Γεωμετρία Α' Λυκείου

Μάθημα 3 - Ασκήσεις κριτήρια ισότητας

1. *Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' έχουν $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$ και $\hat{A} = \hat{A}'$. Αν Ι είναι το σημείο τομής των διχοτόμων ΑΔ και ΒΕ του τριγώνου ΑΒΓ και Ι' το σημείο τομής των διχοτόμων Α'Δ' και Β'Ε' του Α'Β'Γ' να αποδείξετε ότι:*

i) $A\Delta = A'\Delta'$ και $BE = B'E'$

ii) $AI = A'I'$ και $BI = B'I'$.

i) Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ και $\overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$ είναι ίσα αφού:

$$\left.\begin{aligned} \gamma &= \gamma' \\ \beta &= \beta' \\ \hat{A} &= \hat{A}' \end{aligned}\right\}$$

Άρα $\hat{B} = \hat{B}'$

Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{AB\Delta}$ και $\overset{\triangle}{A'B'\Delta'}$ είναι ίσα αφού:

$\hat{A}_1 = \hat{A}_1'$ $\left(= \dfrac{\hat{A}}{2} = \dfrac{\hat{A}'}{2} \right)$

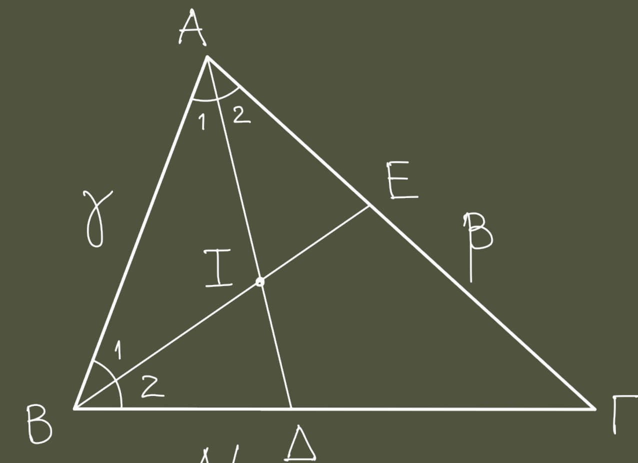
$\hat{B} = \hat{B}'$ (το δείξαμε!)

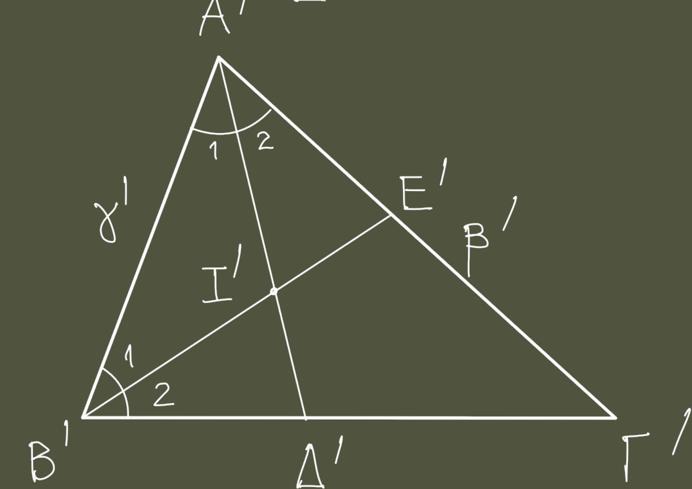
$\gamma = \gamma'$ (υπόθεση)

άρα $A\Delta = A'\Delta'$

ομοίως και τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{ABE}$ και $\overset{\triangle}{A'B'E'}$ άρα

$BE = B'E'$





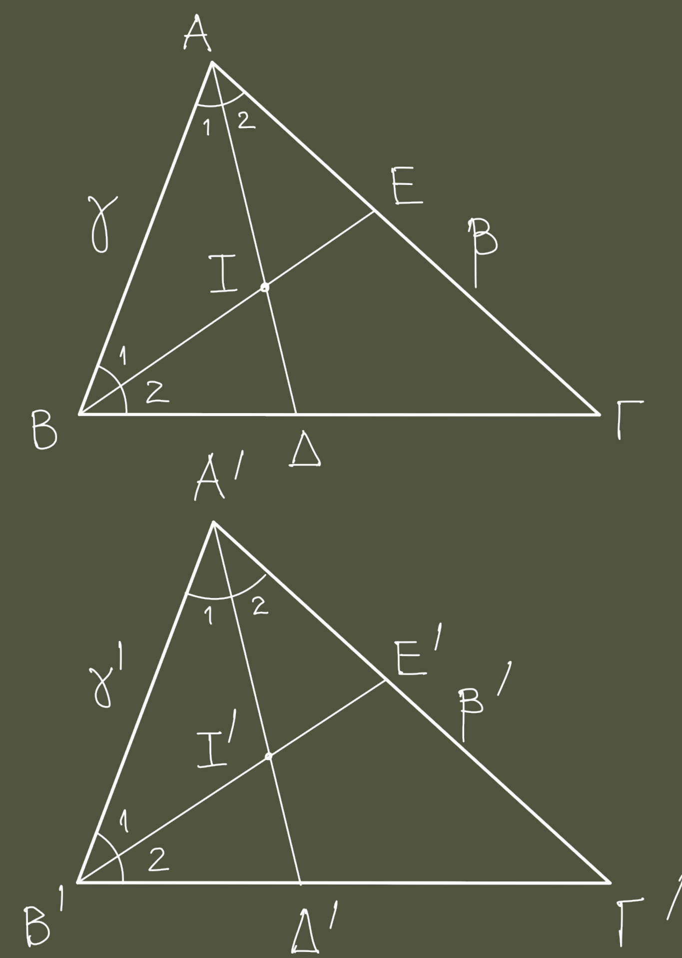
1. *Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' έχουν β = β', γ = γ' και $\hat{A} = \hat{A}'$. Αν Ι είναι το σημείο τομής των διχοτόμων ΑΔ και ΒΕ του τριγώνου ΑΒΓ και Ι' το σημείο τομής των διχοτόμων Α'Δ' και Β'Ε' του Α'Β'Γ' να αποδείξετε ότι:*

i) ΑΔ = Α'Δ' και ΒΕ = Β'Ε'

ii) ΑΙ = Α'Ι' και ΒΙ = Β'Ι'.

ii) Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{AIE}$ και $\overset{\triangle}{A'I'E'}$ είναι ίσα αφού στο i) ερώτημα δείξαμε ότι $\overset{\triangle}{ABE} = \overset{\triangle}{A'B'E'}$ άρα $AE = A'E'$ και $A\hat{E}B = A'\hat{E}'B'$ και ισχύει και ότι $\hat{A}_2 = \hat{A}_2'$ άρα απο ΓΠΓ θα είναι ίσα, άρα $AI = A'I'$

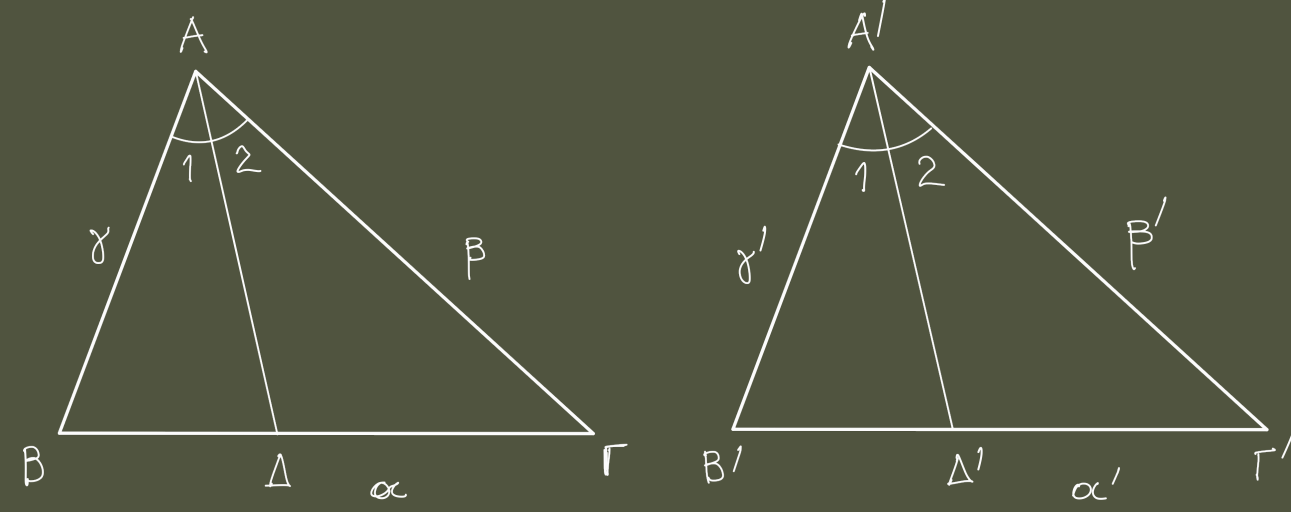
ομοίως για τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{B\Delta I}$ και $\overset{\triangle}{B'\Delta'I'}$ δείχνω ότι $BI = B'I'$



2. *Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' έχουν $\beta = \beta'$, $\hat{A} = \hat{A}'$ και $\delta_\alpha = \delta_{\alpha'}$. Να αποδείξετε ότι:*

i) $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$,

ii) $\alpha = \alpha'$ και $\gamma = \gamma'$.



Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{A\Delta\Gamma}$, $\overset{\triangle}{A'\Delta'\Gamma'}$

$$\left.\begin{aligned} &\beta = \beta' \\ &A\Delta = A'\Delta' \quad (\delta_\alpha = \delta_{\alpha'}) \\ &\hat{A}_2 = \hat{A}_2' \quad \left(= \frac{\hat{A}}{2} = \frac{\hat{A}'}{2}\right) \end{aligned}\right\}$$

απο ΠΓΠ ίσα

οπότε $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$

$\overset{\triangle}{AB\Gamma} = \overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$ αφού

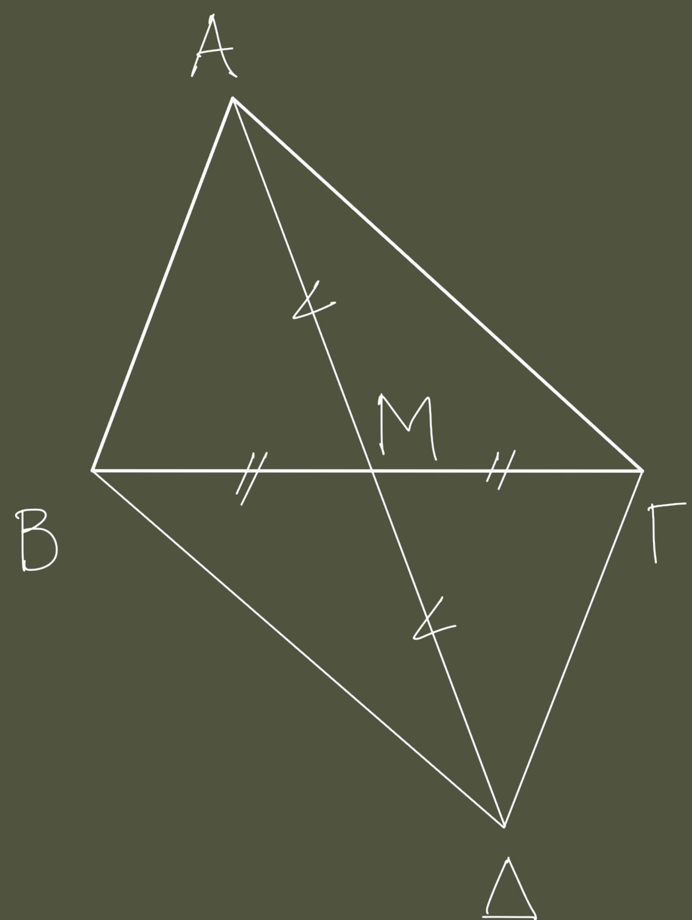
$$\left.\begin{aligned} &\beta = \beta' \\ &\hat{A} = \hat{A}' \\ &\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}' \end{aligned}\right\}$$

Άρα

$\alpha = \alpha'$

$\gamma = \gamma'$

3. *Σε τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ κατά ίσο τμήμα ΜΔ. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΓΔ είναι ίσα.*



Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{ABM}$, $\overset{\triangle}{\Delta\Gamma M}$

$AM = M\Delta$, $BM = M\Gamma$,

$A\hat{M}B = \Delta\hat{M}\Gamma$ (κατα κορυφήν)

Απο Π-Γ-Π είναι ισα άρα $AB = \Delta\Gamma$

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{AM\Gamma}$, $\overset{\triangle}{\Delta MB}$

$AM = M\Delta$, $M\Gamma = MB$

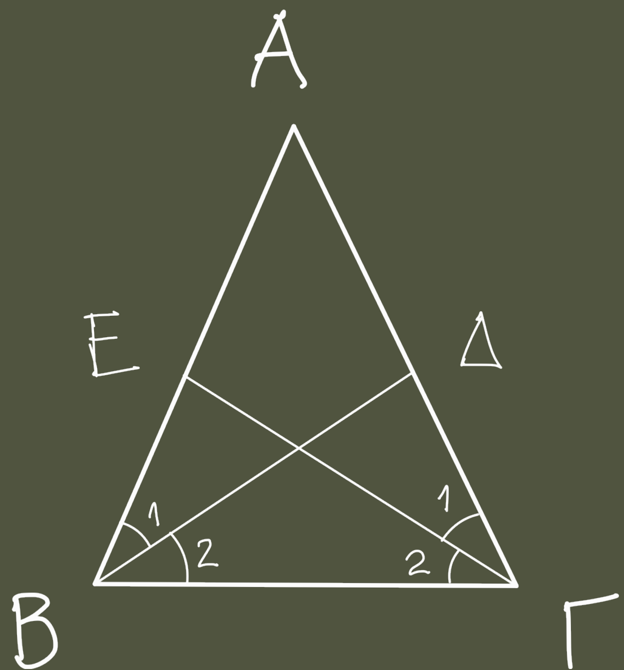
$A\hat{M}\Gamma = \Delta\hat{M}B$ (κατα κορυφήν)

Απο ΠΓΠ είναι ισα άρα $A\Gamma = B\Delta$

και αφού τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$, $\overset{\triangle}{B\Gamma\Delta}$ έχουν 3 πλευρές ισες, θα είναι ισα

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών της βάσης ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.*



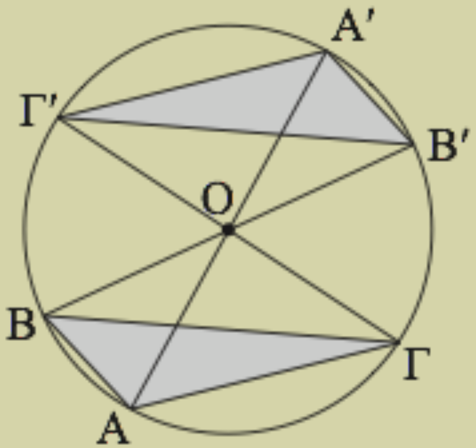
Αρκεί να δείξω ότι $ΒΔ = ΕΓ$.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{ΕΒΓ}$, $\overset{\triangle}{ΔΓΒ}$.

ΒΓ κοινή, $Β\hat{Γ}Δ = Γ\hat{Β}Ε$ (ΑΒΓ ισοσκελές)

$\hat{Β}_2 = \hat{Γ}_2$ $\left(= \frac{\hat{Β}}{2} = \frac{\hat{Γ}}{2} \right)$ άρα είναι ίσα, οπότε $ΒΔ = ΕΓ$.

2. *Αν AA', BB' και $\Gamma\Gamma'$ είναι τρεις διάμετροι κύκλου (βλ. σχήμα), να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα.*



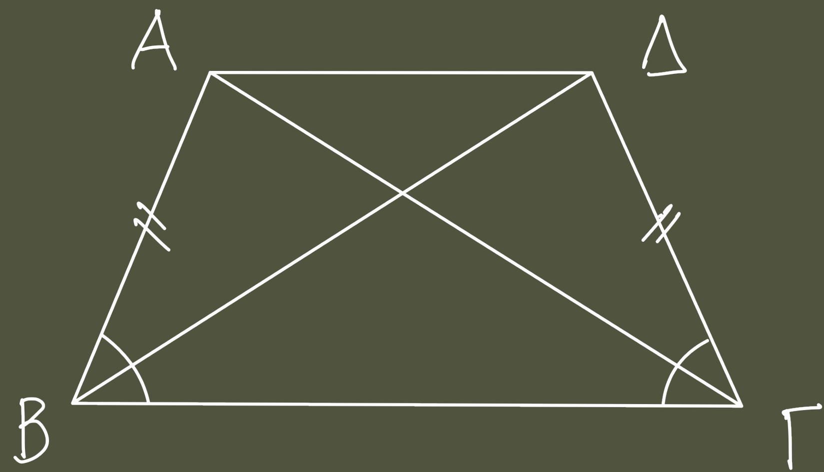
$\overset{\triangle}{OAB} = \overset{\triangle}{OA'B'}$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} OA = OA' \\ OB = OB' \end{array}\right] \text{ακτίνες} \\ \widehat{AOB} = A'\widehat{O}'B' \ \text{(κατά κορυφήν)} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Από ΠΓΠ} \\ AB = A'B' \end{array}$$

ακριβώς το ίδιο εφαρμόζω και στα τρίγωνα $\overset{\triangle}{OA\Gamma}$ και $\overset{\triangle}{OA'\Gamma'}$ όπως και στα $\overset{\triangle}{OB\Gamma}$ και $\overset{\triangle}{OB'\Gamma'}$.

οπότε τα $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ και $\overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$ είναι ίσα από ΠΠΠ

3. *Σε ένα κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι $AB = \Gamma\Delta$ και $\hat{B} = \hat{\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι $\hat{A} = \hat{\Delta}$.*



Φέρνουμε τις ΑΓ και ΒΔ.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$, $\overset{\triangle}{\Delta\Gamma B}$

$$\left.\begin{aligned} &AB = \Delta\Gamma \ \text{(υπόθεση)} \\ &B\Gamma \ \text{κοινή} \\ &\hat{B} = \hat{\Gamma} \end{aligned}\right\} \quad \text{Από ΠΓΠ} \quad A\Gamma = B\Delta.$$

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{AB\Delta}$, $\overset{\triangle}{A\Delta\Gamma}$. ΑΔ κοινή, $B\Delta = A\Gamma$, $\Delta\Gamma = AB$ άρα από ΠΠΠ προκύπτει η ισότητα και έτσι $\hat{A} = \hat{\Delta}$.

Ασκήσεις για το σπίτι

1. Προεκτείνουμε τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ προς το μέρος της κορυφής Α και στις προεκτάσεις παίρνουμε αντίστοιχα τμήματα ΑΔ=ΑΒ και ΑΕ=ΑΓ.
   α) Να συγκρίνετε τα ΔΕ και ΒΓ.
   β) Αν η προέκταση του ύψους ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ τέμνει την ΔΕ στο Ρ, να δείξετε ότι το ΑΡ είναι ύψος του τριγώνου ΑΔΕ.

2. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, Μ το μέσον της ΒΓ και τα σημεία Δ, Ε ώστε ΑΔ=ΑΕ.
   α) Να δείξετε ότι οι γωνίες ΜΔΒ και ΜΕΓ είναι ίσες.
   β) Αν η ΜΔ τέμνει την ΓΑ στο Ζ και η ΜΕ την ΒΑ στο Η, να δείξετε ότι ΔΖ=ΕΗ.