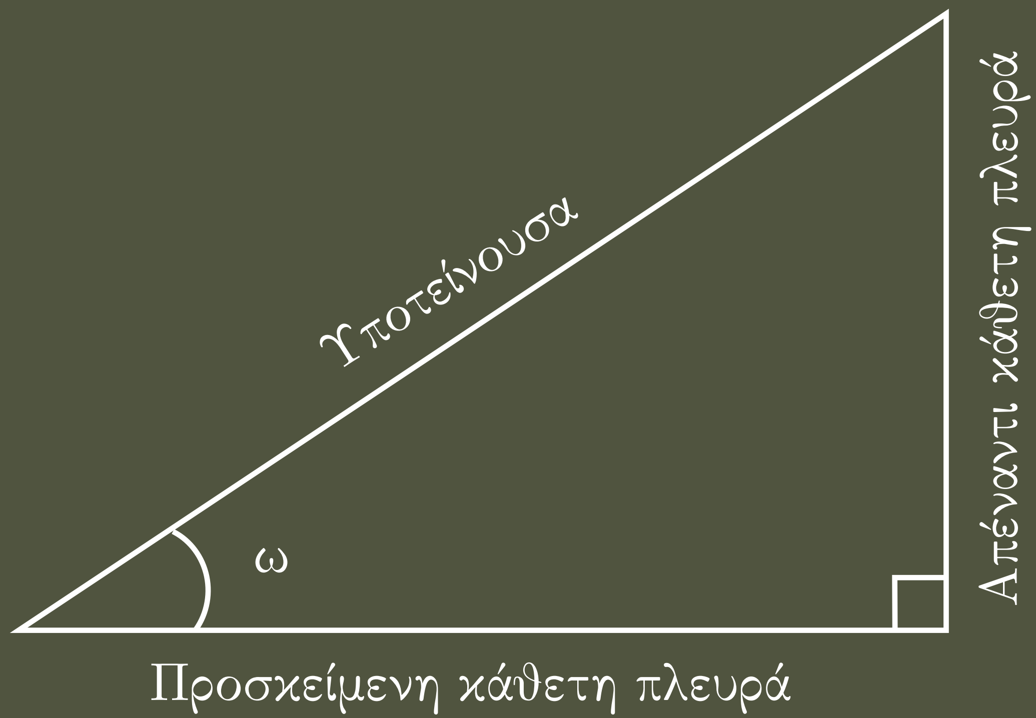
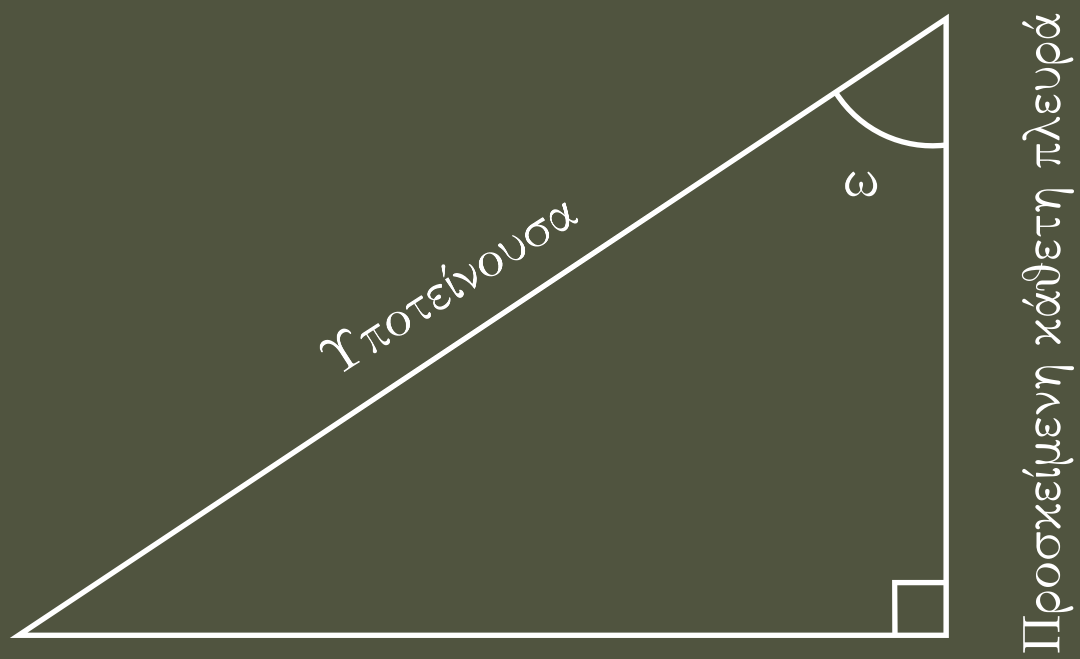
Μαθηματικά Β’ Γυμνασίου

2.1 - Εφαπτομένη οξείας γωνίας



Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο η εφαπτομένη μιας οξείας γωνίας είναι το πηλίκο της απέναντι πλευράς προς την προσκείμενη πλευρά.

$$\text{εφω} = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά απο τη γωνία ω}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά της γωνίας ω}}$$

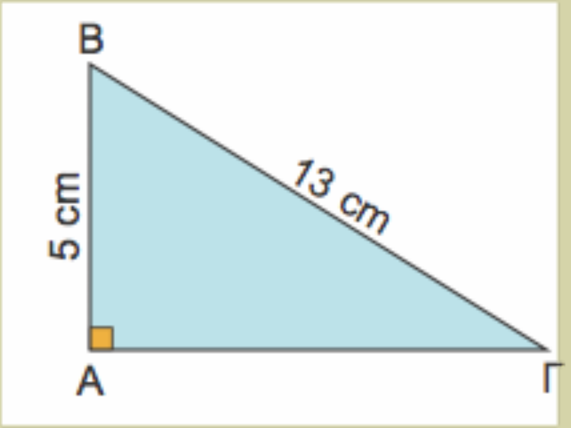


Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο η εφαπτομένη μιας οξείας γωνίας είναι το πηλίκο της απέναντι πλευράς προς την προσκείμενη πλευρά.

$$\text{εφω} = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά απο τη γωνία ω}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά της γωνίας ω}}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με υποτείνουσα ΒΓ = 13 cm. Αν η μία κάθετη πλευρά έχει μήκος ΑΒ = 5 cm, να υπολογίσετε τις εφαπτομένες των γωνιών $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$.



Λύση: Γνωρίζουμε ότι:

$$\varepsilon\varphi\widehat{B} = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}} = \frac{A\Gamma}{AB} \quad \text{και}$$

$$\varepsilon\varphi\widehat{\Gamma} = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}} = \frac{AB}{A\Gamma}$$

Επομένως, πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε το μήκος της κάθετης πλευράς ΑΓ.

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα γνωρίζουμε ότι $AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2$ και αντικαθιστώντας με ΑΒ = 5 cm και ΒΓ = 13 cm, έχουμε:

$$5^2 + A\Gamma^2 = 13^2 \;\text{ ή }\; 25 + A\Gamma^2 = 169 \;\text{ ή }\; A\Gamma^2 = 169 - 25 = 144$$

Επομένως, $A\Gamma = \sqrt{144} = 12$ (cm).

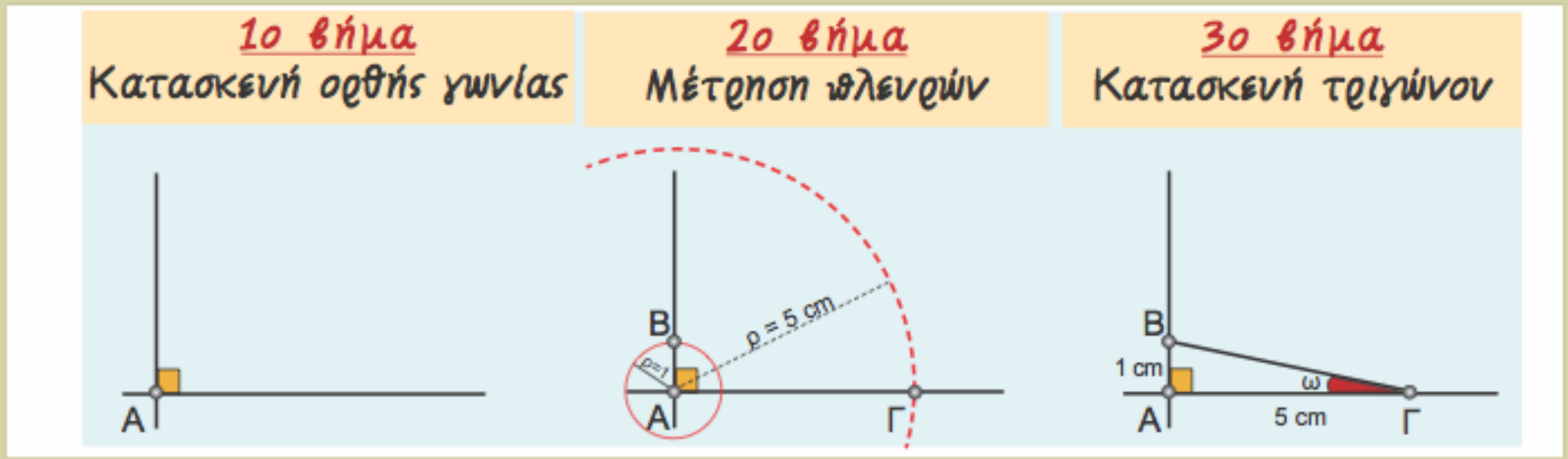
Άρα: $\varepsilon\varphi\widehat{B} = \dfrac{A\Gamma}{AB} = \dfrac{12}{5}$ και $\varepsilon\varphi\widehat{\Gamma} = \dfrac{AB}{A\Gamma} = \dfrac{5}{12}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Να σχεδιάσετε μια γωνία ω, με εφω = $\frac{1}{5}$.

Λύση: Σύμφωνα με τον ορισμό της εφαπτομένης οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου, ισχύει: $\text{εφω} = \dfrac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}$.

Επομένως, για να σχεδιάσουμε μια οξεία γωνία ω με εφω = $\frac{1}{5}$, αρκεί να κατασκευάσουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο που η μία κάθετη πλευρά του θα είναι ίση με 1 και η άλλη κάθετη πλευρά ίση με 5.



Για τη γωνία ω ισχύει: $\text{εφω} = \dfrac{AB}{A\Gamma} = \dfrac{1}{5}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Να υπολογίσετε το ύψος του κυπαρισσιού του παρακάτω σχήματος χρησιμοποιώντας το μήκος της σκιάς του και τη γωνία ω.

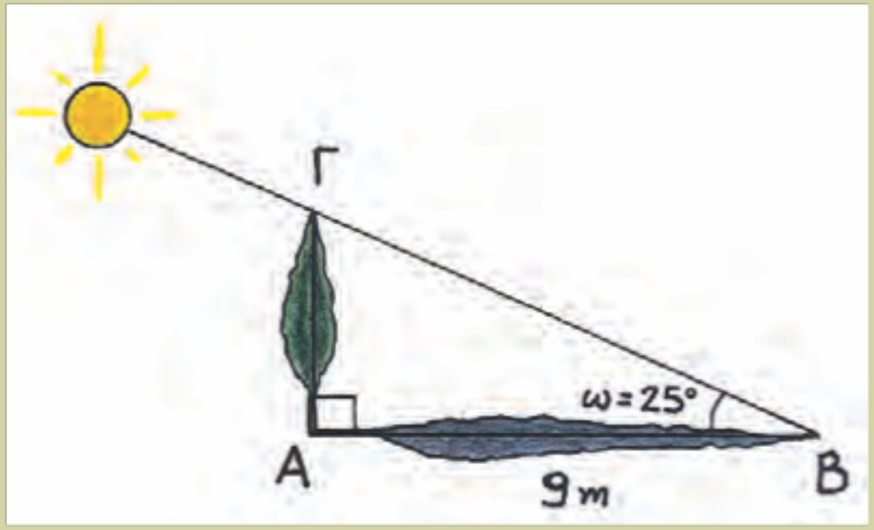
Λύση: Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ γνωρίζουμε ότι ΑΒ = 9 m και $\widehat{B} = \omega = 25°$.
Θέλουμε να υπολογίσουμε την πλευρά ΑΓ.
Ο τριγωνομετρικός αριθμός που συνδέει την απέναντι με την προσκείμενη πλευρά μιας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ είναι η εφαπτομένη της γωνίας $\widehat{B}$.

Έχουμε λοιπόν: $εφ\widehat{B} = \dfrac{ΑΓ}{ΑΒ}$ οπότε

$ΑΓ = ΑΒ \cdot εφ\widehat{B}$ άρα $ΑΓ = 9 \cdot εφ25°$.

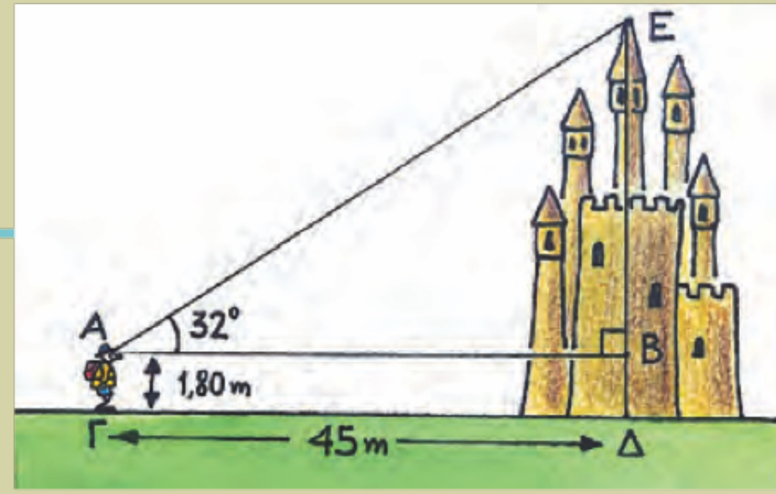
Με τη βοήθεια του πίνακα εφαπτομένων βρίσκουμε ότι εφ25° = 0,47.

Άρα, ΑΓ = 9 · 0,47 = 4,23, δηλαδή το ύψος του κυπαρισσιού είναι 4,23 m.



ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

Ένας τουρίστας ύψους ΑΓ = 1,80 m «βλέπει» τον πύργο με γωνία 32° και απέχει από αυτόν 45 m. Να υπολογίσετε το ύψος ΕΔ του πύργου.



Λύση: Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΕ γνωρίζουμε το μήκος της κάθετης πλευράς ΑΒ = 45 m και μια οξεία γωνία 32°. Επομένως, για να υπολογίσουμε την άλλη κάθετη πλευρά ΒΕ, χρησιμοποιούμε την εφαπτομένη της γωνίας των 32°.

Είναι $εφ32° = \dfrac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}} = \dfrac{ΒΕ}{ΑΒ} = \dfrac{ΒΕ}{45}$.

Από τον πίνακα εφαπτομένων βρίσκουμε: εφ32° = 0,62, οπότε η παραπάνω σχέση γίνεται: $0,62 = \dfrac{ΒΕ}{45}$, οπότε έχουμε: ΒΕ = 45 · 0,62 = 27,9 (m).

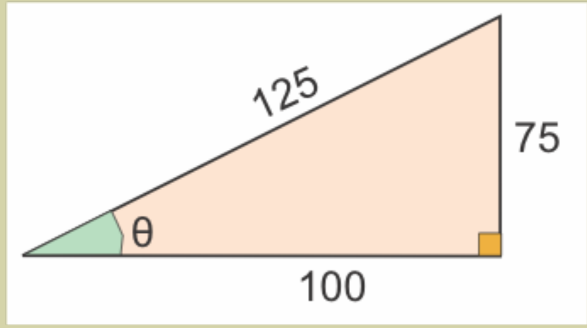
Επομένως, το συνολικό ύψος του πύργου είναι:
ΔΕ = ΔΒ + ΒΕ = 1,8 + 27,9 = 29,7 (m).

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Στο διπλανό σχήμα είναι εφθ = ...

Α: $\frac{100}{75}$, Β: $\frac{125}{75}$, Γ: $\frac{75}{100}$, Δ: $\frac{75}{125}$.

Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.



2. Στο διπλανό σχήμα είναι:

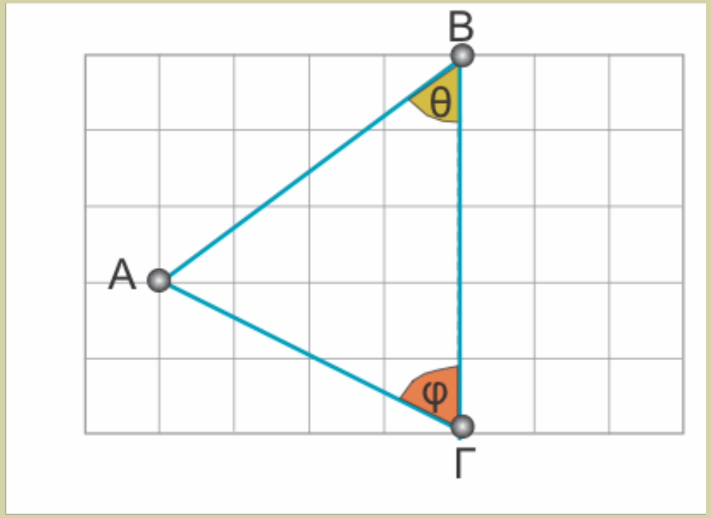
α) εφθ = ...

Α: $\frac{3}{4}$, Β: $\frac{4}{3}$, Γ: $\frac{4}{5}$, Δ: $\frac{3}{5}$.

β) εφφ = ...

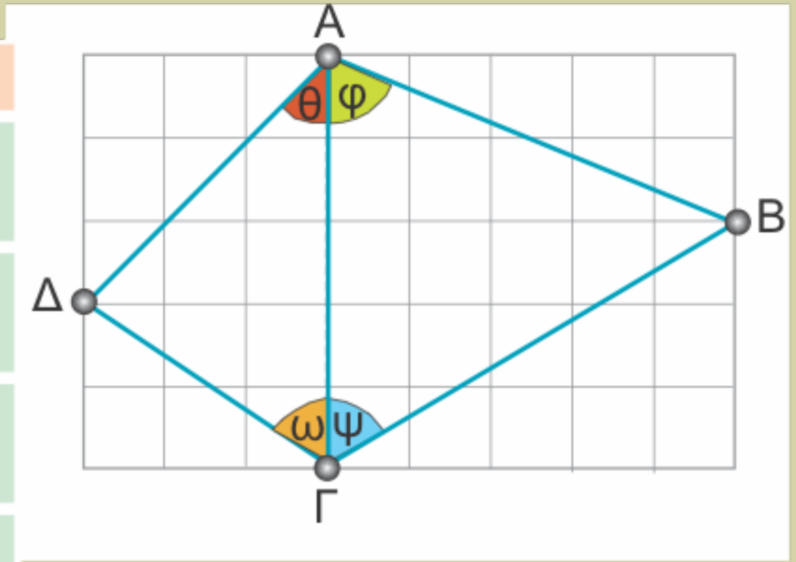
Α: $\frac{4}{3}$, Β: $\frac{3}{4}$, Γ: $\frac{2}{4}$, Δ: 2.

Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

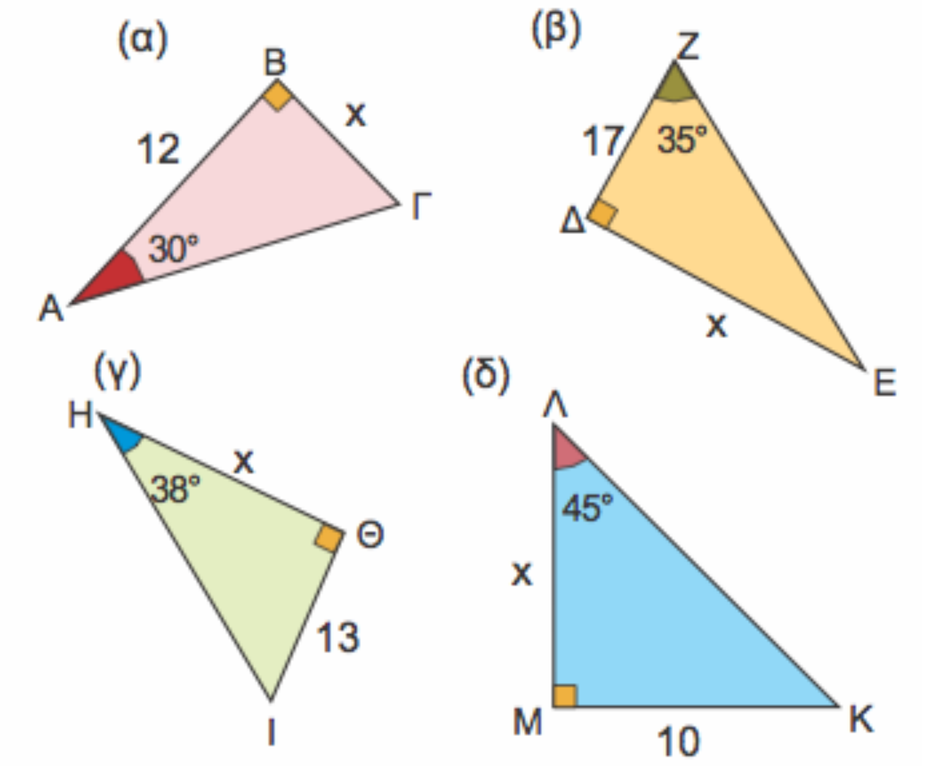


3. Σε κάθε γωνία θ, φ, ω, ψ του διπλανού σχήματος να αντιστοιχίσετε την εφαπτομένη της.

Γωνία	Εφαπτομένη
θ	$\frac{5}{3}$
φ	$\frac{5}{2}$
ω	1
ψ	$\frac{3}{2}$



1 Στα παρακάτω σχήματα να υπολογίσετε το μήκος x:



(α) η $\text{εφ}30^\circ = \dfrac{ΒΓ}{ΑΒ}$ και τώρα αντικαθιστώ

$0{,}5774 = \dfrac{x}{12}$ δηλαδή $\dfrac{0{,}5774}{1} = \dfrac{x}{12}$

κάνω "χιαστί" και παίρνω :

$1 \cdot x = 0{,}5774 \cdot 12$ οπότε $x = 6{,}93$

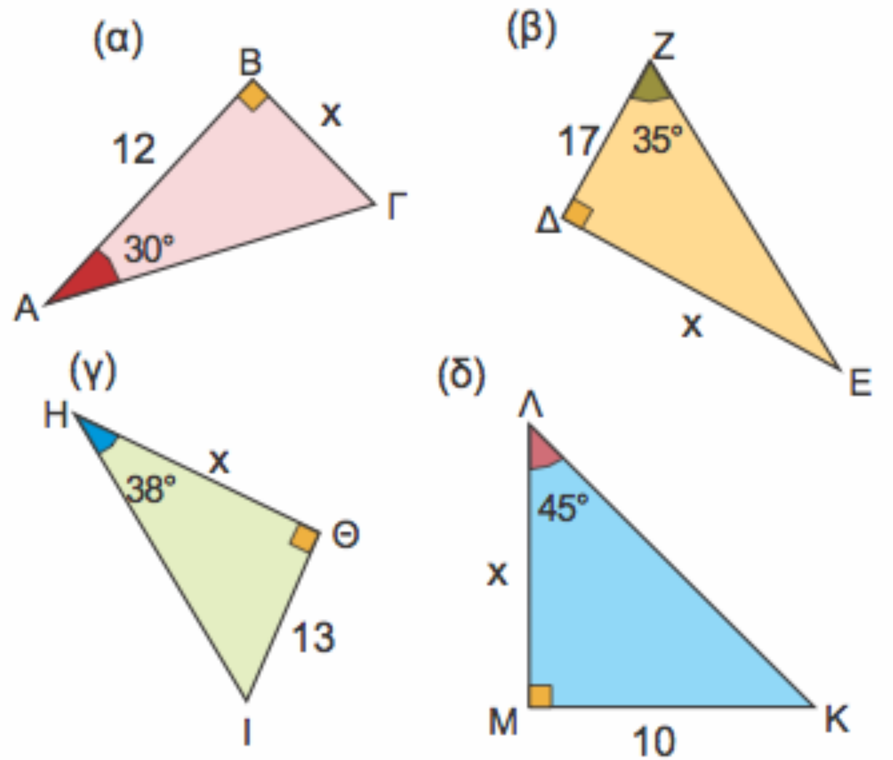
(β) η $\text{εφ}35^\circ = \dfrac{ΔΕ}{ΔΖ}$ και τώρα αντικαθιστώ

$0{,}7002 = \dfrac{x}{17}$ κάνω "χιαστί" και

$\dfrac{0{,}7002}{1} = \dfrac{x}{17}$ $\quad 1 \cdot x = 0{,}7002 \cdot 17$

οπότε $x = 11{,}9$

1 Στα παρακάτω σχήματα να υπολογίσετε το μήκος x:



(γ) $\varepsilon\varphi 38^\circ = \dfrac{\Theta I}{H\Theta}$. Με αντικατάσταση προκύπτει ότι

$0{,}7813 = \dfrac{13}{x}$ και κάνω "χιαστί":

$\dfrac{0{,}7813}{1} = \dfrac{13}{x}$

$0{,}7813\,x = 1 \cdot 13$ και τώρα για να λύσουμε ως προς x πρέπει να διαιρέσουμε με το συντελεστή του αγνώστου.

άρα $\dfrac{\cancel{0{,}7813}\,x}{\cancel{0{,}7813}} = \dfrac{13}{0{,}7813}$ άρα $x = 16{,}64$

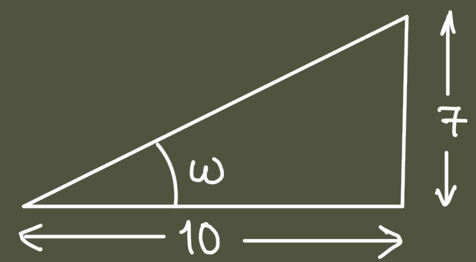
(δ) $\varepsilon\varphi 45^\circ = \dfrac{MK}{x}$ και αντικαθιστώ:

$1 = \dfrac{10}{x}$ άρα $x = 10$

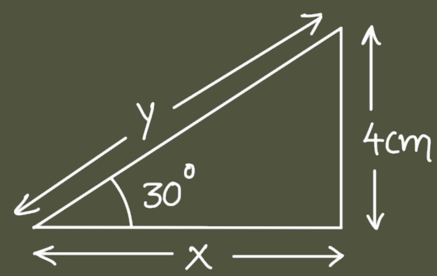
2 Να σχεδιάσετε μια γωνία ω με εφω = 0,7.

Έχουμε ότι $εφω = 0{,}7$ ή $εφω = \frac{7}{10}$

Σύμφωνα με τον ορισμό της εφαπτομένης θα πρέπει να κατασκευάσουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο με μία κάθετη πλευρά 7 και μια 10.



3 Ποια στοιχεία μπορείτε να υπολογίσετε σε ορθογώνιο τρίγωνο με μια οξεία γωνία 30°, αν η απέναντι κάθετη πλευρά έχει μήκος 4 cm;



$$\varepsilon\varphi 30^\circ = \frac{4}{x}, \quad 0{,}5774 = \frac{4}{x}$$

$0{,}5774x = 4$ άρα

$x = \dfrac{4}{0{,}5774}$ (διαίρεσα με συντελεστή αγνώστου)

$x = 6{,}93.$

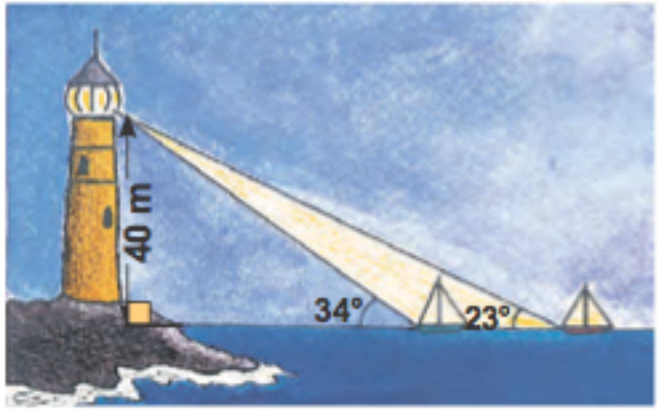
Επίσης μπορώ να υπολογίσω και την υποτείνουσα. με το Πυθαγόρειο Θεώρημα.

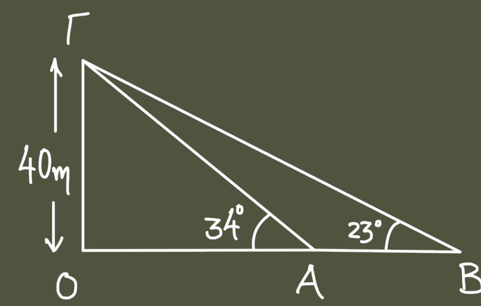
$6{,}93^2 + 4^2 = y^2$

$47{,}94 + 16 = y^2$

$64 = y^2$ άρα $y = 8$

4 Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε την απόσταση των δύο πλοίων.





Έστω ότι το ένα πλοίο είναι στη θέση A και το άλλο στη θέση B.

Στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{O B \Gamma}$ έχουμε $\varepsilon\varphi 23^\circ = \dfrac{O\Gamma}{OB}$

$$\downarrow$$

$0{,}4245 = \dfrac{40}{OB}$ ή με χιαστί $OB = \dfrac{40}{0{,}4245} = 94{,}23m$

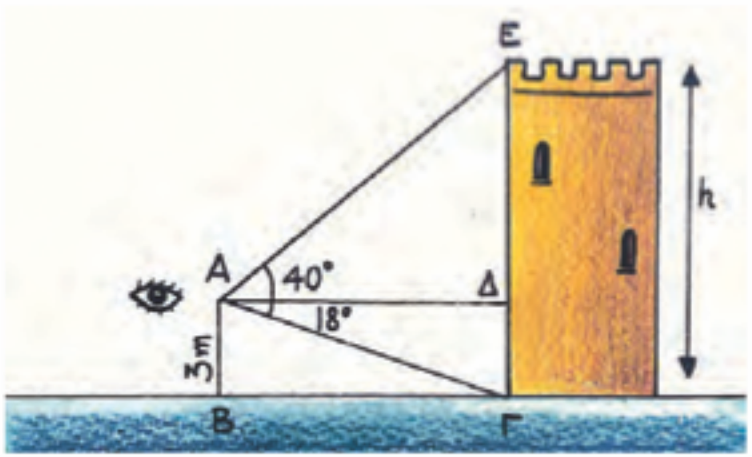
Στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{O A \Gamma}$ έχουμε $\varepsilon\varphi 34^\circ = \dfrac{O\Gamma}{OA}$

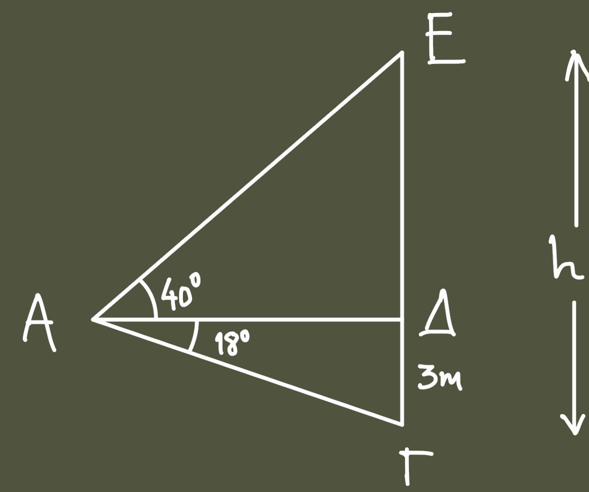
$$\downarrow$$

$0{,}6745 = \dfrac{40}{OA}$ ή με χιαστί $OA = \dfrac{40}{0{,}6745} = 59{,}3\ m$

Άρα η απόσταση $OB - OA = 94{,}23 - 59{,}3 = 34{,}93m$.

5 Ένας τουρίστας βλέπει την κορυφή ενός πύργου από σημείο Α με γωνία 40° και τη βάση του πύργου με γωνία 18°. Αν γνωρίζετε ότι ΑΒ = 3 m, να υπολογίσετε το ύψος h του πύργου.





- Στο τρίγωνο $\overset{\Delta}{\text{ΑΔΓ}}$ έχουμε $\text{εφ}18^\circ = \frac{\text{ΓΔ}}{\text{ΑΔ}} \xrightarrow{\text{αντικαθιστώ}} 0{,}3249 = \frac{3}{\text{ΑΔ}}$ χιαστί

  $\text{ΑΔ} = \frac{3}{0{,}3249}$, $\text{ΑΔ} = 9{,}23\,m$.

- Στο τρίγωνο $\overset{\Delta}{\text{ΑΔΕ}}$ έχουμε $\text{εφ}40^\circ = \frac{\text{ΕΔ}}{\text{ΑΔ}} \xrightarrow{\text{αντικαθιστώ}} 0{,}8391 = \frac{\text{ΕΔ}}{9{,}23}$ χιαστί

  $\text{ΕΔ} = 0{,}8391 \cdot 9{,}23 = 7{,}75\,m$.

Επομένως το ύψος του πύργου είναι $\text{ΕΔ} + \text{ΔΓ} = 7{,}75 + 3 = 10{,}75\,m$