ \searrow 1 \end{cases}$$

x^2 : $\alpha^2 = 1 \Leftrightarrow \alpha = \pm 1$

x : $\alpha^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$

σταθ : $\alpha = 1$

Η κοινή τιμή του α είναι η $\alpha = 1$

Ασκήσεις για εξάσκηση...

4.1.1 Να βρείτε το λ ώστε το πολυώνυμο $P(x)=(\lambda^2-1)x^4+(\lambda^2+\lambda-2)x^2+\lambda^2-4\lambda+3$ να είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

4.1.2 Να βρείτε τα α, β, γ, δ ώστε το πολυώνυμο $P(x)=(\alpha-1)x^3+(2\beta-\alpha+1)x^2+(\alpha+\beta-\gamma)x+(2\alpha+\beta-\gamma+\delta)$ να είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

4.1.3 Να βρείτε το λ ώστε το πολυώνυμο $P(x)=(\lambda^2+\lambda-6)x^3+(\lambda^2-4)x+3\lambda-1$ να είναι σταθερό πολυώνυμο. Ποια είναι η τιμή του;

4.1.4 Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)=2x^3+(\lambda^3-1)x^2+3x+\lambda^2-4\lambda$ και $Q(x)=(\lambda+1)x^3+(\lambda-1)x^2+(\lambda+2)x-3$. Να βρείτε το λ ώστε να είναι ίσα.

4.1.5 Να βρείτε τα α, β, γ αν τα πολυώνυμα $P(x)=\alpha(x+2)(x-1)+\beta x^2-3\beta x+\gamma$ και $Q(x)=3x^2-5x+1$ είναι ίσα.

Ασκήσεις για εξάσκηση...

4.1.6 Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x) = (\kappa - 2)x^2 + (2\lambda + 6)x + \kappa + \lambda - 3$ δεν μπορεί να είναι το μηδενικό για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς κ και λ.

4.1.7 Να βρεθεί για ποιες τιμές των $\kappa, \lambda, \mu \in R$ είναι ίσα τα πολυώνυμα:

$P(x) = \lambda x^2 - (\lambda - \kappa)x + \mu - 2\lambda$ και

$Q(x) = (\mu - \lambda)x^2 + 4x + \kappa + \lambda$.

4.1.8 Να βρεθεί πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει $(2x-1)P(x) = 2x^3 + 5x^2 + 11x - 7$, $x \in R$

4.1.9 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^2 + 2x + 5$

Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός α αν ισχύει

$P(\alpha - 1) = 13$

Βαθμός και αριθμητική τιμή πολυωνύμου

Έστω τώρα ένα πολυώνυμο

$$P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots\dots\dots\dots\dots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

• Αν όλοι οι συντελεστές του είναι ίσοι με μηδέν, τότε το P(x) είναι ίσο με το πολυώνυμο 0 (μηδενικό πολυώνυμο).

• Αν όμως ένας από τους συντελεστές του είναι διαφορετικός από το μηδέν, τότε το P(x) παίρνει τη μορφή:

$$\alpha_\kappa x^\kappa + \alpha_{\kappa-1} x^{\kappa-1} + \dots\dots\dots\dots\dots + \alpha_1 x + \alpha_0, \text{ με } \alpha_\kappa \neq 0$$

Στην περίπτωση αυτή ο αριθμός κ λέγεται **βαθμός** του πολυωνύμου P(x). Είναι φανερό ότι κάθε σταθερό και μη μηδενικό πολυώνυμο έχει βαθμό 0. Για το μηδενικό πολυώνυμο δεν ορίζεται βαθμός.

Έτσι για παράδειγμα το πολυώνυμο $P(x) = -4x^3 + 3x - 7$ είναι $3^{ου}$ βαθμού, ενώ το Q(x) = 7 είναι μηδενικού βαθμού.

Αριθμητική τιμή πολυωνύμου

Έστω ένα πολυώνυμο $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0$. Αν αντικαταστήσουμε το x με έναν ορισμένο πραγματικό αριθμό ρ, τότε ο πραγματικός αριθμός $P(\rho)=\alpha_\nu \rho^\nu+\alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-1}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\alpha_1\rho+\alpha_0$ που προκύπτει λέγεται **αριθμητική τιμή** ή απλά **τιμή** του πολυωνύμου για x=ρ.

Αν είναι **P(ρ)=0,** τότε ο ρ λέγεται **ρίζα** του πολυωνύμου. Για παράδειγμα, η τιμή του πολυωνύμου $P(x)=-x^3+2x^2+4x+1$,
για x=1 είναι $P(1)=-1^3+2\cdot 1^2+4\cdot 1+1=6$, ενώ
για $x=-1$ είναι $P(-1)=-(-1)^3+2\cdot(-1)^2+4\cdot(-1)+1=0$, που σημαίνει ότι ο -1 είναι ρίζα του πολυωνύμου P(x).

Είναι φανερό ότι:

- Το σταθερό πολυώνυμο c έχει τιμή c για όλες τις τιμές του x και
- Τα ίσα πολυώνυμα έχουν ίσες τιμές για όλες τις τιμές του x(*)

5. Να εξετάσετε ποιοι από τους αριθμούς, που δίνονται με τα παρακάτω πολυώνυμα, είναι ρίζες τους.

i) $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x + 7$ $\quad x = -1, \quad x=1$

ii) $Q(x) = -x^4 + 1$ $\quad x = -1, \quad x=1, \quad x=3.$

i) Εξετάζω για $x=-1$: $P(-1) = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 + 2(-1) + 7 = 2\cdot(-1) - 3\cdot 1 - 2 + 7 =$

$= -2 - 3 - 2 + 7 = 0$

άρα το $x=-1$ είναι ρίζα.

Εξετάζω για $x=1$: $P(1) = 2\cdot 1^3 - 3\cdot 1^2 + 2\cdot 1 + 7 = 2 - 3 + 2 + 7 = 8 \neq 0$

άρα το $x=1$ ΔΕΝ είναι ρίζα του $P(x)$

ii) Εξετάζω για $x=-1$: $Q(-1) = -(-1)^4 + 1 = -1 + 1 = 0$ άρα το $x=-1$ είναι ρίζα του $Q(x)$

Εξετάζω για $x=1$: $Q(1) = -1^4 + 1 = -1 + 1 = 0$ άρα το $x=1$ είναι ρίζα του $Q(x)$

Εξετάζω για $x=3$: $Q(3) = -3^4 + 1 = -27 + 1 = -26 \neq 0$ άρα το $x=3$ ΔΕΝ είναι ρίζα.

6. Να βρείτε για ποιες τιμές του $k \in \mathbb{R}$ το 2 είναι ρίζα του πολυωνύμου

$$P(x) = x^3 - kx^2 + 5x + k.$$

Αφού το $x=2$ είναι ρίζα του $P(x)$ θα ισχύει ότι $P(2)=0$

$$P(2) = 2^3 - k\cdot 2^2 + 5\cdot 2 + k = 0$$

$$\Leftrightarrow 8 - 4k + 10 + k = 0$$

$$\Leftrightarrow -3k = -18 \Leftrightarrow k = 6$$

2. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, για τους οποίους το πολυώνυμο $P(x) = 3x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 6$ έχει ρίζες το -2 και το 3.

Ισχύει ότι $P(-2)=0 \Leftrightarrow 3\cdot(-2)^3 + \alpha(-2)^2 + \beta(-2) - 6 = 0$

$\Leftrightarrow 3(-8) + \alpha\cdot 4 - 2\beta - 6 = 0$

$\Leftrightarrow -24 + 4\alpha - 2\beta - 6 = 0 \Leftrightarrow 4\alpha - 2\beta = 30 \overset{\div 2}{\Leftrightarrow} 2\alpha - \beta = 15 \quad (1)$

$P(3)=0 \Leftrightarrow 3\cdot 3^3 + \alpha\cdot 3^2 + \beta\cdot 3 - 6 = 0 \Leftrightarrow 81 + 9\alpha + 3\beta - 6 = 0$

$\Leftrightarrow 9\alpha + 3\beta = -75 \overset{\div 3}{\Leftrightarrow} 3\alpha + \beta = -25 \quad (2)$

Απο (1) λύνω ως προς $\beta = 2\alpha - 15$ και αντικαθιστώ στην (2):

$3\alpha + 2\alpha - 15 = -25 \Leftrightarrow 5\alpha = -10 \Leftrightarrow \alpha = -2$ και αντικαθιστώντας στην (1) έχω:

$2\cdot(-2) - \beta = 15 \Leftrightarrow -4 - \beta = 15 \Leftrightarrow \beta = -19$

3. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ και μ, για τους οποίους το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \lambda x^2 + \mu x + 6$ έχει ρίζα το 1 και ισχύει $P(-2) = -12$.

Ισχύει ότι $P(1) = 0 \Leftrightarrow 2\cdot 1^3 + \lambda\cdot 1^2 + \mu\cdot 1 + 6 = 0 \Leftrightarrow 2 + \lambda + \mu + 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda + \mu = -8$ (1)

επίσης $P(-2) = -12 \Leftrightarrow 2(-2)^3 + \lambda\cdot(-2)^2 + \mu(-2) + 6 = -12 \Leftrightarrow -16 + 4\lambda - 2\mu + 6 = -12 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\lambda - 2\mu = -2 \overset{\div 2}{\Leftrightarrow} 2\lambda - \mu = -1$ (2)

Λύνω την (1) ως προς μ: $\mu = -8 - \lambda$ και αντικαθιστώ στην (2):

$2\lambda - (-8 - \lambda) = -1 \Leftrightarrow 2\lambda + 8 + \lambda = -1 \Leftrightarrow 3\lambda = -9 \Leftrightarrow \lambda = -3.$

άρα από (1) $-3 + \mu = -8 \Leftrightarrow \mu = -5$

4. Να βρείτε το βαθμό του πολυωνύμου $P(x)=(9\lambda^3-4\lambda)x^3+(9\lambda^2-4)x-3\lambda+2$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$.

- Αν $9\lambda^3-4\lambda\neq 0 \Leftrightarrow \lambda(9\lambda^2-4)\neq 0 \Leftrightarrow \lambda(3\lambda-2)(3\lambda+2)\neq 0$

$$\lambda\neq 0 \ , \ \lambda\neq \frac{2}{3} \ , \ \lambda\neq -\frac{2}{3}$$

τότε το $P(x)$ είναι $3^{ου}$ βαθμού.

- Αν $\lambda=0$, τότε $P(x)=-4x+2 \longrightarrow 1^{ου}$ βαθμού
- Αν $\lambda=\frac{2}{3}$, τότε $P(x)=\left[9\left(\frac{2}{3}\right)^2-4\right]x-3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)+2$

$$=\left(\cancel{9}\cdot\frac{4}{\cancel{9}}-4\right)x-2+2 = 0$$

δηλαδή το $P(x)$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο άρα βαθμού 0.

- Αν $\lambda=-\frac{2}{3}$ τότε $P(x)=\left[9\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^2-4\right]x-3\left(-\frac{2}{3}\right)+2$

$$=\left(\cancel{9}\cdot\frac{4}{\cancel{9}}-4\right)x+2+2 = 4$$

δηλαδή $0^{ου}$ βαθμού (σταθερό πολυώνυμο)

Ασκήσεις:

1. Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$ $2^{ου}$ βαθμού έτσι ώστε $P(0)=6$, $P(2)=0$ και $P(-1)=12$.

2. Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$, $2^{ου}$ βαθμού τέτοιο ώστε $P(0)=3$ και $P(x)-P(x-1)=2x+1$.

3. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)=\left(\lambda^2-\frac{1}{2}\lambda\right)x^2+(6\lambda-1)x+2\lambda+27$ και $Q(x)=33x^2+(\lambda^2-1)x+\lambda^2+3$.

Να βρείτε το λ ώστε: **i**) $P(x)=Q(x)$ **ii**) Το $P(x)$ να είναι 2ου βαθμού.

4. Να βρείτε τον βαθμό του $P(x)=(\lambda^3-4\lambda)x^3+(\lambda^2-2\lambda)x^2+(\lambda^2-5\lambda+6)x+4\lambda+8$ για τις διάφορες τιμές του λ.

5. Να βρείτε τα λ, μ ώστε το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\lambda x^2+(\mu-2)x+6$ να έχει ρίζες -1 και 2.

6. Να βρείτε το λ ώστε το $P(x)=\lambda^2x^3+(-4\lambda-2\lambda^2)x^2+(3+8\lambda)x-6$ να έχει ρίζα το 1.

7. Να βρείτε τα α, β αν τα πολυώνυμα $P(x)=x^2-(2\alpha+1)x+2\beta$ και $Q(x)=x^2-(\beta+2)x+5\alpha$ έχουν κοινή ρίζα το 3.

8. Να βρείτε τα α, β αν το πολυώνυμο $P(x)=-2\beta x^3+\alpha x^2(x+2)+(\alpha-\beta)(\alpha+\beta-x)$ έχει σταθερό όρο το 0 και το άθροισμα των συντελεστών είναι 5.