

Γεωμετρία Β' Λυκείου

Μάθημα 7 - Πυθαγόρειο Θεώρημα Ασκήσεις

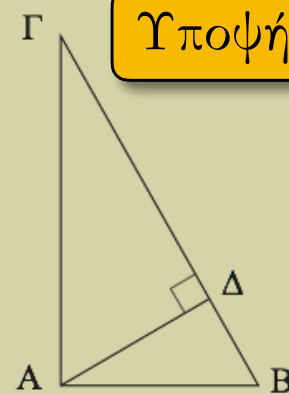
Διαιρώντας τις $AB^2 = BG \cdot BD$ και $AG^2 = BG \cdot GD$ κατά μέλη προκύπτει το εξής πόρισμα:

ΠΟΡΙΣΜΑ

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, ο λόγος των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του είναι ίσος με το λόγο των προβολών τους πάνω στην υποτείνουσα.

ΘΕΩΡΗΜΑ II (Πυθαγόρειο)

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας.



Υποψήφιο για εξετάσεις

Σχήμα 2

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θέλουμε δηλαδή (σχ.2) να αποδείξουμε ότι

$$AB^2 + AG^2 = BG^2 \text{ ή } \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$$

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα έχουμε:

$$AB^2 = BG \cdot BD \text{ και } AG^2 = BG \cdot GD.$$

Με πρόσθεση των ισοτήτων κατά μέλη προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} AB^2 + AG^2 &= BG \cdot BD + BG \cdot GD = \\ &= BG(BD + GD) = BG \cdot BG = BG^2. \end{aligned}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ III (Αντίστροφο του Πυθαγορείου)

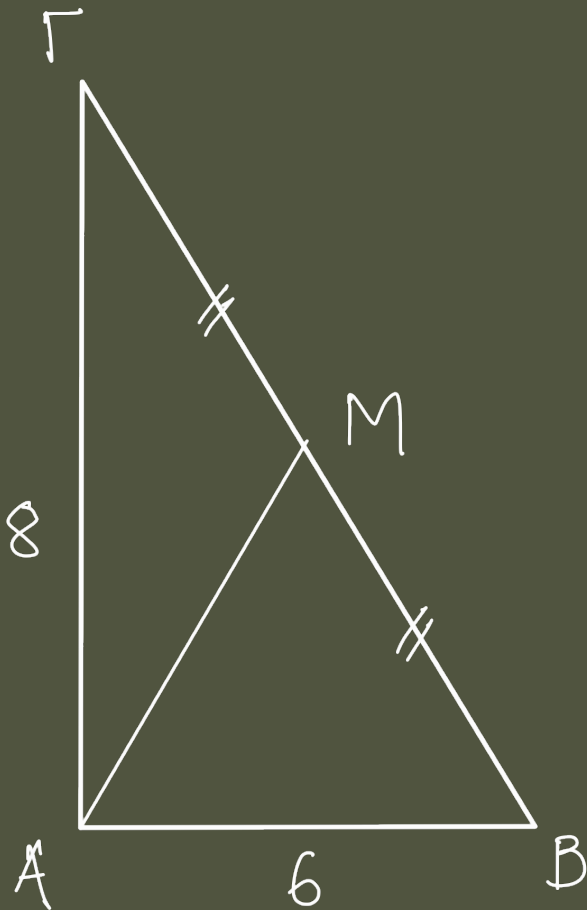
Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2$, τότε $\hat{A} = 1\text{L}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ IV

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών του στην υποτείνουσα.

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 1\text{L}$) έχει $AB = 6$ και $A\Gamma = 8$. Ποιο το μήκος της διαμέσου AM ;



$$B\Gamma^2 = A\Gamma^2 + AB^2$$

$$B\Gamma^2 = 64 + 36$$

$$B\Gamma^2 = 100$$

$$B\Gamma = 10$$

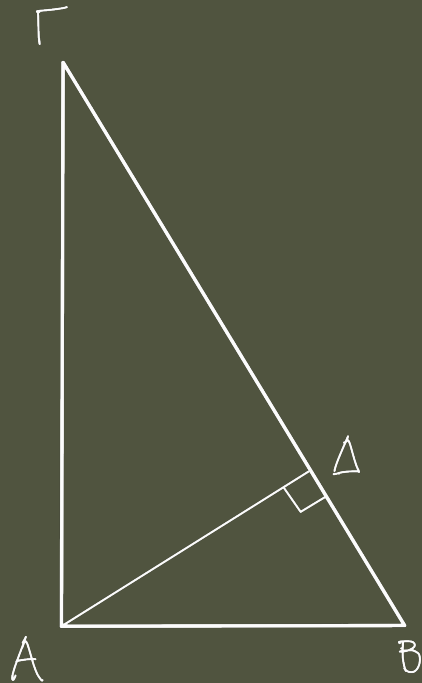
άρα $AM = 5$

ισχύει από 1^η Λυκείου
ότι σε ορθογώνιο τρίγωνο
η διάμεσος που αντιστοιχεί
στην υποτίγουσα ισούται
με το μισό της υποτί-
γουσας

2. Αν ο λόγος των κάθετων πλευρών ενός ορθογώνιου τριγώνου είναι 4, τότε ο λόγος των προβολών τους στην υποτείνουσα είναι:

α. 2 β. 4 γ. 16 δ. $\frac{1}{4}$

Κυκλώστε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση και αιτιολογήστε την απάντησή σας.



Ξέρω ότι $\frac{AC}{AB} = 4$

Ψάχνω να βρω το λόγο

$\frac{AD}{BD}$. Ισχύει ότι

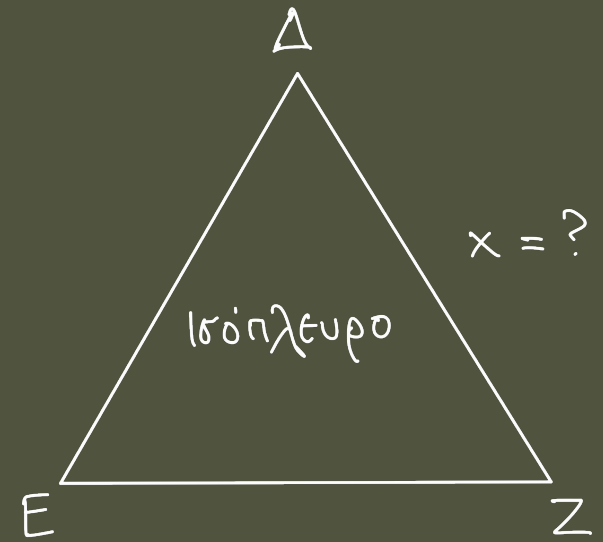
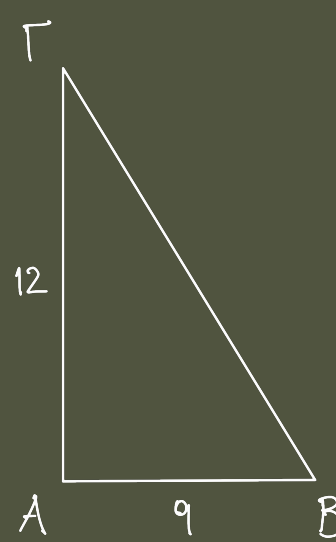
$$AC^2 = BC \cdot AD \quad (1)$$

$$AB^2 = BC \cdot BD \quad (2)$$

Διαιρώ τις σχέσεις (1), (2) και έχω $\left(\frac{AC}{AB}\right)^2 = \frac{AD}{BD}$ άρα :

$$\frac{AD}{BD} = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 = (4)^2 = 16$$

3. Ένα ορθογώνιο τρίγωνο έχει κάθετες πλευρές ίσες με 9 cm και 12 cm. Η πλευρά ισόπλευρου τριγώνου που έχει ίση περίμετρο με το ορθογώνιο τρίγωνο είναι:
α. 10 cm β. 12 cm γ. 13 cm δ. 14 cm.
Κυκλώστε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση και αιτιολογήστε την απάντησή σας.



Αρχικά $\Gamma\Gamma^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$

$\Gamma\Gamma = 15$

Άρα η περίμετρος του ορθογωνίου είναι

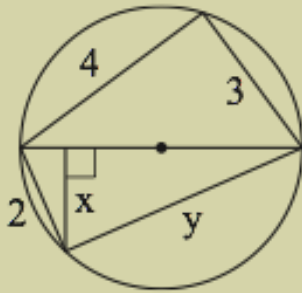
$$\Pi = 12 + 9 + 15 = 36.$$

Ψάχνουμε ισόπλευρο τρίγωνο με ίση περίμετρο., δηλαδή $3x = 36$

οπότε

$x = 12$

4. Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε τα x και y .



Στο ορθογώνιο

$\triangle AB\Gamma$ εφαρμόζω Πυθαγόρειο Θεώρημα:

$$B\Gamma^2 = A\Gamma^2 + AB^2 = 16 + 9 = 25$$

$$B\Gamma = 5 \quad (1)$$

Στο ορθογώνιο $\triangle B\Gamma\Delta$ εφαρμόζω Πυθαγόρειο Θεώρημα.

$$B\Gamma^2 = \Gamma\Delta^2 + B\Delta^2$$

$$\Leftrightarrow 25 = 4 + y^2$$

$$\Leftrightarrow y^2 = 21$$

Όμως από Θεώρημα ισχύει ότι :

$$2^2 = B\Gamma \cdot E\Gamma \Leftrightarrow 4 = 5 \cdot E\Gamma \Leftrightarrow E\Gamma = \frac{4}{5}$$

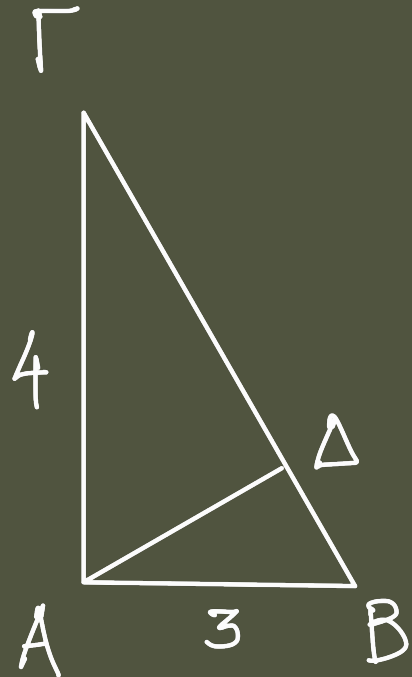
Άρα από Πυθαγόρειο Θεώρημα

$$E\Gamma^2 + x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 4 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 4 - \frac{16}{25} = \frac{100 - 16}{25} = \frac{84}{25}$$

$$\text{άρα } x = \frac{\sqrt{84}}{5}$$

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 1\text{L}$) φέρουμε το ύψος $A\Delta$. Αν είναι $AB = 3$ και $A\Gamma = 4$, να υπολογιστούν τα μήκη των τμημάτων $B\Gamma$, $B\Delta$, $\Delta\Gamma$ και $A\Delta$.



Απο Πυθαγόρειο έχουμε ότι

$$B\Gamma^2 = A\Gamma^2 + AB^2 = 16 + 9 = 25 \quad \text{άρα}$$

$$\boxed{B\Gamma = 5}$$

$$AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta \Leftrightarrow 9 = 5 \cdot B\Delta \Leftrightarrow \boxed{B\Delta = \frac{9}{5}}$$

$$A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta \Leftrightarrow 16 = 5 \cdot \Gamma\Delta \Leftrightarrow \boxed{\Gamma\Delta = \frac{16}{5}}$$

$$A\Delta^2 = AB^2 - B\Delta^2 = 9 - \frac{81}{25} = \frac{225 - 81}{25} = \frac{144}{25}$$

άρα

$$\boxed{A\Delta = \frac{12}{5}}$$