Άλγεβρα Β' Λυκείου

4.2 Διαίρεση Πολυωνύμων

Αλγοριθμική διαίρεση

Γνωρίζουμε από το Γυμνάσιο την έννοια της Ευκλείδειας ή αλγοριθμικής διαίρεσης μεταξύ θετικών ακέραιων αριθμών. Συγκεκριμένα γνωρίζουμε ότι:

Για κάθε ζεύγος φυσικών αριθμών Δ και δ με $\delta \neq 0$, υπάρχουν δύο μοναδικοί φυσικοί αριθμοί π και υ, τέτοιοι ώστε

$$\Delta = \delta\pi + \upsilon, \qquad 0 \leq \upsilon < \delta \tag{1}$$

Η ισότητα αυτή είναι γνωστή ως **ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης**. Ο Δ λέγεται **διαιρετέος**, ο δ **διαιρέτης**, ο π **πηλίκο** και ο υ **υπόλοιπο** της διαίρεσης.

Η έννοια της διαίρεσης των πολυωνύμων είναι ανάλογη με την Ευκλείδεια διαίρεση που αναφέραμε παραπάνω. Συγκεκριμένα ισχύει:

$$10 : 3 = ?$$

$$\underset{\Delta}{10} = \underset{\delta}{3} \cdot \underset{\pi}{3} + \underset{\upsilon}{1}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ

(Ταυτότητα της διαίρεσης) Για κάθε ζεύγος πολυωνύμων $\Delta(x)$ και $\delta(x)$ με $\delta(x) \neq 0$ υπάρχουν δύο μοναδικά πολυώνυμα $\pi(x)$ και $\upsilon(x)$, τέτοια ώστε:

$$\Delta(x) = \delta(x)\pi(x) + \upsilon(x), \tag{2}$$

όπου το $\upsilon(x)$ ή είναι το μηδενικό πολυώνυμο ή έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του $\delta(x)$.

Όπως και στη διαίρεση μεταξύ φυσικών αριθμών το $\Delta(x)$ λέγεται **διαιρετέος**, το $\delta(x)$ **διαιρέτης**, το $\pi(x)$ **πηλίκο** και το $\upsilon(x)$ **υπόλοιπο** της διαίρεσης.

Παράδειγμα διαίρεσης πολυωνύμων

1. Κάνουμε το σχήμα της διαίρεσης και γράφουμε τα δύο πολυώνυμα.

$$\begin{array}{l|l} x^3-5x^2+2x-1 & x-3 \\ \hline \end{array}$$

2. Βρίσκουμε τον πρώτο όρο x^2 του πηλίκου διαιρώντας τον πρώτο όρο x^3 του διαιρετέου με τον πρώτο όρο x του διαιρέτη.

$$\begin{array}{l|l} x^3-5x^2+2x-1 & x-3 \\ \cline{2-2} & x^2 \end{array}$$

3. Πολλαπλασιάζουμε το x^2 με $x-3$ και το γινόμενο x^3-3x^2 το αφαιρούμε από το διαιρετέο. Βρίσκουμε έτσι το πρώτο μερικό υπόλοιπο $-2x^2+2x-1$.

$$\begin{array}{r|l} x^3-5x^2+2x-1 & x-3 \\ \cline{2-2} -x^3+3x^2 \qquad\quad & x^2 \\ \hline -2x^2+2x-1 & \end{array}$$

4. Επαναλαμβάνουμε τα βήματα 2 και 3 με νέο διαιρετέο το $-2x^2+2x-1$. Βρίσκουμε έτσι το δεύτερο μερικό υπόλοιπο $-4x-1$.

$$\begin{array}{r|l} x^3-5x^2+2x-1 & x-3 \\ \cline{2-2} -x^3+3x^2 \qquad\quad & x^2-2x \\ \cline{1-1} -2x^2+2x-1 & \\ 2x^2-6x \qquad & \\ \cline{1-1} -4x-1 & \end{array}$$

5. Τέλος επαναλαμβάνουμε τα βήματα 2 και 3 με νέο διαιρετέο το $-4x-1$. Βρίσκουμε έτσι το τελικό υπόλοιπο -13 και το πηλίκο x^2-2x-4.

$$\begin{array}{r|l} x^3-5x^2+2x-1 & x-3 \\ \cline{2-2} -x^3+3x^2 \qquad\quad & x^2-2x-4 \\ \cline{1-1} -2x^2+2x-1 & \\ 2x^2-6x \qquad & \\ \cline{1-1} -4x-1 & \\ 4x-12 & \\ \cline{1-1} -13 & \end{array}$$

Παρατηρούμε ότι ισχύει η ισότητα:

$$x^3-5x^2+2x-1=(x-3)\cdot(x^2-2x-4)+(-13)$$

(διαιρετέος) = (διαιρέτης) • (πηλίκο) + (υπόλοιπο)

που εκφράζει την ταυτότητα της διαίρεσης.

Αν ακολουθήσουμε την παραπάνω διαδικασία για τα πολυώνυμα $4x^4 + x^2 - 3x - 1$ και $2x^2 + x$, έχουμε:

$$
\begin{array}{r|l}
4x^4 + 0x^3 + x^2 - 3x - 1 & 2x^2 + x \\ \cline{2-2}
-4x^4 - 2x^3 \qquad\qquad\qquad & 2x^2 - x + 1 \\ \cline{1-1}
-2x^3 + x^2 - 3x - 1 & \\
2x^3 + x^2 \qquad\quad\;\; & \\ \cline{1-1}
2x^2 - 3x - 1 & \\
-2x^2 - x \quad\;\; & \\ \cline{1-1}
-4x - 1 &
\end{array}
$$

Ομοίως για τα πολυώνυμα $2x^3 + 2x^2 - x - 1$ και $2x^2 - 1$ έχουμε

$$
\begin{array}{r|l}
2x^3 + 2x^2 - x - 1 & 2x^2 - 1 \\ \cline{2-2}
-2x^3 \qquad\quad + x \qquad\; & x + 1 \\ \cline{1-1}
2x^2 \qquad - 1 & \\
-2x^2 \qquad + 1 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Παρατηρήσεις:

1. Βάζουμε όλες τις δυνάμεις του x ακόμη κι αυτές που λείπουν (έχουν συντελεστή μηδέν)
2. Η διαίρεση σταματάει όταν το υπόλοιπο βγεί μικρότερου βαθμού από το διαιρέτη ή όταν βγει μηδέν

Γενικά, αν σε μια διαίρεση είναι $υ(x) = 0$, τότε η διαίρεση λέγεται **τέλεια** και η ταυτότητα της διαίρεσης γράφεται

$$Δ(x) = δ(x) \cdot π(x)$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το $δ(x)$ **διαιρεί** το $Δ(x)$ ή ότι το $δ(x)$ είναι **παράγοντας** του $Δ(x)$ ή ότι το $Δ(x)$ **διαιρείται με το** $δ(x)$ ή ακόμη ότι το $δ(x)$ είναι **διαιρέτης** του $Δ(x)$. Έτσι για παράδειγμα το $2x^2 - 1$ είναι παράγοντας ή διαιρέτης του $2x^3 + 2x^2 - x - 1$.

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να κάνετε τις παρακάτω διαιρέσεις και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης σε κάθε περίπτωση.

i) $(3x^3+6x^2-17x+20):(x+3)$ **ii)** $(x^4-81):(x-3)$

iii) $(24x^5+20x^3-16x^2-15):(6x^2+5)$ **iv)** $(2x^4+4x^3-5x^2+3x-2):(x^2+2x-3)$

v) $x^4:(x-1)^3$ **vi)** $(x^5+7):(x^3-1)$

(i)

$$\begin{array}{rrrr|l}
\cancel{3x^3} & +6x^2 & -17x & +20 & x+3 \\ \hline
-\cancel{3x^3} & -9x^2 & & & 3x^2-3x-8 \\ \hline
 & -\cancel{3x^2} & -17x & +20 & \\
 & +\cancel{3x^2} & +9x & & \\ \hline
 & & -\cancel{8x} & +20 & \\
 & & +\cancel{8x} & +24 & \\ \hline
 & & & 44 &
\end{array}$$

Άρα :

$$3x^3+6x^2-17x+20=(3x^2-3x+8)(x+3)+44.$$

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να κάνετε τις παρακάτω διαιρέσεις και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης σε κάθε περίπτωση.

i) $(3x^3+6x^2-17x+20):(x+3)$ **ii)** $(x^4-81):(x-3)$

iii) $(24x^5+20x^3-16x^2-15):(6x^2+5)$ **iv)** $(2x^4+4x^3-5x^2+3x-2):(x^2+2x-3)$

v) $x^4:(x-1)^3$ **vi)** $(x^5+7):(x^3-1)$

ii)

$$\begin{array}{l|l}
\cancel{x^4}+0x^3+0x^2+0x-81 & x-3 \\ \hline
\cancel{-x^4}+3x^3 & x^3+3x^2+9x+27 \\ \cline{1-1}
\quad \cancel{3x^3}+0x^2+0x-81 & \\
\quad \cancel{-3x^3}+9x^2 & \\ \cline{1-1}
\qquad \cancel{9x^2}+0x-81 & \\
\qquad \cancel{-9x^2}+27x & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad \cancel{27x}-\cancel{81} & \\
\qquad\quad \cancel{-27x}+\cancel{81} & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Άρα

$$x^4-81=(x-3)(x^3+3x^2+9x+27)$$

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να κάνετε τις παρακάτω διαιρέσεις και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης σε κάθε περίπτωση.

i) $(3x^3+6x^2-17x+20):(x+3)$ **ii)** $(x^4-81):(x-3)$

iii) $(24x^5+20x^3-16x^2-15):(6x^2+5)$ **iv)** $(2x^4+4x^3-5x^2+3x-2):(x^2+2x-3)$

v) $x^4:(x-1)^3$ **vi)** $(x^5+7):(x^3-1)$

iii)

$$
\begin{array}{l|l}
\cancel{24x^5}+0x^4+\cancel{20x^3}-16x^2+0x-15 & 6x^2+0x+5 \\
\cancel{-24x^5} \qquad\qquad -\cancel{20x^3} & \hline 4x^3-\frac{16}{6} \\
\hline
\qquad\qquad\qquad \cancel{-16x^2}+0x-15 & \\
\qquad\qquad\qquad \cancel{+16x^2}-0x-\frac{5\cdot\cancel{16}\,8}{\cancel{6}\,3} & \\
\hline
\end{array}
$$

$$-15-\frac{40}{3}=\frac{-45-40}{3}=\frac{-85}{3}$$

άρα $24x^5-16x^2-15=(6x^2+5)\left(4x^3-\frac{16}{6}\right)-\frac{85}{3}$

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να κάνετε τις παρακάτω διαιρέσεις και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης σε κάθε περίπτωση.

i) $(3x^3+6x^2-17x+20):(x+3)$ **ii)** $(x^4-81):(x-3)$

iii) $(24x^5+20x^3-16x^2-15):(6x^2+5)$ **iv)** $(2x^4+4x^3-5x^2+3x-2):(x^2+2x-3)$

v) $x^4:(x-1)^3$ **vi)** $(x^5+7):(x^3-1)$

ιv)

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
\cancel{2x^4} & +4x^3 & -5x^2 & +3x & -2 & x^2-2x-3 \\
\cline{6-6}
\cancel{-2x^4} & +4x^3 & +6x^2 & & & 2x^2+8x+17 \\
\cline{1-3}
 & \cancel{8x^3} & +x^2 & +3x & -2 & \\
 & \cancel{-8x^3} & +16x^2 & +24x & & \\
\cline{2-4}
 & & \cancel{17x^2} & +27x & -2 & \\
 & & \cancel{-17x^2} & +34x & +51 & \\
\cline{3-5}
 & & & 61x & +49 &
\end{array}
$$

άρα $2x^4+4x^3-5x^2+3x-2=(x^2-2x-3)(2x^2+8x+17)+61x+49$

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να κάνετε τις παρακάτω διαιρέσεις και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης σε κάθε περίπτωση.

i) $(3x^3+6x^2-17x+20):(x+3)$ **ii)** $(x^4-81):(x-3)$

iii) $(24x^5+20x^3-16x^2-15):(6x^2+5)$ **iv)** $(2x^4+4x^3-5x^2+3x-2):(x^2+2x-3)$

v) $x^4:(x-1)^3$ **vi)** $(x^5+7):(x^3-1)$

v) $(x-1)^3 = x^3-3x^2+3x-1$ οπότε

$$\begin{array}{r|l} \cancel{x^4}+0x^3+0x^2+0x+0 & x^3-3x^2+3x-1 \\ \cline{2-2} -\cancel{x^4}+3x^3-3x^2+x & x+3 \\ \cline{1-1} \cancel{3x^3}-3x^2+x+0 & \\ -\cancel{3x^3}+9x^2-9x+3 & \\ \cline{1-1} 6x^2-8x+3 & \end{array}$$

Άρα:

$$x^4 = (x-1)^3(x+3) + 6x^2-8x+3$$

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να κάνετε τις παρακάτω διαιρέσεις και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης σε κάθε περίπτωση.

i) $(3x^3+6x^2-17x+20):(x+3)$ **ii)** $(x^4-81):(x-3)$

iii) $(24x^5+20x^3-16x^2-15):(6x^2+5)$ **iv)** $(2x^4+4x^3-5x^2+3x-2):(x^2+2x-3)$

v) $x^4:(x-1)^3$ **vi)** $(x^5+7):(x^3-1)$

vi)

$$
\begin{array}{l|l}
\cancel{x^5}+0x^4+0x^3+0x^2+0x+7 & x^3+0x^2+0x-1 \\
\hline
-\cancel{x^5}+0x^4+0x^3+x^2 & x^2 \\
\hline
x^2+0x+7 &
\end{array}
$$

Άρα $x^5+7=(x^3-1)x^2+x^2+7$

10. Να κάνετε τις διαιρέσεις:

i) $(3x^2 - 2\alpha x - 8\alpha^2):(x - 2\alpha)$ **ii)** $(x^3 + \alpha x^2 - \alpha^2 x - \alpha^3):(x + \alpha)$

i)
$$
\begin{array}{rrr|l}
\cancel{3x^2} & -2\alpha x & -8\alpha^2 & x - 2\alpha \\
\hline
-\cancel{3x^2} & +6\alpha x & & 3x + 4\alpha \\
\cline{1-3}
 & \cancel{4\alpha x} & -8\alpha^2 & \\
 & -\cancel{4\alpha x} & +8\alpha^2 & \\
\cline{2-3}
 & & 0 &
\end{array}
$$

ii)
$$
\begin{array}{rrrr|l}
\cancel{x^3} & +\cancel{\alpha x^2} & -\alpha^2 x & -\alpha^3 & x + \alpha \\
\hline
-\cancel{x^3} & -\cancel{\alpha x^2} & & & x^2 - \alpha^2 \\
\cline{1-2}
 & & -\cancel{\alpha^2 x} & -\cancel{\alpha^3} & \\
 & & +\cancel{\alpha^2 x} & +\cancel{\alpha^3} & \\
\cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

Ασκήσεις για το σπίτι

1. Να γίνουν οι διαιρέσεις:

α. $(2x^5-x^3+2x^2-9):(x^2-1)$

β. $(x^4-7x^3+2x-15):(x^3+5)$

γ. $[7x^3-(9\alpha+7\alpha^2)x+9\alpha^2]:(x-\alpha)$

δ. $(x^4+3x^2-4x+2):(x^2+x+1)$

ε. $(x^3-3x^2+3x):(x+3)$

στ. $(x^4-3\alpha x^3+6\alpha^2x^2-3\alpha^3x+\alpha^4):(x^2-\alpha x+\alpha^2)$

ζ. $(2x^4-7x^3+18x+2):(x^2-3x+1)$

η. $(x^6-2x):(x^3+1)$

2. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^4-8x^3+(5\alpha-1)x^2+8x-3\alpha-6$, $\alpha\in R$.

α. Να κάνετε τη διαίρεση του $P(x)$ δια του x^2-1.

β. Να βρείτε το α ώστε η παραπάνω διαίρεση να είναι τέλεια.

3. Να βρείτε το πολυώνυμο $\delta(x)$, το οποίο διαιρεί το $P(x)=x^3-3x^2+7x-5$ και αφήνει πηλίκο x^2+2 και υπόλοιπο $5x+1$.

Διαίρεση πολυωνύμου με $x - \rho$

Η ταυτότητα της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $x-\rho$ γράφεται. $$P(x)=(x-\rho)\pi(x)+\upsilon(x)$$

Επειδή ο διαιρέτης $x-\rho$ είναι πρώτου βαθμού, το υπόλοιπο της διαίρεσης θα είναι ένα σταθερό πολυώνυμο υ. Έτσι έχουμε:

$$P(x)=(x-\rho)\pi(x)+\upsilon$$

και, αν θέσουμε $x=\rho$, παίρνουμε

$$P(\rho)=(\rho-\rho)\pi(\rho)+\upsilon=0+\upsilon=\upsilon$$

Επομένως

$$\boxed{P(x)=(x-\rho)\pi(x)+P(\rho)}$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

ΘΕΩΡΗΜΑ Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x-\rho$ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για $x=\rho$. Είναι δηλαδή $\upsilon=P(\rho)$

Για παράδειγμα, το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x) = x^3 + 3x^2 - 13x - 15$ με το $x - 2$ είναι $υ = P(2) = 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 13 \cdot 2 - 15 = -21$, ενώ με το x+1 που γράφεται $x - (-1)$, είναι $υ = P(-1) = (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 - 13 \cdot (-1) - 15 = 0$. Παρατηρούμε ότι:

- $P(-1) = 0$, δηλαδή ότι το -1 είναι **ρίζα** του P(x) και
- $P(x) = (x+1)π(x) + 0 = (x+1)π(x)$, δηλαδή ότι το x+1 είναι **παράγοντας** του P(x).

Γενικά ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ Ένα πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το x–ρ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του P(x), δηλαδή αν και μόνο αν

$$P(ρ) = 0.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ Ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-\rho$ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του $P(x)$, δηλαδή αν και μόνο αν $P(\rho) = 0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ότι το $x-\rho$ είναι παράγοντας του $P(x)$. Τότε

$$P(x) = (x-\rho)\pi(x)$$

Από την ισότητα αυτή για $x = \rho$ παίρνουμε

$$P(\rho) = (\rho-\rho)\pi(\rho) = 0,$$

που σημαίνει ότι το ρ είναι ρίζα του $P(x)$.

Αντιστρόφως: Έστω ότι το ρ είναι ρίζα του $P(x)$, δηλαδή ισχύει $P(\rho) = 0$. Τότε από τη σχέση

$$P(x) = (x-\rho)\pi(x) + P(\rho)$$

παίρνουμε

$$P(x) = (x-\rho)\pi(x),$$

που σημαίνει ότι το $x-\rho$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1° Να εξεταστεί αν τα πολυώνυμα x+2 και x – 1 είναι παράγοντες του πολυωνύμου $P(x)=x^3+x^2-x+2$.

ΛΥΣΗ

Το x+2 γράφεται $x-(-2)$. Επειδή $P(-2)=(-2)^3+(-2)^2-(-2)+2=0$, το –2 είναι ρίζα του P(x). Επομένως, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, το x+2 είναι παράγοντας του P(x).

Επειδή $P(1)=1^3+1^2-1+2=3\neq 0$, το 1 δεν είναι ρίζα του P(x). Επομένως το x – 1 δεν είναι παράγοντας του P(x).

2° Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$:

i) Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ με το $x + \lambda$ είναι το μηδέν.

ii) Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $Q(x) = \lambda^2 x^4 + 3\lambda x^2 - 3$ με το $x - 1$ είναι το 1.

ΛΥΣΗ

i) Επειδή $x + \lambda = x - (-\lambda)$, το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το x+λ είναι $\upsilon = P(-\lambda)$. Επομένως, για να είναι υ = 0 αρκεί:

$$\begin{aligned} P(-\lambda) = 0 &\Leftrightarrow (-\lambda)^3 - 3(-\lambda)^2 + 3(-\lambda) - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow -\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (\lambda + 1)^3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda = -1 \end{aligned}$$

ii) Το υπόλοιπο της διαίρεσης του Q(x) με το $x - 1$ είναι υ = Q(1). Επομένως, για να είναι υ = 1 αρκεί:

$$\begin{aligned} Q(1) = 1 &\Leftrightarrow \lambda^2 1^4 + 3\lambda 1^2 - 3 = 1 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -4 \end{aligned}$$

Μερικές χρήσιμες εκφράσεις:

Η έκφραση: το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x+3$ είναι το -2 σημαίνει $P(-3)=-2$.
Η έκφραση: το $x-2$ είναι παράγοντας του $P(x)$, σημαίνει $P(2)=0$.
Η έκφραση: το x^2-5x+6 είναι παράγοντας του $P(x)$, σημαίνει $P(2)=0$ και $P(3)=0$.
Η έκφραση: το 5 είναι ρίζα του $P(x)$, σημαίνει $P(5)=0$.
Η έκφραση: η αλγεβρική τιμή του $P(x)$ με το $x=2$ είναι 20, σημαίνει $P(2)=20$.
Η έκφραση: το υπόλοιπο της διαίρεσης υ του $P(x)$ με το $x-7$ σημαίνει ότι $υ=P(7)$.

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

2. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $(18x^{80}-6x^{50}+4x^{20}-2):(x+1)$.

$$(18x^{80}-6x^{50}+4x^{20}-2):(x+1)$$

Θέλω να βρω το υπόλοιπο της διαίρεσης. Είναι προφανές ότι δε θα την κάνω. Ξέρω όμως ότι το $P(-1)$ είναι το υπόλοιπο.

$$\left(18x^{80}-6x^{50}+4x^{20}-2=\pi(x)\cdot(x+1)+u(x)\overset{x=-1}{\Longrightarrow}P(-1)=0+u(-1)\right)$$

$$18(-1)^{80}-6(-1)^{50}+4(-1)^{20}-2=18-6+4-2=\underline{\underline{14}}.$$

3. Να βρείτε τις τιμές του k, για τις οποίες το x–1 είναι παράγοντας του $g(x) = k^2x^4 + 3kx^2 - 4$.

Θέλω το $x-1$ να είναι παράγοντας του πολυωνύμου $g(x) = k^2x^4 + 3kx^2 - 4$.

Άρα το 1 θα πρέπει να είναι ρίζα του $g(x)$, δηλαδή $g(1) = 0$

$k^2 + 3k - 4 = 0 \qquad \Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25$

$k_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{25}}{2} = \dfrac{-3 \pm 5}{2} \quad \begin{matrix} \nearrow 1 \\ \searrow -4 \end{matrix}$

επομένως για τις τιμές αυτές το $x-1$ είναι παράγοντας του $g(x)$

6. Να αποδείξετε ότι τα πολυώνυμα της μορφής $x-\rho$ που δίνονται σε κάθε περίπτωση είναι παράγοντες του $P(x)$.

i) $P(x)=x^4-25x^2+144,\qquad x+3$

ii) $P(x)=16x^4-8x^3+9x^2+14x-4,\qquad x-\frac{1}{4}$

iii) $P(x)=x^3-3x^2+2,\qquad x-1-\sqrt{3}$

(i) $P(-3)=(-3)^4-25\cdot(-3)^2+144=81-225+144=0$ άρα είναι παράγοντας

(ii) $P\left(\frac{1}{4}\right)=16\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^4-8\left(\frac{1}{4}\right)^3+9\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2+14\frac{1}{4}-4=\ldots=0$ —ll—

(iii) $P(1+\sqrt{3})=(1+\sqrt{3})^3-3(1+\sqrt{3})^2+2$

$=1+3\sqrt{3}+3\sqrt{3}^2+\sqrt{3}^3-3(1+2\sqrt{3}+3)+2=1+\cancel{3\sqrt{3}}+9+\cancel{3\sqrt{3}}-3-\cancel{6\sqrt{3}}-9+2$

$=0$

7. Αν ν είναι ένας άρτιος θετικός ακέραιος, να αποδείξετε ότι το x+y είναι παράγοντας του $x^\nu - y^\nu$.

Έστω $P(x) = x^\nu - y^\nu$. $P(-y) = (-y)^\nu - y^\nu = y^\nu - y^\nu = 0$

άρα το $x-(-y)$ είναι παράγοντας του $P(x)$

8. Να αποδείξετε ότι τα παρακάτω πολυώνυμα δεν έχουν παράγοντα της μορφής $x - \rho$.

i) $P(x) = 4x^4 + 7x^2 + 12$ **ii)** $Q(x) = -5x^6 - 3x^2 - 4$

i) Για να έχουν παράγοντα το $x-\rho$, θα πρέπει $P(\rho)=0$

όμως $4\rho^4 + 7\rho^2 + 12 > 0$ για κάθε $\rho \in \mathbb{R}$. Άρα

δεν έχει παράγοντα της μορφής $x-\rho$.

ii) Ομοίως $Q(\rho) = -5\rho^6 - 3\rho^2 - 4 < 0$ για κάθε $\rho \in \mathbb{R}$. οπότε

δεν έχει παράγοντα της μορφής $x-\rho$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

2. i) Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $\alpha x+\beta$, $\alpha \neq 0$ είναι $\upsilon = P\left(-\dfrac{\beta}{\alpha}\right)$.

ii) Να βρείτε τις συνθήκες, για τις οποίες το πολυώνυμο $\alpha x^3+\beta$ διαιρείται με το $\alpha x+\beta$.

i) Απο την ταυτότητα της διαίρεσης έχουμε ότι

$$P(x) = \underbrace{(\alpha x+\beta)\,\pi(x)}_{\pi(x):\ \text{πηλίκο}} + \underbrace{\upsilon(x)}_{\text{υπόλοιπο}}$$

επειδή ο διαιρέτης είναι $1^{ου}$ βαθμού, το υπόλοιπο θα είναι μηδενικού βαθμού (σταθερό). Επίσης $P\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) = \cancel{0 \cdot \pi\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)}^{\,0} + \upsilon\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)$ άρα το υπόλοιπο θα είναι $P\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

2. i) Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το αx+β, $\alpha \neq 0$ είναι $\upsilon = P\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)$.

ii) Να βρείτε τις συνθήκες, για τις οποίες το πολυώνυμο $\alpha x^3 + \beta$ διαιρείται με το αx+β.

ii) Το $\alpha x^3+\beta$ διαιρείται με το $\alpha x+\beta$ αν το υπόλοιπο $P\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)=0$ (αν είναι μηδενικό).

$$\alpha\cdot\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)^3+\beta=0 \Leftrightarrow -\cancel{\alpha}\frac{\beta^3}{\alpha^{\cancel{3}}}+\beta=0 \Leftrightarrow -\frac{\beta^3}{\alpha^2}+\beta=0 \overset{\cdot\alpha^2}{\Leftrightarrow} -\beta^3+\alpha^2\beta=0$$

$$\Leftrightarrow \beta\cdot(\alpha^2-\beta^2)=0 \Leftrightarrow \beta=0 \text{ ή } \alpha=\pm\beta$$

Ασκήσεις για το σπίτι

1. Να βρείτε το υπόλοιπο των παρακάτω διαιρέσεων χωρίς να γίνει η διαίρεση:
α) $(x^3-2x^2+5x-6):(x-2)$ **β**) $(2x^5-x^4+6x^2+3):(x+1)$ **γ)** $(x^3-5x+3):(x+2)$

2. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $[10x^{2011}-2x^{2012}+3x^{2013}+x^{2014}-x^{2015}]:(x+1)$

3. Να βρείτε το $\lambda\in Z$ ώστε το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+(4\lambda^2+1)x^2-9\lambda x-18$ να διαιρείται με το $x-2$.

4. Να βρείτε το λ ώστε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)=x^3+(1-\lambda^2)x^2+(2\lambda-1)x-1$ διά $x-3$ να είναι ίσο με 8.

5. Αν το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+4$ διαιρείται με το $x-2$ και $P(1)=8$, να βρείτε τα α, β.

6. Για ποιες τιμές του λ το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)=x^3+2\lambda x^2+(\lambda-1)x+\lambda-\lambda^2$ με το $x-\lambda$ είναι 24;

7. Αν το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\alpha^2x^2+4\alpha x+\beta^2+5$ διαιρείται με το $x+1$, να βρείτε τα α, β.

8. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^2-\alpha x+\alpha$. Να βρείτε το α ώστε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x+2\alpha$ να είναι 11.

9. Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x+2$ είναι 5, να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(4x+2)$ με το $x+1$.

10. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)=(x+3)^{10}-(x+1)^9+(3x+5)^8$ δια $x+2$.

11. Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)=(\lambda+1)x^3+(\lambda^2+3)x^2+\lambda x+2$ δεν έχει παράγοντα το $x-1$.

12. Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)=(\lambda+1)x^3+(\lambda^2+3)x^2+\lambda x+2$ δεν έχει παράγοντα το $x-1$.

Διαίρεση πολυωνύμου με

$(x-a)(x-\beta)$ ή $(x-a)^2$

Έστω ότι ένας αριθμός διαιρείται με ένα γινόμενο, για παράδειγμα το 12 διαιρείται με το $2 \cdot 3$. Τότε θα διαιρείται και με τους παράγοντες του γινομένου. Και όντως διαιρείται και με το 2 αλλά και με το 3.

Έτσι ακριβώς γίνεται και με τα πολυώνυμα. Αν διαιρούνται με ένα γινόμενο $(x-a)(x-\beta)$, τότε διαιρούνται με κάθε έναν παράγοντα ξεχωριστά.

Η έκφραση: το $x^2–5x+6$ είναι παράγοντας του $P(x)$ σημαίνει $P(2)=0$ και $P(3)=0$.

Η έκφραση: το $P(x)$ διαιρείται με το $(x–α)(x–β)$ σημαίνει $P(α)=0$ και $P(β)=0$ και $P(x)=(x–α)(x–β)π(x)$, όπου $π(x)$ είναι το πηλίκο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x–α)(x–β)$.

4.14 Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ δια του $x+2$ είναι 5 και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-1$ είναι 2, να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ δια του $(x+2)(x-1)$

Αν το $P(x)$ διαιρεθεί με το $(x+2)\cdot(x-1)$, τότε θα δίνει υπόλοιπο είτε 1ου βαθμού, είτε σταθερό πολυώνυμο.

$$P(x) = (x+2)(x-1) + υ(x)$$

$υ(x)$: 1ου, ~~σταθερό~~

όμως

$$\left.\begin{array}{l} P(-2) = υ(-2) = 5 \\ P(1) = υ(1) = 2 \end{array}\right\}$$

Δεν μπορεί να είναι σταθερό αφού $υ(-2) \neq υ(1)$.

<u>4.14</u> Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ δια του $x+2$ είναι 5 και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-1$ είναι 2, να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ δια του $(x+2)(x-1)$

Άρα το υπόλοιπο θα είναι 1ου βαθμού. Έστω $υ(x)=Ax+B$.

$$\left.\begin{array}{l} υ(-2)=5 \\ υ(1)=2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} -2A+B=5 \\ A+B=2 \end{array}\right\}(-)$$

$$-2A-A+\cancel{B}-\cancel{B}=5-2 \Leftrightarrow -3A=3 \Leftrightarrow A=-1$$

$$A+B=2 \Leftrightarrow -1+B=2 \Leftrightarrow B=3 \qquad \text{άρα } \boxed{υ(x)=-x+3}$$

4.16 Να βρείτε τα $\alpha,\beta \in R$ αν το πολυώνυμο

$P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 - 13x + \beta$ διαιρείται με $x^2 - x - 6$

Αφού διαιρείται με το x^2-x-6, τότε $2x^3+\alpha x^2-13x+\beta = (x^2-x-6)\pi(x)$

πηλίκο

Ψάχνω τις ρίζες του x^2-x-6: $\Delta = (-1)^2 - 4\cdot 1(-6) = 1+24 = 25$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$$

οπότε $2x^3+\alpha x^2-13x+\beta = (x-3)(x+2)\pi(x)$. Δηλαδή το πολυώνυμο έχει παράγοντες το $x-3$ και $x+2$.

$$\left.\begin{aligned} P(3) &= 0 \\ P(-2) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} &2\cdot 3^3 + \alpha\cdot 3^2 - 13\cdot 3 + \beta = 0 \\ &2(-2)^3 + \alpha(-2)^2 - 13\cdot(-2) + \beta = 0 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} &2\cdot 27 + 9\alpha - 39 + \beta = 0 \\ &-2\cdot 8 + 4\alpha + 26 + \beta = 0 \end{aligned}\right\}$$

4.16 Να βρείτε τα $\alpha,\beta \in R$ αν το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+\alpha x^2-13x+\beta$ διαιρείται με x^2-x-6

$$\left.\begin{aligned} 54+9\alpha-39+\beta&=0 \\ -16+4\alpha+26+\beta&=0 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} 9\alpha+\beta&=-15 \\ 4\alpha+\beta&=-10 \end{aligned}\right\}(-) \qquad 9\alpha-4\alpha+\cancel{\beta}-\cancel{\beta}=-15-(-10)$$

$$\Leftrightarrow 5\alpha=-5 \Leftrightarrow \boxed{\alpha=-1}$$

και αντικαθιστώντας $4\alpha+\beta=-10 \Leftrightarrow -4+\beta=-10 \Leftrightarrow \boxed{\beta=-6}$

Σχήμα Horner

Σχήμα Horner (Χόρνερ)

Έστω ότι θέλουμε να βρούμε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου, π.χ. του $P(x) = 3x^3 - 8x^2 + 7x + 2$, με ένα πολυώνυμο της μορφής $x - \rho$. Η Ευκλείδεια διαίρεση του $P(x)$ με το $x - \rho$ είναι η ακόλουθη:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
3x^3 & -8x^2 & +7x & +2 & x-\rho \\ \cline{5-5}
-3x^3 & +3\rho x^2 & & & 3x^2+(3\rho-8)x+\rho(3\rho-8)+7 \\ \cline{1-4}
 & (3\rho-8)x^2 & +7x & +2 & \\
 & -(3\rho-8)x^2 & +\rho(3\rho-8)x & & \\ \cline{1-4}
 & & [\rho(3\rho-8)+7]x & +2 & \\
 & & -[\rho(3\rho-8)+7]x & +\rho[\rho(3\rho-8)+7] & \\ \cline{1-4}
 & & & \underbrace{\rho[\rho(3\rho-8)+7]+2}_{P(\rho)} &
\end{array}
$$

Η παραπάνω διαίρεση μπορεί να παρουσιασθεί εποπτικά με τον ακόλουθο πίνακα που είναι γνωστός ως σχήμα του Horner.

Συντελεστές του P(x)

3	−8	7	2	ρ
	3ρ	(3ρ−8)ρ	[(3ρ−8)ρ+7]ρ	
3	3ρ−8	(3ρ−8)ρ+7	[(3ρ−8)ρ+7]ρ+2	

Συντελεστές Πηλίκου　　　　Υπόλοιπο

1. Στην πρώτη γραμμή γράφουμε τους συντελεστές του πολυωνύμου P(x) και στην πρώτη θέση της 3ης γραμμής γράφουμε ξανά τον πρώτο συντελεστή του P(x).
2. Κάθε στοιχείο της 2ης γραμμής προκύπτει με τον πολλαπλασιασμό του αμέσως προηγούμενου στοιχείου της τρίτης γραμμής επί ρ.
3. Κάθε άλλο στοιχείο της 3ης γραμμής προκύπτει ως άθροισμα των αντίστοιχων στοιχείων της 1ης και της 2ης γραμμής.
4. Το τελευταίο στοιχείο της 3ης γραμμής είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το (x-ρ), δηλαδή η τιμή του πολυωνύμου P(x) για x=ρ. Τα άλλα στοιχεία της 3ης γραμμής είναι οι συντελεστές του πηλίκου της διαίρεσης.

Ας εργασθούμε τώρα με το σχήμα Horner για να βρούμε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x) = 3x^5 + 3x^4 + 6x - 13$ με το $x - 2$.

3	3	0	0	6	−13	ρ=2
	6	18	36	72	156	
3	9	18	36	78	143	

[Συμπληρώστε με 0 τους συντελεστές των δυνάμεων του x που δεν υπάρχουν.]

Επομένως το πηλίκο της διαίρεσης είναι $\pi(x) = 3x^4 + 9x^3 + 18x^2 + 36x + 78$
και το υπόλοιπο $υ = P(2) = 143$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1° Να βρεθεί το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $(4x^2 - 8\alpha x + 4\alpha^2) : (x - \alpha)$

ΛΥΣΗ

Το σχήμα Horner με διαιρετέο το $4x^2 - 8\alpha x + 4\alpha^2$ και διαιρέτη το $x - \alpha$ δίνει:

4	-8α	$4\alpha^2$	α
	4α	$-4\alpha^2$	
4	-4α	0	

Άρα $\pi(x) = 4x - 4\alpha$ και $\upsilon(x) = 0$

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

4. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να βρείτε τα πηλίκα και τα υπόλοιπα των διαιρέσεων:

i) $(-x^3+75x-250):(x+10)$ **ii)** $(x^3+512):(x+8)$

iii) $(x^5+1):(x-1)$ **iv)** $-3x^4:(x-2)$

v) $(4x^3+16x^2-23x-15):\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$

i) Φτιάχνω το πινακάκι του Horner:

-1	0	75	-250	$\rho=-10$
	10	-100	250	
-1	10	-25	$\boxed{0}$	

Άρα πηλίκο $\pi(x)=-x^2+10x-25$, υπόλοιπο $u(x)=0$

ii) Ομοίως

1	0	0	512	$\rho=-8$
	-8	64	-512	
1	-8	64	0	

$\pi(x)=x^2-8x+64$

$u(x)=0$

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

4. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να βρείτε τα πηλίκα και τα υπόλοιπα των διαιρέσεων:

i) $(-x^3+75x-250):(x+10)$ **ii)** $(x^3+512):(x+8)$

iii) $(x^5+1):(x-1)$ **iv)** $-3x^4:(x-2)$

v) $(4x^3+16x^2-23x-15):\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$

iii) Ομοίως

1	0	0	0	0	1	$\rho=1$
	1	1	1	1	1	
1	1	1	1	1	2	

άρα

$\pi(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$

$\upsilon(x)=2$

iv) Ομοίως

-3	0	0	0	0	$\rho=2$
	-6	-12	-24	-48	
-3	-6	-12	-24	-48	

άρα

$\pi(x)=-3x^3-6x^2-12x-24$

$\upsilon(x)=-48$

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

4. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να βρείτε τα πηλίκα και τα υπόλοιπα των διαιρέσεων:

i) $(-x^3+75x-250):(x+10)$ **ii)** $(x^3+512):(x+8)$

iii) $(x^5+1):(x-1)$ **iv)** $-3x^4:(x-2)$

v) $(4x^3+16x^2-23x-15):\left(x+\frac{1}{2}\right)$

v) Ομοίως

4	16	−23	−15	$\rho=-\frac{1}{2}$
	−2	−7	15	
4	14	−30	0	

άρα

$\pi(x)=4x^2+14x-30$

$\upsilon(x)=0$

5. Αν $P(x) = -2x^3 - 2x^2 - x + 2409$, να βρείτε το $P(-11)$.

-2	-2	-1	2409	$\rho = -11$
	22	-220	2431	
-2	20	-221	4840	

άρα

$P(-11) = 4840$

6. Να αποδείξετε ότι τα πολυώνυμα της μορφής $x-\rho$ που δίνονται σε κάθε περίπτωση είναι παράγοντες του $P(x)$.

i) $P(x)=x^4-25x^2+144,\quad x+3$

ii) $P(x)=16x^4-8x^3+9x^2+14x-4,\quad x-\frac{1}{4}$

iii) $P(x)=x^3-3x^2+2,\quad x-1-\sqrt{3}$

(i) $P(-3)=(-3)^4-25\cdot(-3)^2+144 = 81-225+144 = 0$ άρα είναι παράγοντας

(ii) $P\left(\frac{1}{4}\right) = 16\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^4-8\left(\frac{1}{4}\right)^3+9\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2+14\frac{1}{4}-4 = \ldots = 0$ —"—

(iii) $P(1+\sqrt{3}) = (1+\sqrt{3})^3-3(1+\sqrt{3})^2+2$

$= 1+3\sqrt{3}+3\sqrt{3}^2+\sqrt{3}^3-3(1+2\sqrt{3}+3)+2 = 1+\cancel{3\sqrt{3}}+9+\cancel{3\sqrt{3}}-3-\cancel{6\sqrt{3}}-9+2$

$= 0$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

3. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner μόνο, να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x) = 2x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 3x + 2$ διαιρείται με το $(x-1)(x-2)$ και να βρείτε το πηλίκο.

Κάνουμε Horner με το $\rho = 1$ και αν βγεί υπόλοιπο μηδέν, σημαίνει ότι διαιρείται ακριβώς με το $x-1$.

$$\begin{array}{ccccc|c} 2 & -6 & 5 & -3 & 2 & \rho=1 \\ & 2 & -4 & 1 & -2 & \\ \hline 2 & -4 & 1 & -2 & \boxed{0} & \end{array}$$

Άρα

$$P(x) = (x-1)(2x^3 - 4x^2 + x - 2)$$

Τώρα κάνουμε ένα Horner για το πηλίκο για να δούμε αν έχει παράγοντα το $x-2$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

3. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner μόνο, να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x) = 2x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 3x + 2$ διαιρείται με το $(x-1)(x-2)$ και να βρείτε το πηλίκο.

$$\left.\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 1 & -2 & \rho = 2 \\ & 4 & 0 & 2 & \\ 2 & 0 & 1 & \boxed{0} & \end{array}\right\}$$

Άρα

$P(x) = \underbrace{(x-1)(x-2)}(2x^2+1)$

οπότε το $P(x)$ διαιρείται με το $(x-1)(x-2)$

και το πηλίκο της διαίρεσης είναι

το $2x^2+1$.

Ασκήσεις:

1. Με το σχήμα Horner να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο των διαιρέσεων:

α) $(2x^3-5x^2+6x-10):(x-2)$ **β**) $x^5:(x+1)$

γ) $(x^3-3x^2+3x):(x+3)$ **δ**) $(2x^3-11x^2+17x-6):(x-2)$

ε) $[6x^3-(2\alpha+6\alpha^2)x+3\alpha^2]:(x-\alpha)$ **στ**) $(x^6-4x^5+x^2-2):(2x-1)$

ζ) $(x^3-3x^2+3x):(x+3)$

2. Να βρείτε το λ ώστε το $x^3+\lambda x^2+23x-15$ να έχει παράγοντα το $x-1$ και στη συνέχεια να το παραγοντοποιήσετε.

3. Να βρείτε τα α, β ώστε το πολυώνυμο $P(x)=x^3+x^2+\alpha x+\beta$ να διαιρείται με το $(x-1)^2$ και μετά να το παραγοντοποιήσετε.

4. **α**) Να δείξετε ότι το $P(x)=2x^4-11x^3+18x^2-4x-8$ έχει παράγοντα το $(x-2)^2$

β) Ομοίως το $P(x)=2x^3-3x^2+1$ έχει παράγοντα το $(x-1)^2$

5. Να γίνουν γινόμενο τα πολυώνυμα αν το διπλανό διώνυμο είναι ένας παράγοντάς τους:

α) $x^3+9x^2+23x+15$, $x+1$. **β**) x^3+5x^2+3x-9, $x-1$.

6. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=(\lambda^2-4)x^4+x^3-5x^2+4\lambda+6$. Αν το πολυώνυμο έχει ρίζα το 1, να βρείτε τον βαθμό του και τις ρίζες του.

7. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)= 2x^3–kx^2–4x+3$, $k\in R$ το οποίο έχει παράγοντα το $x+1$.

1. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού k.

2. Αν $k=5$ να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x+2)$.

8. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+3x^2–3x–2$.

Α. Να βρείτε τις τιμές $P(0)$ και $P(1)$ και δικαιολογήστε ποιος αριθμός από τους 0 και 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$.

Β. Να βρεθεί το πηλίκο της διαίρεσης $P(x):(x–1)$.

Γ. Να λυθεί η εξίσωση $P(x)=0$.

9. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\alpha x+\beta$ να διαιρείται με το $(x–1)^2$.

10. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^4+(\beta–\alpha)x^3–(\alpha+\beta)x^2–(2\beta+\alpha)x–\beta$ με $\alpha, \beta\in R$.

i) Να προσδιορίσετε τα α, β ώστε το $P(x)$ να διαιρείται με το $(x+1)^2$.

ii) Ισχύει $P(x)=(x+1)^3(x–2)$ Σ ή Λ;

11. Να βρείτε ένα πολυώνυμο $P(x)$ τετάρτου βαθμού τέτοιο ώστε να διαιρείται από το $(x–1)^3$ και $P(2)=–1$, $P(3)=8$.