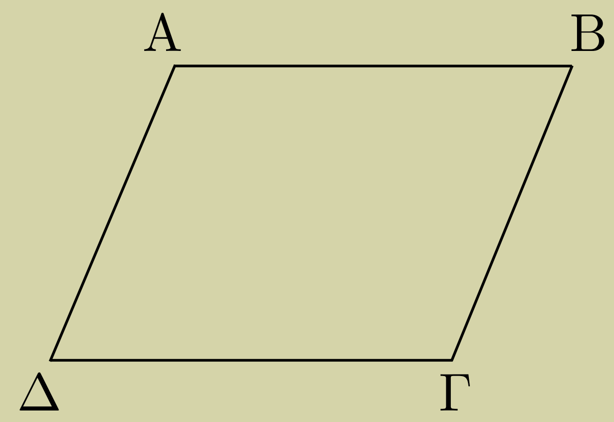
Γεωμετρία Α' Λυκείου

5.1 5.2 - Παραλληλόγραμμα

Παραλληλόγραμμα

Ορισμός

Κάθε τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, λέγεται παραλληλόγραμμο



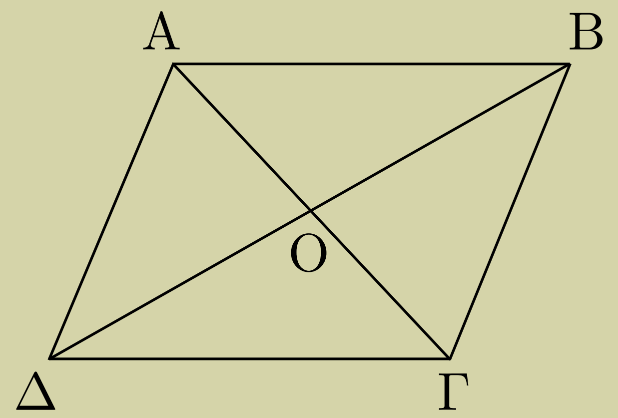
Ιδιότητες Παραλληλογράμμων

Σε κάθε παραλληλόγραμμο ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

i) Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες, δηλαδή ΑΒ=ΔΓ και ΑΔ=ΒΓ

ii) Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες, δηλαδή $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ και $\hat{B} = \hat{\Delta}$

iii) Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται (η μία κόβει στη μέση την άλλη)



Ιδιότητες Παραλληλογράμμων

Απόδειξη:

i) Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες, δηλαδή ΑΒ=ΔΓ και ΑΔ=ΒΓ

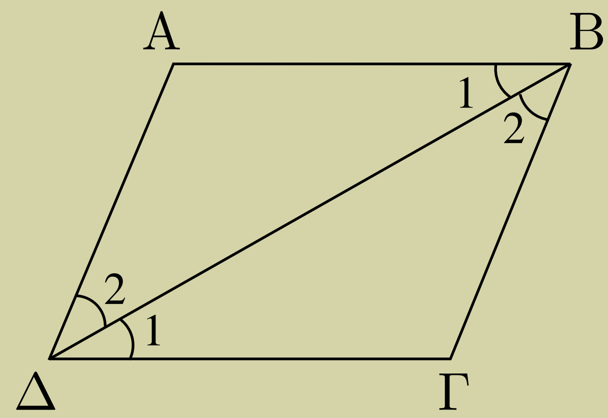
Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΔ

$\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1$ εντός εναλλάξ

$\hat{B}_2 = \hat{\Delta}_2$ εντός εναλλάξ

ΒΔ κοινή

άρα ΑΒ=ΔΓ και ΑΔ=ΒΓ

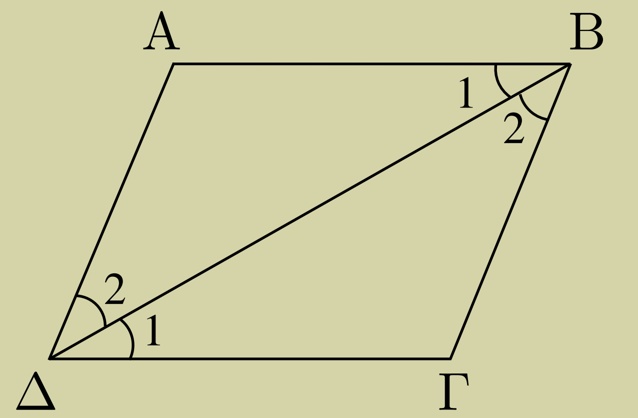


Ιδιότητες Παραλληλογράμμων

Απόδειξη:

ii) Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες, δηλαδή $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ και $\hat{B} = \hat{\Delta}$

Εφόσον αποδείξαμε στο i) ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΔ είναι ίσα, προκύπτει ότι $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ και ότι $\hat{\Delta} = \hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 = \hat{B}_1 + \hat{B}_2 = \hat{B}$



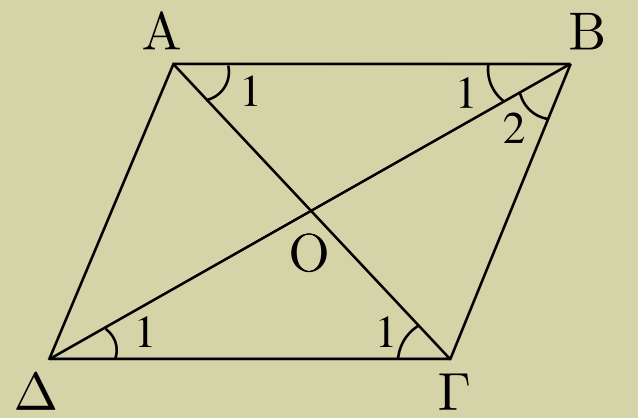
Ιδιότητες Παραλληλογράμμων

Απόδειξη:

iii) Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται (η μία κόβει στη μέση την άλλη)

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΔΓ.
Έχουν $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}_1, \hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1$ και ΑΒ=ΔΓ
άρα τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΔΓ είναι ίσα
επομένως

ΟΑ=ΟΓ και ΟΔ=ΟΒ που σημαίνει ότι
οι διαγώνιοι διχοτομούνται



► Κριτήρια για παραλληλόγραμμα

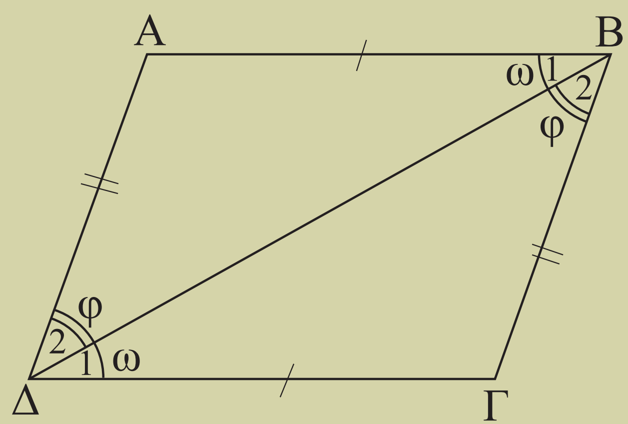
Στην παράγραφο αυτή θα αποδείξουμε προτάσεις (κριτήρια) οι οποίες εξασφαλίζουν ότι ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο: Ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις:

i) Οι απέναντι πλευρές ανά δύο είναι ίσες.

ii) Δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες.

iii) Οι απέναντι γωνίες ανά δύο είναι ίσες.

iv) Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.



Σχήμα 10

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θεωρούμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Για να αποδείξουμε τα κριτήρια, θα πρέπει σύμφωνα με τον ορισμό να αποδείξουμε ότι σε κάθε περίπτωση, οι απέναντι πλευρές του τετραπλεύρου είναι παράλληλες.

i) Έστω ΑΒ = ΓΔ και ΑΔ = ΒΓ (σχ.10). Αν φέρουμε τη διαγώνιο ΒΔ, τότε σχηματίζονται τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΔ που είναι ίσα, γιατί ΑΒ = ΓΔ, ΑΔ = ΒΓ και ΒΔ κοινή πλευρά. Άρα $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 = \omega$ και $\hat{B}_2 = \hat{\Delta}_2 = \varphi$, οπότε ΑΒ//ΓΔ και ΑΔ//ΒΓ, δηλαδή το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

► Κριτήρια για παραλληλόγραμμα

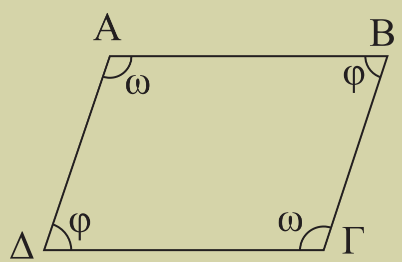
Στην παράγραφο αυτή θα αποδείξουμε προτάσεις (κριτήρια) οι οποίες εξασφαλίζουν ότι ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο: Ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις:

i) Οι απέναντι πλευρές ανά δύο είναι ίσες.

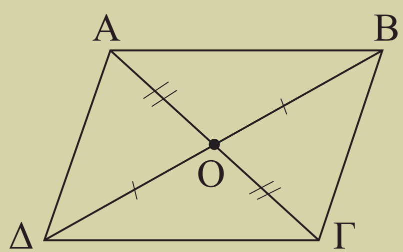
ii) Δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες.

iii) Οι απέναντι γωνίες ανά δύο είναι ίσες.

iv) Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.



Σχήμα 11



Σχήμα 12

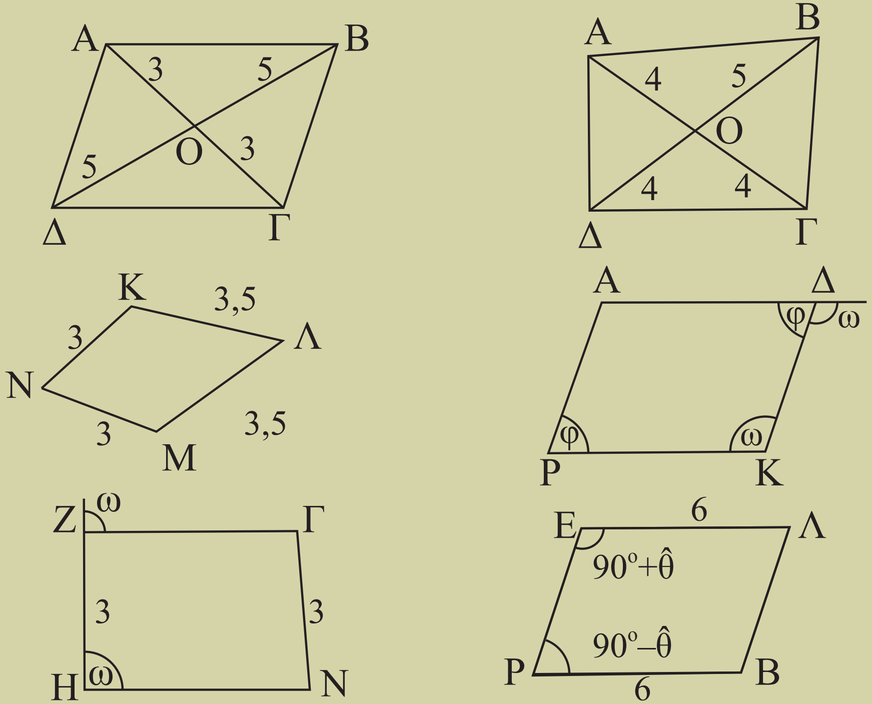
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

ii) Έστω ΑΒ// = ΓΔ (σχ.10). Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΔ είναι ίσα, γιατί ΑΒ = ΓΔ, $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 = \omega$ και η ΒΔ είναι κοινή πλευρά. Επομένως, όμοια με το i), το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

iii) Αν $\hat{A} = \hat{\Gamma} = \omega$ και $\hat{B} = \hat{\Delta} = \varphi$ (σχ.11) η σχέση $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\Delta} = 4\llcorner$ γράφεται $2\omega + 2\varphi = 4\llcorner$ ή $\varphi + \omega = 2\llcorner$. Επομένως, έχουμε ότι $\hat{A} + \hat{\Delta} = 2\llcorner$, οπότε ΑΒ // ΓΔ και $\hat{A} + \hat{B} = 2\llcorner$, οπότε ΑΔ // ΒΓ, δηλαδή το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

iv) Έστω ΑΟ = ΟΓ και ΟΒ = ΟΔ (σχ.12). Τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΓΟΔ, καθώς και τα τρίγωνα ΑΟΔ και ΒΟΓ είναι ίσα. Επομένως, όμοια με το i), θα είναι ΑΒ // ΓΔ και ΑΔ // ΒΓ, δηλαδή το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

1. *Ποια από τα παρακάτω τετράπλευρα είναι παραλληλόγραμμα, ποια όχι και γιατί;*



1ο Είναι παραλληλόγραμμο αφού βλέπουμε ότι οι διαγώνιοι διχοτομούνται.

2ο Δεν είναι παραλληλόγραμμο αφού βλέπουμε ότι οι διαγώνιοι δεν διχοτομούνται.

3ο Δεν είναι παραλληλόγραμμο αφού οι απέναντι πλευρές του δεν είναι ίσες.

4ο Δεν είναι παραλληλόγραμμο αφού οι απέναντι πλευρές του δεν είναι ίσες.