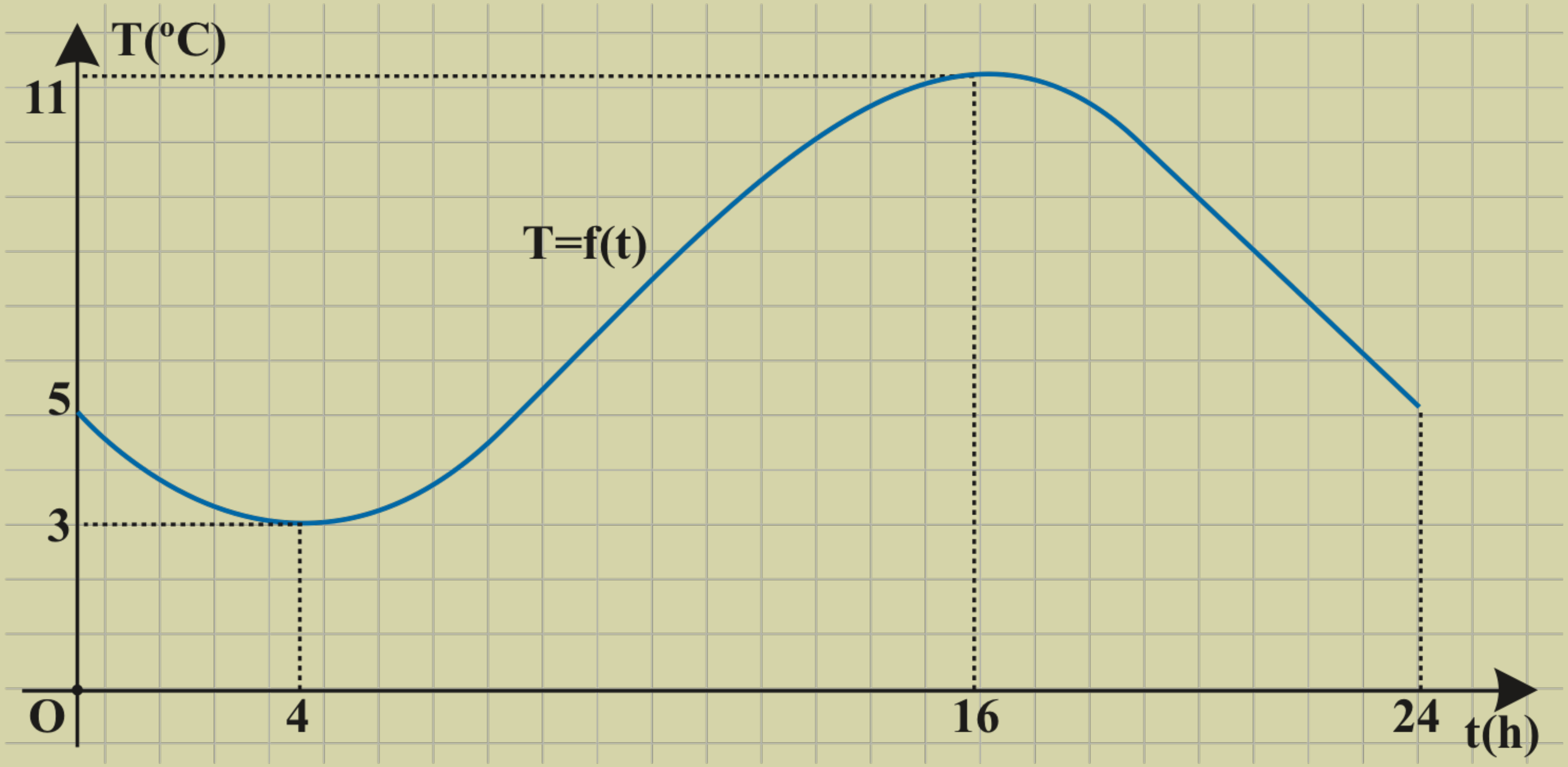
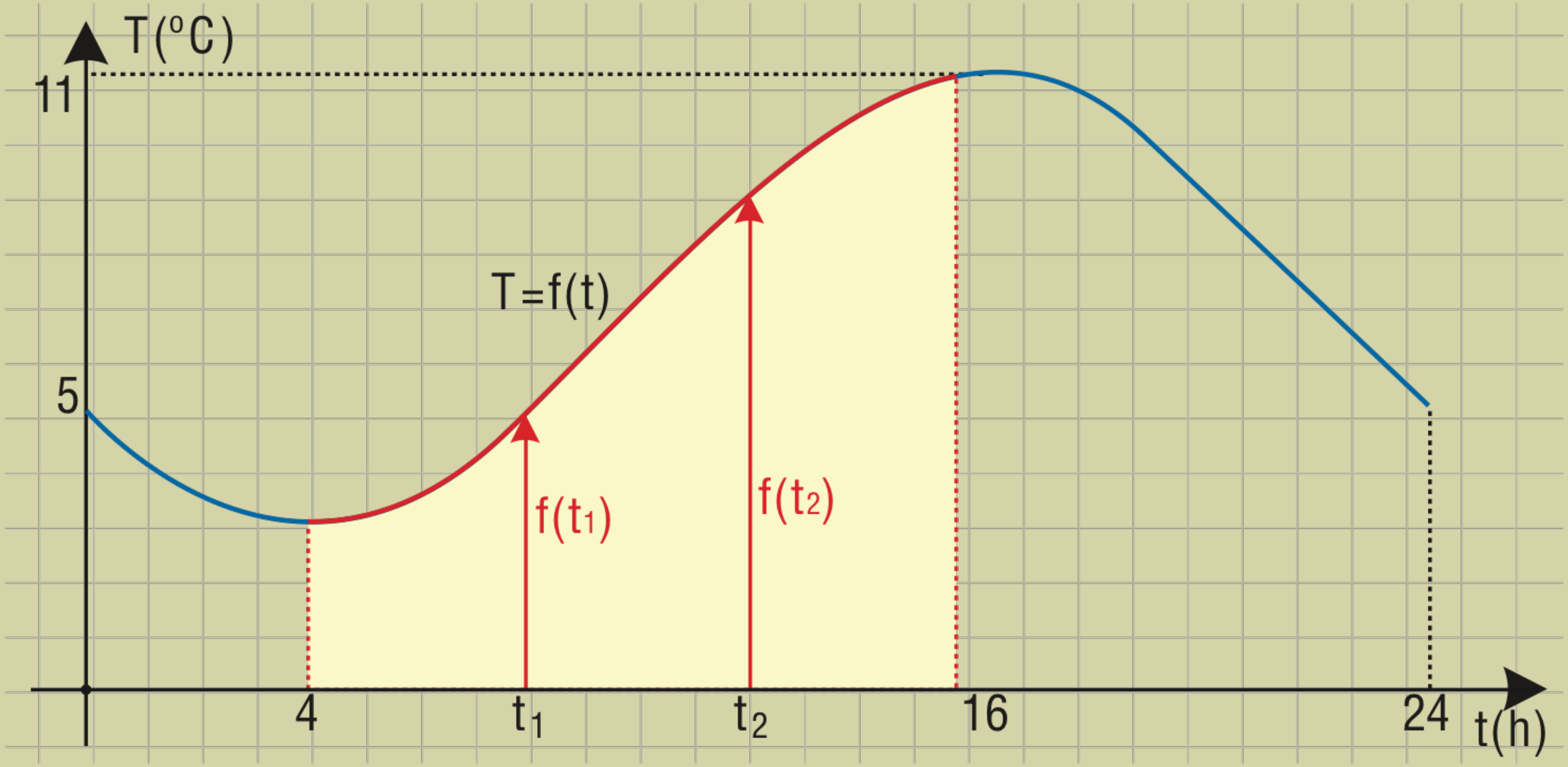
Άλγεβρα Β' Λυκείου

Μάθημα 3: Μονοτονία συνάρτησης

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $T = f(t)$ που εκφράζει τη θερμοκρασία T ενός τόπου συναρτήσει του χρόνου t κατά το χρονικό διάστημα από τα μεσάνυχτα μιας ημέρας ($t = 0$) μέχρι τα μεσάνυχτα της επόμενης μέρας ($t = 24$).



α) Παρατηρούμε ότι στο διάστημα [4,16] η γραφική παράσταση της θερμοκρασίας ανέρχεται.



Αυτό σημαίνει ότι στο διάστημα αυτό, με την πάροδο του χρόνου, η θερμοκρασία αυξάνεται, δηλαδή για οποιαδήποτε $t_1, t_2 \in [4,16]$ με $t_1 < t_2$ ισχύει:

$$f(t_1) < f(t_2)$$

Για το λόγο αυτό λέμε ότι η συνάρτηση $T = f(t)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[4,16]$. Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$$f(x_1) < f(x_2)$$

Για να δηλώσουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ γράφουμε $f \uparrow \Delta$.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = 2x - 3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

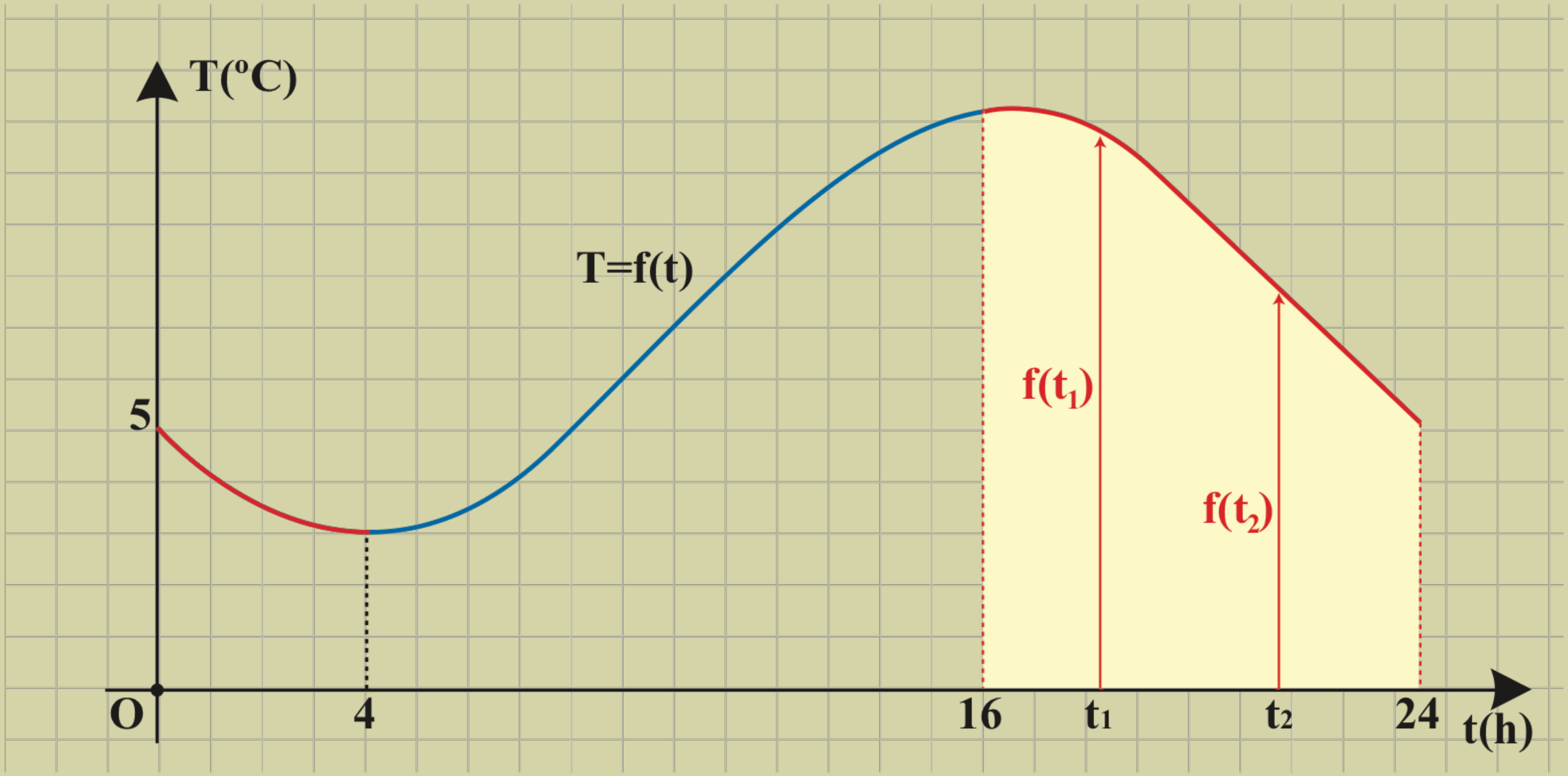
Πράγματι έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, με $x_1 < x_2$. Τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\Rightarrow 2x_1 < 2x_2 \\ &\Rightarrow 2x_1 - 3 < 2x_2 - 3 \\ &\Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \end{aligned}$$

Γενικά:

Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, με $\alpha > 0$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Στο ίδιο σχήμα, παρατηρούμε επιπλέον ότι στο διάστημα [16,24] η γραφική παράσταση της θερμοκρασίας κατέρχεται.



Αυτό σημαίνει ότι στο διάστημα αυτό, με την πάροδο του χρόνου, η θερμοκρασία μειώνεται, δηλαδή για οποιαδήποτε $t_1, t_2 \in [16, 24]$ με $t_1 < t_2$ ισχύει:

$$f(t_1) > f(t_2)$$

Για το λόγο αυτό λέμε ότι η συνάρτηση $T = f(t)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα [16,24]. Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως φθίνουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$$f(x_1) > f(x_2)$$

Για να δηλώσουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα Δ γράφουμε f ↧Δ.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = -2x + 5$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Πράγματι έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, με $x_1 < x_2$. Τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\Rightarrow -2x_1 > -2x_2 \\ &\Rightarrow -2x_1 + 5 > -2x_2 + 5 \\ &\Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \end{aligned}$$

Γενικά:

Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, με $\alpha < 0$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Μια συνάρτηση που είναι είτε γνησίως αύξουσα είτε γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ λέγεται **γνησίως μονότονη** στο Δ.

1. Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία οι παρακάτω συναρτήσεις:

α. $f(x) = -2x + 3$

β. $f(x) = 2 - \sqrt{3x-1}$

γ. $f(x) = \sqrt{x+1} + 3$

δ. $f(x) = x + \sqrt{x-2}$

ε. $f(x) = \dfrac{2}{x} + 1$

στ. $f(x) = \dfrac{1}{x^2} - 1$

ζ. $f(x) = 1 - \dfrac{3}{x^2}$

η. $f(x) = 2|x-1| + 3\sqrt{(x-2)^2}$

α) Η f είναι ευθεία με $\alpha < 0$ $(\alpha = -2)$, άρα η $f \downarrow$ στο $\mathbb{R}$.

β) Θα πρέπει $3x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 3x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}$. Έστω $x_1, x_2 \in [\frac{1}{3}, +\infty)$ με $x_1 < x_2$. Τότε $3x_1 - 1 < 3x_2 - 1 \Leftrightarrow \sqrt{3x_1-1} < \sqrt{3x_2-1} \Leftrightarrow -\sqrt{3x_1-1} > -\sqrt{3x_2-1}$

$\Leftrightarrow 2 - \sqrt{3x_1 - 1} > 2 - \sqrt{3x_2 - 1} \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$ άρα η $f \downarrow$

γ) Θα πρέπει $x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$. Έστω $x_1, x_2 \in (-1, +\infty)$ με $x_1 < x_2$. Τότε

$\sqrt{x_1+1} < \sqrt{x_2+1} \Leftrightarrow \sqrt{x_1+1} + 3 < \sqrt{x_2+1} + 3 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ άρα $f \uparrow$.

1. Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία οι παρακάτω συναρτήσεις:

α. $f(x) = -2x + 3$

β. $f(x) = 2 - \sqrt{3x-1}$

γ. $f(x) = \sqrt{x+1} + 3$

δ. $f(x) = x + \sqrt{x-2}$

ε. $f(x) = \dfrac{2}{x} + 1$

στ. $f(x) = \dfrac{1}{x^2} - 1$

ζ. $f(x) = 1 - \dfrac{3}{x^2}$

η. $f(x) = 2|x-1| + 3\sqrt{(x-2)^2}$

δ) Πρέπει $x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$. Έστω x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ (1)

. Τότε: $x_1 - 2 < x_2 - 2 \Leftrightarrow \sqrt{x_1-2} < \sqrt{x_2-2}$ (2)

Αν προσθέσω τις (1) + (2) έχω:

$x_1 + \sqrt{x_1-2} < x_2 + \sqrt{x_2-2} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ άρα $f \uparrow$.

ε) Θα πρέπει $x \neq 0$. Έστω x_1, x_2 με $x_1 < x_2$

- Αν $x_1, x_2 < 0$, τότε $\dfrac{1}{x_1} > \dfrac{1}{x_2} \Leftrightarrow \dfrac{2}{x_1} + 1 > \dfrac{2}{x_2} + 1 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$ $f \downarrow$

- Αν $x_1, x_2 > 0$, τότε $\dfrac{1}{x_1} > \dfrac{1}{x_2} \Leftrightarrow \dfrac{2}{x_1} + 1 > \dfrac{2}{x_2} + 1 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$ $f \downarrow$

1. Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία οι παρακάτω συναρτήσεις:

α. $f(x) = -2x + 3$

β. $f(x) = 2 - \sqrt{3x-1}$

γ. $f(x) = \sqrt{x+1} + 3$

δ. $f(x) = x + \sqrt{x-2}$

ε. $f(x) = \dfrac{2}{x} + 1$

στ. $f(x) = \dfrac{1}{x^2} - 1$

ζ. $f(x) = 1 - \dfrac{3}{x^2}$

η. $f(x) = 2|x-1| + 3\sqrt{(x-2)^2}$

στ) Πρέπει $x \neq 0$. Έστω x_1, x_2 με $x_1 < x_2$.

- Αν $x_1, x_2 < 0$ τότε $x_1^2 > x_2^2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x_1^2} < \dfrac{1}{x_2^2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x_1^2} - 1 < \dfrac{1}{x_2^2} - 1 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

  άρα $f \uparrow$.

- Αν $x_1, x_2 > 0$ τότε $x_1^2 < x_2^2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x_1^2} > \dfrac{1}{x_2^2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x_1^2} - 1 > \dfrac{1}{x_2^2} - 1 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$ $\downarrow$.

ζ) Πρέπει $x \neq 0$. Έστω x_1, x_2 με $x_1 < x_2$

- Αν $x_1 < x_2 < 0$ τότε $x_1^2 > x_2^2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x_1^2} < \dfrac{1}{x_2^2} \Leftrightarrow -\dfrac{3}{x_1^2} > -\dfrac{3}{x_2^2} \Leftrightarrow 1 - \dfrac{3}{x_1^2} > 1 - \dfrac{3}{x_2^2}$

  $f(x_1) > f(x_2)$ $f \downarrow$.