Γεωμετρία Α' Λυκείου

4.6 Άθροισμα γωνιών τριγώνου

Σημαντικό!

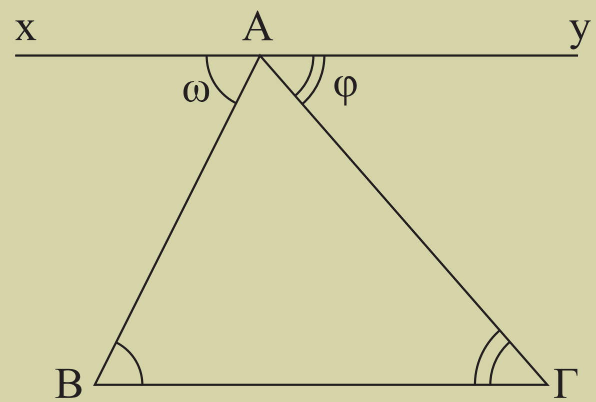
ΘΕΩΡΗΜΑ

Το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 2 ορθές.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Από μια κορυφή, π.χ. την Α, φέρουμε ευθεία xy//ΒΓ. Τότε $\omega = \hat{B}$ (1) και $\varphi = \hat{\Gamma}$ (2), ως εντός και εναλλάξ των παραλλήλων xy και ΒΓ με τέμνουσες ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.
Αλλά $\omega + \hat{A} + \varphi = 2\llcorner$ (3).
Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι

$$\hat{\mathbf{A}} + \hat{\mathbf{B}} + \hat{\mathbf{\Gamma}} = \mathbf{2}\llcorner.$$



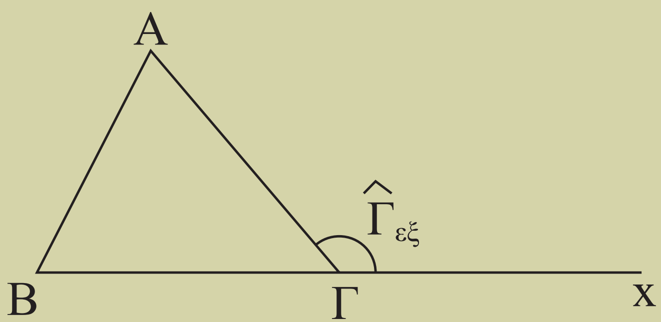
ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

i) Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου.

ii) Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες, μία προς μία, έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες.

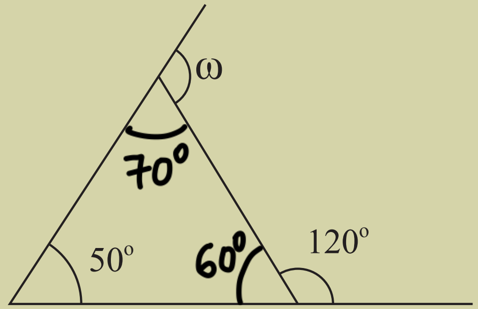
iii) Οι οξείες γωνίες ενός ορθογώνιου τριγώνου είναι συμπληρωματικές.

iv) Κάθε γωνία ισόπλευρου τριγώνου είναι 60^o.



Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Να υπολογίσετε τη γωνία ω στο παρακάτω σχήμα.*

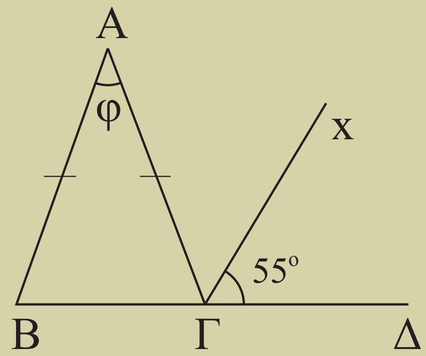


Η ω είναι εξωτερική του τριγώνου

άρα ισούται με το άθροισμα των

δύο απέναντι. Οπότε $\omega = 50^\circ + 60^\circ = 110^\circ$

2. *Αν $AB = A\Gamma$ και Γx διχοτόμος της $A\hat{\Gamma}\Delta$, να υπολογίσετε τη γωνία φ (βλ. σχήμα).*



Αφού η Γx είναι διχοτόμος, τότε

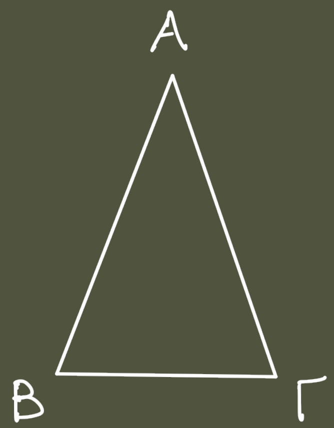
$A\hat{\Gamma}x = 55^\circ$. Άρα $B\hat{\Gamma}A = 180 - 110 = 70$

όμως το τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ είναι ισοσκελές

άρα $A\hat{B}\Gamma = 70^\circ$. Οπότε $\varphi = 180 - 140$

$\Rightarrow \varphi = 40^\circ$

4. *Να εξηγήσετε γιατί αν ένα ισοσκελές τρίγωνο έχει μια γωνία 60° είναι ισόπλευρο.*



Έστω $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ ισοσκελές με $\hat{B} = \hat{\Gamma} = \varphi$

- Αν $\varphi = 60^\circ$ τότε $\hat{A} = 180^\circ - 2\varphi = 180^\circ - 2 \cdot 60^\circ = 60^\circ$

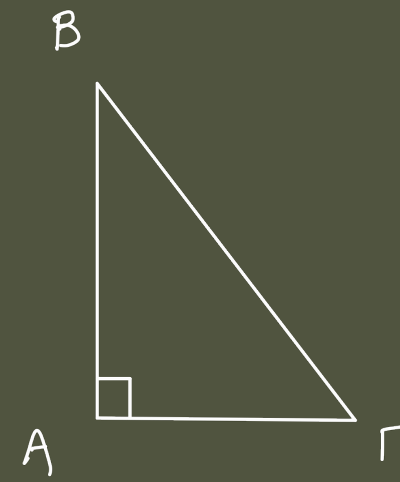
  άρα $\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma} = 60^\circ$ οπότε ισόπλευρο.

- Αν $\hat{A} = 60$ τότε $2\varphi + \hat{A} = 180^\circ \Rightarrow 2\varphi + 60^\circ = 180^\circ$

  άρα $\varphi = 60^\circ$ οπότε ισόπλευρο.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του είναι ίση με τα* $\frac{2}{3}$ *μιας άλλης γωνίας του. Να υπολογισθούν όλες οι γωνίες του (δύο περιπτώσεις).*



Δεν μπορεί να είναι η ορθή τα $\frac{2}{3}$ μιας άλλης γιατί

$$\frac{2}{3}\varphi = 90^\circ \Rightarrow \varphi = \frac{270^\circ}{2} = 135^\circ$$

άτοπο γιατί οι άλλες είναι οξείες.

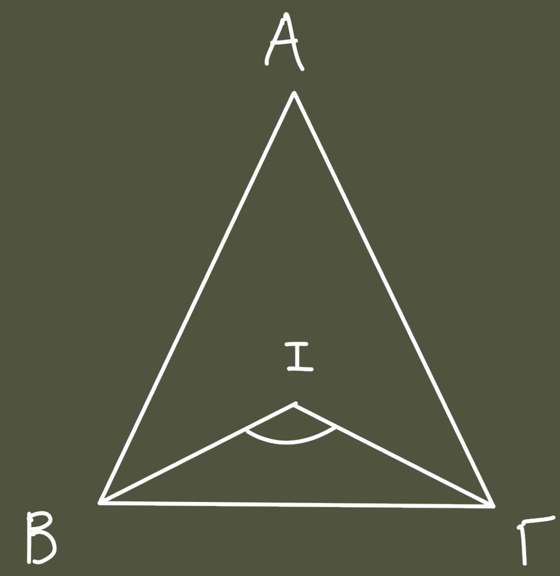
Έστω λοιπόν $\hat{B} = \frac{2}{3}\hat{\Gamma}$ τότε ισχύει $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma} = 180 \Rightarrow 90^\circ + \frac{2}{3}\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}\hat{\Gamma} + \frac{3}{3}\hat{\Gamma} = 90^\circ \Rightarrow \frac{5}{3}\hat{\Gamma} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow 5\hat{\Gamma} = 270^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 54^\circ.$$ άρα $\hat{B} = \frac{2}{3}54^\circ = 36^\circ$

Η δεύτερη περίπτωση είναι η $\hat{B}$ ή η $\hat{\Gamma}$ να είναι $\frac{2}{3}\cdot 90^\circ = 60^\circ$ τότε οι γωνίες του θα είναι $90^\circ, 60^\circ, 30^\circ$.

2. *Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) είναι* $\hat{A} = \frac{\hat{B}}{2}$. *Αν Ι το έγκεντρο του τριγώνου να υπολογισθεί η γωνία ΒÎΓ. (Εφαρμογή 2 - §4.8)*



Εφόσον $\hat{A} = \frac{\hat{B}}{2}$ τότε ισχύει ότι

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\hat{B}}{2} + \hat{B} + \hat{B} = 180 \Leftrightarrow$$

$$\frac{5\hat{B}}{2} = 180 \Leftrightarrow$$

$$\hat{B} = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

Άρα $A = 36^\circ$, $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 72$.

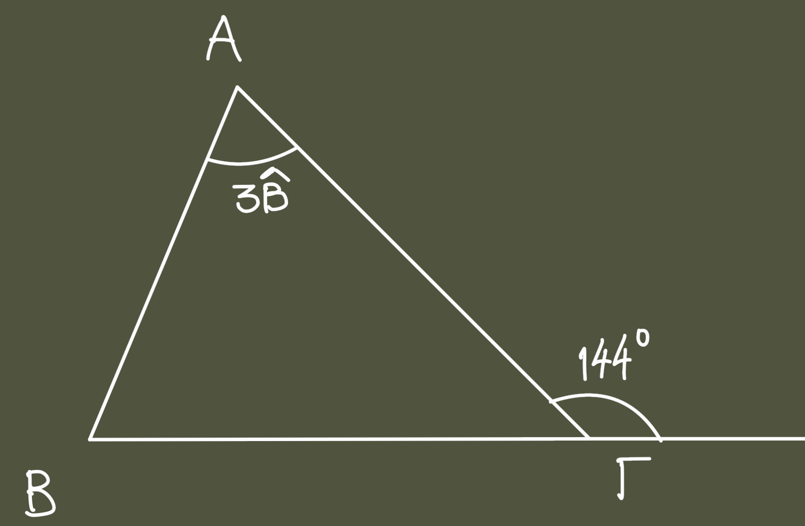
Οπότε στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{B I \Gamma}$ έχουμε

$I\hat{B}\Gamma = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ = I\hat{\Gamma}B$ άρα

$$B\hat{I}\Gamma = 180 - I\hat{B}\Gamma - I\hat{\Gamma}B = 180 - 36 - 36$$

$$= 180 - 72 = 108^\circ$$

3. *Σε τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία $\hat{A}$ είναι τριπλάσια της γωνίας $\hat{B}$. Αν $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = 144°$ να βρεθεί το είδος του τριγώνου ως προς τις πλευρές του.*



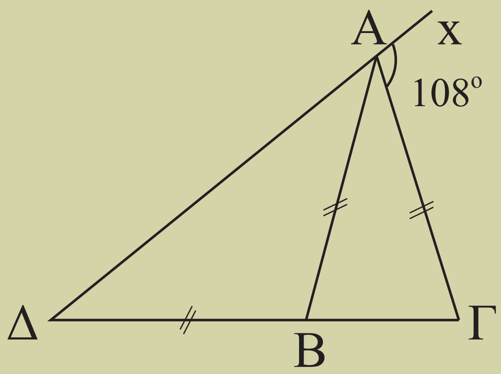
Ισχύει ότι $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = \hat{A} + \hat{B} \Leftrightarrow$

$144 = 3\hat{B} + \hat{B} \Leftrightarrow$

$4\hat{B} = 144 \Leftrightarrow \hat{B} = \frac{144}{4} = 36°$

Επομένως $\hat{A} = 108°$, $\hat{B} = 36°$, $\hat{\Gamma} = 36°$ οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές

5. *Στο παρακάτω σχήμα είναι:*



$AB = A\Gamma = \Delta B$ *και* $x\hat{A}\Gamma = 108°$.

Να υπολογισθεί η γωνία $\hat{\Delta}$.

Το τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ είναι ισοσκελές άρα $A\hat{B}\Gamma = \hat{\Gamma}$ (1)

Το τρίγωνο $\overset{\triangle}{A\Delta B}$ είναι ισοσκελές άρα $\Delta\hat{A}B = \hat{\Delta}$ (2)

Η γωνία $\Delta\hat{A}\Gamma = 180° - 108° = 72°$ (3)

Η γωνία $A\hat{B}\Gamma$ είναι εξωτερική του τριγώνου $\overset{\triangle}{AB\Delta}$ άρα

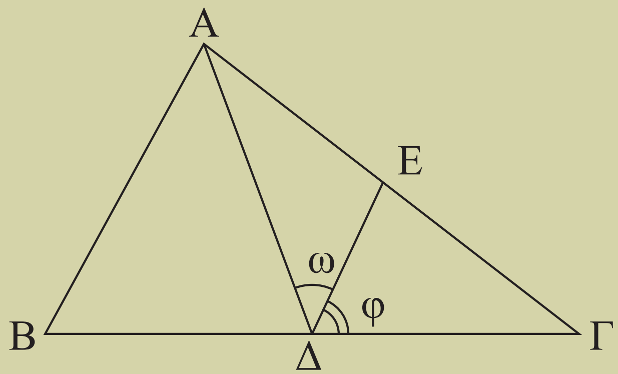
$A\hat{B}\Gamma = \Delta\hat{A}B + \hat{\Delta}$ απο (1) και (2) έχουμε

$\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} + \hat{\Delta} \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 2\hat{\Delta}$.

Στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{A\Delta\Gamma}$ έχουμε ότι $\Delta\hat{A}\Gamma + \hat{\Delta} + \hat{\Gamma} = 180° \overset{(3)}{\Leftrightarrow} 72° + \hat{\Delta} + 2\hat{\Delta} = 180°$

$\Leftrightarrow 3\hat{\Delta} = 108° \Leftrightarrow \hat{\Delta} = 36°$

6. *Στο παρακάτω σχήμα είναι: $\hat{A} = 90^\circ$, ΑΔ διχοτόμος, ΔΕ//ΑΒ. Αν η γωνία $\hat{B}$ είναι 20° μεγαλύτερη από τη $\hat{\Gamma}$ να υπολογίσετε τις γωνίες ω και φ.*



Το τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ είναι ορθογώνιο

άρα $\hat{B}+\hat{\Gamma}=90^\circ \Leftrightarrow (\hat{\Gamma}+20^\circ)+\hat{\Gamma}=90^\circ$

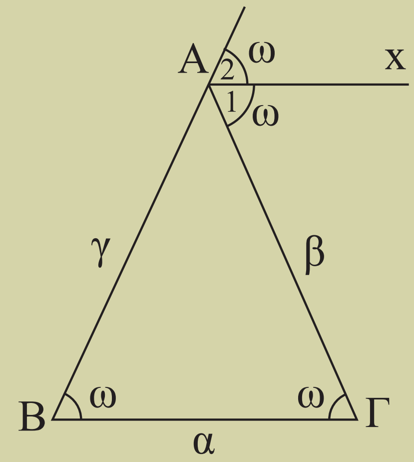
$\Leftrightarrow 2\hat{\Gamma}=70^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma}=35^\circ$

$\hat{\omega}=B\hat{A}\Delta=\frac{\hat{A}}{2}=45^\circ$ (εντός εναλλάξ)

$\hat{\varphi}=\hat{B}=\hat{\Gamma}+20^\circ=55^\circ$ (εντός εκτός και επί τα αυτά)

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τη διχοτόμο Αx της εξωτερικής γωνίας $\hat{A}$ του τριγώνου. Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές, αν και μόνο αν Αx//ΒΓ.



Απόδειξη

i) Αν $\beta = \gamma$ τότε $\hat{B} = \hat{\Gamma} = \omega$.

Όμως $\hat{A}_{\varepsilon\xi} = \hat{B} + \hat{\Gamma} = 2\omega$, οπότε $\frac{\hat{A}_{\varepsilon\xi}}{2} = \omega$ ή $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma} = \omega$. Άρα Αx//ΒΓ, αφού σχηματίζουν δύο εντός και εναλλάξ γωνίες ίσες.

ii) Αν Αx//ΒΓ τότε $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}$ (ως εντός εναλλάξ) και $\hat{A}_2 = \hat{B}$ (ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη). Άρα $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ (αφού $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$), οπότε $\beta = \gamma$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

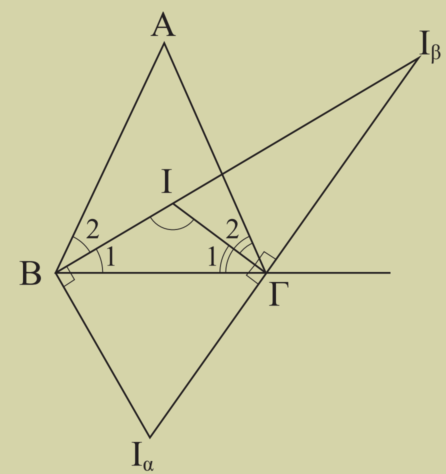
Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τις εσωτερικές και εξωτερικές διχοτόμους των γωνιών του $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$. Να αποδειχθεί ότι

i) Η γωνία των δύο εσωτερικών διχοτόμων είναι ίση με $90^o + \frac{\hat{A}}{2}$.

ii) Η γωνία μίας εσωτερικής και μίας εξωτερικής διχοτόμου είναι ίση με $\frac{\hat{A}}{2}$.

iii) Η γωνία των δύο εξωτερικών διχοτόμων είναι ίση με $90^o - \frac{\hat{A}}{2}$.

Απόδειξη



Οι εσωτερικές διχοτόμοι τέμνονται στο έγκεντρο Ι. Οι εξωτερικές διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ τέμνονται στο παράκεντρο I_α και η εσωτερική διχοτόμος της $\hat{B}$ με την εξωτερική διχοτόμο της $\hat{\Gamma}$ τέμνονται στο παράκεντρο I_β.

i) Από το τρίγωνο ΒΙΓ παίρνουμε:

$B\hat{I}\Gamma + \hat{B}_1 + \hat{\Gamma}_1 = 180°$ ή $B\hat{I}\Gamma = 180° - \hat{B}_1 - \hat{\Gamma}_1$ ή

$B\hat{I}\Gamma = 180° - \frac{\hat{B}}{2} - \frac{\hat{\Gamma}}{2}$ ή $B\hat{I}\Gamma = 90° + 90° - \frac{\hat{B}}{2} - \frac{\hat{\Gamma}}{2}$ ή

$\mathbf{B\hat{I}\Gamma = 90° + \frac{\hat{A}}{2}}$ (επειδή $\frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} = 90°$). (1)

ii) Η εσωτερική και εξωτερική διχοτόμος μιας γωνίας τέμνονται **κάθετα**. Έτσι στο τρίγωνο $\mathrm{I}\Gamma\mathrm{I}_\beta$ είναι: $\hat{\Gamma} = 90°$ και $\mathrm{B}\hat{\mathrm{I}}\Gamma = 90° + \hat{\mathrm{I}}_\beta$ (2) (ως εξωτερική γωνία).

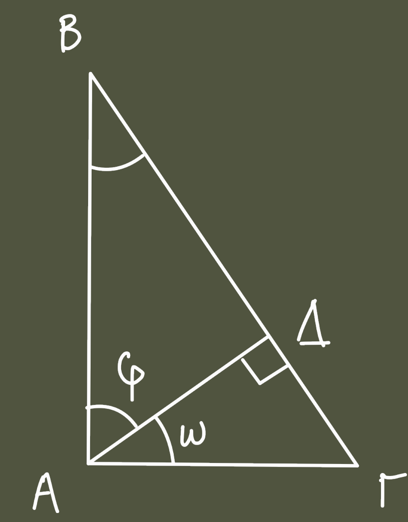
Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $\boldsymbol{\hat{\mathrm{I}}_\beta = \dfrac{\hat{\mathrm{A}}}{2}}$. (3)

iii) Όμοια στο τρίγωνο $\mathrm{I}_\alpha\mathrm{B}\mathrm{I}_\beta$ είναι $\hat{\mathrm{B}} = 90°$, οπότε $\hat{\mathrm{I}}_\alpha + \hat{\mathrm{I}}_\beta = 90°$ ή $\hat{\mathrm{I}}_\alpha = 90° - \hat{\mathrm{I}}_\beta$. (4)

Από τις (3) και (4) προκύπτει ότι $\boldsymbol{\hat{\mathrm{I}}_\alpha = 90° - \dfrac{\hat{\mathrm{A}}}{2}}$.

Ασκήσεις Εμπέδωσης σ 92

4. *Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) και το ύψος του ΑΔ. Να αποδείξετε ότι $\hat{B} = \Delta\hat{A}\Gamma$ και $\hat{\Gamma} = \Delta\hat{A}B$.*



Στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Delta}$ $\quad \hat{\varphi} + \hat{B} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{\varphi} = 90^\circ - \hat{B}$

Στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ $\quad \hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{B} = 90^\circ - \hat{\Gamma}$

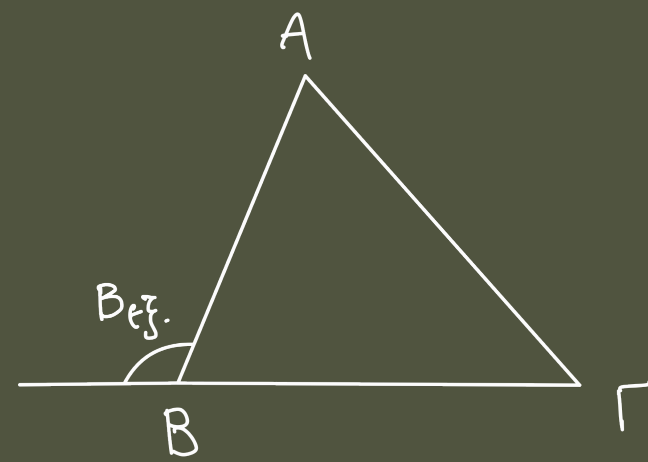
$$\Leftrightarrow \hat{\varphi} = 90^\circ - (90^\circ - \hat{\Gamma}) \Leftrightarrow \boxed{\hat{\varphi} = \hat{\Gamma}}$$

Στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{A\Delta\Gamma}$ $\quad \hat{\omega} + \hat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{\omega} = 90^\circ - \hat{\Gamma} = 90^\circ - (90^\circ - \hat{B})$

$$\Leftrightarrow \boxed{\hat{\omega} = \hat{B}}$$

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι* $\hat{B}_{\varepsilon\xi} = 90° + \dfrac{\hat{A}}{2}$*. Να αποδείξετε ότι ΑΒ = ΑΓ.*



$$\hat{B} = 180 - \hat{B}_{\varepsilon\xi} = 180 - \left(90° + \frac{\hat{A}}{2}\right) = 90° - \frac{\hat{A}}{2}$$

επίσης $\hat{A} + \hat{\Gamma} = \hat{B}_{\varepsilon\xi} = 90 + \dfrac{\hat{A}}{2} \Leftrightarrow$

$$\hat{\Gamma} = 90° + \frac{\hat{A}}{2} - \hat{A} = 90° - \frac{\hat{A}}{2} = \hat{B}$$

άρα αφού $\hat{\Gamma} = \hat{B}$ το $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ ισοσκελές

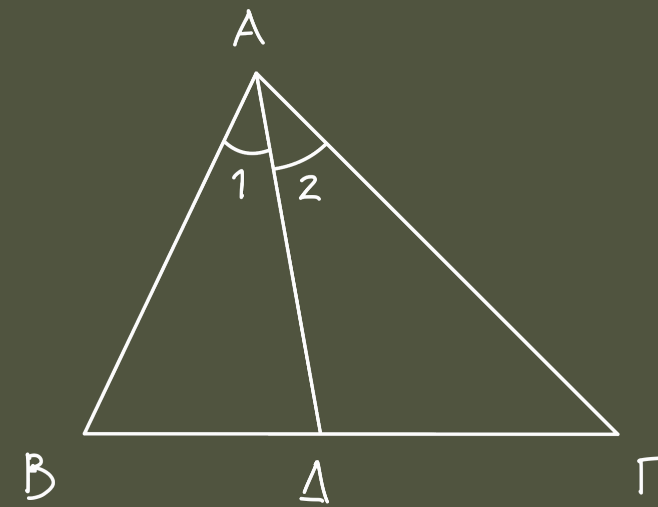
οπότε $AB = A\Gamma$.

2. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ και η διχοτόμος του ΑΔ. Να αποδείξετε ότι*

i) $A\hat{\Delta}\Gamma - A\hat{\Delta}B = \hat{B} - \hat{\Gamma}$,

ii) $A\hat{\Delta}B = 90^\circ - \dfrac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$,

$A\hat{\Delta}\Gamma = 90^\circ + \dfrac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$.



i) $A\hat{\Delta}\Gamma - A\hat{\Delta}B = \hat{A}_1 + \hat{B} - (\hat{A}_2 + \hat{\Gamma})$

$= \cancel{\hat{A}_1} + \hat{B} - \cancel{\hat{A}_2} - \hat{\Gamma}$ $\quad (\hat{A}_1 = \hat{A}_2)$

ii) $\left.\begin{aligned} A\hat{\Delta}B + A\hat{\Delta}\Gamma &= 180^\circ \quad \text{(παραπληρωματικές)} \\ A\hat{\Delta}\Gamma - A\hat{\Delta}B &= \hat{B} - \hat{\Gamma} \end{aligned}\right\} (+)$

$\cancel{A\hat{\Delta}B} + A\hat{\Delta}\Gamma + A\hat{\Delta}\Gamma - \cancel{A\hat{\Delta}B} = 180^\circ + \hat{B} - \hat{\Gamma}$

$\Leftrightarrow 2A\hat{\Delta}\Gamma = 180^\circ + \hat{B} - \hat{\Gamma}$

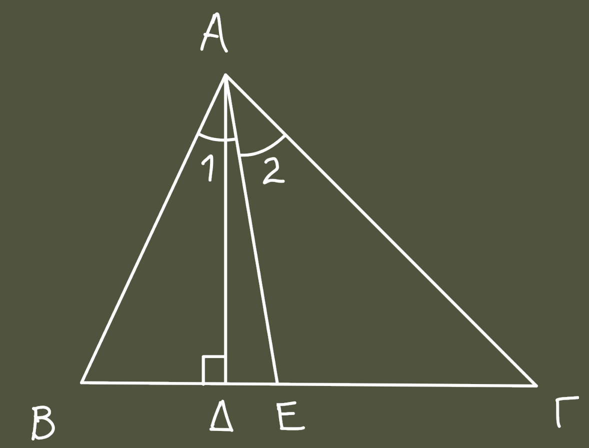
$\Leftrightarrow A\hat{\Delta}\Gamma = 90^\circ + \dfrac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$

άρα $A\hat{\Delta}B = A\hat{\Delta}\Gamma - (\hat{B} - \hat{\Gamma})$

$= 90^\circ + \dfrac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2} - \hat{B} - \hat{\Gamma}$

$= 90^\circ - \dfrac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$

3. *Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ φέρουμε το ύψος ΑΔ και τη διχοτόμο ΑΕ. Να αποδείξετε ότι $\Delta\hat{A}E = \dfrac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$.*



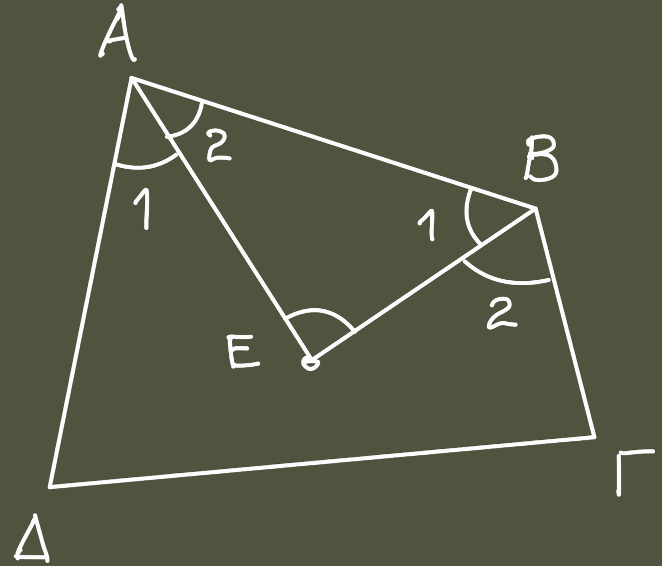
$$\left.\begin{array}{ll} \Delta\hat{E}A = \hat{A}_2 + \hat{\Gamma} & \text{(εξωτερική του τριγ. } \overset{\triangle}{AE\Gamma}\text{)} \\ \Delta\hat{E}A = 180 - (\hat{B} + \hat{A}_1) & \text{(άθρ. } 180^\circ \text{ του τρ. } \overset{\triangle}{AEB}\text{)} \end{array}\right\} \oplus$$

$$2\Delta\hat{E}A = 180^\circ - \hat{B} - \cancel{\hat{A}_1} + \cancel{\hat{A}_2} + \hat{\Gamma}$$

$$\Delta\hat{E}A = 90^\circ - \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2} \quad \text{όμως} \quad \Delta\hat{A}E = 90^\circ - \Delta\hat{E}A$$

$$= \cancel{90^\circ} - \cancel{90^\circ} + \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$$

4. *Αν οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{A}$, $\hat{B}$ κυρτού τετραπλεύρου ΑΒΓΔ τέμνονται σε σημείο Ε, να αποδείξετε ότι $A\hat{E}B = \dfrac{\hat{\Gamma}+\hat{\Delta}}{2}$.*



$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}+\hat{\Delta} = 360^\circ \Leftrightarrow$$

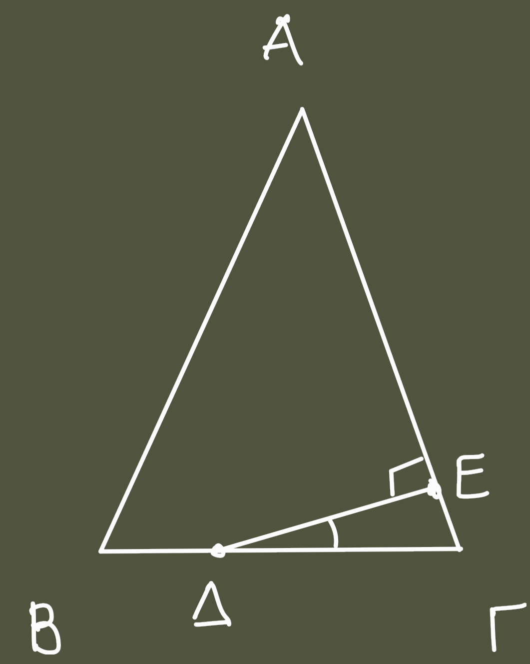
$$\frac{\hat{A}}{2}+\frac{\hat{B}}{2}+\frac{\hat{\Gamma}+\hat{\Delta}}{2} = 180^\circ \Leftrightarrow$$

$$\hat{A}_2+\hat{B}_1+\frac{\hat{\Gamma}+\hat{\Delta}}{2} = 180^\circ \Leftrightarrow$$

$$\cancel{180^\circ} - A\hat{E}B + \frac{\hat{\Gamma}+\hat{\Delta}}{2} = \cancel{180^\circ} \Leftrightarrow$$

$$A\hat{E}B = \frac{\hat{\Gamma}+\hat{\Delta}}{2}$$

5. *Από τυχαίο σημείο Δ της βάσης ΒΓ ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε τη ΔΕ⊥ΑΓ. Να αποδείξετε ότι* $\hat{A} = 2E\hat{\Delta}\Gamma$.



$E\hat{\Delta}\Gamma = 90^\circ - \hat{\Gamma} = 90^\circ - \hat{B}$

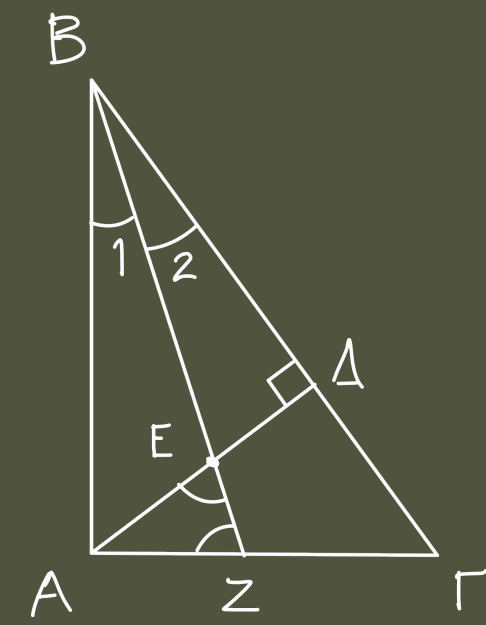
όμως $\hat{A} + 2\hat{B} = 180$

$\hat{B} = \frac{180 - A}{2}$

$E\hat{\Delta}\Gamma = 90 - \frac{180 - \hat{A}}{2} \Leftrightarrow E\hat{\Delta}\Gamma = \frac{180 - (180 - \hat{A})}{2} = \frac{\cancel{180} - \cancel{180} + \hat{A}}{2}$

$\hat{A} = 2E\hat{\Delta}\Gamma$

6. *Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) το ύψος του ΑΔ και η διχοτόμος του ΒΖ τέμνονται σε σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές.*



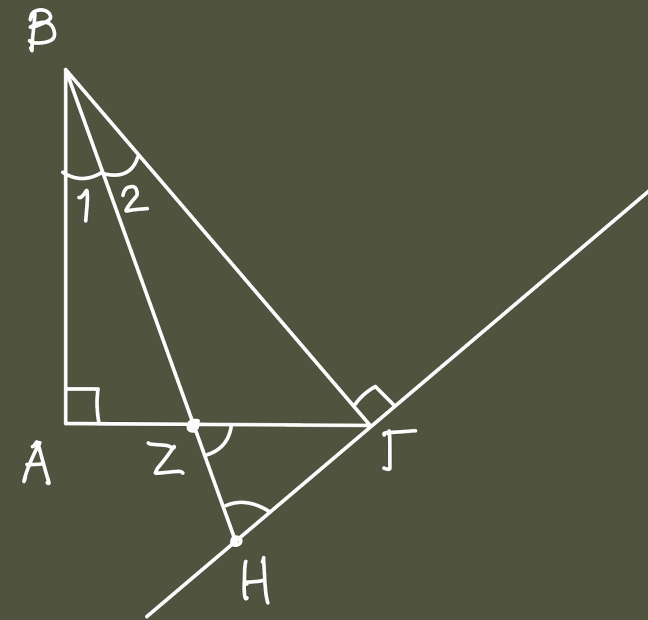
$\widehat{AEZ} = \widehat{BE\Delta}$ (κατακορυφήν)

$$\left.\begin{aligned}&\text{στο τρίγωνο } \overset{\triangle}{BE\Delta}: \quad \widehat{BE\Delta} = 90^0 - \hat{B}_2\\ &\text{στο τρίγωνο } \overset{\triangle}{BAZ}: \quad \widehat{EZA} = 90 - \hat{B}_1\end{aligned}\right\} \xRightarrow{\hat{B}_1 = \hat{B}_2} \widehat{BE\Delta} = \widehat{EZA}$$

$$\Rightarrow \widehat{AEZ} = \widehat{EZA}$$

άρα $\overset{\triangle}{AEZ}$ ισοσκελές

7. *Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$). Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ τέμνει την ΑΓ στο Ζ και την κάθετη στη ΒΓ στο σημείο Γ, στο Η. Να αποδείξετε ότι ΖΓ = ΓΗ.*



$$\left.\begin{array}{l} B\hat{Z}A = 90^\circ - \hat{B}_1 \\ Z\hat{H}\Gamma = 90^\circ - B_2 \end{array}\right\} \quad B\hat{Z}A = Z\hat{H}\Gamma$$

όμως $B\hat{Z}A = H\hat{Z}\Gamma$ (κατακορυφήν)

άρα $H\hat{Z}\Gamma = Z\hat{H}\Gamma$ οπότε το τρίγωνο

$H\hat{Z}\Gamma$ είναι ισοσκελές άρα $Z\Gamma = \Gamma H$.