

Μαθηματικά Γ' Γυμνασίου

1.8 ΕΚΠ ακέραιων αλγεβρικών παραστάσεων

Σε προηγούμενη τάξη μάθαμε να βρίσκουμε το Ε.Κ.Π. και το Μ.Κ.Δ. θετικών ακεραίων αριθμών που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

Για παράδειγμα, οι αριθμοί 12, 24 και 300, αν αναλυθούν σε γινόμενο πρώτων παραγόντων, γράφονται:

$$12 = 2^2 \cdot 3 \quad 24 = 2^3 \cdot 3 \quad 300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$$

Άρα,

$$\text{Ε.Κ.Π.}(12, 24, 300) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 = 600 \quad (\text{Γινόμενο κοινών και μη κοινών παραγόντων με το μεγαλύτερο εκθέτη}).$$

$$\text{Μ.Κ.Δ.}(12, 24, 300) = 2^2 \cdot 3 = 12 \quad (\text{Γινόμενο κοινών παραγόντων με το μικρότερο εκθέτη}).$$

Με ανάλογο τρόπο, μπορούμε να ορίσουμε το Ε.Κ.Π. και το Μ.Κ.Δ. ακεραίων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο παραγόντων. Δηλαδή:

Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (Ε.Κ.Π.) δύο ή περισσότερων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο παραγόντων ονομάζεται, το γινόμενο των κοινών και μη κοινών παραγόντων τους με εκθέτη καθενός το μεγαλύτερο από τους εκθέτες του.

Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (Μ.Κ.Δ.) δύο ή περισσότερων αλγεβρικών παραστάσεων που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο παραγόντων ονομάζεται, το γινόμενο των κοινών παραγόντων τους με εκθέτη καθενός το μικρότερο από τους εκθέτες του.

Για παράδειγμα,

– τα μονώνυμα $12x^3y^2$, $24x^2y^3\omega$, $300x^4y$ έχουν
 $E.K.P. = 600x^4y^3\omega$ και $M.K.D. = 12x^2y$ ενώ

– τα πολυώνυμα $3(x - y)(x + y)$, $18(x - y)^2$, $9(x - y)$ έχουν
 $E.K.P. = 18(x - y)^2(x + y)$ και $M.K.D. = 3(x - y)$

1 Να βρεθεί το Ε.Κ.Π. και ο Μ.Κ.Δ. των μονωνύμων $6x^3y\omega$, $9x^2y\omega^2$, $3xy^4$.

Λύση

Οι συντελεστές 6, 9, 3 έχουν Ε.Κ.Π. = 18 και Μ.Κ.Δ. = 3, άρα τα μονώνυμα έχουν Ε.Κ.Π. = $18x^3y^4\omega^2$ και Μ.Κ.Δ. = $3xy$.

2 Να βρεθεί το Ε.Κ.Π. και ο Μ.Κ.Δ. των πολυωνύμων:
 $A = 12x^2 - 12$, $B = 18x^2 - 36x + 18$ και $\Gamma = 9x^2 - 9x$.

Λύση

- Αναλύουμε τα πολυώνυμα σε γινόμενο παραγόντων.
- Υπολογίζουμε το Ε.Κ.Π. και το Μ.Κ.Δ. των αριθμητικών παραγόντων.
- Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π. και το Μ.Κ.Δ. των πολυωνύμων.

$$A = 12x^2 - 12 = 12(x^2 - 1) = 12(x - 1)(x + 1)$$

$$B = 18x^2 - 36x + 18 = 18(x^2 - 2x + 1) = 18(x - 1)^2$$

$$\Gamma = 9x^2 - 9x = 9x(x - 1)$$

Οι αριθμητικοί παράγοντες 12, 18, 9 έχουν Ε.Κ.Π. = 36 και Μ.Κ.Δ. = 3.

Τα πολυώνυμα Α, Β, Γ έχουν Ε.Κ.Π. = $36x(x - 1)^2(x + 1)$ και Μ.Κ.Δ. = $3(x - 1)$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

- 1 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε ζεύγος παραστάσεων της στήλης Α, το Ε.Κ.Π. τους από τη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $x^4(x + 2)^2$, $x(x + 2)^3$	1. $6x^2(x + 2)^2$
β. $x^3(x + 2)$, $x(x + 2)^3$	2. $x^3(x + 2)^3$
γ. $6x^2(x + 2)$, $2x(x + 2)^2$	3. $6x^2(x + 2)$
	4. $x^4(x + 2)^3$

α	β	γ

- 2 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα, γράφοντας σε κάθε κενό το Ε.Κ.Π. των παραστάσεων Α, Β.

B \ A	$4x^3$	$2x(x - 1)$	$9(x - 1)^2$
$6x^2$			
$x^2(x - 1)$			
$8x^5$			

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

- 3 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε ζεύγος παραστάσεων της στήλης Α, το Μ.Κ.Δ. τους από τη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $6x^3(x + 1)^2$, $3x(x + 1)^3$	1. $6x^2(x + 1)^2$
β. $2x^2(x + 1)^3$, $3x^4(x + 1)^2$	2. $3x(x + 1)^2$
γ. $3x^2(x + 1)$, $6x^3(x + 1)^2$	3. $3x^2(x + 1)$
	4. $x^2(x + 1)^2$

α	β	γ

- 4 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα γράφοντας σε κάθε κενό το Μ.Κ.Δ. των παραστάσεων Α, Β.

B \ A	$3x^2$	$x^4(x - 2)^2$	$6(x - 2)^3$
$6x(x - 2)^2$			
$2x^3(x - 2)$			
$3x^3(x - 2)^3$			

Ασκήσεις σελ 70 σχολικού βιβλίου

1 Να βρείτε το Ε.Κ.Π. και το Μ.Κ.Δ. των παραστάσεων:

$$\begin{array}{lll} \alpha) 12x^3y^2\omega^2, & 18x^2y\omega^3, & 24x^2y^3\omega^4 \\ \beta) 15axy^3, & 10ax^2\omega^2, & 5y\omega^2 \\ \gamma) 2x^2(x+y)^2, & 3xy^3(x+y)^2, & 8x^2y(x-y)(x+y) \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha) \quad 12x^3y^2\omega^2 = 2^2 \cdot 3 \cdot x^3y^2\omega^2 \\ \quad 18x^2y\omega^3 = 3^2 \cdot 2 \cdot x^2y\omega^3 \\ \quad 24x^2y^3\omega^4 = 3 \cdot 2^3 \cdot x^2y^3\omega^4 \end{array} \right\} \text{ΕΚΠ} = 2^3 \cdot 3^2 \cdot x^3y^3\omega^4$$

$$\left. \begin{array}{l} \beta) \quad 15axy^3 = 3 \cdot 5 \cdot axy^3 \\ \quad 10ax^2\omega^2 = 2 \cdot 5 \cdot ax^2\omega^2 \\ \quad 5y\omega^2 = 5y\omega^2 \end{array} \right\} \text{ΕΚΠ} = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ax^2y^3\omega^2$$

Το γινόμενο κοινών
και μη κοινών
παραγόντων με το
μεγαλύτερο εκθέτη

Ασκήσεις σελ 70 σχολικού βιβλίου

1 Να βρείτε το Ε.Κ.Π. και το Μ.Κ.Δ. των παραστάσεων:

- α) $12x^3y^2\omega^2$, $18x^2y\omega^3$, $24x^2y^3\omega^4$
β) $15axy^3$, $10ax^2\omega^2$, $5y\omega^2$
γ) $2x^2(x+y)^2$, $3xy^3(x+y)^2$, $8x^2y(x-y)(x+y)$

$$\left. \begin{array}{l} \gamma) \quad 2x^2(x+y)^2 \\ \quad 3xy^3(x+y)^2 \\ \quad 2^3x^2y(x-y)(x+y) \end{array} \right\} \text{ΕΚΠ} = 2^3 \cdot 3x^2y^3(x+y)^2(x-y)$$

Το γινόμενο κοινών
και μη κοινών
παραγόντων με το
μεγαλύτερο εκθέτη

2 Να βρείτε το Ε.Κ.Π. και το Μ.Κ.Δ. των παραστάσεων:

α) $6(x^2 - y^2), \quad 4(x - y)^2, \quad 12(x - y)^3$

β) $a^2 - 3a + 2, \quad a^2 - 4, \quad a^3 - 4a$

γ) $a^3 - a^2, \quad (a^2 - a)(a^2 - 1), \quad a^3 - 2a^2 + a$

$$\alpha) \left. \begin{array}{l} 6(x^2 - y^2) = 6(x - y)(x + y) \\ 4(x - y)^2 \\ 12(x - y)^3 \end{array} \right\} \quad \text{ΕΚΠ} = 12(x - y)^3(x + y)$$

β) εκτός ύλης

$$\gamma) \left. \begin{array}{l} a^3 - a^2 = a^2(a - 1) \\ (a^2 - a)(a^2 - 1) = a(a - 1)(a - 1)(a + 1) = a(a - 1)^2(a + 1) \\ a^3 - 2a^2 + a = a(a^2 - 2a + 1) = a(a - 1)^2 \end{array} \right\} \quad \text{ΕΚΠ} = a^2(a - 1)^2(a + 1)$$

Ασκήσεις:

1) Να βρείτε το ΕΚΠ και τον ΜΚΔ:

α) a^2-4 , a^3-2a^2 , $5(a+2)^2$ β) ab , ac , bc γ) $6a^2-6b^2$, $8a^2+8ab$, $2a^2-2ab$
δ) $12a+12$, $3a-3$, $6a^2-6$ ε) x^4-x , x^4-x^2 , x^4-x^3 στ) $ab-ac$, b^3c-bc^3 , a^2b+ab^2