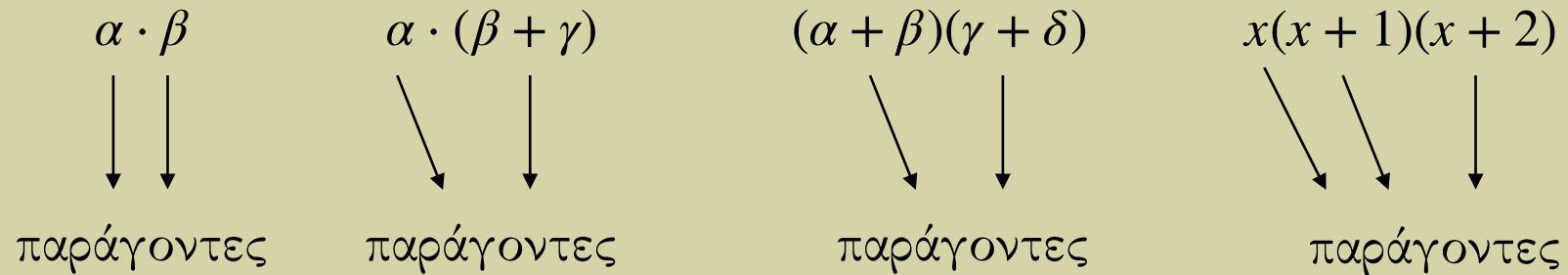


Μαθηματικά Γ' Γυμνασίου

Παραγοντοποίηση

Παράγοντες

είναι τα συστατικά ενός γινομένου, δηλαδή αυτά που πολλαπλασιάζονται για να φτιάξουν ένα γινόμενο



$$-3(2x^2 - 1)(x^3 + 6)(x - 5)$$

The diagram shows the factorization of a complex polynomial. The polynomial $-3(2x^2 - 1)(x^3 + 6)(x - 5)$ is at the top, and arrows point downwards to each of its factors: -3 , $2x^2 - 1$, $x^3 + 6$, and $x - 5$. Below these factors is the label "παράγοντες".

Η διαδικασία με την οποία μια παράσταση, που είναι άθροισμα, μετατρέπεται σε γινόμενο παραγόντων, λέγεται **παραγοντοποίηση**.

Για παράδειγμα, η παράσταση $\pi R^2 - \pi r^2$ με τη βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας γράφεται $\pi(R^2 - r^2)$ και σύμφωνα με την ταυτότητα $(R + r)(R - r) = R^2 - r^2$, παραγοντοποιείται ως εξής:

$$\pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) = \pi(R + r)(R - r)$$

Ποιες από τις παρακάτω παραστάσεις είναι γινόμενα παραγόντων;

- α) $2(x - y)(x + y)$ β) $2 + (x - y)(x + y)$ γ) $4(\alpha - \beta)^2$ δ) $4 + (\alpha - \beta)^2$
ε) $(x + 2y)x - y$ στ) $(x + 2y)(x - y)$ ζ) $(\alpha + \beta)(\alpha + 3\beta)$
η) $(\alpha + \beta)(\alpha + 3\beta) + 1$.

- α) Είναι γινόμενο παραγόντων, του 2, του $(x-y)$ και του $(x+y)$
- β) Δεν είναι γινόμενο παραγόντων αφού η παράσταση αποτελείται από ένα άθροισμα δύο όρων
- γ) Είναι γινόμενο παραγόντων, του 4 και του $(\alpha - \beta)^2$
- δ) Δεν είναι γινόμενο παραγόντων αφού η παράσταση αποτελείται από ένα άθροισμα δύο όρων
του 4 και του $(\alpha - \beta)^2$
- ε) Δεν είναι γινόμενο παραγόντων αφού αποτελείται από άθροισμα δύο όρων, του $(x + 2y)x$
και του y
- στ) Είναι γινόμενο παραγόντων, του $x - y$ και του $x + y$
- ζ) Είναι γινόμενο παραγόντων, του $\alpha + \beta$ και του $\alpha + 3\beta$
- η) Δεν είναι γινόμενο παραγόντων αφού είναι άθροισμα δύο όρων

Κοινός παράγοντας

Επιμεριστική Ιδιότητα

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

Ας τη γράψουμε ανάποδα...

$$\alpha\beta + \alpha\gamma = \alpha \cdot (\beta + \gamma)$$

Παρατηρώ ότι στο αριστερό μέλος εχω ένα άθροισμα δύο όρων.

Κάθε όρος αποτελείται από ένα γινόμενο παραγοντων και μάλιστα κάθε γινόμενο παραγόντων έχει έναν ίδιο παράγοντα (το α). Αυτό που κάνουμε στην παραγοντοποίηση είναι να γράψουμε τον ίδιο παράγοντα μία φορά “απ’ έξω” και μέσα στην παρένθεση να γράψουμε αυτά που περισσεύουν από τον κάθε όρο

Η παραγοντοποίηση λοιπόν είναι
μία διαδικασία όπως η επιμεριστική
ιδιότητα αλλά ανάποδα.

$$5x + 5y = 5(x + y)$$

$$4x + 3x = x(4 + 3)$$

Άσκηση 2 σελίδας 59 σχ. βιβλίου

$$8x + 16 = 8x + 8 \cdot 2 = 8(x + 2)$$

$$3ay - y^2 = 3ay - y \cdot y = y(3a - y)$$

$$6x^2 + 12x = 6x \cdot x + 6 \cdot 2x = 6x(x + 2)$$

$$-4x^2 + 8x = -4x \cdot x + 2 \cdot 4x = 4x(-x + 2)$$

$$\sqrt{2}x + \sqrt{2} = \sqrt{2}(x + 1)$$

$$(x - 1)^2 - (x - 1) = (x - 1) \cdot (x - 1) - (x - 1) = (x - 1)(x - 1 - 1) = (x - 1)(x - 2)$$

2

Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες.

α) $8x + 16 = 8(\dots x + \underline{2} \dots)$

β) $3ay - y^2 = y(\underline{3} \alpha - y \dots)$

γ) $6x^2 + 12x = \dots \underline{6} x \dots (x + 2)$

δ) $-4x^2 + 8x = -4x(\underline{x} - \underline{2} \dots)$

ε) $\sqrt{2}x + \sqrt{2} = \sqrt{2}(\dots x + \underline{1} \dots)$

στ) $(x - 1)^2 - (x - 1) = (x - 1)(\underline{x - 1} - \underline{1} \dots)$

1

Na παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

a) $3\alpha + 6\beta$

δ) $-9x^2 - 6x$

ζ) $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \alpha\beta$

β) $2x - 8$

ε) $8\alpha^2\beta + 4\alpha\beta^2$

η) $2\alpha^3 - 4\alpha^2 + 6\alpha^2\beta$

γ) $8\omega^2 + 6\omega$

στ) $2x^2 - 2xy + 2x$

θ) $\sqrt{2}xy - \sqrt{18}y + \sqrt{8}y^2$

α) $3\alpha + 6\beta = 3(\alpha + 2\beta)$

β) $2x - 8 = 2(x - 4)$

γ) $8\omega^2 + 6\omega = 2\omega(4\omega + 3)$

δ) $-9x^2 - 6x = -3x(3x + 2)$

ε) $8\alpha^2\beta + 4\alpha\beta^2 = 4\alpha\beta(2\alpha + \beta)$

στ) $2x^2 - 2xy + 2x = 2x(x - y + 1)$

θ) $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \alpha\beta = \alpha\beta(\alpha + \beta - 1)$

η) $2\alpha^3 - 4\alpha^2 + 6\alpha^2\beta = 2\alpha^2(\alpha - 2 + 3\beta)$

θ) $\sqrt{2}xy - \sqrt{18}y + \sqrt{8}y^2 = \sqrt{2}xy - \sqrt{2 \cdot 9}y + \sqrt{2 \cdot 4}y^2 =$
 $= \sqrt{2}xy - \sqrt{2} \cdot \sqrt{9}y + \sqrt{2} \cdot \sqrt{4}y^2$
 $= \sqrt{2}xy - 3\sqrt{2}y + 2\sqrt{2}y^2$
 $= \sqrt{2}y(x - 3 + 2y)$

2

Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

- | | | |
|--------------------------------------|-----------------------------------|---------------------------------------|
| a) $x(a - \beta) + y(a - \beta)$ | b) $\alpha(x + y) + \beta(x + y)$ | c) $(3x - 1)(x - 2) - (x + 4)(x - 2)$ |
| d) $\alpha^2(a - 2) - 3(2 - \alpha)$ | e) $4x(x - 1) - x + 1$ | f) $2x^2(x - 3) - 6x(x - 3)^2$ |

$$\text{a)} \quad x(a - \beta) + y(a - \beta) = (a - \beta)(x + y)$$

$$\text{b)} \quad \alpha(x + y) + \beta(x + y) = (x + y)(\alpha + \beta)$$

$$\text{c)} \quad (3x - 1)(x - 2) - (x + 4)(x - 2) = (x - 2)[(3x - 1) - (x + 4)] \\ = (x - 2)(3x - 1 - x - 4) \\ = (x - 2)(2x - 5)$$

$$\text{d)} \quad \alpha^2(a - 2) - 3(2 - \alpha) = \alpha^2(\alpha - 2) + 3(-2 + \alpha) = \alpha^2(\alpha - 2) + 3(\alpha - 2) \\ = (\alpha - 2)(\alpha^2 + 3)$$

$$\text{e)} \quad 4x(x - 1) - x + 1 = 4x\underline{(x - 1)} - \underline{(x - 1)} = (x - 1)(4x - 1)$$

$$\text{f)} \quad 2\underline{x^2}(x - 3) - 6\underline{x}(x - 3)^2 = 2x(x - 3)(x - 3) = 2x(x - 3)(x - 3x + 9)$$

Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:

a) $12x^2y - 30xy^2 + 6x^2y^2$ b) $\alpha(\omega - x) + 3\beta(x - \omega)$ c) $3(2x - 1) + x(4x - 2)$

a) Κοιτάζω τους κοινούς παράγοντες που συμπέρχουν στους 3 όρους.

$$6xy (2x^2 - 5y + xy)$$

b) $\alpha(\omega - x) + 3(x - \omega)$ Εδώ παρατηρώ ότι οι δύο παρενθέσεις μοιάζουν λίγο.

Αναφωτίζω αν μπορώ να τις κάνω ίδιες. Αν αλλάξω τα πρόσημα στη δύνητρη παρένθεση τότε θίγνονται ίδιοι οι παράγοντες.

$$\alpha(\omega - x) - 3(\omega - x) = (\omega - x) \cdot (\alpha - 3)$$

$$\begin{aligned} c) \quad 3(2x-1) + x(4x-2) &= 3(2x-1) + x \cdot 2(2x-1) = \\ &= (2x-1)(3+2x) \end{aligned}$$

3

i) Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha) x^2 + x \quad \beta) 2y^2 - 5y \quad \gamma) \omega(\omega - 3) - 2(3 - \omega) \quad \delta) \alpha(3\alpha + 1) - 4\alpha$$

ii) Να επιλύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) x^2 + x = 0 \quad \beta) 2y^2 = 5y \quad \gamma) \omega(\omega - 3) - 2(3 - \omega) = 0 \quad \delta) \alpha(3\alpha + 1) = 4\alpha$$

$$(i) \alpha) x^2 + x = x(x+1)$$

$$\beta) 2y^2 - 5y = y(2y-5)$$

$$\gamma) \omega(\omega-3) - 2(3-\omega) = \omega(\omega-3) - 2(\omega-3)$$

$$= (\omega-3)(\omega-2)$$

$$\delta) \underline{\alpha(3\alpha+1)-4\alpha} = \alpha \cdot (3\alpha+1-4) = \alpha(3\alpha-3) = 3\alpha(\alpha-1)$$

$$(ii) \alpha) x^2 + x = 0, \quad x(x+1) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x+1 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \nearrow \\ \text{or} \\ \searrow \end{matrix} \quad x = -1.$$

$$\beta) 2y^2 = 5y \Rightarrow 2y^2 - 5y = 0$$

$$\gamma(2y-5) = 0 \quad \begin{cases} \nearrow \\ \text{or} \\ \searrow \end{cases} \quad \begin{aligned} y &= 0 \\ 2y-5 &= 0 \end{aligned}$$

$$\gamma) \omega(\omega-3) - 2(3-\omega) = 0 \Rightarrow (\omega-3)(\omega-2) = 0 \quad \begin{cases} \nearrow \\ \text{or} \\ \searrow \end{cases} \quad \begin{aligned} \omega-3 &= 0 \Rightarrow \omega = 3 \\ \omega-2 &= 0 \Rightarrow \omega = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2y &= 5 \\ y &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

$$\delta) \alpha(3\alpha+1) = 4\alpha \Rightarrow \alpha(3\alpha+1) - 4\alpha = 0 \Rightarrow 3\alpha(\alpha-1) = 0$$

$$\begin{cases} \nearrow \\ \text{or} \\ \searrow \end{cases} \quad \begin{aligned} \alpha &= 0 \\ \alpha-1 &= 0 \Rightarrow \alpha = 1. \end{aligned}$$

Ασκήσεις:

1) Να γίνουν γινόμενο:

$$\alpha) 5\alpha^2xy - 10\alpha^5x^3 =$$

$$\beta) 6x^2 + 3x =$$

$$\gamma) \alpha(x+y) + \beta(x+y) =$$

$$\delta) x(\alpha - 2\beta) + y(2\beta - \alpha) =$$

$$\varepsilon) (2\alpha - \beta)(x-y) - (3\alpha + 2\beta)(y-x) =$$

$$\sigma) (\alpha(x-y) - y + x) =$$

$$\zeta) \alpha(x-y)^2 - \beta(x-y) =$$

$$\eta) (\alpha + \beta)(x+y) - \gamma x - \gamma y =$$

Παραγοντοποίηση κατά ομάδες

Στην παράσταση $ax + ay + 2x + 2y$, δεν υπάρχει κοινός παράγοντας σε όλους τους όρους της. Αν όμως βγάλουμε κοινό παράγοντα, από τους δύο πρώτους όρους το a και από τους δύο τελευταίους το 2 , τότε σχηματίζονται δύο όροι με κοινό παράγοντα τον $x + y$. Έτσι, η παράσταση παραγοντοποιείται ως εξής:

$$ax + ay + 2x + 2y = \underbrace{a(x + y)}_{\text{κοινό παράγοντα}} + \underbrace{2(x + y)}_{\text{κοινό παράγοντα}} = (x + y)(a + 2)$$

Την προηγούμενη παράσταση μπορούμε να τη χωρίσουμε και σε διαφορετικές ομάδες. Το αποτέλεσμα όμως της παραγοντοποίησης είναι και πάλι το ίδιο. Πράγματι, έχουμε:

$$ax + ay + 2x + 2y = \underbrace{x(a + 2)}_{\text{κοινό παράγοντα}} + \underbrace{y(a + 2)}_{\text{κοινό παράγοντα}} = (a + 2)(x + y)$$

Παραδείγματα

Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:

$$a) 3x^3 - 12x^2 + 5x - 20$$

$$\beta) \alpha\beta - 3\alpha - 3\beta + 9$$

$$\gamma) 3x^2 + 5xy + 2y^2$$

Λύση

$$a) 3x^3 - 12x^2 + 5x - 20 = 3x^2(x - 4) + 5(x - 4) = (x - 4)(3x^2 + 5)$$

$$\beta) \alpha\beta - 3\alpha - 3\beta + 9 = \alpha(\beta - 3) - 3(\beta - 3) = (\beta - 3)(\alpha - 3)$$

$$\begin{aligned} \gamma) 3x^2 + 5xy + 2y^2 &= 3x^2 + 3xy + 2xy + 2y^2 = \\ &= 3x(x + y) + 2y(x + y) = \\ &= (x + y)(3x + 2y). \end{aligned}$$

Μερικές παραστάσεις παραγοντοποιούνται κατά ομάδες, αν διασπάσουμε κατάλληλα έναν ή περισσότερους όρους
π.χ. $5xy = 3xy + 2xy$

4

Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

- | | | |
|-------------------------------------|---------------------------------------|--|
| α) $x^2 + xy + \alpha x + \alpha y$ | β) $x^3 - x^2 + x - 1$ | γ) $x^3 - 5x^2 + 4x - 20$ |
| δ) $2x^3 - 3x^2 + 4x - 6$ | ε) $4x^2 - 8x - \alpha x + 2\alpha$ | στ) $9\alpha\beta - 18\beta^2 + 10\beta - 5\alpha$ |
| ζ) $12x^2 - 8xy - 15x + 10y$ | η) $x^3 + \sqrt{2}x^2 + x + \sqrt{2}$ | θ) $\sqrt{6}x^2 + 2\sqrt{2}x - \sqrt{3}x - 2$ |

$$\alpha) \underline{x^2} + \underline{xy} + \overline{\alpha}x + \overline{\alpha}y = x(\underline{x+y}) + \alpha(\underline{x+y}) = (x+y)(x+\alpha)$$

$$\beta) \underline{x^3} - \underline{x^2} + x - 1 = x^2(\underline{x-1}) + (\underline{x-1}) = (x-1)(x^2+1)$$

$$\gamma) \underline{x^3} - \underline{5x^2} + \widehat{4x} - \widehat{20} = x^2(\underline{x-5}) + 4(\underline{x-5}) = (x-5)(x^2+4)$$

$$\delta) \underline{2x^3} - \underline{3x^2} + \widehat{4x} - \widehat{6} = x^2(\underline{2x-3}) + 2(\underline{2x-3}) = (2x-3)(x^2+2)$$

$$\varepsilon) \underline{4x^2} - \underline{8x} - \widehat{\alpha x} + \widehat{2\alpha} = 4x(\underline{x-2}) - \alpha(\underline{x-2}) = (x-2)(4x-\alpha)$$

4

Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

- | | | |
|-------------------------------------|---------------------------------------|--|
| a) $x^2 + xy + \alpha x + \alpha y$ | β) $x^3 - x^2 + x - 1$ | γ) $x^3 - 5x^2 + 4x - 20$ |
| δ) $2x^3 - 3x^2 + 4x - 6$ | ε) $4x^2 - 8x - \alpha x + 2\alpha$ | στ) $9\alpha\beta - 18\beta^2 + 10\beta - 5\alpha$ |
| ζ) $12x^2 - 8xy - 15x + 10y$ | η) $x^3 + \sqrt{2}x^2 + x + \sqrt{2}$ | θ) $\sqrt{6}x^2 + 2\sqrt{2}x - \sqrt{3}x - 2$ |

$$\sigma\tau) \quad \underline{9\alpha\beta} - \underline{18\beta^2} + \underline{10\beta} - \underline{5\alpha} = 9\beta(\alpha - 2\beta) - 5(\alpha - 2\beta) = (\alpha - 2\beta)(9\beta - 5)$$

$$\zeta) \quad \underline{12x^2} - \underline{8xy} - \underline{15x} + \underline{10y} = 4x(\underline{3x} - \underline{2y}) - 5(\underline{3x} - \underline{2y}) = (\underline{3x} - \underline{2y})(4x - 5)$$

$$\eta) \quad \underline{x^3} + \underline{\sqrt{2}x^2} + x + \sqrt{2} = x^2(x + \sqrt{2}) + x + \sqrt{2} = (x + \sqrt{2})(x^2 + x)$$

$$\theta) \quad \sqrt{6}x^2 + 2\sqrt{2}x - \sqrt{3}x - 2 = \underline{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}x^2} + \underline{2\sqrt{2}x} - \sqrt{3}x - 2 = \sqrt{2}x(\underline{\sqrt{3}x + 2}) - (\underline{\sqrt{3}x + 2}) = \\ = (\sqrt{3}x + 2)(\sqrt{2}x - 1)$$

5

Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

a) $7\alpha^2 + 10\alpha\beta + 3\beta^2$

β) $5x^2 - 8xy + 3y^2$

γ) $3x^2 - xy - 2y^2$

$$\alpha) \ 7\alpha^2 + 10\alpha\beta + 3\beta^2 = \underbrace{7\alpha^2}_{\text{σπάμε } 7 \text{ σε } 10} + \underbrace{7\alpha\beta}_{\text{σπάμε } 7 \text{ σε } 10} + \underbrace{3\beta^2}_{\text{σπάμε } 3 \text{ σε } 2} = 7\alpha(\underbrace{\alpha + \beta}_{\text{δημιουργηθούν 2 ομάδες}}) + 3\beta(\underbrace{\alpha + \beta}_{\text{δημιουργηθούν 2 ομάδες}}) = (\alpha + \beta)(7\alpha + 3\beta)$$

↑
σπάμε 7 σε 10 ώστε να

δημιουργηθούν 2 ομάδες

$$\beta) \ 5x^2 - 8xy + 3y^2 = \underbrace{5x^2}_{\text{ομοίως σπάμε } 5} - \underbrace{5xy}_{\text{σπάμε } 5} - 3xy + 3y^2 = 5x(\underbrace{x - y}_{\text{ομοίως σπάμε } 5}) - 3y(\underbrace{x - y}_{\text{ομοίως σπάμε } 5}) = (x - y)(5x - 3y)$$

$$\gamma) \ 3x^2 - xy - 2y^2 = 3x^2 - (3-2)xy - 2y^2 = \underbrace{3x^2}_{\text{το γράφω σαν } (3-2)xy} - \underbrace{3xy}_{\text{σπάμε } 3 σε } + \underbrace{2xy}_{\text{σπάμε } 2 σε } - \underbrace{2y^2}_{\text{σπάμε } 2 σε } = 3x(\underbrace{x - y}_{\text{σπάμε } 3 σε }) + 2y(\underbrace{x - y}_{\text{σπάμε } 2 σε }) = (x - y)(3x + 2y)$$

7

Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$\text{a)} 2\alpha^2 - 2\alpha + \alpha\beta - \beta + \alpha x - x$$

$$\text{β)} 2\alpha\beta - 4\beta + 5\alpha - 10 + 2\alpha\gamma - 4\gamma$$

$$\text{a)} 2\overbrace{\alpha^2} - 2\overbrace{\alpha} + \overbrace{\alpha\beta - \beta} + \overbrace{\alpha x - x} = 2\alpha(\underbrace{\alpha-1}) + \beta(\underbrace{\alpha-1}) + x(\underbrace{\alpha-1}) = (\alpha-1)(2\alpha + \beta + x)$$

$$\text{β)} 2\overbrace{\alpha\beta} - 4\overbrace{\beta} + \overbrace{5\alpha - 10} + \overbrace{2\alpha\gamma - 4\gamma} = 2\beta(\underbrace{\alpha-2}) + 5(\underbrace{\alpha-2}) + 2\gamma(\underbrace{\alpha-2}) = (\alpha-2)(2\beta + 5 + 2\gamma)$$

Ασκήσεις:

1) Να γίνουν γινόμενο:

α) $\alpha^2 - 4\alpha + \alpha\gamma - 4\gamma$

δ) $\alpha^2x - \alpha^2y - \beta^2y + \beta^2x$

ζ) $2x^4 - 2x^3 + 3x - 3$

ι) $\alpha^5 - 1 - \alpha + \alpha^4$

β) $\alpha^2\gamma^2 - \alpha\gamma\delta + \alpha\beta\gamma - \beta\delta$

ε) $xy^2 + x - 1 - y^2$

η) $10x^3 - 6y^3 + 4xy^2 - 15x^2y$

ια) $3\alpha^3 - 6\alpha^2 + 5\alpha - 10$

γ) $x^3 + 7x^2 + 3x + 21$

στ) $\alpha^3 - \alpha^2\beta - \alpha\beta^2 + \beta^3$

θ) $x^2 + xy - x - y$

Διαφορά Τετραγώνων

Αν εναλλάξουμε τα μέλη της ταυτότητας

$$(a + \beta)(a - \beta) = a^2 - \beta^2, \text{ τότε γράφεται και ως εξής:}$$

$$\mathbf{a^2 - \beta^2 = (a + \beta)(a - \beta)}$$

Σύμφωνα με την ταυτότητα αυτή, μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε μια παράσταση που είναι διαφορά τετραγώνων, π.χ. $a^2 - 9 = a^2 - 3^2 = (a + 3)(a - 3)$.

Παραδείγματα

Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις: α) $4\beta^2 - 25$ β) $(3x - 1)^2 - 81$ γ) $a^2 - 7$.

Λύση

$$\alpha) 4\beta^2 - 25 = (2\beta)^2 - 5^2 = (2\beta + 5)(2\beta - 5)$$

$$\begin{aligned} \beta) (3x - 1)^2 - 81 &= (3x - 1)^2 - 9^2 = \\ &= (3x - 1 + 9)(3x - 1 - 9) = \\ &= (3x + 8)(3x - 10) \end{aligned}$$

$$\gamma) a^2 - 7 = a^2 - (\sqrt{7})^2 = (a - \sqrt{7})(a + \sqrt{7})$$

Για να σχηματίσουμε διαφορά τετραγώνων εκφράζουμε κάθε όρο ως τετράγωνο μιας παράστασης.

8

Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$\alpha) x^2 - 9$$

$$\beta) 16x^2 - 1$$

$$\gamma) \alpha^2 - 9\beta^2$$

$$\delta) \alpha^2\beta^2 - 4$$

$$\varepsilon) 36\omega^2 - (\omega + 5)^2$$

$$\sigma) 4(x + 1)^2 - 9(x - 2)^2$$

$$\zeta) x^2 - \frac{1}{16}$$

$$\eta) x^2 - 3$$

$$\theta) x^2 - 2y^2$$

$$\alpha) x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x-3)(x+3)$$

$$\beta) 16x^2 - 1 = (4x)^2 - 1^2 = (4x-1)(4x+1)$$

$$\gamma) \alpha^2 - 9\beta^2 = \alpha^2 - (3\beta)^2 = (\alpha-3\beta)(\alpha+3\beta)$$

$$\delta) \alpha^2\beta^2 - 4 = (\alpha\beta)^2 - 2^2 = (\alpha\beta-2)(\alpha\beta+2)$$

$$\varepsilon) 36\omega^2 - (\omega+5)^2 = (6\omega)^2 - (\omega+5)^2 = [6\omega - (\omega+5)] \cdot [6\omega + (\omega+5)] = (6\omega-\omega-5)(6\omega+\omega+5)$$

$$= (5\omega-5)(7\omega+5)$$

$$\sigma) 4(x+1)^2 - 9(x-2)^2 = 2^2(x+1)^2 - 3^2(x-2)^2 = [2(x+1)]^2 - [3(x-2)]^2 = 5(\omega-1)(7\omega+5)$$

$$\zeta) x^2 - \frac{1}{16} = x^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \left(x - \frac{1}{4}\right)\left(x + \frac{1}{4}\right)$$

$$\eta) x^2 - 3 = x^2 - \sqrt{3}^2 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$$

$$\theta) x^2 - 2y^2 = x^2 - (\sqrt{2}y)^2 = x^2 - (\sqrt{2}y)^2 = (x - \sqrt{2}y)(x + \sqrt{2}y)$$

9

Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

- α) $2x^2 - 32$ β) $28 - 7y^2$ γ) $2x^3 - 2x$ δ) $5ax^2 - 80a$ ε) $2(x - 1)^2 - 8$

$$\alpha) \quad 2x^2 - 32 = 2(x^2 - 16) = 2(x^2 - 4^2) = 2(x - 2)(x + 2)$$

$$\beta) \quad 28 - 7y^2 = 7(4 - y^2) = 7(2^2 - y^2) = 7(2 - y)(2 + y)$$

$$\gamma) \quad 2x^3 - 2x = 2x(x^2 - 1) = 2x(x^2 - 1^2) = 2x(x - 1)(x + 1)$$

$$\delta) \quad 5ax^2 - 80a = 5a(x^2 - 16) = 5a(x^2 - 4^2) = 5a(x - 2)(x + 2)$$

$$\varepsilon) \quad 2(x - 1)^2 - 8 = 2[(x - 1)^2 - 4] = 2[(x - 1)^2 - 2^2] = 2(x - 1 - 2)(x - 1 + 2) = 2(x - 3)(x + 1)$$

11

Να επιλύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) x^2 - 49 = 0 \quad \beta) 9x^3 - 4x = 0 \quad \gamma) x(x + 1)^2 = 4x \quad \delta) (x + 2)^3 = x + 2$$

$$\alpha) x^2 - 49 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 7^2 = 0 \Leftrightarrow (x - 7)(x + 7) = 0$$

$$\begin{aligned} &\xrightarrow{x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = 7} \\ &\xrightarrow{x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = -7} \end{aligned}$$

$$\beta) 9x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(9x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x((3x)^2 - 2^2) = 0 \Leftrightarrow x(3x - 2)(3x + 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{x=0} \quad \text{ἢ} \quad 3x - 2 = 0 \quad \text{ἢ} \quad 3x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = \frac{2}{3}}$$

$$\Leftrightarrow 3x = -2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x}{3} = \frac{-2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = -\frac{2}{3}}$$

11

Να επιλύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) x^2 - 49 = 0$$

$$\beta) 9x^3 - 4x = 0$$

$$\gamma) x(x + 1)^2 = 4x$$

$$\delta) (x + 2)^3 = x + 2$$

$$\begin{aligned} \gamma) \quad x(x+1)^2 = 4x &\Leftrightarrow x(x+1)^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x[(x+1)^2 - 4] = 0 \Leftrightarrow x[(x+1)^2 - 2^2] = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x(x+1-2)(x+1+2) = 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+3) = 0 \end{aligned}$$

$x = 0$
 $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$
 $x+3=0 \Leftrightarrow x=-3.$

$$\begin{aligned} \delta) \quad (x+2)^3 = x+2 &\Leftrightarrow (x+2)^3 - (x+2) = 0 \Leftrightarrow (x+2)((x+2)^2 - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+2)(x+2-1)(x+2+1) = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x+1)(x+3) = 0 \end{aligned}$$

$x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$
 $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$
 $x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$

Ασκήσεις:

1) Να γίνουν γινόμενο:

α) $3x^3 - 3x$

ε) $9\alpha^4 - 16$

η) $(x-4)(2-1)$

β) $\alpha^3 - \alpha$

στ) $3\alpha^3\beta - 27\alpha\beta^3$

θ) $9 - (\alpha - \beta)^2$.

γ) $\alpha^4 - \beta^4$

ζ) $5(x^2 - 4) - (x-2)^2$

δ) $5\alpha^3\beta - 5\alpha\beta^3$

2) Να γίνουν γινόμενο:

α) $\alpha^2x^2 + 4 - 4x^2 - \alpha^2$

δ) $x^2y^2 - 9y^2 - x^2 + 9$

ζ) $\frac{\alpha^2}{9} - \frac{4}{25}$

β) $x^4 + x^2y^2 - x^2 - y^2$

ε) $\alpha^2x - \alpha^2y + y - x$

η) $(2\alpha + \beta)^2 - (2\alpha - \beta)^2$

γ) $\alpha x^2 - \alpha y^2 + \beta x^2 - \beta y^2$

στ) $\alpha^5 - 1 + \alpha^4 - \alpha$

θ) $(x+y)(2\alpha - \beta) + (x^2 - y^2)$

Ανάπτυγμα Τετραγώνου

ε) Ανάπτυγμα τετραγώνου

Οι ταυτότητες $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ και $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ γράφονται και ως εξής:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

Σύμφωνα με τις ταυτότητες αυτές, μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε μια παράσταση που είναι ανάπτυγμα τετραγώνου (τέλειο τετράγωνο), π.χ.

$$x^2 + 4x + 4 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 = (x + 2)^2$$

$$y^2 - 6y + 9 = y^2 - 2 \cdot y \cdot 3 + 3^2 = (y - 3)^2$$

Οι παραστάσεις $(x + 2)^2$ και $(y - 3)^2$ είναι γινόμενα παραγόντων, αφού $(x + 2)^2 = (x + 2)(x + 2)$ και $(y - 3)^2 = (y - 3)(y - 3)$

Παραδείγματα

Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:

a) $4a^2 + 12a + 9$

β) $a^2 - 10ab + 25b^2$

γ) $-4y^2 + 4y - 1$

Λύση

a) $4a^2 + 12a + 9 = (2a)^2 + 2 \cdot 2a \cdot 3 + 3^2 = (2a + 3)^2$

$$\beta) \alpha^2 - 10\alpha\beta + 25\beta^2 = \alpha^2 - 2 \cdot \alpha \cdot 5\beta + (5\beta)^2 = \\ = (\alpha - 5\beta)^2$$

$$\gamma) -4y^2 + 4y - 1 = -(4y^2 - 4y + 1) = \\ = -[(2y)^2 - 2 \cdot 2y \cdot 1 + 1^2] = \\ = -(2y - 1)^2$$

Γράφουμε κάθε παράσταση
ως ανάπτυγμα τετραγώνου της
μορφής
 $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ ή $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

Ερώτηση κατανόησης

8

Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες.

α) $x^2 + 6x + 9 = (\dots)^2$

β) $4a^2 - 4a + 1 = (\dots)^2$

γ) $y^4 - 2y^2 + 1 = (\dots)^2$

δ) $25 + 10x^3 + x^6 = (\dots)^2$

15

Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

- α) $x^2 - 2x + 1$ β) $y^2 + 4y + 4$ γ) $\omega^2 - 6\omega + 9$ δ) $a^2 + 10a + 25$
 ε) $1 - 4\beta + 4\beta^2$ στ) $9x^4 + 6x^2 + 1$ ζ) $4y^2 - 12y + 9$ η) $16x^2 + 8xy + y^2$
 θ) $25a^2 - 10a\beta + \beta^2$ ι) $(a + \beta)^2 - 2(a + \beta) + 1$ ια) $\frac{y^2}{9} - 2y + 9$ ιβ) $x^2 + x + \frac{1}{4}$

$$\alpha) x^2 - 2x + 1 = x^2 - 2 \cdot 1x + 1^2 = (x-1)^2$$

$$\beta) y^2 + 4y + 4 = y^2 + 2 \cdot 2y + 2^2 = (y+2)^2$$

$$\gamma) \omega^2 - 6\omega + 9 = \omega^2 - 2 \cdot 3\omega + 3^2 = (\omega-3)^2$$

$$\delta) a^2 + 10a + 25 = a^2 + 2 \cdot 5a + 5^2 = (a+5)^2$$

$$\varepsilon) 1 - 4\beta + 4\beta^2 = 4\beta^2 - 4\beta + 1 = \underbrace{(2\beta)^2}_{(2\beta-1)^2} - 2 \cdot 2\beta + \underbrace{1^2}_{(2\beta-1)^2} = (2\beta-1)^2$$

$$\sigma\tau) 9x^4 + 6x^2 + 1 = (3x^2)^2 + 2 \cdot 3x^2 + 1^2 = (3x^2 + 1)^2$$

$$\vartheta) 4y^2 - 12y + 9 = (2y)^2 - 2 \cdot 6y + 3^2 = (2y-3)^2$$

$$\eta) 16x^2 + 8xy + y^2 = (4x)^2 + 2 \cdot 4x y + y^2 = (4x+y)^2$$

$$\theta) 25a^2 - 10a\beta + \beta^2 = (5a)^2 - 2 \cdot 5a\beta + \beta^2 = (5a-\beta)^2$$

$$\iota) (a+\beta)^2 - 2(a+\beta) + 1 = (a+\beta-1)^2$$

$$\text{iα) } \frac{y^2}{9} - 2y + 9 = \left(\frac{y}{3}\right)^2 - 2 \cdot 1y + 3^2 = \left(\frac{y}{3}-3\right)^2$$

$$\text{iβ) } x^2 + x + \frac{1}{4} = x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$$

16

Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

- α) $3x^2 + 24x + 48$ β) $-y^2 + 4y - 4$ γ) $2\alpha^2 - 8\alpha\beta + 8\beta^2$ δ) $4\alpha^3 + 12\alpha^2 + 9\alpha$

$$\text{α)} \quad 3x^2 + 24x + 48 = 3(x^2 + 8x + 16) = 3(x^2 + 2 \cdot 4x + 4^2) = 3(x+4)^2$$

$$\text{β)} \quad -y^2 + 4y - 4 = - (y^2 - 4y + 4) = - (y^2 - 2 \cdot 2y + 2^2) = - (y-2)^2$$

$$\text{γ)} \quad 2\alpha^2 - 8\alpha\beta + 8\beta^2 = 2(\alpha^2 - 4\alpha\beta + 4\beta^2) = 2(\alpha^2 - 2 \cdot 2\alpha\beta + (2\beta)^2) = \\ = 2(\alpha - 2\beta)^2$$

$$\text{δ)} \quad 4\alpha^3 + 12\alpha^2 + 9\alpha = \alpha(4\alpha^2 + 12\alpha + 9) = \alpha((2\alpha)^2 + 2 \cdot 2\alpha \cdot 3 + 3^2) = \alpha(2\alpha + 3)^2$$

Ασκήσεις:

1) Να γίνουν γινόμενο:

α) $x^4 - 2x^2 + 1$

β) $3\alpha^2 - 6\alpha + 3$

γ) $4\alpha^3 + 24\alpha^2 + 36\alpha$

δ) $9x^2 + 4 - 12x$

ε) $4x^4 + 4x^2 + 1$

στ) $x - 20xy + 100xy^2$

ζ) $x + x^3 - 2x^2$

2) Να γίνουν γινόμενο οι παραστάσεις :

α. $x^2 + 2x + 1$

β. $x^2 - 4x - 4$

γ. $-4x^2 - 4x - 1$

δ. $\kappa^2 - 2\kappa\lambda + \lambda^2$

ε. $4\alpha^2 + 12\alpha + 9$

στ. $25\alpha^2 - 20\alpha\beta + 4\beta^2$

ζ. $16x^2 + 40xy + 25y^2$

η. $-25x^2 + 40xy - 16y^2$

θ. $49\alpha^2 - 14\alpha\beta + \beta^2$

ι. $25\kappa^2 - 60\kappa\lambda + 36\lambda^2$

ια. $\alpha^2\beta^2 - 14\alpha\beta + 49$

ιβ. $x^2y^2 - 8xy + 16$

ιγ. $4x^2 + 9 + 12x$

ιδ. $\psi^2 + 9\chi^2 - 6\chi\psi$