

**ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ  
ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ**  
**Θέμα 2ο**

**14321.** Δίνονται οι ευθείες:  $\varepsilon_1 : 2x + y = 6$  και  $\varepsilon_2 : x - 2y = -2$ .

- a) Να προσδιορίσετε αλγεβρικά το κοινό τους σημείο M.  
 b) Να δειχθεί ότι η ευθεία  $\varepsilon_3 : 3x + y = 8$  διέρχεται από το M.

(Μονάδες 13)

(Μονάδες 12)

**15006.a)** Να λύσετε το σύστημα  $\begin{cases} 2x - 4y = -2 \\ 5x - 10y = 3 \end{cases}$ .  
 (Μονάδες 13)

- b) Τι συμπεραίνετε για τη σχετική θέση των ευθειών  $\varepsilon_1 : 2x - 4y = -2$  και  $\varepsilon_2 : 5x - 10y = 3$ ;  
 (Μονάδες 12)

**15011.** Ο Κώστας καταθέτει σε μια τράπεζα 15 χαρτονομίσματα των 20 € και 50 €. Συμβολίζουμε με x και y το πλήθος των χαρτονομισμάτων των 20 € και 50 € αντίστοιχα.

a) i. Δίνονται οι εξισώσεις: 1.  $y = 15 - x$       2.  $y - x = 15$

Να επιλέξετε ποια από τις δύο παραπάνω εξισώσεις περιγράφει την σχέση των x και y.

(Μονάδες 7)

Na αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ii. Η συνολική αξία των χρημάτων είναι 480 €. Δίνονται, ακόμα, οι εξισώσεις:

3.  $50y - 20x = 480$       4.  $20x + 50y = 480$

Να επιλέξετε ποια από τις δύο παραπάνω εξισώσεις περιγράφει την συνολική αξία των χρημάτων σε σχέση με τα x και y. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

β) Επιλύοντας το σύστημα των δύο εξισώσεων που επιλέξατε στα ερωτήματα αii) και αii) να βρείτε πόσα χαρτονομίσματα των 20 € και 50 € κατάθεσε ο Κώστας.

(Μονάδες 11)

**15016.** Δίνεται το γραμμικό σύστημα  $\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ .

a) Να αιτιολογήσετε γιατί το ζεύγος (0,4) δεν αποτελεί λύση του παραπάνω συστήματος . (Μονάδες 8)

β) Να λύσετε το παραπάνω σύστημα.  
 (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών  $(\varepsilon_1) : 3x + 2y = 8$  και  $(\varepsilon_2) : 2x - y = 3$ .  
 (Μονάδες 7)

**15195.a)** Να λύσετε το σύστημα  $\begin{cases} 5x - y = -1 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$ .  
 (Μονάδες 12)

β) Να σχεδιάσετε τις ευθείες  $(\varepsilon_1) : 5x - y = -1$  και  $(\varepsilon_2) : 3x + y = 2$  και να ερμηνεύσετε γραφικά το αποτέλεσμα του α) ερωτήματος.

(Μονάδες 13)

**15849.** Σε μια συνεστίαση μεταξύ συγγενών παρευρίσκονται οι γονείς με τα παιδιά τους. Στο τραπέζι υπάρχουν 5 παιδιά επιπλέον από τους γονείς. Κάθε γονιός πλήρωσε 12€ και κάθε παιδί τα μισά. Ο συνολικός λογαριασμός ήταν 300€.

α) Αν x το πλήθος των γονιών και y το πλήθος των παιδιών, να διαλέξετε από τις παρακάτω επιλογές, ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους που εκφράζει τα δεδομένα του παραπάνω προβλήματος.

A.  $\begin{cases} x + y + 5 = 0 \\ 12x + 6y = 300 \end{cases}$

B.  $\begin{cases} x - y = 5 \\ 6x + 12y = 300 \end{cases}$

Γ.  $\begin{cases} y = x + 5 \\ 12x + 6y = 300 \end{cases}$

Δ.  $\begin{cases} y = x + 5 \\ 6x + 12y = 300 \end{cases}$

(Μονάδες 10)

β) Από τη λύση του συστήματος που επιλέξατε στο α) ερώτημα να βρείτε πόσοι γονείς και πόσα παιδιά υπήρχαν στο τραπέζι.

(Μονάδες 15)

**18431.** Δίνεται το σύστημα  $\begin{cases} 3x + y = 11 \\ 6x + ky = 8 \end{cases}$  με αγνώστους  $x, y$  και  $k$  παράμετρος.

- α) Να λύσετε το σύστημα όταν  $k = 2$ .  
 β) Να λύσετε το σύστημα όταν  $k = 1$ .

(Μονάδες 12)  
 (Μονάδες 13)

**21227.α)** Να λύσετε το σύστημα  $\begin{cases} 5x - y = 5 \\ -5x + y = 2 \end{cases}$ .

(Μονάδες 12)

- β) Να σχεδιάσετε τις ευθείες  $(\varepsilon_1)$ :  $5x - y = 5$  και  $(\varepsilon_2)$ :  $-5x + y = 2$  και να ερμηνεύσετε γραφικά το αποτέλεσμα του α) ερωτήματος.

(Μονάδες 13)

## Θέμα 4ο

**14289.** Ο Κώστας έχει τρία παιδιά. Δύο δίδυμα κορίτσια και ένα αγόρι. Στην ερώτηση πόσων χρονών είναι τα παιδιά του απάντησε ως εξής.

- Το άθροισμα των ηλικιών και των τριών παιδιών είναι 14
  - Το γινόμενο της ηλικίας της κόρης μου επί την ηλικία του γιου μου είναι 24
  - Το άθροισμα των ηλικιών των κοριτσιών είναι μικρότερο από την ηλικία του αγοριού.
- α) Να γράψετε τις εξισώσεις που περιγράφουν τα στοιχεία 1. και 2. που έδωσε ο Κώστας. (Μονάδες 10)  
 β) Να βρείτε τις ηλικίες των παιδιών του Κώστα. (Μονάδες 15)

**15117.** Μια παρέα τεσσάρων φίλων παραγγέλνει σάντουιτς. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η παραγγελία τους. Τα συστατικά των σάντουιτς είναι βιολογικά και το ψωμί είναι ολικής άλεσης (βιολογικό). Το ψωμί για κάθε σάντουιτς έχει κόστος 0,3 ευρώ. Το πρώτο σάντουιτς έχει 2 φέτες ζαμπόν, 4 φέτες τυρί, δεν έχει γαλοπούλα και κοστίζει 3,8 ευρώ. Το δεύτερο έχει 1 φέτα ζαμπόν, 2 φέτες τυρί, 3 φέτες γαλοπούλα και κοστίζει 3,55 ευρώ. Το τρίτο έχει 3 φέτες ζαμπόν, δεν έχει τυρί, έχει 3 φέτες γαλοπούλα και κοστίζει 4,05 ευρώ. Ο σερβιτόρος δεν έχει προλάβει να συμπληρώσει το κόστος του τελευταίου σάντουιτς.

σάντουιτς	φέτες ζαμπόν	φέτες τυρί	φέτες γαλοπούλα	ψωμί	κόστος
1 <sup>ο</sup>	2	4	0	0,3€	3,8€
2 <sup>ο</sup>	1	2	3	0,3€	3,55€
3 <sup>ο</sup>	3	0	3	0,3€	4,05€
4 <sup>ο</sup>	2	2	1	0,3€	
				Σύνολο	

- α) Να εκφράσετε τα δεδομένα του προβλήματος με ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρείς αγνώστους. (Μονάδες 9)  
 β) Να βρείτε πόσο κοστίζει η μία φέτα τυρί, η μία φέτα γαλοπούλα και η μία φέτα ζαμπόν. (Μονάδες 10)  
 γ) Πόσα χρήματα θα πληρώσουν συνολικά οι τέσσερεις φίλοι για την παραγγελία τους; (Μονάδες 6)

## Θέμα 3ο

**14237.** Για τις ηλικίες των μελών μιας τριμελούς οικογένειας ισχύουν τα παρακάτω:

Η ηλικία της μητέρας είναι τριπλάσια από την ηλικία του παιδιού. Ο λόγος της ηλικίας του πατέρα προς την ηλικία του παιδιού ισούται με  $\frac{11}{3}$ . Επιπλέον το άθροισμα των ηλικιών και των τριών ισούται με 115 χρόνια.

- α) Να εκφράσετε τα δεδομένα με ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρείς αγνώστους. (Μονάδες 13)  
 β) Να βρείτε την ηλικία του καθενός. (Μονάδες 12)

## Θέμα 30

**14979.** Δίνεται το σύστημα  $(\Sigma)$ :  $\begin{cases} y = -x + 2 \\ y = \frac{1}{x} \end{cases}$ .

- α)** Να λύσετε το σύστημα  $(\Sigma)$ .  
**β)** Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά, σε κατάλληλο σχήμα, τις λύσεις του συστήματος  $(\Sigma)$  που βρήκατε στο ερώτημα α.  
(Μονάδες 12)  
(Μονάδες 13)

## ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ MONOTONIA-ΑΚΡΟΤΑΤΑ-ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Θέμα 20

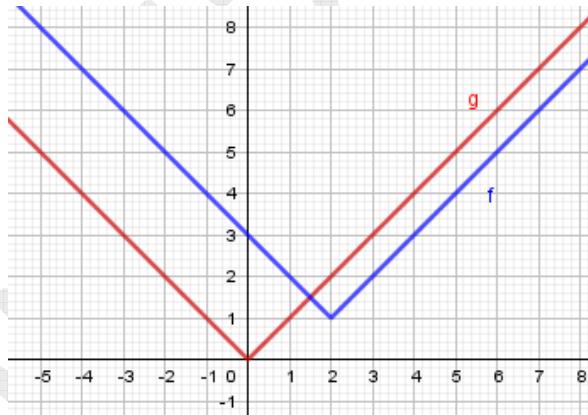
**14325.** Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f$  και  $g$ , που ορίζονται στους πραγματικούς αριθμούς. Η γραφική παράσταση της  $g$  προκύπτει από τη γραφική παράσταση της  $f$  με οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπιση.

Από τις γραφικές παραστάσεις να βρείτε:

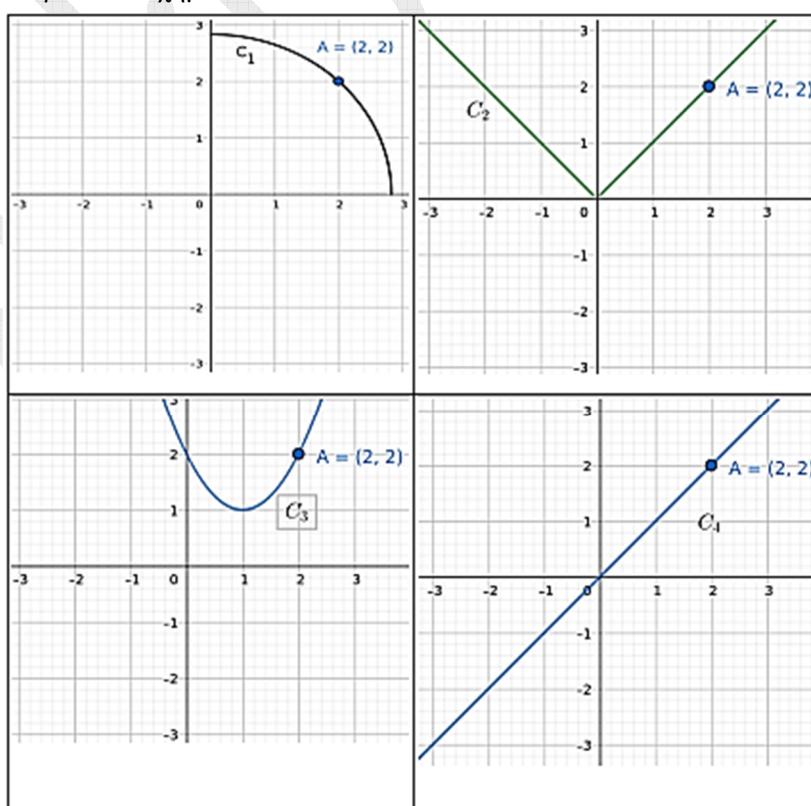
- α)** Τα διαστήματα μονοτονίας της  $f$ , το είδος του ακρότατου της  $f$  και την τιμή του.  
(Μονάδες 15)

**β)** Αν  $g(x) = |x|$ ,  $x \in \mathbb{R}$  να επιλέξετε ποιος από τους παρακάτω είναι ο τύπος της συνάρτησης  $f$ . Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας

$$f(x) = |x+2|+1 \quad f(x) = |x-2|-1 \quad f(x) = |x+2|-1 \quad f(x) = |x-2|+1$$



**14976.** Δίνονται τα παρακάτω σχήματα:



**α)** Να αιτιολογήσετε ποιες από τις γραφικές παραστάσεις  $C_1, C_2, C_3, C_4$  αναπαριστούν άρτιες ή περιττές συναρτήσεις, ποιες όχι και γιατί. Δίνεται ότι τουλάχιστον μία είναι άρτια και τουλάχιστον μία είναι περιττή.

(Μονάδες 12)

**β)** Για τις συναρτήσεις  $C_2, C_4$  να βρείτε την τεταγμένη του σημείου τους  $B(-2, k)$ , αιτιολογώντας την τιμή που βρήκατε από την ιδιότητα συμμετρίας καθεμίας συνάρτησης.

(Μονάδες 13)

**14971.** Δίνονται τα σημεία του επιπέδου  $A(1,1), B(3,3)$ .

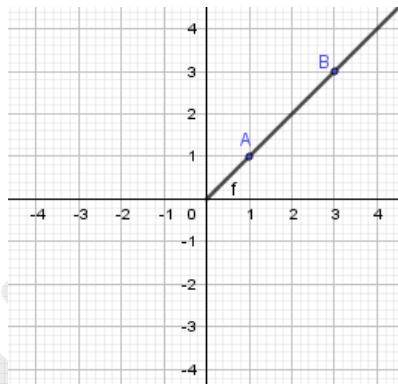
**α)** Να αιτιολογήσετε ποιες από τις επόμενες ιδιότητες θα μπορούσε και ποιες δε θα μπορούσε να έχει μία συνάρτηση  $f$ , που ορίζεται σε όλους τους πραγματικούς αριθμούς και της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα  $A$  και  $B$ .

- i) είναι σταθερή συνάρτηση
- ii) είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση

Μονάδες 12

**β)** Να συμπληρώσετε την παρακάτω γραφική παράσταση μίας συνάρτησης  $f$ , η οποία διέρχεται από τα  $A, B$  και είναι περιττή.

Μονάδες 13



**15019.** Δίνεται μία συνάρτηση  $f$  για την οποία ισχύει ότι  $f(-1) = 2$  και  $f(1) = 0$ . Να αιτιολογήσετε (αλγεβρικά ή γραφικά)

**α)** γιατί η συνάρτηση  $f$  δεν είναι άρτια .

(Μονάδες 8)

**β)** γιατί η συνάρτηση  $f$  δεν είναι περιττή.

(Μονάδες 8)

**γ)** γιατί η συνάρτηση  $f$  δεν είναι γνησίως αύξουσα.

(Μονάδες 9)

**15024.** Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f$  με πεδίο ορισμού το  $[4, 4]$  – φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

**α)** Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση είναι άρτια.

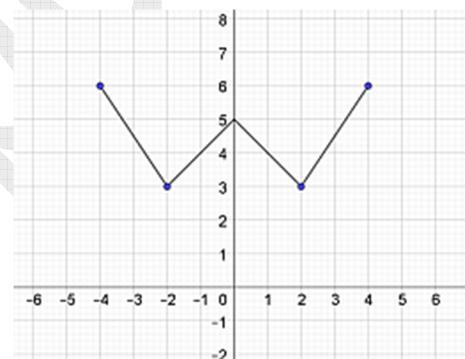
(Μονάδες 8)

**β)** Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της  $f$ .

(Μονάδες 8)

**γ)** Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της  $f$  καθώς και για ποιες τιμές του  $x$  τις παρουσιάζει.

(Μονάδες 9)



**15112.** Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f$  με πεδίο ορισμού το διάστημα  $(-2, 2)$ .

**α)** Να εξετάσετε αν η  $f$  είναι άρτια ή περιττή και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

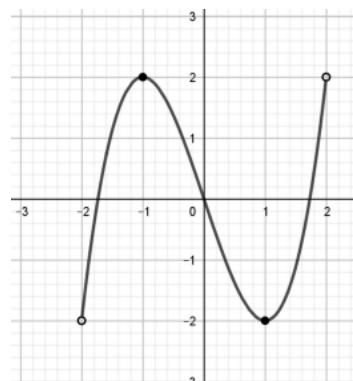
(Μονάδες 7)

**β)** Να γράψετε τα διαστήματα στα οποία η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.

(Μονάδες 8)

**γ)** Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της  $f$  καθώς και τις θέσεις των ακρότατων αυτών.

(Μονάδες 10)

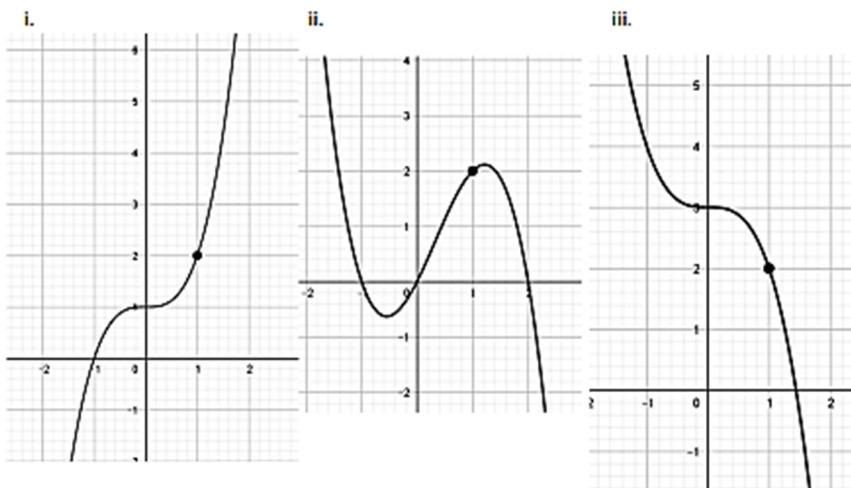


**15114.** Δίνεται μια συνάρτηση  $f$  γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$  με σύνολο τιμών το  $\mathbb{R}$  της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο  $A(1,2)$ .

**α)** Θα μπορούσε η γραφική παράσταση της  $f$  να διέρχεται και από το σημείο  $B(2,9)$ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

**β)** Ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις θα μπορούσε να είναι η γραφική παράσταση της  $f$ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

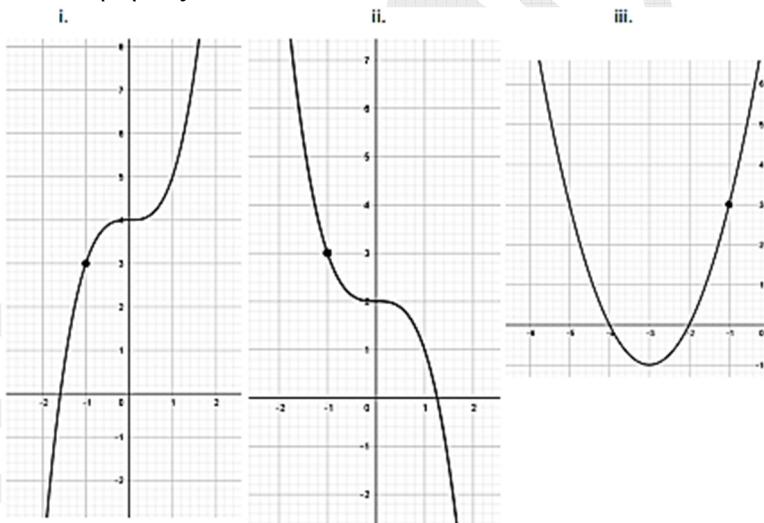


(Μονάδες 12)

**15115.** Δίνεται μια συνάρτηση  $f$  γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$  με σύνολο τιμών το  $\mathbb{R}$  της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο  $A(-1,3)$ .

**α)** Θα μπορούσε η γραφική παράσταση της  $f$  να διέρχεται και από το σημείο  $B(2,5)$ ? Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)

**β)** Ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις θα μπορούσε να είναι η γραφική παράσταση της  $f$ ? Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



(Μονάδες 12)

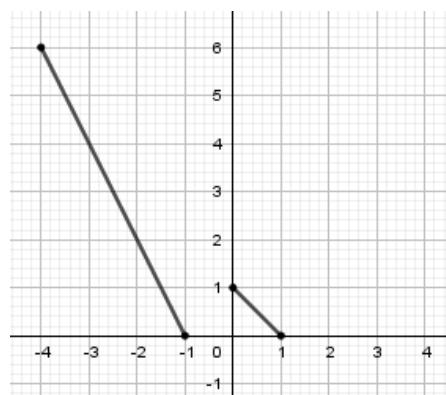
**15116.** Στο διπλανό σχήμα δίνονται ορισμένα τμήματα της γραφικής παράστασης μιας άρτιας συνάρτησης  $f$  με πεδίο ορισμού το διάστημα  $[-4,4]$ .

**α)** Να μεταφέρετε το σχήμα στην κόλλα σας και να χαράξετε τα υπόλοιπα τμήματα της γραφικής παράστασης της  $f$ . (Μονάδες 8)

**β)** Να βρείτε

i. τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

ii. τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της  $f$  καθώς και τις θέσεις των ακροτάτων αυτών. (Μονάδες 9)



**15349.** Δίνεται η γραφική παράσταση  $C_f$  της συνάρτησης  $f$  με πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$ , όπως φαίνεται στο σχήμα.

**α)** Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση είναι άρτια.

(Μονάδες 7)

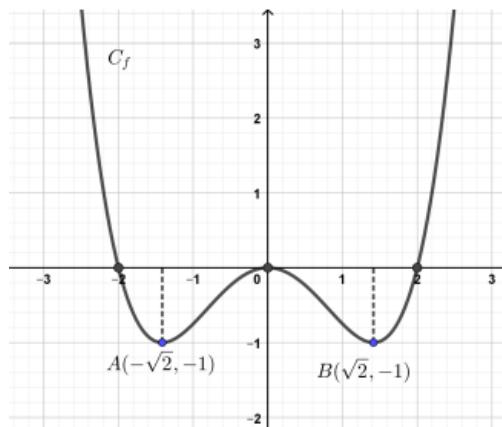
**β)** Αν γνωρίζετε ότι τα σημεία  $A(-\sqrt{2}, -1)$  και  $B(\sqrt{2}, -1)$

ανήκουν στη γραφική παράσταση της  $f$  να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης  $f$ .

(Μονάδες 8)

**γ)** Να λύσετε γραφικά την εξίσωση  $f(x) = 0$ .

(Μονάδες 10)



**15372.** Στο παραπάνω σχήμα δίνεται ένα τμήμα της γραφικής παράστασης μιας άρτιας συνάρτησης με πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$ .

**α)** Να μεταφέρεται το σχήμα στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση με το κομμάτι της καμπύλης που λείπει.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

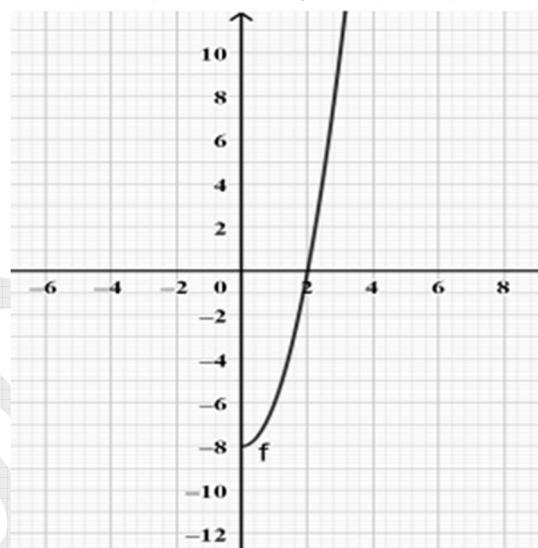
**β)** Να βρείτε:

i. Τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης  $f$ .

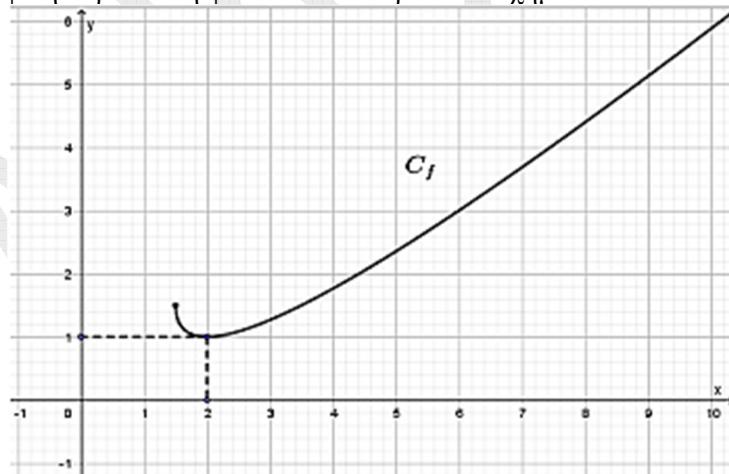
(Μονάδες 8)

ii. Το είδος του ακροτάτου και τη θέση που το παρουσιάζει.

(Μονάδες 7)



**15437.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x - \sqrt{2x - 3}$ , της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



**α)** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

(Μονάδες 7)

**β)** Να προσδιορίσετε το ολικό ελάχιστο της συνάρτησης, καθώς και τη θέση αυτού.

(Μονάδες 8)

**γ)** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση είναι

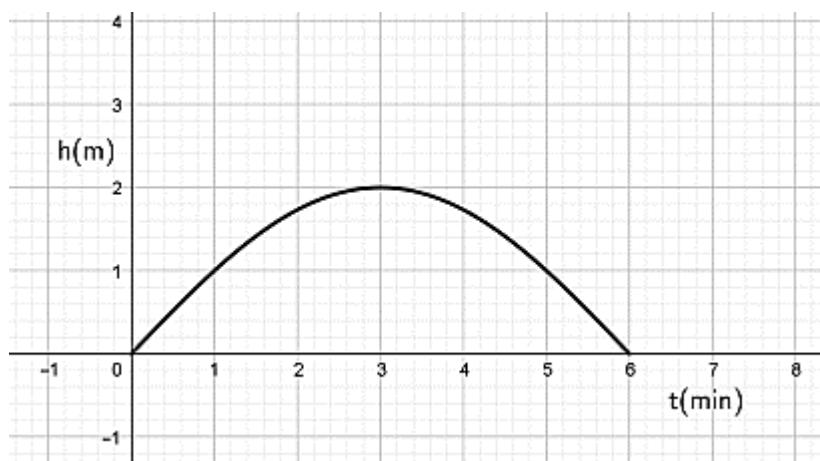
I. γνησίως φθίνουσα

(Μονάδες 5)

II. γνησίως αύξουσα

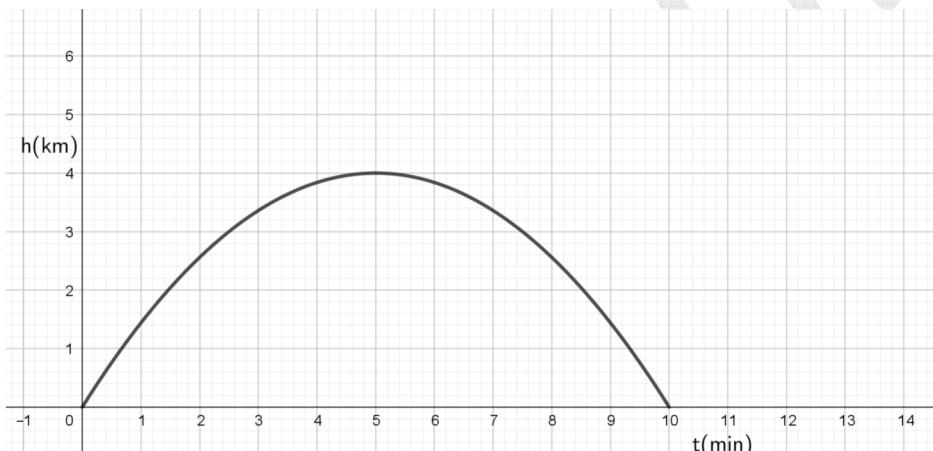
(Μονάδες 5)

**15645.** Αντικείμενο κινείται κατακόρυφα. Το παρακάτω σχήμα αναπαριστά το ύψος  $h$  του αντικειμένου από το έδαφος για κάθε χρονική στιγμή  $t$ . Να βρείτε:



- α)** Ποιες χρονικές στιγμές το αντικείμενο απέχει 1m από το έδαφος. (Μονάδες 5)  
**β)** Ποια είναι η μέγιστη απόσταση του αντικειμένου από το έδαφος και ποια χρονική στιγμή την επιτυγχάνει. (Μονάδες 10)  
**γ)** Ποιο χρονικό διάστημα το αντικείμενο απομακρύνεται από το έδαφος. (Μονάδες 10)

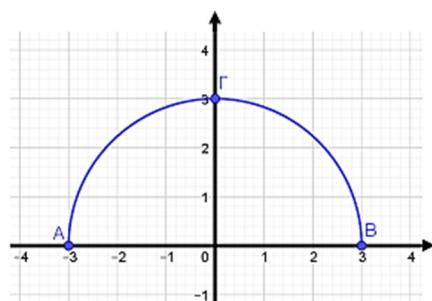
**15787.** Προκειμένου να ελεγχθεί μηχανισμός εκτόξευσης πυραύλων δημιουργήσαμε το παρακάτω σχήμα στο οποίο φαίνεται η απόσταση του πυραύλου από το έδαφος σε συνάρτηση με τον χρόνο.



- α)** Να βρείτε:
- Τον συνολικό χρόνο κίνησης του πυραύλου. (Μονάδες 5)
  - Το μέγιστο ύψος που έφτασε ο πύραυλος και ποια χρονική στιγμή συνέβη αυτό. (Μονάδες 6)
- β)** Σε επανάληψη του ελέγχου η εκτόξευση πραγματοποιείται από ύψος 1 km.
- Να μεταφέρεται στην κόλλα σας την αποτύπωση της πρώτης εκτόξευσης και να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων την δεύτερη. (Μονάδες 7)
  - Το νέο μέγιστο ύψος που έφτασε ο πύραυλος και ποια χρονική στιγμή συνέβη αυτό. (Μονάδες 7)

**16129.** Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης  $f(x)$ .

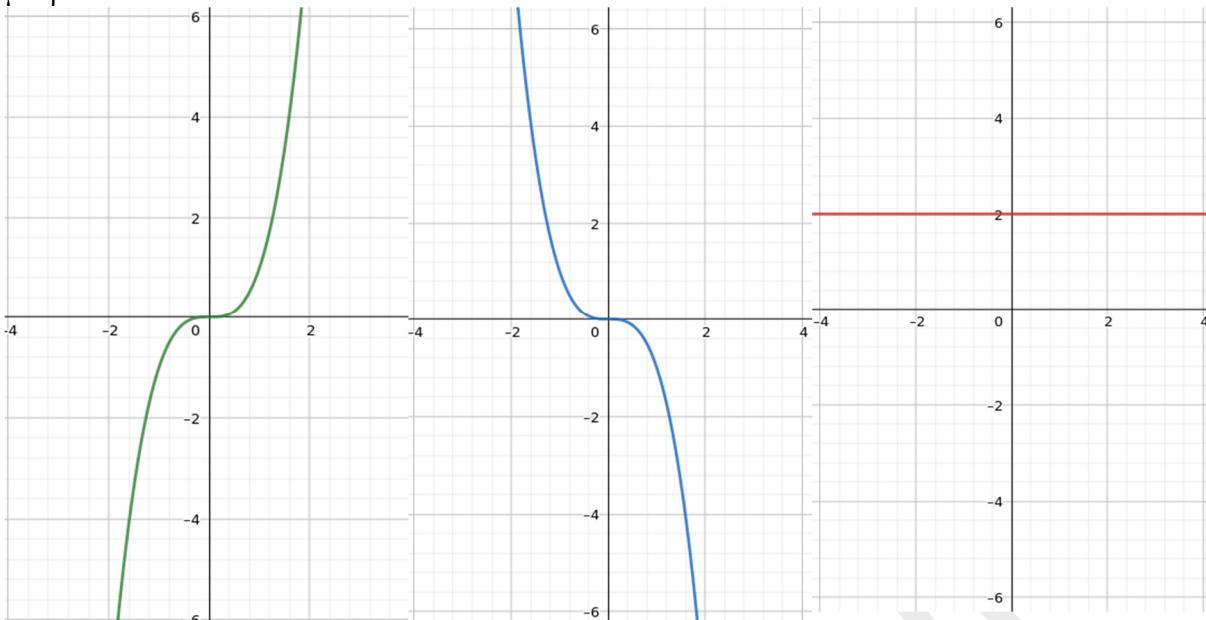
- α)** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ . (Μονάδες 6)  
**β)** Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή. (Μονάδες 9)  
**γ)** Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα ακρότατα της  $f$  και τις θέσεις των ακροτάτων. (Μονάδες 10)



**21164.** Δίνεται το σημείο  $A(-2, 8)$  το οποίο ανήκει στη γραφική παράσταση μίας περιττής και γνησίως μονότονης συνάρτησης  $f$ .

- α)** Να βρείτε τις συντεταγμένες ενός ακόμα σημείου, το οποίο να ανήκει στη γραφική παράσταση της  $f$ . (Μονάδες 8)

- β)** Να βρείτε αν η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα. (Μονάδες 9)  
**γ)** Αν μία από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις αντιστοιχεί στη συνάρτηση  $f$  να αιτιολογήσετε ποια μπορεί να είναι:



Γραφική παράσταση (α)

Γραφική παράσταση (β)

Γραφική παράσταση (γ)

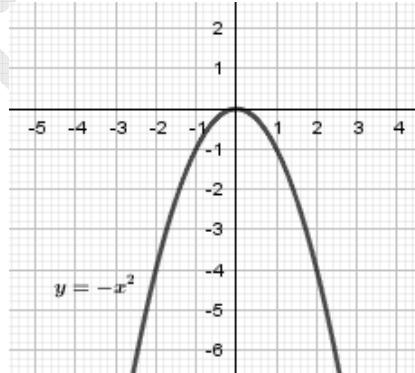
(Μονάδες 8)

## Θέμα 4ο

**14293.** Δίνονται οι συναρτήσεις  $\varphi(x) = -x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$  και

$$f(x) = -x^2 + 2x + 1, x \in \mathbb{R}.$$

- α)** Να αποδείξετε ότι  $f(x) = -(x-1)^2 + 2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και στη συνέχεια, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $\varphi$ , που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση  $f$ . (Μονάδες 10)



- β)** Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  να βρείτε:

- i. Τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως μονότονη.  
ii. Το ολικό ακρότατο της  $f$  καθώς και τη θέση του.  
iii. Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης  $f(x) = \kappa$ ,  $\kappa < 2$ .

(Μονάδες 5)  
(Μονάδες 5)

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

**15022.** Θεωρούμε μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το διάστημα  $[-3, 3]$ . Η συνάρτηση  $f$  είναι άρτια, γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $[-3, 0]$  και γνησίως αύξουσα στο  $[0, 3]$ .

- α)** Να αποδείξετε ότι  $f(-1) < f(2)$ . (Μονάδες 6)

- β)** Να αποδείξετε ότι  $f(3) \geq f(x) \geq f(0)$  για κάθε  $x \in [-3, 3]$ . (Μονάδες 7)

- γ)** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  παρουσιάζει ελάχιστο και μέγιστο και να βρείτε τις θέσεις μεγίστου και ελαχίστου. (Μονάδες 6)

- δ)** Παρακάτω δίνονται 4 τύποι, από τους οποίους ένας μόνο μπορεί να είναι ο τύπος της συνάρτησης  $f$ . Να επιλέξετε το σωστό τύπο αιτιολογώντας την απάντησή σας.

a.  $f(x) = \sqrt{9-x^2}$       b.  $f(x) = -\sqrt{9-x^2}$       c.  $f(x) = \sqrt{x^2-9}$       d.  $f(x) = -\sqrt{x^2-9}$

(Μονάδες 6)

## Οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπιση

### Θέμα 20

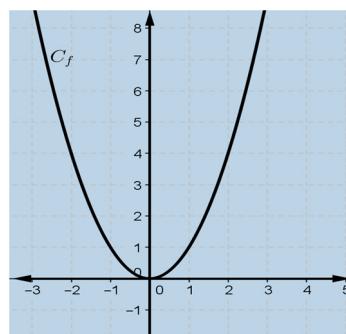
**14230.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 - 4x + 5$ ,  $x \in \mathbb{R}$

a) Να αποδείξετε ότι η  $f$  γράφεται στη μορφή  $f(x) = (x - 2)^2 + 1$ .

(Μονάδες 12)

b) Στο διπλανό σύστημα συντεταγμένων που ακολουθεί, να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση  $f$ , μετατοπίζοντας κατάλληλα την  $y = x^2$ .

(Μονάδες 13)

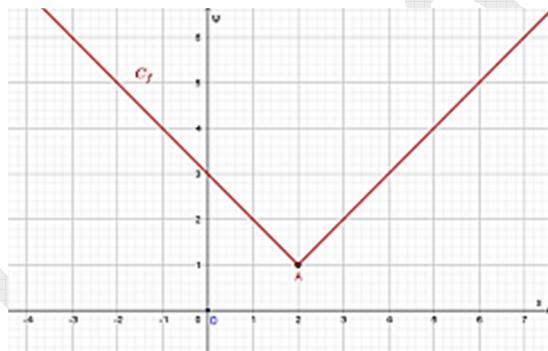


**14972.** Δίνεται η συνάρτηση  $\varphi(x) = |x|$ ,  $x \in \mathbb{R}$  με γραφική παράσταση που φαίνεται στο σχήμα. Επιπλέον οι συναρτήσεις  $g(x) = |x - 2|$ ,  $x \in \mathbb{R}$  και  $f(x) = |x - 2| + 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

a) Να παραστήσετε γραφικά στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις συναρτήσεις  $g$ ,  $f$  και να εξηγήσετε πώς προκύπτουν μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της

(Μονάδες 13)

b) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της, η οποία δίνεται παρακάτω,



να βρείτε:

i. Τα διαστήματα στα οποία η είναι γνήσια αύξουσα και γνήσια φθίνουσα.

(Μονάδες 6)

ii. Το ολικό ακρότατο της και τη θέση του. Τι είδους ακρότατο είναι;

(Μονάδες 6)

**14983.** Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική

παράσταση της συνάρτησης  $g(x) = \frac{1}{3}x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$

και η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x)$  η οποία προκύπτει από μία οριζόντια μετατόπιση της  $g(x)$  κατά 3 μονάδες προς τα δεξιά και μετά κατά μία μονάδα προς τα πάνω.

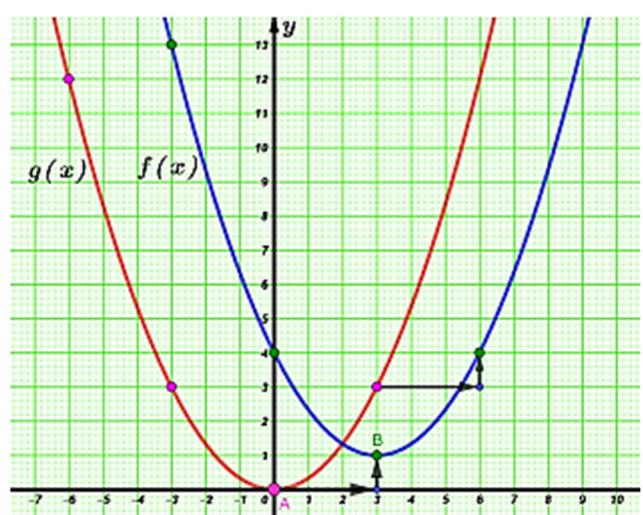
a) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση όσον αφορά τον τύπο της  $f(x)$ .

(i)  $f(x) = g(x + 3) + 1$

(ii)  $f(x) = g(x + 3) - 1$

(iii)  $f(x) = g(x - 3) + 1$

(iv)  $f(x) = g(x - 3) - 1$



(Μονάδες 9)

b) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης  $f(x)$  και την θέση ελαχίστου.

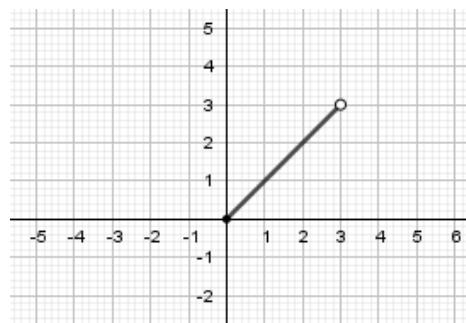
(Μονάδες 8)

γ) Να γράψετε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση  $f(x)$  είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

(Μονάδες 8)

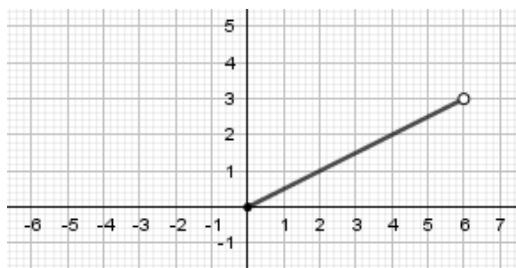
**15017.** Μία συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το διάστημα  $(a, 3)$  είναι άρτια και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο  $(2, 2)$ .

- a)** Να βρείτε την τιμή του  $a$ . (Μονάδες 7)
- β)** Να βρείτε το  $f(-2)$ . (Μονάδες 8)
- γ)** Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f$  στο διάστημα  $[0, 3]$ . Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της  $f$  στο πεδίο ορισμού της. (Μονάδες 10)



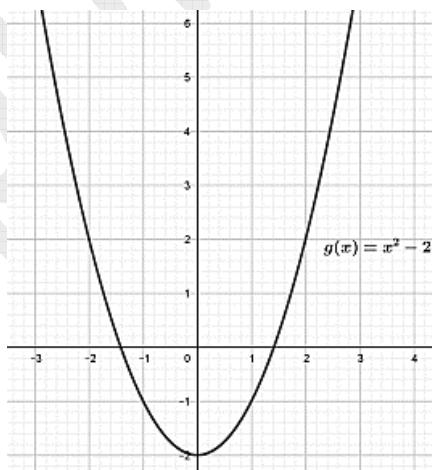
**15018.** Μία συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το διάστημα  $(a, 6)$  είναι περιττή και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο  $(4, 2)$ .

- α)** Να βρείτε την τιμή του  $a$ . (Μονάδες 7)
- β)** Να βρείτε το  $f(-4)$ . (Μονάδες 8)
- γ)** Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f$  στο διάστημα  $[0, 6]$ . Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της  $f$  στο πεδίο ορισμού της. (Μονάδες 10)

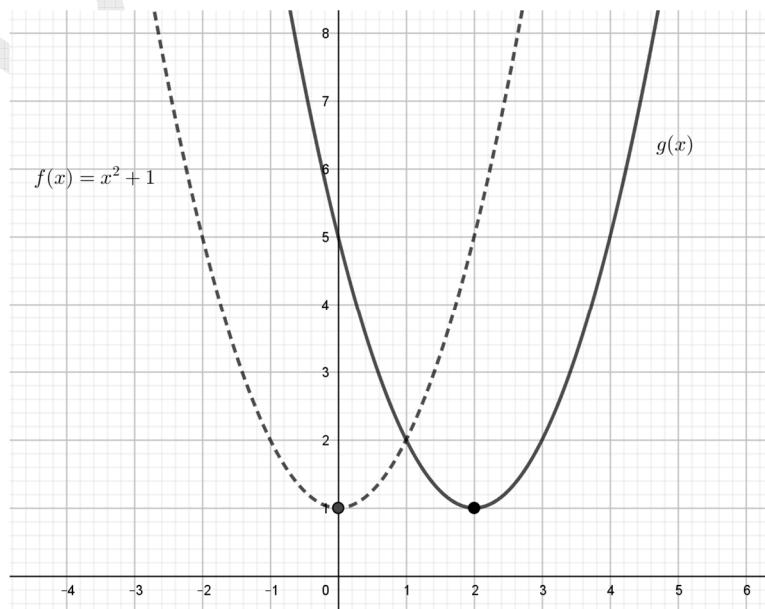


**15811.** Στο διπλανό σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g(x) = x^2 - 2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- α)** Με βάση τη γραφική της παράσταση,
  - i. να αιτιολογήσετε γιατί η  $g$  είναι άρτια. (Μονάδες 9)
  - ii. να βρείτε το ελάχιστο της  $g$  και τη θέση αυτού. (Μονάδες 7)
- β)** Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της  $f(x) = x^2$  μετατοπίζοντας κατάλληλα την γραφική παράσταση της  $g$  που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα. (Μονάδες 9)



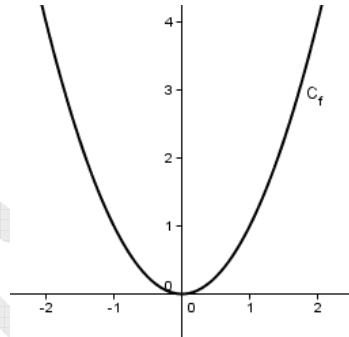
**20671.** Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = x^2 + 1$  και η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $g(x)$  με  $x \in \mathbb{R}$ .



- a) i.** Είναι η  $f$  άρτια ή περιττή συνάρτηση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)  
**ii.** Έχει η  $f$  μέγιστη τιμή ή ελάχιστη; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)
- β) i.** Με ποια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της  $f$  προέκυψε η γραφική παράσταση της  $g$ ; (Μονάδες 7)  
**ii.** Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης  $g$ . (Μονάδες 4)

**21673.** Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση  $C_f$  της συνάρτησης  $f(x) = x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- α)** Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης  $\varphi(x)$  της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από την  $C_f$  αν την μετατοπίσουμε μια μονάδα, προς τα πάνω. (Μονάδες 8)  
**β)** Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της  $\varphi(x)$ . (Μονάδες 8)  
**γ)** Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της  $\varphi(x)$ . (Μονάδες 9)



## Θέμα 4ο

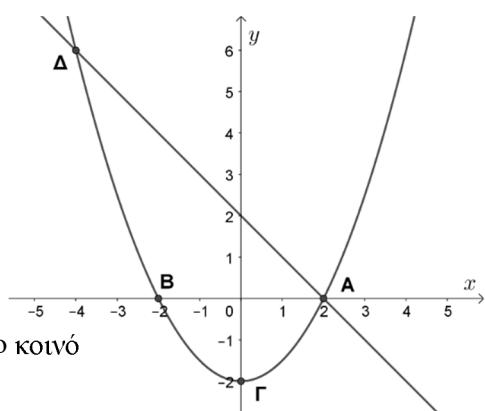
**14241.** Η περιβαλλοντική ομάδα ενός σχολείου παρέλαβε συρματόπλεγμα μήκους 40m για να περιφράξει, χρησιμοποιώντας όλο το συρματόπλεγμα, έναν ορθογώνιο κάτιο για καλλιέργεια λαχανικών. Οι μαθητές της περιβαλλοντικής ομάδας θέλουν να επιλέξουν ένα κήπο που να έχει όσο το δυνατόν μεγαλύτερο εμβαδόν.

- α)** Να δώσετε τις διαστάσεις τριών διαφορετικών ορθογώνιων κήπων με περίμετρο 40m. Να εξετάσετε αν οι τρεις λαχανόκηποι έχουν το ίδιο εμβαδόν. (Μονάδες 7)  
**β)** Αν συμβολίσουμε με  $x$  το πλάτος και με  $E$  το εμβαδόν ενός λαχανόκηπου με περίμετρο 40m, να εκφράσετε το  $E$  ως συνάρτηση του  $x$ .  
**γ)** Να δείξετε ότι  $E(x) = -(x - 10)^2 + 100$ . Χρησιμοποιώντας την γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = -x^2$  να κατασκευάσετε την γραφική παράσταση της  $E(x)$ . Από τη γραφική παράσταση της  $E(x)$  να βρείτε τις διαστάσεις του λαχανόκηπου με το μεγαλύτερο εμβαδόν. (Μονάδες 10)



**14294.** Στο σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις μιας παραβολής  $f(x) = ax^2 + bx + c$  και της ευθείας  $g(x) = -x + 2$ .

- α)** Δεδομένου ότι η παραβολή διέρχεται από τα σημεία  $A$ ,  $B$ ,  $G$ , να βρείτε τις τιμές των  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . (Μονάδες 8)  
**β)** Αν  $a = \frac{1}{2}$ ,  $b = 0$  και  $c = -2$ , να βρείτε αλγεβρικά τις συντεταγμένες των κοινών σημείων της ευθείας και της παραβολής. (Μονάδες 8)  
**γ)** Αν μετατοπίσουμε την παραβολή κατά 4,5 μονάδες προς τα πάνω, να δείξετε ότι η ευθεία και η παραβολή θα έχουν ένα μόνο κοινό σημείο. (Μονάδες 9)



**14973.** Δίνονται οι συναρτήσεις  $\varphi(x) = 3x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$  και  $f(x) = 3x^2 - 6x + 8$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**α)** Να ελέγξετε αν η συνάρτηση  $\varphi(x)$  είναι άρτια ή περιττή και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση. (Μονάδες 4)

**β)** Να αποδείξετε ότι  $f(x) = 3(x-1)^2 + 5$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Στη συνέχεια, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης, να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση, αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 4)

**γ)** Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης, να βρείτε:

**i.** Τα διαστήματα στα οποία η είναι γνήσια μονότονη και τον άξονα συμμετρίας της συνάρτησης (Μονάδες 6)

**ii.** Το ολικό ακρότατο της και τη θέση του. Τι είδους ακρότατο είναι; (Μονάδες 4)

**iii.** Το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της και της ευθείας με εξίσωση  $y = \lambda$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού  $\lambda$ . (Μονάδες 7)

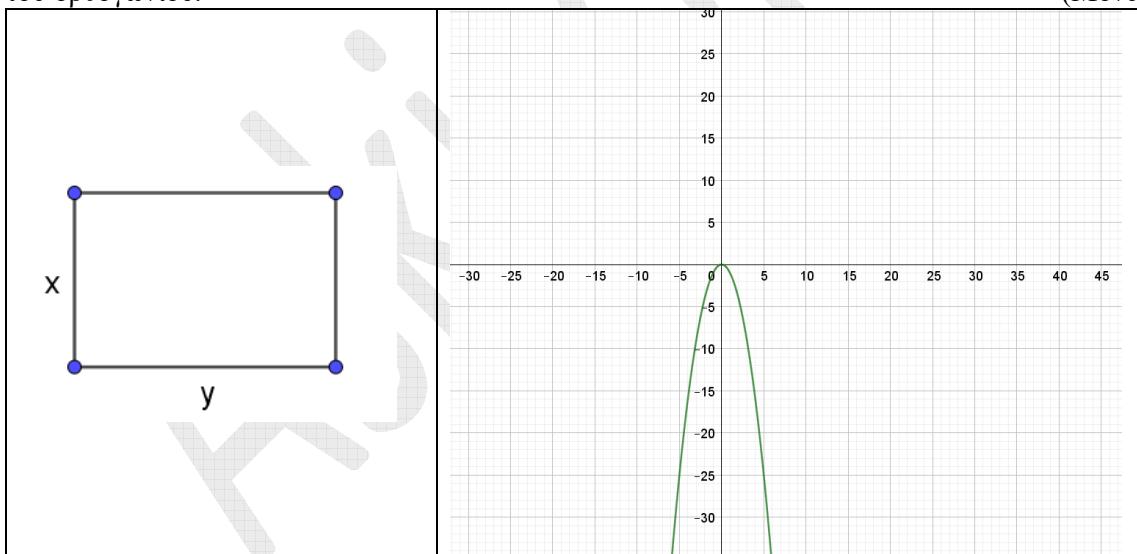
**20715.** Με συρματόπλεγμα μήκους 20 m θέλουμε να περιφράξουμε οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις  $x$  και  $y$ , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

**α)** Να εκφράσετε την πλευρά  $y$  ως συνάρτηση της πλευράς  $x$  και να βρείτε τις δυνατές τιμές της πλευράς  $x$ . (Μονάδες 7)

**β)** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν  $E(x)$  του ορθογωνίου ως συνάρτηση του  $x$  δίνεται από τη συνάρτηση  $E(x) = -(x-5)^2 + 25$  και να βρείτε το πεδίο ορισμού της στο πλαίσιο του προβλήματος. (Μονάδες 7)

**γ)** Παρακάτω δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g(x) = -x^2$ . Μετατοπίζοντάς τη κατάλληλα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $E(x)$  και με βάση αυτή, να βρείτε το  $x$  έτσι ώστε το εμβαδόν  $E(x)$  του ορθογωνίου να γίνεται μέγιστο. (Μονάδες 7)

**δ)** Για την τιμή του  $x$  που βρήκατε στο ερώτημα γ), να βρείτε την πλευρά  $y$  και να προσδιορίσετε το είδος του ορθογωνίου. (Μονάδες 4)



**20642.** Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μια γνησίως μονότονη και περιττή συνάρτηση και  $g(x) = e^x - 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Αν η γραφική παράσταση  $C_f$  της  $f$  διέρχεται από το σημείο  $A(-1, 2)$ , τότε:

**α)** Να βρείτε το  $f(1)$  και να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα. (Μονάδες 6)

**β)** Να αποδείξετε ότι η  $C_f$  διέρχεται από το σημείο  $O(0, 0)$ . (Μονάδες 6)

**γ)** Να βρείτε το πρόσημο των τιμών της συνάρτησης  $f$  και να αιτιολογήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f$ ,  $g$  έχουν μοναδικό κοινό σημείο το  $O$ . (Μονάδες 7)

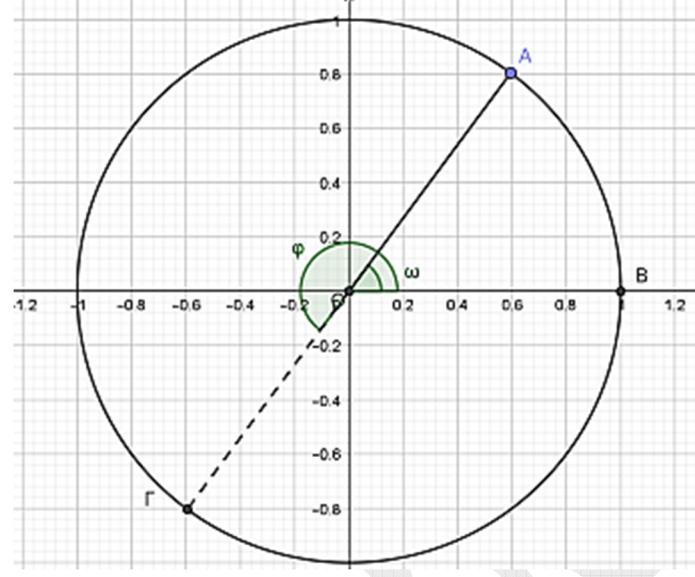
**δ)** Έστω  $f(x) = -2x^3$ . Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης  $h$  της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από την  $C_f$  αν την μετατοπίσουμε 2 μονάδες αριστερά και μια μονάδα πάνω. (Μονάδες 6)

## ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

### Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας

Θέμα 20

**15079.** Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία  $\hat{\omega} = \widehat{B\hat{O}A}$ .



**α)** Με βάση το σχήμα, να αιτιολογήσετε γιατί συνω =  $\frac{3}{5}$ . (Μονάδες 8)

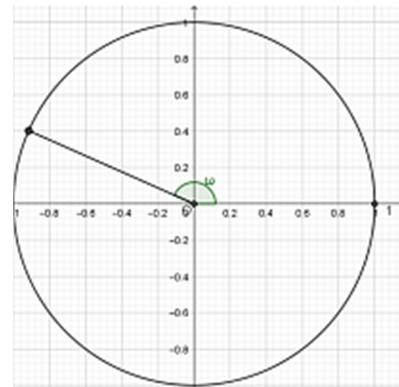
**β)** Η προέκταση του τμήματος AO τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο Γ, όπως φαίνεται στο σχήμα.

i. Να εκφράσετε την γωνία  $\hat{\phi} = \widehat{B\hat{O}\Gamma}$  με την βοήθεια της γωνίας  $\hat{\omega}$ . (Μονάδες 8)

ii. Με την βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο θέλετε να υπολογίσετε το συνφ. (Μονάδες 9)

**15191.** Στον διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία  $\hat{\omega}$ , με ημω = 0,4.

**α)** Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να σχεδιάσετε την γωνία  $-\hat{\omega}$ . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)



**18868. α)** Να αποδείξετε ότι  $\epsilon\varphi 500^\circ = \epsilon\varphi 140^\circ$ .

**β)**

- i. Να βρείτε το πρόσημο του τριγωνομετρικού αριθμού  $\epsilon\varphi 500^\circ$ . (Μονάδες 05)
- ii. Να βρείτε το πρόσημο της παράστασης  $A = \epsilon\varphi 500^\circ \cdot \eta\mu 250^\circ \cdot \sigma\upsilon\eta 300^\circ$ . (Μονάδες 10)

**21161.** Σε έναν κύκλο ακτίνας  $\rho$  θεωρούμε ένα τόξο AB με μήκος ίσο με  $2\rho$ .

**α)** Να βρείτε πόσα ακτίνια είναι η αντίστοιχη στο τόξο AB, επίκεντρη γωνία  $\omega$ . (Μονάδες 13)

**β)** Αν  $\omega=2$  ακτίνια, να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία  $\omega$ . (Μονάδες 12)

## Βασικές Τριγωνομετρικές Ταυτότητες

### Θέμα 2o

**15046.** Σε τρίγωνο  $ABC$  ισχύει  $\sin A = -\frac{3}{5}$ .

- a) Να αιτιολογήσετε γιατί το τρίγωνο είναι αμβλυγόνιο.  
 β) Να βρείτε το  $\eta \mu A$ .

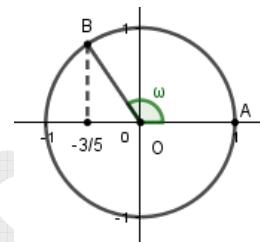
(Μονάδες 10)  
 (Μονάδες 15)

**15185. a)** Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας ω του διπλανού σχήματος και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 11)

- β) Αν  $\sin \omega = -\frac{3}{5}$ , να βρείτε το ημων.

(Μονάδες 14)



**15192.** Στον διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία  $\hat{\omega}$ .

- a) Να αιτιολογήσετε με βάση το σχήμα γιατί  $\sin \omega = -\frac{3}{5}$ .

(Μονάδες 12)

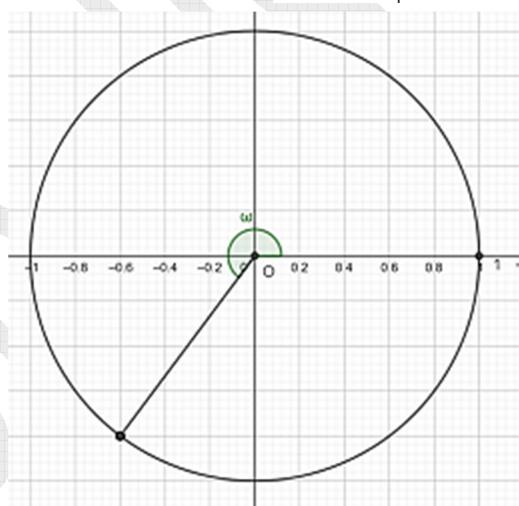
- β) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς

- i. ημων .

(Μονάδες 6)

- ii. εφω

(Μονάδες 7)



- 15429.a)** Να αποδείξετε ότι  $\eta \mu 476^\circ = \eta \mu 116^\circ$ .

(Μονάδες 11)

- β) Αν γνωρίζουμε ότι το  $\eta \mu 116^\circ$  είναι περίπου  $\frac{9}{10}$ , να υπολογίσετε το  $\sin 116^\circ$ .

(Μονάδες 14)

**15814.** Δίνεται ο κύκλος του παρακάτω σχήματος με κέντρο  $K$  και ακτίνα  $10\text{cm}$ . Επίσης δίνεται το τόξο  $\widehat{AB}$  με μήκος  $12\text{cm}$  και η αντίστοιχη επίκεντρη γωνία  $\omega$ .

- a) i. Να αιτιολογήσετε γιατί το μέτρο της γωνίας  $\omega$  είναι  $1,2 \text{ rad}$ .

(Μονάδες 6)

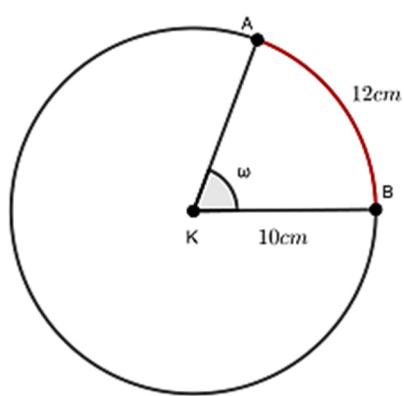
- ii. Με χρήση του αι) ερωτήματος, να αιτιολογήσετε γιατί η γωνία  $\omega$  είναι οξεία.

(Μονάδες 6)

- β) Αν  $\sin \omega = \frac{9}{25}$ , να βρείτε το ημων.

(Δίνεται ότι  $\sqrt{544} = 4\sqrt{34}$ )

(Μονάδες 13)



- 16000.a)** Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει γωνία  $\theta$  ώστε  $\eta \mu \theta = \frac{1}{2}$  και  $\sin \theta = \frac{1}{2}$ .

(Μονάδες 12)

- β) Έστω  $\theta$  μια γωνία με  $\theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$  για την οποία ισχύει  $\sin \theta = \frac{1}{2}$ . Να βρείτε το  $\eta \mu \theta$ . (Μονάδες 13)

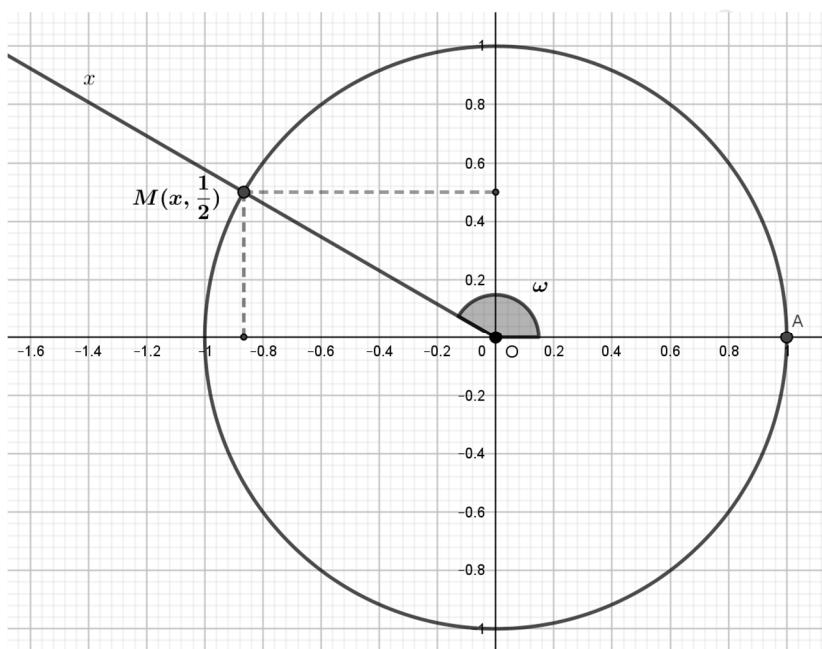
**20817.** Δίνεται γωνία  $\omega$ , με  $\pi < \omega < \frac{3\pi}{2}$ , για την οποία ισχύει συνω =  $-\frac{4}{5}$ .

a) Να δείξετε ότι  $\eta\mu\omega = -\frac{3}{5}$ . (Μονάδες 12)

b) Να υπολογίστε την τιμή της παράστασης  $A = \frac{\eta\mu\omega + \sigma\nu\omega}{1 + \varepsilon\varphi\omega}$ . (Μονάδες 13)

**20824.** Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο δίνεται γωνία  $A\hat{O}x = \omega$ ,  $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$  και το σημείο

$$M\left(x, \frac{1}{2}\right).$$



a) Να βρείτε το ημω . Με ποιον τριγωνομετρικό αριθμό της γωνίας  $\omega$  ισούται η τετμημένη x του σημείου M ; (Μονάδες 12)

b) Να δείξετε ότι  $\sigma\nu\omega = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ . (Μονάδες 13)

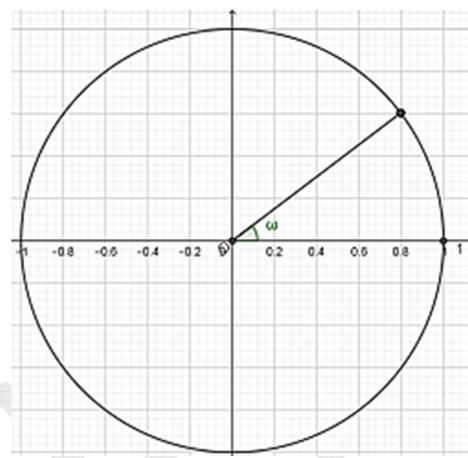
## ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΤΟ 1ο ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟ

### Θέμα 2ο

**15193.**Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία  $\hat{\omega}$ , με συνω = 0,8.

- a) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και να σχεδιάσετε τις γωνίες στο διάστημα  $[0, 2\pi]$ , των οποίων το συνημίτονο είναι  $-0,8$ . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.  
(Μονάδες 12)

- b) Να βρείτε την σχέση των γωνιών που βρήκατε στο a)  
ερώτημα με την γωνία  $\hat{\omega}$ .  
(Μονάδες 13)

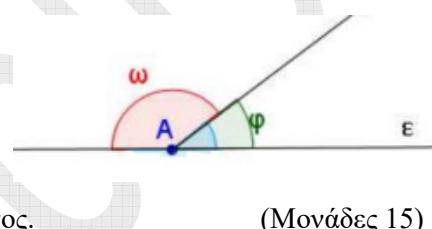


**15652.**Δίνεται ημφ =  $\frac{3}{5}$ , όπου φ η οξεία γωνία που

σχηματίζεται με κορυφή το σημείο A της ευθείας (ε) του διπλανού σχήματος.

- a) Να βρείτε το συνημίτονο της γωνίας φ.  
(Μονάδες 10)

- b) Να βρείτε το ημίτονο και το συνημίτονο της γωνίας φ του σχήματος.  
(Μονάδες 15)

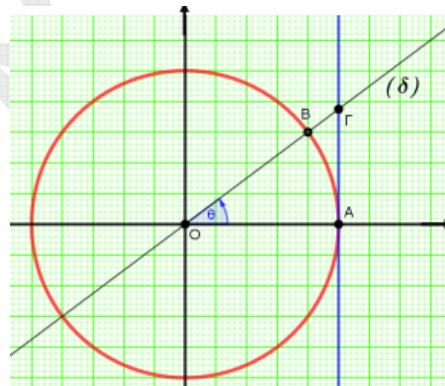


**15092.**Στο διπλανό σχήμα έχει σχεδιασθεί ο τριγωνομετρικός κύκλος και η ευθεία ( $\delta$ ) η οποία είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο A. Η τελική πλευρά OB της θετικής γωνίας  $\hat{AOB} = \hat{\theta}$ , αν προεκταθεί τέμνει την ευθεία ( $\delta$ ) στο σημείο Γ.

Γνωρίζουμε ότι  $\etaμ\theta = \frac{3}{5}$ .

- a) Με τη βοήθεια του σχήματος ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε τον αριθμό συνθ και στη συνέχεια τον αριθμό εφθ.  
(Μονάδες 13)

- b) Να βρεθούν οι συντεταγμένες των σημείων B και Γ.  
(Μονάδες 12)



**15266.**Στο διπλανό σχήμα δίνεται ο τριγωνομετρικός κύκλος και οι γωνίες  $\theta$  και  $-\theta$ .

- a) Να αιτιολογήσετε γιατί  $\sigmaυ\theta = \frac{3}{5}$

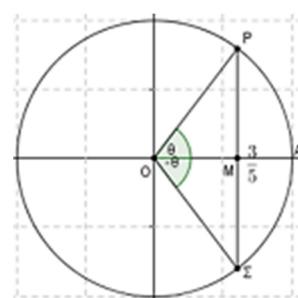
- b) Να βρείτε το ημίθ.

- γ) Να βρείτε το ημίτονο και το συνημίτονο της γωνίας  $-\theta$ .

(Μονάδες 8)

(Μονάδες 9)

(Μονάδες 8)



**15999.**Δίνεται η παράσταση  $A = 2\sigmaυ\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \etaμ(-\theta)$ .

- a) Να αποδείξετε ότι  $A = \etaμ\theta$ .  
(Μονάδες 12)

- b) Να βρείτε την τιμή της παράστασης A, όταν  $\theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$  και  $\sigmaυ\theta = \frac{12}{13}$ .  
(Μονάδες 13)

**17936.**Στον διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο δίνεται η γωνία  $A\hat{O}Z = \theta$ .

**a)** Να μεταφέρετε τον κύκλο στην κόλλα σας και να φέρετε σε αυτόν τις τελικές πλευρές των γωνιών

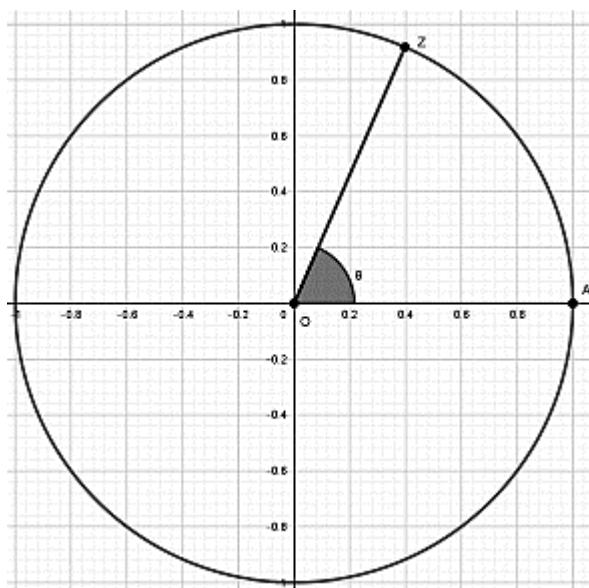
$$3\pi + \theta \text{ και } \frac{\pi}{2} + \theta. \quad (\text{Μονάδες 9})$$

**β) i.** Να αιτιολογήσετε γιατί  $\sin\theta = 0, 4$ .  
(Μονάδες 7)

**ii.** Με χρήση του βι) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς:

$$\sin(3\pi + \theta) \text{ και } \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right).$$

(Μονάδες 9)



**17933.**Στον διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο δίνεται η γωνία  $A\hat{O}Z = \theta$ .

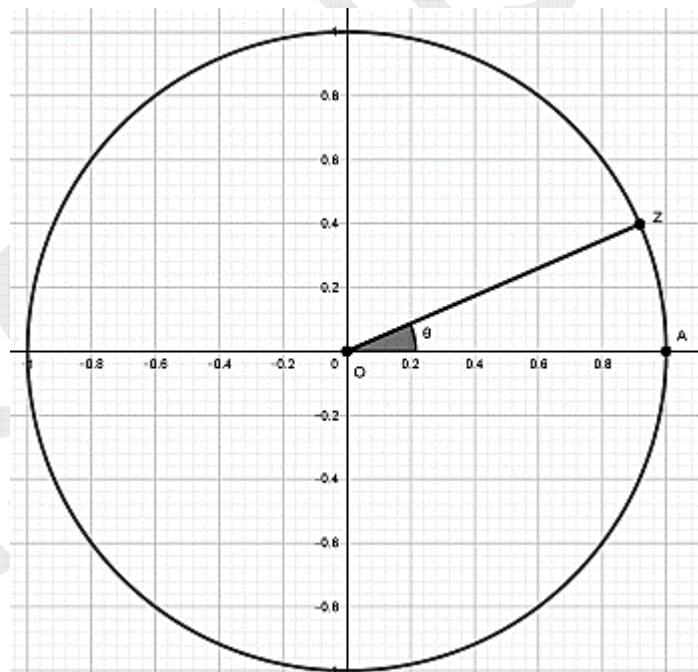
**a)** Να μεταφέρετε τον κύκλο στην κόλλα σας και να φέρετε σε αυτόν τις τελικές πλευρές των γωνιών  $3\pi + \theta$  και  $4\pi - \theta$ .

(Μονάδες 9)

**β) i.** Να αιτιολογήσετε γιατί  $\eta\mu\theta = 0, 4$ .  
(Μονάδες 7)

**ii.** Με χρήση του βι) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς:  
 $\eta\mu(3\pi + \theta)$  και  $\eta\mu(4\pi - \theta)$ .

(Μονάδες 9)



**21237.**Δίνεται ότι  $\eta\mu\theta = \frac{\eta\mu \frac{2\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3}}{\sin^2 \frac{\pi}{4}}$ .

**a)** Να δείξετε ότι:

i.  $\eta\mu \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . (Μονάδες 5)

ii.  $\eta\mu\theta = \sqrt{3} - 1$  (Μονάδες 7)

**β)** Αν για την γωνία  $\theta$  έχουμε  $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , να βρείτε το  $\sin\theta$ . (Μονάδες 13)

**22002.**Δίνεται ότι  $\eta\mu 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ . Να βρείτε τους ακόλουθους τριγωνομετρικούς αριθμούς,

αιτιολογώντας την απάντησή σας.

**α)**  $\sin 72^\circ$  (Μονάδες 8)

**β)**  $\sin 108^\circ$  (Μονάδες 9)

**γ)**  $\eta\mu 162^\circ$  (Μονάδες 8)

## Θέμα 4ο

**18231.** Έστω  $f : [-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση  $C_f$  φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

**a)** Να βρείτε τη μονοτονία και τη μέγιστη τιμή της.  
(Μονάδες 5)

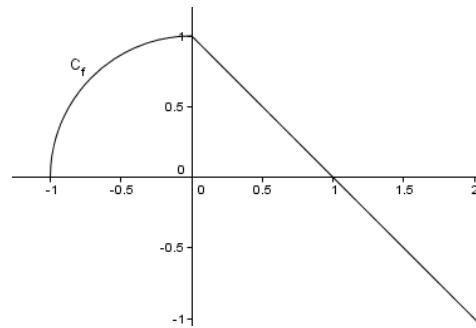
**β)** Να συγκρίνετε τους αριθμούς  $f\left(-\frac{3}{5}\right), f\left(-\frac{5}{9}\right)$ .  
(Μονάδες 7)

**γ)** Αν ο τύπος της συνάρτησης είναι

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x, & x > 0 \end{cases}, \text{ να βρείτε τους αριθμούς}$$

$f(\sin 120^\circ), f(\eta \mu 120^\circ)$ .

**δ)** Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g(x) = f(x-2), x \geq 1$ .



(Μονάδες 8)

(Μονάδες 5)

## ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

### Θέμα 2ο

**14233.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x, x \in \mathbb{R}$ .

**α)** Ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης; Ποια είναι η περίοδος της  $f$ ?  
(Μονάδες 12)

**β)** Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της  $f$  σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου.  
(Μονάδες 13)

**14323.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = -3 \sin 2x, x \in \mathbb{R}$

**α)** Να βρείτε την περίοδο, τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της  $f$ .  
(Μονάδες 12)

**β)** Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα και να παραστήσετε γραφικά την  $f$  σε διάστημα μιας περιόδου.  
(Μονάδες 13)

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\pi$
2x					
$\sin 2x$					
$f(x) = -3 \sin 2x$					

**15091.** Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{2} \cdot \sin x, x \in \mathbb{R}$ .

**α i.** Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης.  
(Μονάδες 7)

**ii.** Να βρείτε την μέγιστη και ελάχιστη τιμής της.  
(Μονάδες 10)

**β)** Να υπολογίσετε τον αριθμό  $f(2025\pi)$ .  
(Μονάδες 8)

**15172.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 4\eta\mu(11\pi - x), x \in \mathbb{R}$ .

**α)** Να δείξετε ότι:  
i.  $\eta\mu(11\pi - x) = \eta\mu x, x \in \mathbb{R}$ .  
(Μονάδες 6)

ii.  $f(x) = 4\eta\mu x, x \in \mathbb{R}$ .  
(Μονάδες 4)

**β)** Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = 4\eta\mu x$  όταν  $x \in [0, 2\pi]$ .  
(Μονάδες 15)

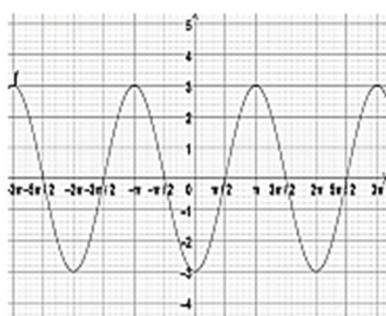
**15009.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = -3 \sin x, x \in \mathbb{R}$ .

**α)** Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης  $f$ .  
(Μονάδες 8)

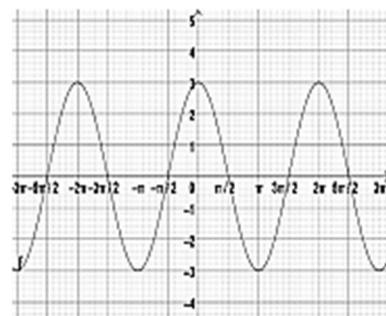
**β)** Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης  $f$ .  
(Μονάδες 7)

γ) Από τις παρακάτω τέσσερις γραφικές παραστάσεις μία μόνο αντιστοιχεί στη γραφική παράσταση της  $f$ , να επιλέξετε αυτή που αντιστοιχεί στη συνάρτηση  $f(x) = -3\sin x$  και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

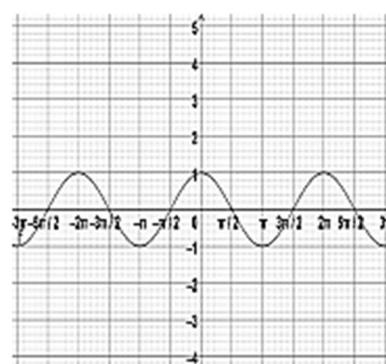
A)



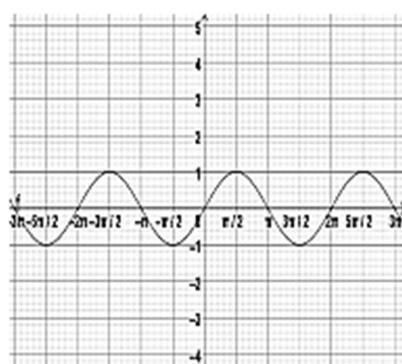
B)



Γ)

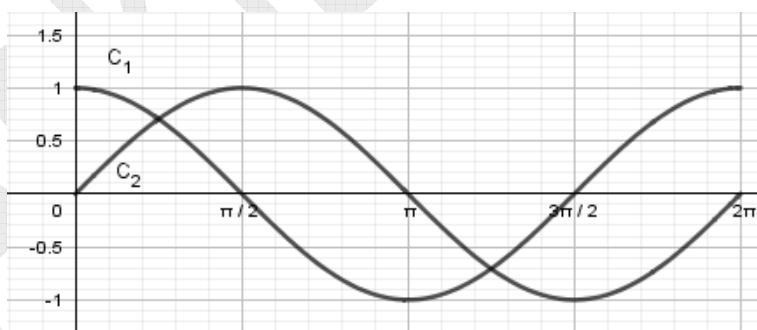


Δ)



(Μονάδες 10)

**15644.** Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων έχουμε σχεδιάσει δύο γραφικές παραστάσεις  $C_1$  και  $C_2$  για  $x \in [0, 2\pi]$ .



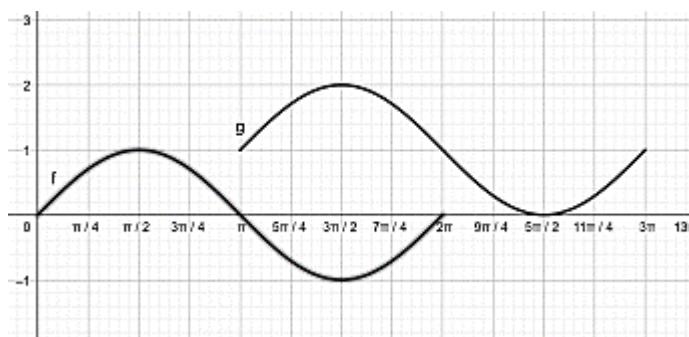
α) Αν οι γραφικές παραστάσεις είναι των συναρτήσεων  $f(x) = \sin x$  και  $g(x) = \eta \sin x$  για  $x \in [0, 2\pi]$

ποια από τις  $C_1$ ,  $C_2$  είναι η γραφική παράσταση της  $f(x) = \sin x$  και ποια της  $g(x) = \eta \sin x$ ;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

β) Με την βοήθεια του σχήματος να λύσετε την εξίσωση  $\eta \sin x = \sin x$  στο διάστημα  $[0, 2\pi]$ .

(Μονάδες 15)

**15788.**

Στο παραπάνω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = \eta \mu x$  στο διάστημα  $[0, 2\pi]$  και η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g$  που προέκυψε από την  $f$  με δύο διαδοχικές μετατοπίσεις. Με την βοήθεια του σχήματος να βρείτε:

**a)** το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $g$ , την μέγιστη τιμή της και σε ποια θέση την αποκτά.

(Μονάδες 13)

**b) i.** τις δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της  $f$  από τις οποίες προέκυψε η  $g$ .

(Μονάδες 6)

**ii.** τον τύπο της  $g$ .

(Μονάδες 6)

**15809.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \eta \mu 2x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**a)** Να βρείτε την περίοδο καθώς και τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της  $g$ .

(Μονάδες 6)

**b) i.** Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

$x$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\pi$
$2x$					
$g(x) = \sin 2x$					

(Μονάδες 10)

**ii.** Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της  $f$  σε διάστημα μίας περιόδου.

(Μονάδες 9)

**15810.** Δίνεται η συνάρτηση  $g(x) = \sin 2x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**a)** Να βρείτε την περίοδο καθώς και τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της  $f$ .

(Μονάδες 6)

**b) i.** Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

$x$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\pi$
$2x$					
$f(x) = \sin 2x$					

(Μονάδες 10)

**ii.** Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της  $g$  σε διάστημα μίας περιόδου.

(Μονάδες 9)

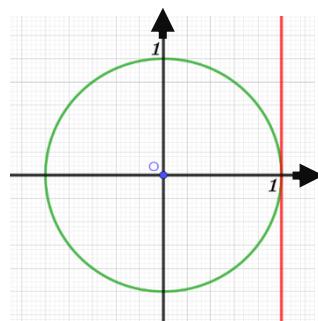
**16131.** Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(x) = \varepsilon \varphi x$ ,  $x \in \mathbb{R} - \left\{ k\pi + \frac{\pi}{2} \right\}$  όπου

$k \in \mathbb{Z}$ .

**a)** Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 1$  στο διάστημα  $(0, 2\pi)$ .

(Μονάδες 15)

**b)** Να μεταφέρετε στο γραπτό σας το διπλανό σχήμα, στο οποίο να παραστήσετε τις λύσεις της παραπάνω εξίσωσης. (Μονάδες 10)

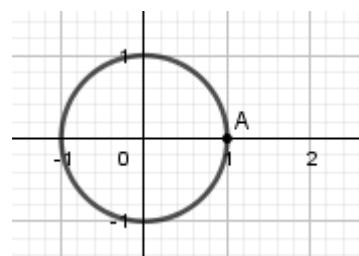


**17793.** Στον τριγωνομετρικό κύκλο έχει σημειωθεί το σημείο A.

- a) Να μεταφέρετε το σχήμα στην κόλα σας και να τοποθετήσετε κατά προσέγγιση στον τριγωνομετρικό κύκλο σημεία B, Γ, Δ ώστε να δημιουργηθούν τόξα  $\widehat{AB} = 1\text{ rad}$ ,  $\widehat{AG} = 2\text{ rad}$  και  $\widehat{AD} = 4\text{ rad}$ .

(Μονάδες 13)

- b) Για κάθε ένα τόξο του α) ερωτήματος να αποφανθείτε αν το συνημίτονο της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας είναι θετικός ή αρνητικός αριθμός. Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



(Μονάδες 12)

**20660.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \eta\mu(180^\circ - x) + \sigma\nu(90^\circ - x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- a) Να αποδείξετε ότι  $f(x) = 2\eta\mu x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

(Μονάδες 12)

- b) i. Να βρείτε την περίοδο καθώς και τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της f.  
ii. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f για  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

(Μονάδες 6)

(Μονάδες 7)

**20807.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \eta\mu(\pi + x) + \eta\mu(-x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- a) Να αποδείξετε ότι  $f(x) = -2\eta\mu x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και να βρείτε την περίοδο αυτής. (Μονάδες 12)

b)

- i. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$f(x) = -2\eta\mu x$					

(Μονάδες 6)

- ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f για  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

(Μονάδες 7)

**20867.** Δίνεται η παράσταση  $A = \sigma\nu^2 x - \eta\mu^2 x$ .

- a) Να βρείτε την τιμή της παράστασης A για  $x = 0$ .

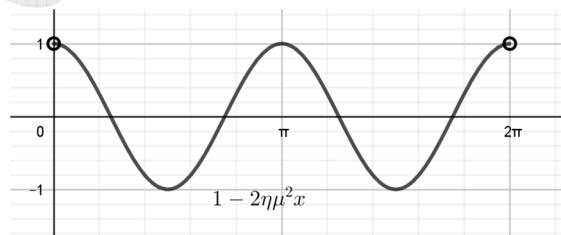
(Μονάδες 7)

- b) Να δείξετε ότι  $A = 1 - 2\eta\mu^2 x$ .

(Μονάδες 9)

- γ) Με χρήση της παρακάτω γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τύπο  $1 - 2\eta\mu^2 x$  και του ερωτήματος β), να λύσετε την εξίσωση  $A = 1$ , για  $0 < x < 2\pi$ .

(Μονάδες 9)



**22003.** Δίδεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \eta\mu(2\pi x)$ .

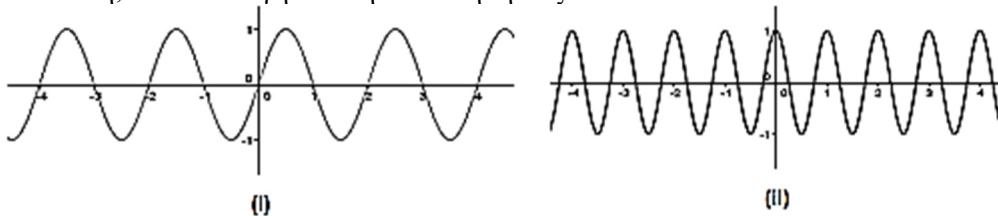
- a) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιοδική με περίοδο  $T = 1$ .

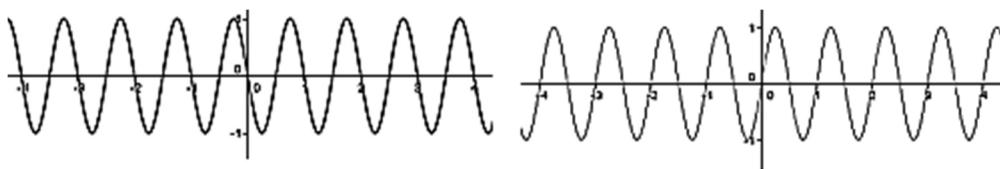
(Μονάδες 8)

- b) Να υπολογίσετε το  $f(0)$  και το  $f\left(\frac{1}{4}\right)$ .

(Μονάδες 8)

- γ) Μία από τις παρακάτω τέσσερεις καμπύλες αντιστοιχεί στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f. Ποια είναι αυτή; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.





(iii)

(iv)

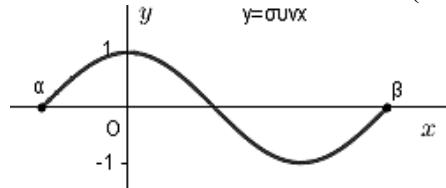
(Μονάδες 9)

**22007.** Στο σχήμα φαίνεται απόσπασμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης συνx.

a) Να βρείτε τα  $\alpha$  και  $\beta$ .

(Μονάδες 12)

β) Προς ποια κατεύθυνση και κατά πόσο πρέπει να μετατοπιστεί η παραπάνω καμπύλη ώστε να συμπέσει με τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης ημx;



(Μονάδες 13)

## Θέμα 4o

**14238.** Η Αλίκη και η Αθηνά διασκεδάζουν στη ρόδα του λούνα παρκ. Η απόσταση, σε μέτρα, του καθίσματός τους από το έδαφος τη χρονική στιγμή  $t$  sec δίνεται από τη συνάρτηση  $h(t) = 8 + 6\eta\mu\left(\frac{\pi t}{30}\right)$  και  $0 \leq t \leq 180$ .

a) Να βρείτε το ελάχιστο και το μέγιστο ύψος στο οποίο φτάνει το κάθισμα, καθώς και τις στιγμές κατά τις οποίες το κάθισμα βρίσκεται στο ελάχιστο και στο μέγιστο ύψος. (Μονάδες 8)

b) Να υπολογίσετε την ακτίνα της ρόδας. (Μονάδες 3)

γ) Να βρείτε την περίοδο της κίνησης, δηλαδή το χρόνο στον οποίο η ρόδα ολοκληρώνει μια περιστροφή. Πόσους γύρους έκαναν οι δύο φίλες στο διάστημα από 0 έως 180 sec;

(Μονάδες 4+2=6)

δ) Να μεταφέρετε στην κόλα σας τον πίνακα τιμών και το σύστημα συντεταγμένων που δίνονται παρακάτω και :

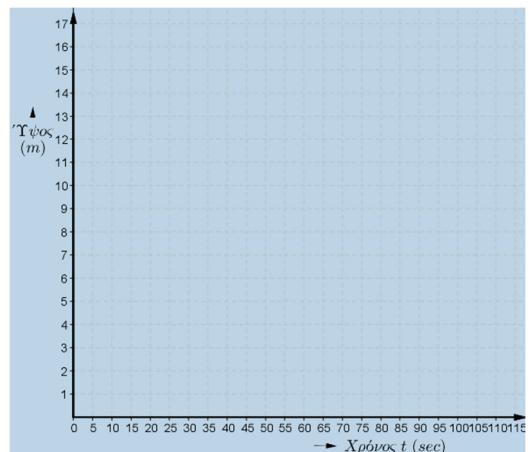
- i. να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών της συνάρτησης του ύψους  $h(t)$ .

(Μονάδες 3)

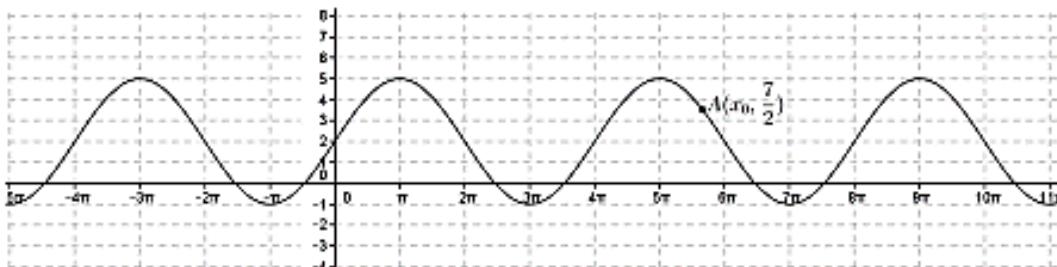
t	0	15	30	45	60	75	90
h(t)							

- ii. να σχεδιάσετε στο σύστημα συντεταγμένων το τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $h(t)$  με  $0 \leq t \leq 90$ .

(Μονάδες 5)



**14239.** Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f$  η οποία είναι της μορφής  $f(x) = \rho\eta\mu(\omega x) + k$ , με  $\rho, k$  πραγματικές σταθερές και  $\omega > 0$ .



a) Με βάση τη γραφική παράσταση, να βρείτε:

- i. τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης  $f$  (Μονάδες 3)  
ii. την περίοδο  $T$  της συνάρτησης  $f$  (Μονάδες 3)

**β)** Να προσδιορίσετε τις τιμές των σταθερών  $\rho$ ,  $\omega$  και  $k$ . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

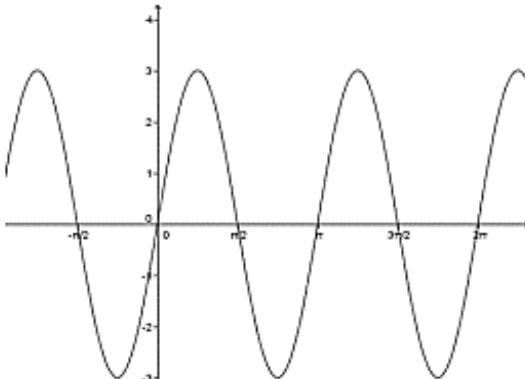
**γ)** Θεωρώντας γνωστό ότι  $\rho = 3$ ,  $\omega = \frac{1}{2}$  και  $k = 2$ , να προσδιορίσετε αλγεβρικά την τετμημένη  $x_0$  του σημείου  $A\left(x_0, \frac{7}{2}\right)$  της γραφικής παράστασης, που δίνεται στο σχήμα. (Μονάδες 10)

**15062.** Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f$  που είναι της μορφής  $f(x) = \rho \mu(\alpha x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  και  $\alpha, \rho > 0$ .

- α)** Να βρείτε, με βάση το σχήμα, την περίοδο της, την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της. (Μονάδες 6)  
**β)** Με βάση τις απαντήσεις στο προηγούμενο ερώτημα, να βρείτε τους αριθμούς  $\alpha$  και  $\rho$ . (Μονάδες 6)  
Έστω  $\rho = 3$  και  $\alpha = 2$ . Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση  $g(x) = x^4 - 2x^2 + 5$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- γ)** Να αποδείξετε ότι η ελάχιστη τιμή της είναι ίση με 4. (Μονάδες 7)

**δ)** Να αιτιολογήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις των  $f$ ,  $g$  δεν έχουν κοινό σημείο. (Μονάδες 6)



**15992.** Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \rho \mu(\alpha x)$ ,  $g(x) = \eta \mu(\omega x)$  όπου  $\omega, \rho > 0$ .

- α)** Να βρεθούν οι τιμές των  $\rho$ ,  $\omega$ , αν είναι γνωστό ότι η ελάχιστη τιμή της  $f$  είναι -2 και η περίοδος της  $g$  είναι  $\pi$ . Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας. (Μονάδες 6)  
**β)** i. Να κάνετε, στο ίδιο σύστημα αξόνων, τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f(x) = 2\eta \mu x$ ,  $x \in [0, \pi]$  και  $g(x) = \eta \mu(2x)$ ,  $x \in [0, \pi]$ . (Μονάδες 10)  
ii. Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να αποδείξετε ότι  $2\eta \mu \frac{5\pi}{9} > \eta \mu \frac{10\pi}{9}$ . (Μονάδες 9)

**18234.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 2\eta \mu x - 1$ ,  $x \in [0, 2\pi]$ .

- α)** Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της. Για ποιες τιμές του  $x$  προκύπτουν αυτές; (Μονάδες 7)  
**β)** Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης  $C_f$  της  $f$  με τους άξονες  $x'$  και  $y'$ . (Μονάδες 6)  
**γ)** Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση. (Μονάδες 7)  
**δ)** Αν για κάποιο αριθμό  $\alpha$  με  $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  ισχύει  $f(\alpha) = f\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ , να αποδείξετε ότι  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ . (Μονάδες 5)

**20870.** Το βάθος  $y$ , σε μέτρα, του νερού σε ένα λιμάνι επηρεάζεται από το φαινόμενο της παλίρροιας κατά τη διάρκεια μιας ημέρας (εντός 24 ωρών). Το πρώτο (μετά τα μεσάνυχτα) μέγιστο βάθος είναι 5,8 μέτρα και συμβαίνει στις 3:00 π.μ. Το πρώτο ελάχιστο βάθος είναι 2,6 μέτρα και συμβαίνει στις 9:00 π.μ. Το βάθος  $y$  δίνεται ως συνάρτηση του χρόνου  $t$  (σε ώρες) από τη σχέση:  $y = \alpha \mu(\omega t) + \beta$ , με  $\alpha, \omega, \beta > 0$  και  $0 \leq t \leq 24$ .

- α)** Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς  $\alpha, \omega$  και  $\beta$ . (Μονάδες 6)

**β)** Αν  $\alpha = 1,6$ ,  $\omega = \frac{\pi}{6}$  και  $\beta = 4,2$ ,

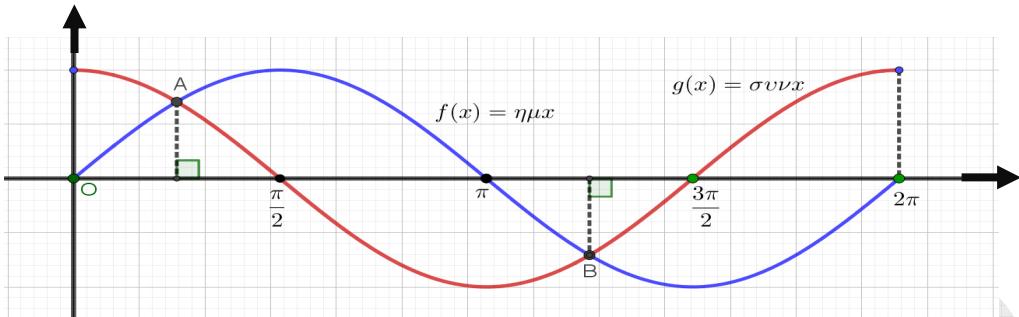
- i. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της  $y = 1,6 \cdot \mu\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 4,2$ , με  $0 \leq t \leq 24$ . (Μονάδες 8)

ii. Ποιο θα είναι το βάθος του νερού στις 12 το μεσημέρι; (Μονάδες 4)

iii. Ένα μεγάλο πλοίο χρειάζεται τουλάχιστον 4,2 μέτρα βάθος νερού για να δέσει στο λιμάνι. Στη διάρκεια ποιου χρονικού διαστήματος από τις 12 το μεσημέρι και μετά θα μπορεί να δέσει με ασφάλεια;

**3<sup>o</sup> Θέμα**

**15391.** Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f(x) = \eta \mu x$  και  $g(x) = \sigma v \nu x$ ,  $x \in [0, 2\pi]$ .



**a)** Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A και B. (Μονάδες 10)

**β)** Να βρείτε την μονοτονία της συνάρτησης  $g$  στο  $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$  και την μονοτονία της συνάρτησης  $f$  στο  $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ . (Μονάδες 4)

**γ)** Με την βοήθεια του ερωτήματος β) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να συγκρίνετε, με δικαιολόγηση, τους αριθμούς:

i.  $\sigma v \frac{2\pi}{3}$  και  $\sigma v \frac{5\pi}{6}$ . (Μονάδες 5)

ii.  $\eta \mu \frac{5\pi}{3}$  και  $\eta \mu \left(\frac{11\pi}{6}\right)$ . (Μονάδες 6)

## ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

### Θέμα 2ο

**14280.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 2\eta \mu x + 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$

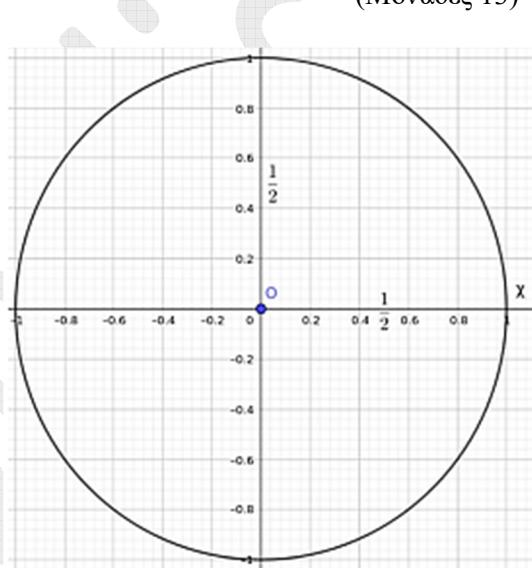
- a) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης  $f$ . (Μονάδες 10)  
 b) Για ποια τιμή του  $x \in [0, 2\pi]$  η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστη τιμή; (Μονάδες 15)

**14324.** Έστω γωνία  $x$  για την οποία ισχύουν:  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  και  $\eta \mu x + \eta \mu(\pi - x) = 1$ .

- a) Να αποδείξετε ότι  $\eta \mu x = \frac{1}{2}$ . (Μονάδες 12)  
 b) Να βρείτε την γωνία  $x$ . (Μονάδες 13)

**14977.a)** Στον διπλανό τριγωνομετρικό κύκλο να σημειώσετε τις τελικές πλευρές δύο γωνιών που ανήκουν στο διάστημα  $[0, 2\pi)$ , με αρχική πλευρά την ημιευθεία  $Ox$ , οι οποίες να έχουν ημίτονο ίσο με  $\frac{1}{2}$  και άλλες δύο οι οποίες να έχουν συνημίτονο ίσο με  $\frac{1}{2}$ . (Μονάδες 12)

b) Να λύσετε την εξίσωση  $\eta \mu x = \frac{1}{2}$  για  $x \in \mathbb{R}$ . (Μονάδες 13)



**15036.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 3\sin 2x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- a i. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης  $f$ . (Μονάδες 10)  
 ii. Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης  $f$ . (Μονάδες 5)  
 b) Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = -3$  στο  $\mathbb{R}$ . (Μονάδες 10)

**15969.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 2\sin(13\pi + x) - 2\eta \mu \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ .

- a) Να δείξετε ότι  $\sin(13\pi + x) = -\sin x$ . (Μονάδες 5)  
 b) Να δείξετε ότι  $f(x) = -4\sin x$ . (Μονάδες 8)  
 γ) Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = -2$ . (Μονάδες 12)

**21995.** Πόσες και ποιες λύσεις έχει η εξίσωση  $\eta \mu x = \alpha$  στο διάστημα  $[-2\pi, 2\pi]$  όταν:

- a)  $\alpha = 1$ . (Μονάδες 13)  
 b)  $\alpha = -2$ . (Μονάδες 12)

Να αιτιολογήσετε γραφικά, ή όπως αλλιώς θέλετε, την απάντησή σας σε κάθε ένα από τα παραπάνω ερωτήματα.

## Θέμα 4ο

**15003.** Δίνεται η συνάρτηση

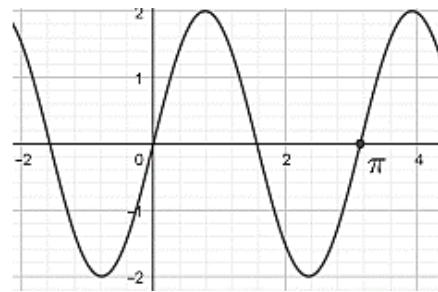
$$f(x) = \eta \max \left[ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha x\right) + 2 \right] - \sin \alpha x \cdot \sin(\pi - \alpha x) - 1, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

**a) i.** Να δείξετε ότι  $f(x) = 2\eta \max, \quad x \in \mathbb{R}$ .

(Μονάδες 10)

**ii.** Δίνεται επιπλέον ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  είναι αυτή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να δείξετε ότι  $\alpha = 2$ .

(Μονάδες 6)



**β)** Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  με την ευθεία  $y = 1$  για  $x \in [0, \pi]$ .

(Μονάδες 9)

**15014.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \alpha \eta \beta x$ , με  $\alpha, \beta$  ακέραιους θετικούς αριθμούς.

**α)** Να βρείτε την τιμή του  $\alpha$ , αν η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι 2.

(Μονάδες 6)

**β)** Αν  $\alpha = 2$ , να δείξετε ότι η μικρότερη τιμή του  $\beta$  για την οποία  $f\left(\frac{\pi}{16}\right) = 2$  είναι  $\beta = 8$ .

(Μονάδες 10)

**γ)** Αν  $\alpha = 2$  και  $\beta = 8$ , να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 1$  στο διάστημα  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

(Μονάδες 9)

**15025.** Στο διπλανό σχήμα δίνεται μια γωνία  $\theta = A\hat{O}M$  με  $\eta \theta = \frac{4}{5}$ ,

της οποίας η τελική πλευρά τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο  $M$  και την ευθεία  $x = 1$  στο σημείο  $K$ .

**α)** Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς συνθ, εφθ, σφθ.

(Μονάδες 8)

**β)** Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων  $M$  και  $K$ .

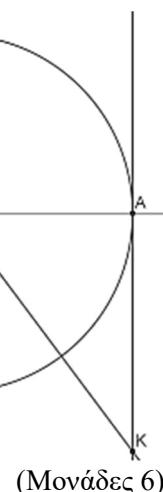
(Μονάδες 6)

**γ)** Έστω μια γωνία  $\varphi \in [0, 2\pi]$  για την οποία ισχύει  $\eta \varphi = \frac{3}{5}$  και  $\sin \theta < 0$ .

**i.** Να αιτιολογήσετε γιατί η γωνία  $\varphi$  έχει την τελική πλευρά της στο 2ο τεταρτημόριο.

(Μονάδες 5)

**ii.** Να αιτιολογήσετε γιατί  $\theta < \varphi$ .



(Μονάδες 6)

**15026.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 1 + 2\eta \mu \left( \frac{\pi x}{2} \right), \quad x \in \mathbb{R}$ .

**α)** Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης  $f$ .

(Μονάδες 5)

**β)** Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης  $f$ .

(Μονάδες 6)

**γ)** Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων στα οποία η γραφική παράσταση της  $f$  τέμνει τον άξονα  $x'$ .

(Μονάδες 7)

**δ)** Να αποδείξετε ότι  $(f(x) - 1)^2 + (f(1-x) - 1)^2 = 4$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

(Μονάδες 7)

**15049.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \eta \mu \left( \frac{\pi}{2} - x \right) + \eta \mu (\pi + x), \quad x \in \mathbb{R}$ .

**α)** Να αποδείξετε ότι  $f(x) = \sin \pi x - \eta \mu x$ .

(Μονάδες 6)

**β)** Να αποδείξετε ότι  $-2 \leq f(x) \leq 2$ . Κατόπιν να εξετάσετε αν ο αριθμός 2 είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης.

(Μονάδες 10)

**γ)** Να βρείτε:

**i.** Το σημείο τομής της γραφικής παράστασης  $C_f$  της  $f$  με τον άξονα  $y'$ .

(Μονάδες 3)

ii. Δυο σημεία τομής της  $C_f$  με τον  $x'x$ .

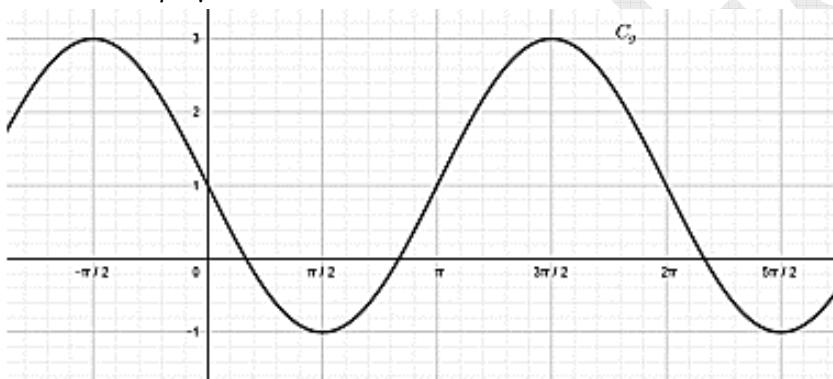
(Μονάδες 6)

**15050.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 2\sin x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- a) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της. (Μονάδες 8)  
 b) Να βρείτε δύο κοινά σημεία της γραφικής παράστασης  $C_f$  της  $f$  με την ευθεία  $y = 1$ . (Μονάδες 5)  
 γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς  $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$  και  $f\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ . (Μονάδες 6)  
 δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση, στο διάστημα  $[0, 2\pi]$ . (Μονάδες 6)

**15288.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 2\eta\mu 3x + 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- a) Να βρείτε την περίοδο  $T$ , τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της  $f$ . (Μονάδες 3)  
 b) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g(x) = a\eta\mu\beta x + \gamma$ , με  $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ,  $\beta > 0$  και πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$ .



i. Με βάση το σχήμα, να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς  $a$ ,  $\beta$ , και  $\gamma$ .

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

ii. Για  $a = -2$ ,  $\beta = 1$  και  $\gamma = 1$ , να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = g(x)$  στο διάστημα  $[0, \pi]$ . (Μονάδες 10)

**15289.** Δίνεται το σύστημα:  $(\Sigma): \begin{cases} -x + 2y = 1 \\ x + \lambda y = \lambda \end{cases}$ , με παράμετρο  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

a) i. Αν  $\lambda = -1$ , να λύσετε το σύστημα. (Μονάδες 2)

ii. Αν  $(x_0, y_0)$  είναι η λύση του συστήματος για  $\lambda = -1$ , να βρείτε γωνία  $\theta \in (0, 2\pi]$  τέτοια, ώστε

$x_0 = \sin \theta$  και  $y_0 = \eta \mu \theta$ . (Μονάδες 4)

β) Αν  $\lambda = 1$  και  $(x_1, y_1)$  είναι η αντίστοιχη λύση του συστήματος, να δείξετε ότι δεν υπάρχει γωνία  $\omega$ , τέτοια ώστε  $x_1 = \sin \omega$  και  $y_1 = \eta \mu \omega$ . (Μονάδες 7)

γ) Αν γνωρίζουμε ότι το σύστημα  $(\Sigma)$  έχει μοναδική λύση την  $(x_2, y_2)$  με

$$x_2 = \sin \varphi \text{ και } y_2 = \eta \mu \varphi, \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

i. Να δείξετε ότι  $\sin \varphi = \frac{3}{5}$  και  $\eta \mu \varphi = \frac{4}{5}$ . (Μονάδες 6)

ii. Να υπολογίσετε την τιμή του  $\lambda \in \mathbb{R}$ . (Μονάδες 6)

**15347.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 2\sin^2(\pi - x) - 3\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

a) Να δείξετε ότι  $f(x) = 2\sin^2 x - 3\sin x + \alpha$ . (Μονάδες 8)

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση  $f$  είναι άρτια ή περιττή. (Μονάδες 5)

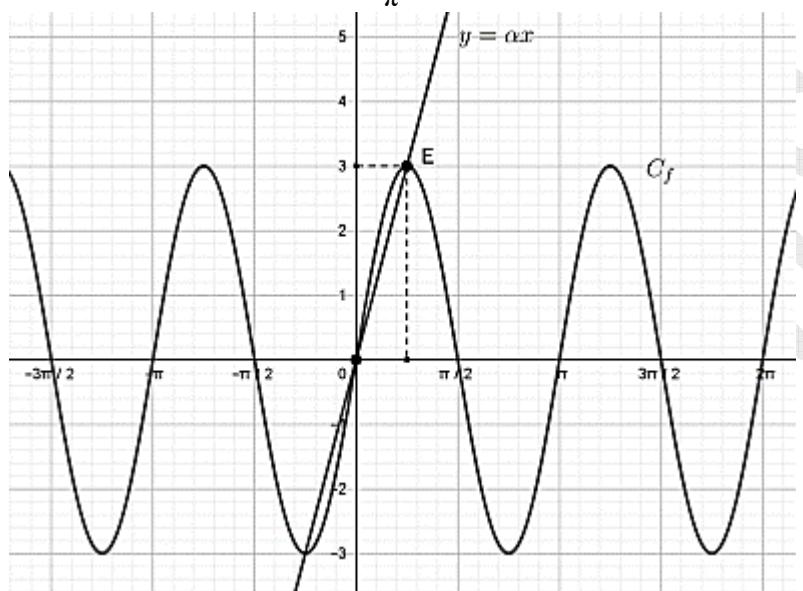
γ) Να βρείτε το  $\alpha$  αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της  $f$  διέρχεται από το σημείο  $M\left(\frac{\pi}{3}, 1\right)$ .

(Μονάδες 5)

- δ)** Για  $\alpha = 2$  και  $g(x) = 2\eta\mu^2x + 9\sin x - 9$ , να εξετάσετε (αν υπάρχουν) κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων  $f$  και  $g$ . (Μονάδες 7)

**15287.** Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η ευθεία  $y = \alpha x$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  και η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = \rho \sin(\omega x)$ , όπου  $\omega > 0$ ,  $\rho > 0$  και  $x \in \mathbb{R}$ . Με βάση το σχήμα,

- α)** Να δείξετε ότι  $\rho = 3$  και  $\omega = 2$ . (Μονάδες 6)  
**β)** Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό  $\alpha$ . (Μονάδες 9)  
**γ)** Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης  $3\eta\mu(2x) - \frac{12}{\pi}x = 0$ . (Μονάδες 10)



**15422.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \alpha \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) - 2\eta\mu(\pi + 2x)$ ,  $\alpha > 0$ .

- α)** Να δείξετε ότι  $f(x) = (\alpha + 2)\eta\mu 2x$ . (Μονάδες 5)  
**β)** i. Αν η μέγιστη τιμή της  $f$  είναι 4, να δείξετε ότι  $\alpha = 2$ . (Μονάδες 5)  
ii. Να βρείτε την περίοδο της  $f$ . (Μονάδες 5)  
**γ)** Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση  $f$  σε διάστημα μιας περιόδου. (Μονάδες 5)  
**δ)** Αν  $g(x) = 5 - \sin^2 2x$ , να βρείτε, αν υπάρχουν, τα κοινά σημεία της  $C_f$  με την  $C_g$ , όπου  $C_f, C_g$  οι γραφικές παραστάσεις των  $f, g$  αντίστοιχα. (Μονάδες 5)

**14975.** Ένα ελατήριο με φυσικό μήκος (Φ.Μ.) κρέμεται από το ταβάνι. Τοποθετείται στο ελατήριο ένα σώμα μάζας  $m$  και ισορροπεί στη θέση  $O$  (Θ.Ι. – Θέση Ισορροπίας), απέχοντας από το πάτωμα απόσταση ίση με 1 μέτρο.

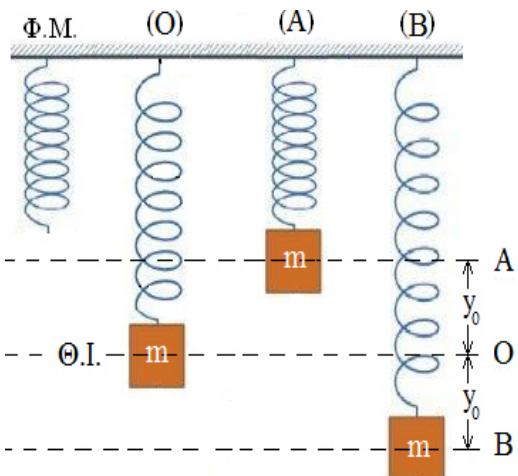
Το σώμα ανεβοκατεβαίνει, ξεκινώντας από τη θέση  $O$ , εκτελώντας ταλάντωση μεταξύ των δύο ακραίων θέσεων  $A$  και  $B$ , οι οποίες απέχουν μεταξύ τους σταθερή απόσταση ίση με  $2y_0$ .

Η απόσταση του σώματος (σε μέτρα) από το πάτωμα, ως συνάρτηση του χρόνου (σε δευτερόλεπτα), είναι:

$$y(t) = 1 + 0,2 \cdot \eta\mu \left( \frac{\pi}{2} t \right)$$

- α)** Να βρείτε το  $y_0$  και στη συνέχεια την απόσταση μεταξύ των δύο ακραίων θέσεων  $A$  και  $B$  της ταλάντωσης.

(Μονάδες 06)



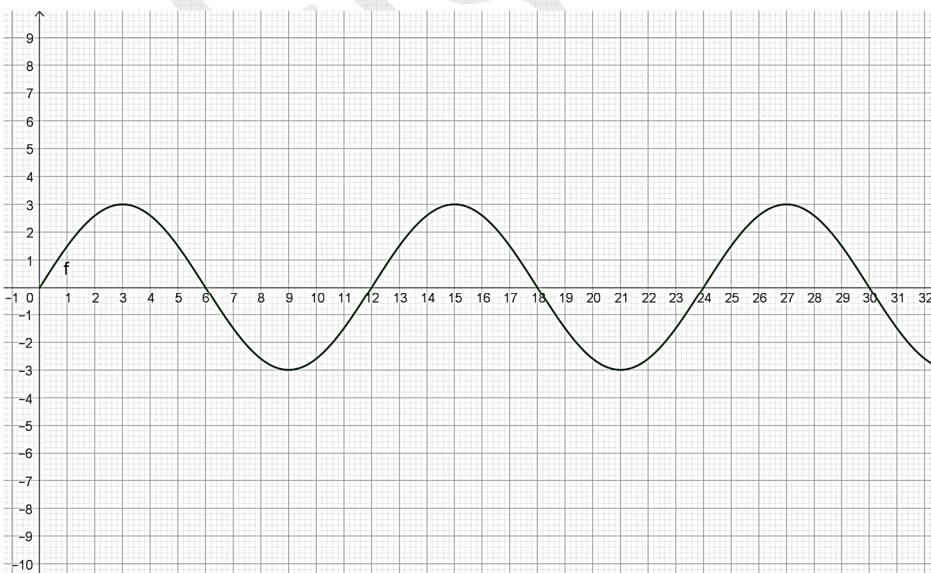
- β)** Να βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης. (Μονάδες 06)  
**γ)** Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για  $t \in [0, 4]$ . (Μονάδες 06)  
**δ)** Να βρείτε ποιες χρονικές στιγμές, η απόσταση του σώματος από το πάτωμα θα είναι ίση με 1,1 μέτρα, για  $t \in [0, 2]$ . (Μονάδες 07)

- 15821.a)** Να εξετάσετε αν υπάρχει γωνία  $x$  τέτοια ώστε  $\eta mx = \sin vx = 0$ . (Μονάδες 5)  
**β)** Να αποδείξετε ότι εξίσωση  $\sqrt{3} \cdot \eta mx = 3 \cdot \sin vx$  είναι ισοδύναμη με την εξίσωση  $\operatorname{εφ}x = \sqrt{3}$  και κατόπιν να τη λύσετε στο διάστημα  $[0, 2\pi]$ . (Μονάδες 7)  
**γ)** Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f(x) = \sqrt{3} \cdot \eta mx$  και  $g(x) = 3 \cdot \sin vx$  στο ίδιο σύστημα αξόνων στο διάστημα  $[0, 2\pi]$  και να ερμηνεύσετε γραφικά το συμπέρασμα του ερωτήματος β). (Μονάδες 7)  
**δ)** Αξιοποιώντας το ερώτημα γ) να λύσετε γραφικά την ανίσωση  $\sqrt{3} \cdot \eta mx < 3 \cdot \sin vx$  στο διάστημα  $[0, 2\pi]$ . (Μονάδες 6)

**20645.** Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ ,  $g(x) = \sin vx$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- α)** Να περιγράψετε με ποιο τρόπο από τη γραφική παράσταση της  $g$  προκύπτει η γραφική παράσταση της  $f$ . (Μονάδες 6)  
**β)** Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ . (Μονάδες 6)  
**γ)** Να βρείτε τις τιμές  $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ,  $f(\pi)$ . (Μονάδες 6)  
**δ)** Να λύσετε την εξίσωση  $\sqrt{2}f(x) + 1 = 0$ . (Μονάδες 7)

**20712.** Σε μια θαλάσσια περιοχή, λόγω της παλίρροιας, η στάθμη των υδάτων αυξομειώνεται. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της ημιτονοειδούς συνάρτησης  $f$ , που δίνει σε μέτρα το ύψος της στάθμης των υδάτων συναρτήσει του χρόνου  $t$  σε ώρες. Να βρείτε :



- α)** την υψομετρική διαφορά ανάμεσα στην υψηλότερη στάθμη (πλημμυρίδα) και τη χαμηλότερη στάθμη (άμπωτη). (Μονάδες 6)  
**β)** την περίοδο του φαινομένου της παλίρροιας. (Μονάδες 6)  
**γ)** τον τύπο της συνάρτησης  $f$ . (Μονάδες 6)  
**δ)** ποιες ώρες, στη διάρκεια μιας ημέρας, η στάθμη των υδάτων είναι  $\frac{3}{2}$  μέτρα. (Μονάδες 7)

**21244.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\alpha+1}{2} \sin(\beta x)$ , με  $\alpha, \beta > 0$ , η οποία έχει ελάχιστο  $-2$  και περίοδο  $\frac{\pi}{2}$ .

**a)** Να δείξετε ότι  $\alpha=3$  και  $\beta=4$ . (Μονάδες 5)

**β)** Δίνεται η παράσταση  $A = \frac{\eta \mu \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \epsilon \varphi(\pi - x) \cdot \eta \mu(2\pi + x)}{\sin(3\pi - x) \cdot \sigma \varphi\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}$ . Να δείξετε ότι  $A = -1$ . (Μονάδες 10)

**γ)** Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 2A$ , στο διάστημα  $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ . (Μονάδες 10)

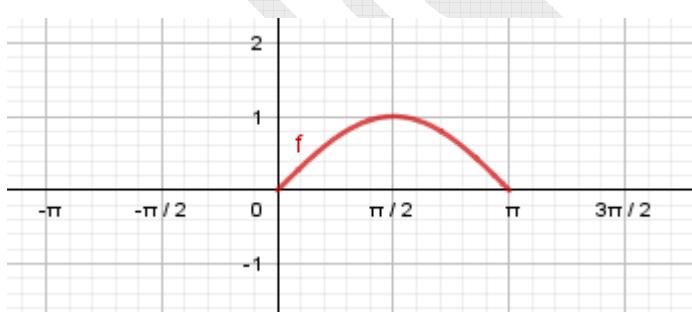
### Θέμα 3ο

**15789.** Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = \eta \mu x$  με  $x \in [0, \pi]$ .

**a) i.** Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το σχήμα και μετατοπίζοντας κατάλληλα την  $f$  να σχεδιάσετε την συνάρτηση  $g(x) = f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ . (Μονάδες 8)

**ii.** Ποιος είναι ο τύπος της  $g$  και σε ποιο διάστημα ορίζεται? (Μονάδες 8)

**β)** Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = g(x)$ . (Μονάδες 9)



AskiSOL