ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

1. Εξισώσεις 1ου βαθμού

Παράδειγμα: Να λύσετε την εξίσωση:

$$x+\left(\frac{x}{2}-1\right)=1-\left(\frac{x}{3}-x\right)$$

Λύση:

$x+\frac{x}{2}-1=1-\frac{x}{3}+x \Leftrightarrow$ Απαλοιφή παρενθέσεων

$6x+6\frac{x}{2}-6\cdot 1=6\cdot 1-6\cdot\frac{x}{3}+6x \Leftrightarrow$ Απαλοιφή παρονομαστών

$6x+3x-6=6-2x+6x \Leftrightarrow$

$\cancel{6x}+3x+2x-\cancel{6x}=6+6$ Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους.

$5x=12$ αναγωγή ομοίων όρων

$\frac{\cancel{5}x}{\cancel{5}}=\frac{12}{5}$ Διαιρούμε με συντελεστή του αγνώστου

$x=\frac{12}{5}$

2. Εξισώσεις 2ου βαθμού

Παράδειγμα: Να λύσετε την εξίσωση $x^2-7x+10=0$

Λύση:

- Βρίσκουμε τα α,β,γ: $\alpha=1$, $\beta=-7$, $\gamma=10$
- Υπολογίζουμε διακρίνουσα $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$
  $=(-7)^2-4\cdot 1\cdot 10=49-40=9$
- Βρίσκουμε τις ρίζες σύμφωνα με τον τύπο: $x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$

$$x_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{7\pm 3}{2} \begin{cases} \frac{10}{2}=5 \\ \frac{4}{2}=2 \end{cases}$$

3. Εξισώσεις $3^{ου}$ βαθμού και πάνω...

Δυστυχώς δεν έχουμε τύπο να τις λύνει όπως πριν με τη $2^{ου}$ βαθμού.

Ο μόνος τρόπος είναι με **ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ**

Η ιδέα μας βασίζεται στο εξής:

Αν $A \cdot B = 0 \Leftrightarrow A = 0$ ή $B = 0$

Αν καταφέρουμε να παραγοντοποιήσουμε το πολυώνυμο, τότε η εξίσωση αντί για $P(x) = 0$, θα είναι $(\ )\cdot(\ )\cdots = 0$

Κάθε παράγοντας θα είναι $1^{ου}$ ή $2^{ου}$ βαθμού που ξέρουμε να λύνουμε.

<u>Παράδειγμα:</u> Να λύσετε την εξίσωση $x^3 - 12 = 4x - 3x^2$

<u>Λύση:</u>

$x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$ Όλα στο $1^{ο}$ μέλος και σε φθίνουσα σειρά δυνάμεων.

$\Leftrightarrow x(x^2 - 4) + 3(x^2 - 4) = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 4)(x + 3) = 0$ παραγοντοποιήσαμε το $P(x)$.

$\Leftrightarrow x^2 - 4 = 0$ ή $x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = 4$ ή $x = -3$

$\Leftrightarrow x = \pm 2$ ή $x = -3$

οπότε οι ρίζες είναι οι $x_1 = -3$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$.

ΠΡΟΣΟΧΗ!!

ΕΝΑ ΒΑΣΙΚΟ ΕΡΓΑΛΕΙΟ ΜΕ ΤΟ ΟΠΟΙΟ ΜΠΟΡΟΥΜΕ ΝΑ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΟΥΜΕ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ ΕΙΝΑΙ ΤΟ ΣΧΗΜΑ HORNER.

ΣΧΗΜΑ HORNER

Ας πούμε ότι έχουμε να παραγοντοποιήσουμε το πολυώνυμο:

$x^3+3x-4x-12$

1	3	−4	−12	p = 1
	1	4	0	
1	4	0	$\boxed{-12}$	

Διαιρέτης του σταθερού όρου δοκιμάζουμε το ±1, ±2, ±3, ±4 και ±12. (όλους τους διαιρέτες του −12.

Στον πρώτο για τον οποίο αυτό είναι μηδέν, σταματώ να ψάχνω

Εδώ δε βγήκε μηδέν, οπότε συνεχίζω να ψάχνω.

1	3	−4	−12	p = −1
	−1	−2	6	
1	2	−6	$\boxed{-6}$	

Πάλι δε βγήκε

1	3	−4	−12	p = 2
	2	10	12	
1	5	6	$\boxed{0}$	

ΤΕΛΕΙΑ!!

Τότε το πολυώνυμο παραγοντοποιείται ως εξής:

$P(x) = (x-p)\,\Pi(x)$, όπου οι συντελεστές του $\Pi(x)$ είναι οι αριθμοί στην τελευταία γραμμή. Δηλαδή:

$$P(x) = \underbrace{(x-2)}_{x-p}\underbrace{(x^2+5x+6)}_{1 \quad 5 \quad 6}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ:

ΑΝ ΜΕ ΚΑΝΕΝΑ ΔΙΑΙΡΕΤΗ ΤΟΥ ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΟΡΟΥ ΔΕΝ ΔΕΝ ΠΑΙΡΝΟΥΜΕ ΜΗΔΕΝ, ΤΟΤΕ ΤΟ ΣΧΗΜΑ HORNER ΔΕ ΛΕΙΤΟΥΡΓΕΙ.

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

1. Ανισώσεις $1^{ου}$ βαθμού.

$\boxed{\text{Παράδειγμα:}}$ Να λυθεί η ανίσωση $3(x+1) \leq 4 + 2(x-5)$

Λύση:

$$3(x+1) \leq 4 + 5(x-5) \Leftrightarrow 3x+3 \leq 4 + 5x - 25 \Leftrightarrow$$

$$3x - 5x \leq -3 + 4 - 25 \Leftrightarrow -2x \leq -24 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\cancel{-}2x}{\cancel{-}2} \geq \frac{-24}{-2} \Leftrightarrow x \geq 12$$

Επειδή διαιρέσαμε με αρνητικό, η φορά της ανισότητας άλλαξε.

2. Ανισώσεις $2^{ου}$ βαθμού

$\boxed{\text{Παράδειγμα 1:}}$ Να λυθεί η ανίσωση $x^2 - 5x + 6 \leq 0$

<u>Λύση</u>: Οι ανισώσεις $2^{ου}$ βαθμού λύνονται σε δύο βήματα: πρώτα βρίσκουμε τις ρίζες (διακρίνουσα κλπ) και μετά κάνουμε πίνακα προσήμων.

Έχουμε λοιπόν: $x^2 - 5x + 6 = 0$. $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 25 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$.

άρα οι ρίζες είναι οι $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$

και τώρα κάνουμε τον πίνακα προσήμου:

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$x^2 - 5x + 6$		$+$	ϕ	$-$	ϕ	$+$	

"Ανάμεσα στις ρίζες το τριώνυμο είναι ετερόσημο του α."

Άρα $x^2 - 5x + 6 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [2, 3]$.

$\boxed{\text{Παράδειγμα 2:}}$ Να λυθεί η ανίσωση $x^2-4x+4 \leq 0$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 16 - 4 \cdot 4 = 0$ άρα η ρίζα (διπλή) είναι η $x = \frac{-\beta}{2\alpha} = \frac{4}{4} = 1$

	$-\infty$		1		$+\infty$
x^2-4x+4		$+$	ϕ	$+$	

εδώ είναι παντού $+$ γιατί δεν υπάρχει διάστημα ανάμεσα σε ρίζες· άρα είναι παντού ομόσημο του α.

Επομένως η ανίσωση $x^2-4x+4 \leq 0$ έχει ως λύση μόνο το $x=1$.

$\boxed{\text{Παράδειγμα 3}}$ Να λυθεί η ανίσωση $x^2-5x+7 > 0$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 25 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = 25 - 28 < 0$

	$-\infty$		$+\infty$
x^2-5x+7		$+$	

Άρα η λύση της ανίσωσης $x^2-5x+7>0$ είναι όλο το $\mathbb{R}$.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΑΝΑΓΟΝΤΑΙ ΣΕ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ

Α ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ

Παράδειγμα :

Να λυθεί η εξίσωση :

$$\frac{1}{x+2} - \frac{3x-10}{x^2-4} = 2x - \frac{x-3}{x-2}$$

1ον Παραγοντοποιώ τους παρονομαστές :

$x+2 \longrightarrow$ ok!

$x^2-4 \longrightarrow x^2-2^2 = (x-2)(x+2)$

$x-2 \longrightarrow$ ok!

2ον Βρίσκω ΕΚΠ παρονομαστών :

(Το γινόμενο όλων των παραγόντων με το μεγαλύτερο εκθέτη)

$$\text{ΕΚΠ}\big(x+2, (x-2)(x+2), x-2\big) = (x-2)(x+2).$$

3ον Περιορισμούς για τους παρονομαστές :

$(x-2)(x+2) \neq 0 \Leftrightarrow x-2 \neq 0$ και $x+2 \neq 0 \Leftrightarrow$

$x \neq 2$ και $x=-2$

4ον Πολλαπλασιάζω όλους τους όρους με το ΕΚΠ :

(για να κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών)

$$(x-2)\cancel{(x+2)}\frac{1}{\cancel{x+2}} - \cancel{(x-2)}\cancel{(x+2)}\frac{3x-10}{\cancel{(x-2)}\cancel{(x+2)}} = (x-2)(x+2)\cdot 2x - \cancel{(x-2)}(x+2)\frac{x-3}{\cancel{x-2}}$$

$$\Leftrightarrow x-2-(3x-10)=(x^2-4)2x-(x+2)(x-3)$$

$$\Leftrightarrow x-2-3x+10=2x^3-8x-(x^2-3x+2x-6)$$

$$\Leftrightarrow x-2-3x+10=2x^3-8x-x^2+3x-2x+6$$

$$\Leftrightarrow 2x^3-x^2-5x-2=0$$ ανάχθηκε σε πολυωνυμική!

Τώρα... για να τη λύσω πρέπει να δω αν κάποιος από τους διαιρέτες του σταθερού όρου είναι λύση... Δοκιμάζω τους $\{\pm1, \pm2\}$

$$\begin{array}{c|c|c|c|l} 2 & -1 & -5 & -2 & p=1 \\ & 2 & 1 & -4 & \\ 2 & 1 & -4 & \cancel{-6} & \end{array} \qquad \begin{array}{cccc|l} 2 & -1 & -5 & -2 & p=-1 \\ & -1 & 2 & 3 & \\ 2 & -2 & -3 & \cancel{1} & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|l} 2 & -1 & -5 & -2 & p=2 \\ & 4 & 6 & 2 & \\ 2 & 3 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

Η εξίσωση γίνεται τότε:

$$2x^3-x^2-5x-2=0 \Leftrightarrow$$

$$(x-2)(2x^2+3x+1)=0$$

Οπότε βρίσκω τις λύσεις εύκολα: $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$

$\Delta = 9-4\cdot2\cdot1=1$, $x_{1,2}=\dfrac{-3\pm1}{4}$ → $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=-1$

5ον Ελέγχω αν κάποιες λύσεις απορρίπτονται λόγω περιορισμών

Εδώ απορρίπτεται η λύση $x=2$.

Κλασματική Ανίσωση

Στην περίπτωση που έχουμε αντί για εξίσωση, κάποια ανίσωση της μορφής

$$\frac{A(x)}{B(x)} \gtrless 0 \quad ή \quad \frac{A(x)}{B(x)} \gtreqless 0$$

Παράδειγμα:

$$2x^2+\frac{5x^2}{x-3}+\frac{6}{x}\leq\frac{7x^2-18}{x^2-3x}$$

$\boxed{\text{ΠΡΟΣΟΧΗ!!}}$

ΣΤΙΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΝ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΖΟΥΜΕ ΜΕ ΕΚΠ ΩΣΤΕ ΝΑ ΑΠΑΛΟΙΦΟΥΝ ΟΙ ΠΑΡΟΝΟΜΑΣΤΕΣ ΑΛΛΑ ΤΑ ΦΕΡΝΟΥΜΕ ΟΛΑ ΣΤΟ 1ο ΜΕΛΟΣ ΚΑΙ ΚΑΝΟΥΜΕ ΟΜΩΝΥΜΑ.

$$2x^2+\frac{5x^2}{x-3}+\frac{6}{x}-\frac{7x^2-18}{x^2-3x}\leq 0$$

$$\text{ΕΚΠ}\left(x-3,x,x(x-3)\right)=x(x-3)$$

$$\overbrace{2x^2}^{x(x-3)}+\overbrace{\frac{5x^2}{x-3}}^{x}+\overbrace{\frac{6}{x}}^{x-3}-\overbrace{\frac{7x^2-18}{x^2-3x}}^{1}\leq 0\Leftrightarrow\frac{2x^2\cdot x(x-3)+5x^3+6(x-3)-(7x^2-18)}{x(x-3)}\leq 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{2x^3(x-3)+5x^3+6x-18-7x^2+18}{x(x-3)}\leq 0\Leftrightarrow\frac{2x^4-6x^3+5x^3+6x-\cancel{18}-7x^2+\cancel{18}}{x(x-3)}\leq 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{2x^4-x^3-7x^2+6x}{x(x-3)}\leq 0$$

Θα πρέπει $x(x-3)\neq 0$ δηλαδή $x\neq 0$ και $x-3\neq 0\Leftrightarrow x\neq 0$ και $x\neq 3$

$$\Leftrightarrow\frac{\cancel{x}(2x^3-x^2-7x+6)}{\cancel{x}(x-3)}\leq 0\Leftrightarrow(x-3)(2x^3-x^2-7x+6)\leq 0$$

, επειδή βλέπω ότι έχουμε $3^{ου}$ βαθμού πολυώνυμο, θα προσπαθήσω να κάνω Horner για να το παραγοντοποιήσω.

2	-1	-7	6	ρ=1
	2	1	-6	
2	1	-6	$\boxed{0}$	

Άρα η ανίσωση γίνεται:

$$(x-3)(x-1)(2x^2+x-6)\leq 0$$

Βρίσκω τις ρίζες:

$x-3=0\Leftrightarrow x=3$ $\quad x-1=0\Leftrightarrow x=1$ $\quad 2x^2+x-6=0$, $\Delta=1-4\cdot 2\cdot(-6)=49$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 7}{4} \begin{cases} \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ \frac{-8}{4} = -2 \end{cases}$$

και τώρα κάνω πίνακα προσήμων :

	$-\infty$		-2		1		$3/2$		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$2x^2-x-6$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Γ		$+$	0	$-$		$+$	0	$-$		$+$	

ΠΡΟΣΟΧΗ!
Θυμάμαι τους περιορισμούς

$x \neq 0 , 3$ άρα : $x \in [-2,0) \cup (0,1] \cup [\frac{3}{2}, 3)$

(B) ΆΡΡΗΤΗ ΜΕ ΕΝΑ ΡΙΖΙΚΟ:

Παράδειγμα:

$\sqrt{x+2} + x = 4$

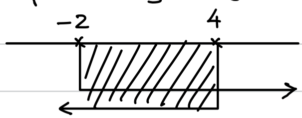
1ον περιορισμούς

$x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$

2ον ΑΠΟΜΟΝΩΝΩ ΤΟ ΡΙΖΙΚΟ (ΚΙ ΑΛΛΟΣ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ)

$\sqrt{x+2} = 4-x$. Επειδή η ρίζα είναι μη αρνητική, θα πρέπει $4-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 4$

Συναληθεύοντας τους δυο περιορισμούς προκύπτει:



$x \in [-2, 4]$.

3ον Διώχνω τη ρίζα, υψώνοντας στο τετράγωνο και τα δύο μέλη φυσικά!

$(\sqrt{x+2})^2 = (4-x)^2 \Leftrightarrow x+2 = 16-8x+x^2 \Leftrightarrow$

$x^2-8x-x+16-2=0 \Leftrightarrow x^2-9x+14=0$

$\Delta = 81-4\cdot1\cdot14 = 81-56 = 25$

$x_{1,2} = \dfrac{9\pm5}{2} \begin{cases} x_1 = 7 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

όμως η λύση $x_1 = 7$ απορρίπτεται λόγω περιορισμών.

άρα η λύση της εξίσωσης είναι η $x=2$

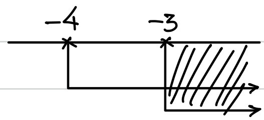
Γ ΑΡΡΗΤΗ ΜΕ ΔΥΟ ΡΙΖΙΚΑ

Παράδειγμα:

$\sqrt{2x+6} - \sqrt{x+4} = 1$

1ον ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ

$$\left.\begin{aligned} &2x+6 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq -6 \Leftrightarrow x \geq -3 \\ &x+4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -4 \end{aligned}\right\}$$



άρα $\boxed{x \geq -3}$

2ον ΑΠΟΜΟΝΩΝΟΥΜΕ ΤΑ ΡΙΖΙΚΑ

$$\sqrt{2x+6} = 1 + \sqrt{x+4} \Leftrightarrow \left(\sqrt{2x+6}\right)^2 = \left(1+\sqrt{x+4}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$2x+6 = 1 + x+4 + 2\sqrt{x+4} \Leftrightarrow x+1 = 2\sqrt{x+4} \Leftrightarrow (x+1)^2 = \left(2\sqrt{x+4}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x+1 = 4(x+4) \Leftrightarrow x^2+2x+1 = 4x+16 \Leftrightarrow x^2-2x-15=0$$

$\Delta = 4 - 4 \cdot 1 \cdot (-15) = 64$, $x_{1,2} = \dfrac{2 \pm 8}{2}$ → $x_1 = 5$, $x_2 = -3$

3ον Θυμάμαι περιορισμούς

Εδώ συγκεκριμένα η $x_2 = -3$ δεν είναι ρίζα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^3 - (\alpha+1)x^2 + (\alpha-1)x + 2$$

το οποίο έχει παράγοντα το $x-2$.

(i) Να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$

(ii) Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x+3$

(iii) Να λύσετε την ανίσωση

$$P(x) \leq 17x + 14$$

Λύση:

(i) Αφού το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-2$, αυτό σημαίνει ότι $P(2)=0$ (το 2 είναι ρίζα του πολυωνύμου δηλαδή)

οπότε $2^3 - (\alpha+1)2^2 + (\alpha-1)2 + 2 = 0 \Leftrightarrow$

$8 - (\alpha+1)\cdot 4 + (\alpha-1)2 + 2 = 0 \Leftrightarrow$

$8 - 4\alpha - 4 + 2\alpha \cancel{-2} \cancel{+2} = 0 \Leftrightarrow$

$4 - 2\alpha = 0 \Leftrightarrow 2\alpha = 4 \Leftrightarrow \alpha = 2$

(ii) Για $\alpha=2$ το $P(x)$ γίνεται

$$P(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2$$

οπότε κάνουμε τη διαίρεση με το $x+3$:

$$\begin{array}{r|l}
\cancel{x^3} - 3x^2 + x + 2 & x+3 \\
\cancel{-x^3} - 3x^2 & x^2 - 6x + 19 \\
\hline
\cancel{-6x^2} + x + 2 & \\
\cancel{+6x^2} + 18x & \\
\hline
\cancel{19x} + 2 & \\
\cancel{-19x} - 57 & \\
\hline
-55 &
\end{array}$$

οπότε η ταυτότητα της διαίρεσης δίνει: $(\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon)$

$$x^3 - 3x^2 + x + 2 = (x+3)(x^2 - 6x + 19) - 55$$

(iii) $P(x) \leq 17x+14 \Leftrightarrow x^3-3x^2+x+2 \leq 17x+14$ τα φέρνω όλα στο 1º μέλος για να πάρω μια πολυωνυμική ανίσωση

$x^3-3x^2+x+2-17x-14 \leq 0 \Leftrightarrow$

$x^3-3x^2-16x-12 \leq 0$. Για να τη λύσω θα πρέπει να παραγοντοποιήσω το πολυώνυμο αριστερά.

Δοκιμάζω ανάμεσα στους διαιρέτες του σταθερού όρου... ποιος απ' αυτούς είναι ρίζα:

1	−3	−16	−12	ρ = −1
	−1	4	12	
1	−4	−12	$\boxed{0}$	

Άρα το πολυώνυμο παραγοντοποιείται ως εξής:

$x^3-3x^2-16x-12 = (x+1)(x^2-4x-12)$ οπότε έχουμε να λύσουμε την $(x+1)(x^2-4x-12) \leq 0$

Βρίσκω πρώτα τις ρίζες κάθε παράγοντα:

$x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$.

$x^2-4x-12=0$ $\quad \Delta = 4^2-4\cdot1\cdot(-12) = 16+48 = 64$

$$x_{1,2} = \frac{4\pm\sqrt{64}}{2} = \frac{4\pm8}{2} = \begin{cases} \frac{12}{2} = 6 \\ \frac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$

και τώρα κατασκευάζω τον πίνακα προσήμων:

	$-\infty$	-2		-1		6	$+\infty$
$x+1$	−		−	0	+		+
$x^2-4x-12$	+	0	−		−	0	+
Γιν.	−	0	+	0	−	0	+

Άρα η λύση είναι $x \in (-\infty,-2] \cup [-1,6]$

2. Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^4 - x^3 + kx^2 + x + \lambda \quad \text{με} \quad k, \lambda \in \mathbb{R}.$$

(α) Να βρείτε τις τιμές των k και λ όταν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα το 1 και παράγοντα το $x+2$.

(β) Για $k=-7$ και $\lambda = 6$ να λύσετε την εξίσωση

$$P(x) = 0$$

(γ) Για $k=-7$ και $\lambda=6$ να λύσετε την ανίσωση:

$$\frac{P(x)}{x-5} \geqslant 0$$

<u>Λύση</u>:

(α) Το πολυώνυμο έχει ρίζα το 1 οπότε

$P(1)=0 \Leftrightarrow \cancel{1^4} - \cancel{1^3} + k\cdot 1^2 + 1 + \lambda = 0 \Leftrightarrow k+\lambda = -1.$ ①

Το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $x+2$ άρα

$P(-2)=0 \Leftrightarrow (-2)^4 - (-2)^3 + k(-2)^2 + (-2) + \lambda = 0 \Leftrightarrow$

$16 - (-8) + 4k - 2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow$

$16+8+4k-2+\lambda=0 \Leftrightarrow 4k+\lambda = -22$ ②

Λύνω το σύστημα των ① και ②:

② − ① $\Leftrightarrow$ $4k+\lambda-k-\lambda = -22+1 \Leftrightarrow 3k = -21 \Leftrightarrow k=-7$

Άρα ① $\overset{k=-7}{\Leftrightarrow}$ $-7+\lambda = -1 \Leftrightarrow \lambda = 7-1 \Leftrightarrow \lambda = 6$

(β) Για $k=-7$ και $\lambda=6$ το $P(x)$ γίνεται:

$$P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$$

$P(x)=0 \Leftrightarrow x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = 0$

Ξέρω ότι το $P(x)$ έχει ρίζα το 1 άρα κάνω HORNER με $\rho=1$

1	−1	−7	1	6	$\rho=1$
	1	0	−7	−6	
1	0	−7	−6	$\boxed{0}$	

$x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 =$

$(x-1)(x^3 - 7x - 6)$

Και τώρα κάνω HORNER στο x^3-7x-6 με $p=-2$ γιατί ξέρω ότι το $x+2$ είναι παράγοντας του $P(x)$ οπότε πρέπει να περιλαμβάνεται στην παραγοντοποίηση. οπότε :

1	0	−7	−6	$p=-2$
	−2	4	6	
1	−2	−3	$\boxed{0}$	

$$P(x)=(x-1)\underbrace{(x+2)(x^2-2x-3)}_{\text{αυτό είναι η νέα παραγοντοποίηση.}}$$

Οπότε η εξίσωση γίνεται: $(x-1)(x+2)(x^2-2x-3)=0 \Leftrightarrow$

$$\left(x-1=0 \text{ ή } x+2=0 \text{ ή } x^2-2x-3=0\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(x=1 \text{ ή } x=2 \text{ ή } x^2-2x-3=0\right)$$

$$\Delta = 2^2-4\cdot 1\cdot(-3) = 4+12=16$$

$$x_{1,2} = \frac{2\pm 4}{2} \begin{cases} \frac{6}{2}=3 \\ \frac{-2}{2}=-1 \end{cases}$$

Οπότε οι λύσεις της $P(x)=0$ είναι οι $x=1$, $x=2$, $x=3$, $x=-1$.

το πήρα απο πάνω (έχει ρίζες το 3 και το −1)

(γ) $\frac{P(x)}{x-5} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+2)(x+1)(x-3)}{x-5} \geq 0$ $x-5\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 5$

$$(x-1)(x+2)(x+1)(x-3)(x-5)\geq 0$$

	−∞		−2		−1		1		3		5		+∞
x−1		−		−		−	0	+		+		+	
x+2		−	0	+		+		+		+		+	
x+1		−		−	0	+		+		+		+	
x−3		−		−		−		−	0	+		+	
x−5		−		−		−		−		−	0	+	
Γ		−	0	+	0	−	0	+	0	−	0	+	

Άρα

$x \in [-2,-1]\cup[1,3]$
$\cup(5,+\infty)$