Άλγεβρα Β' Λυκείου

4.3 Πολυωνυμικές Εξισώσεις και Ανισώσεις

Πολυωνυμικές Εξισώσεις

Πολυωνυμικές εξισώσεις

$$2x + 1 = 0 \longrightarrow$$

Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους και διαιρούμε με το συντελεστή του αγνώστου.

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \longrightarrow$$

Διακρίνουσα και μετά έτοιμος τύπος που δίνει τη λύση.

$$\left.\begin{array}{r} x^3 + 2x^2 - 3x + 3 = 0 \\ 2x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 5x + 1 = 0 \end{array}\right\} \longrightarrow$$

Η θεωρητική άλγεβρα στο Πανεπιστήμιο θα δώσει τις απαντήσεις, όπως και το ότι δεν μπορεί να κατασκευαστεί τύπος για τις εξισώσεις μεγαλύτερες του τετάρτου βαθμού.

Πολυωνυμικές εξισώσεις

Θα λύνουμε εξισώσεις τρίτου βαθμού και πάνω, εφαρμόζοντας μία βασική ιδέα...

$$P(x) = 0$$

$$p_1(x) \cdot p_2(x) \cdot p_3(x) = 0$$ Παραγοντοποίηση του πολυωνύμου που μας δίνεται (φυσικά μπορεί να έχει και παραπάνω παράγοντες)

$$p_1(x) = 0 \;\; ή \;\; p_2(x) = 0 \;\; ή \;\; p_3(x) = 0$$

Δηλαδή “σπάμε” το πολυώνυμο σε παράγοντες κι έτσι λύνουμε εξισώσεις μικρότερου βαθμού από το αρχικό πολυώνυμο.

Πολυωνυμικές εξισώσεις

Για παράδειγμα, ας λύσουμε την εξίσωση $x^3 - 3x + 2 = 0$. Αυτή γράφεται:

$$
\begin{aligned}
x^3 - 3x + 2 = 0 &\Leftrightarrow x^3 - x - 2x + 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow x(x^2 - 1) - 2(x - 1) = 0 \\
&\Leftrightarrow (x - 1)[x(x + 1) - 2] = 0 \\
&\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x - 2) = 0 \\
&\Leftrightarrow x - 1 = 0 \quad \text{ή} \quad x^2 + x - 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow x = 1 \quad \text{ή} \quad x = -2
\end{aligned}
$$

Παραγοντοποίηση πολυωνύμου με σχήμα Horner

1. Αναζητούμε μία ρίζα του πολυωνύμου (δηλ $P(\rho) = 0$) στους διαιρέτες του σταθερού όρου. Έστω ότι τη βρίσκουμε και είναι η ρ
2. Κάνουμε Horner με το $x - \rho$
3. Αν το πηλίκο είναι τρίτου βαθμού και πάνω, επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία.

Παράδειγμα

$x^3 - 3x^2 + x + 2 = 0$ Διαιρέτες του 2 είναι τα $\pm 1, \pm 2$

Δοκιμάζουμε το 1

1	-3	1	2	ρ=1
	1	-2	-1	
1	-2	-1	$\boxed{1}$	

δεν είναι μηδέν,
άρα δεν είναι ρίζα

Παραγοντοποίηση πολυωνύμου με σχήμα Horner

1. Αναζητούμε μία ρίζα του πολυωνύμου (δηλ $P(\rho)=0$) στους διαιρέτες του σταθερού όρου. Έστω ότι τη βρίσκουμε και είναι η ρ
2. Κάνουμε Horner με το $x-\rho$
3. Αν το πηλίκο είναι τρίτου βαθμού και πάνω, επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία.

Παράδειγμα

$x^3-3x^2+x+2=0$ Διαιρέτες του 2 είναι τα $\pm 1, \pm 2$

Δοκιμάζουμε το -1

1	-3	1	2	ρ= -1
	-1	4	-5	
1	-4	5	$\boxed{-3}$	

δεν είναι μηδέν,
άρα δεν είναι ρίζα

Παραγοντοποίηση πολυωνύμου με σχήμα Horner

1. Αναζητούμε μία ρίζα του πολυωνύμου (δηλ $P(\rho) = 0$) στους διαιρέτες του σταθερού όρου. Έστω ότι τη βρίσκουμε και είναι η ρ
2. Κάνουμε Horner με το $x - \rho$
3. Αν το πηλίκο είναι τρίτου βαθμού και πάνω, επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία.

Παράδειγμα

$x^3 - 3x^2 + x + 2 = 0$ Διαιρέτες του 2 είναι τα $\pm 1, \pm 2$

Δοκιμάζουμε το 2

1	-3	1	2	ρ=2
	2	-2	-2	
1	-1	-1	$\boxed{0}$	

επιτέλους!

άρα έχει παράγοντα το $(x - 2)$

Παραγοντοποίηση πολυωνύμου με σχήμα Horner

1. Αναζητούμε μία ρίζα του πολυωνύμου (δηλ $P(\rho) = 0$) στους διαιρέτες του σταθερού όρου. Έστω ότι τη βρίσκουμε και είναι η ρ
2. Κάνουμε Horner με το $x - \rho$
3. Αν το πηλίκο είναι τρίτου βαθμού και πάνω, επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία.

Παράδειγμα

$$x^3 - 3x^2 + x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2 - x - 1) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \ \text{ή} \ x^2 - x - 1 = 0$$

οπότε εκεί που είχαμε ένα πολυώνυμο 3ου βαθμού, τώρα έχουμε δύο πολυώνυμα, το ένα 1ου βαθμού και το άλλο 2ου βαθμού.

- $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$
- $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 5 \qquad x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Παραγοντοποίηση πολυωνύμου με σχήμα Horner

Παράδειγμα

$x^4+5x^3+9x^2+8x+4=0$ οι διαιρέτες του σταθερού όρου είναι οι $\pm1, \pm2, \pm4$, αλλά αποκλείεται να έχει θετική ρίζα γιατί τότε θα είχαμε έναν θετικό αριθμό αριστερά ίσο με μηδέν! Οπότε η ρίζα θα είναι αρνητική σίγουρα.

Δοκιμάζουμε το -1

1	5	9	8	4	ρ= -1
	-1	-4	-5	-3	
1	4	5	3	$\boxed{1}$	

Δοκιμάζουμε το -2

1	5	9	8	4	ρ= -2
	-2	-6	-6	-4	
1	3	3	2	$\boxed{0}$	✓

$$x^4+5x^3+9x^2+8x+4=0 \Leftrightarrow (x-2)(x^3+3x^2+3x+2)=0$$

Παραγοντοποίηση πολυωνύμου με σχήμα Horner

Παράδειγμα

$$x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 8x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x^3+3x^2+3x+2) = 0$$

3ου βαθμού! Δεν μπορούμε να βρούμε τις ρίζες, θέλει παραγοντοποίηση

Δοκιμάζουμε το -2

1	3	3	2	ρ= -2
	-2	-2	-2	
1	1	1	$\boxed{0}$	✓

$$(x+2)(x^3+3x^2+3x+2) = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x+2)(x^2+x+1) = 0$$

$x = -2$

$x = -2$

$\Delta < 0$

δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$

Ασκήσεις στην επίλυση εξισώσεων με παραγοντοποίηση

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις.

i) $5x^4 = 6x^2$

ii) $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$

iii) $3x^5 + 5x^4 = 3x^3 + 5x^2$

iv) $x^6 - 64 = 0$

v) $x^3 + x^2 - 2 = 0$

vi) $x^3 - 7x + 6 = 0$

vii) $(x+1)^3 + 1 = 0$

viii) $7(3x+2)^2(1-x)^2 - (3x+2)(1-x)^3 = 0$

ix) $x^3 + 8 = 7(x^2 + 5x + 6) + 9x^2 - 36$

x) $x^4 - 3x^3 + 6x - 4 = 0$

i) $5x^4 = 6x^2 \Leftrightarrow 5x^4 - 6x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(5x^2 - 6) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = 0$ ή $5x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x^2 = \frac{6}{5} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{6}{5}}$

ii) $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0 \Leftrightarrow x^2(x+2) - 9(x+2) = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x^2-9) = 0$

$\Leftrightarrow x + 2 = 0$ ή $x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ ή $(x-3)(x+3) = 0$

$\Leftrightarrow x = -2$ ή $x = 3$ ή $x = -3$.

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις.

i) $5x^4 = 6x^2$ **ii)** $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$

iii) $3x^5 + 5x^4 = 3x^3 + 5x^2$ **iv)** $x^6 - 64 = 0$

v) $x^3 + x^2 - 2 = 0$ **vi)** $x^3 - 7x + 6 = 0$

vii) $(x+1)^3 + 1 = 0$ **viii)** $7(3x+2)^2(1-x)^2 - (3x+2)(1-x)^3 = 0$

ix) $x^3 + 8 = 7(x^2 + 5x + 6) + 9x^2 - 36$ **x)** $x^4 - 3x^3 + 6x - 4 = 0$

iii) $3x^5+5x^4=3x^3+5x^2 \Leftrightarrow 3x^5+5x^4-3x^3-5x^2=0 \Leftrightarrow x^2(3x^3+5x^2-3x-5)=0$

$\Leftrightarrow x^2\left[3x(x^2-1)+5(x^2-1)\right]=0 \Leftrightarrow x^2(x^2-1)(3x+5)=0$

$\Leftrightarrow x^2=0$ ή $x^2-1=0$ ή $3x+5=0$

$\Leftrightarrow x=0$ ή $x=\pm 1$ ή $x=-\dfrac{5}{3}$.

iv) $x^6-64=0 \Leftrightarrow x^6-2^6=0 \Leftrightarrow (x^3)^2-(2^3)^2=0 \Leftrightarrow (x^3-2^3)(x^3+2^3)=0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x^2+2x+4)(x+2)(x^2-2x+4)=0 \Leftrightarrow x=2$ ή $x=-2$

τα τριώνυμα δεν έχουν ρίζες… $(\Delta=-12)$

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις.

i) $5x^4 = 6x^2$

ii) $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$

iii) $3x^5 + 5x^4 = 3x^3 + 5x^2$

iv) $x^6 - 64 = 0$

v) $x^3 + x^2 - 2 = 0$

vi) $x^3 - 7x + 6 = 0$

vii) $(x+1)^3 + 1 = 0$

viii) $7(3x+2)^2(1-x)^2 - (3x+2)(1-x)^3 = 0$

ix) $x^3 + 8 = 7(x^2 + 5x + 6) + 9x^2 - 36$

x) $x^4 - 3x^3 + 6x - 4 = 0$

v) $x^3+x^2-2=0 \Leftrightarrow x^3+x^2-1-1=0 \Leftrightarrow x^3-1+x^2-1=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+1)+(x-1)(x+1)=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+1+x+1)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+2x+2)=0$

$\Leftrightarrow x=1$ ή $x^2+2x+2=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x^2+2x+1+1=0$

$\Leftrightarrow x=1$ ή $(x+1)^2+1=0$ → αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

άρα $x=1$

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις.

i) $5x^4 = 6x^2$

ii) $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$

iii) $3x^5 + 5x^4 = 3x^3 + 5x^2$

iv) $x^6 - 64 = 0$

v) $x^3 + x^2 - 2 = 0$

vi) $x^3 - 7x + 6 = 0$

vii) $(x+1)^3 + 1 = 0$

viii) $7(3x+2)^2(1-x)^2 - (3x+2)(1-x)^3 = 0$

ix) $x^3 + 8 = 7(x^2 + 5x + 6) + 9x^2 - 36$

x) $x^4 - 3x^3 + 6x - 4 = 0$

vi) $x^3 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 6x - x + 6 = 0 \Leftrightarrow x(x^2-1) - 6(x-1) = 0$

$\Leftrightarrow x(x-1)(x+1) - 6(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)\left[x(x+1) - 6\right] = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-6) = 0 \Leftrightarrow x-1=0$ ή $x^2+x-6=0 \Leftrightarrow x=1$

$\Delta = 1 - 4\cdot(-6) = 25 \quad x = \dfrac{-1 \pm 5}{2} \to 2,\ -3$

vii) $(x+1)^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^3 = -1 \Leftrightarrow x+1 = -1 \Leftrightarrow x = -2$

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις.

i) $5x^4 = 6x^2$

ii) $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$

iii) $3x^5 + 5x^4 = 3x^3 + 5x^2$

iv) $x^6 - 64 = 0$

v) $x^3 + x^2 - 2 = 0$

vi) $x^3 - 7x + 6 = 0$

vii) $(x+1)^3 + 1 = 0$

viii) $7(3x+2)^2(1-x)^2 - (3x+2)(1-x)^3 = 0$

ix) $x^3 + 8 = 7(x^2 + 5x + 6) + 9x^2 - 36$

x) $x^4 - 3x^3 + 6x - 4 = 0$

viii) $7(3x+2)^2(1-x)^2 - (3x+2)(1-x)^3 = 0 \Leftrightarrow (3x+2)(1-x)^2 \cdot \left[7(3x+2) - (1-x)\right] = 0$

$\Leftrightarrow (3x+2)(1-x)^2(21x + 14 - 1 + x) = 0 \Leftrightarrow (3x+2)(1-x)^2(22x+13) = 0$

$\Leftrightarrow 3x+2 = 0$ ή $(1-x)^2 = 0$ ή $(22x+13) = 0$

$\Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$ ή $x = 1$ ή $x = -\frac{13}{22}$

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις.

i) $5x^4 = 6x^2$ **ii)** $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$

iii) $3x^5 + 5x^4 = 3x^3 + 5x^2$ **iv)** $x^6 - 64 = 0$

v) $x^3 + x^2 - 2 = 0$ **vi)** $x^3 - 7x + 6 = 0$

vii) $(x+1)^3 + 1 = 0$ **viii)** $7(3x+2)^2(1-x)^2 - (3x+2)(1-x)^3 = 0$

ix) $x^3 + 8 = 7(x^2 + 5x + 6) + 9x^2 - 36$ **x)** $x^4 - 3x^3 + 6x - 4 = 0$

ix) $x^3+8 = 7(x^2+5x+6)+9x^2-36 = 0 \Leftrightarrow x^3+8 = 7(x+2)(x+3)+9(x^2-4)=0$

$\Leftrightarrow x^3+2^3 = 7(x+2)(x+3)+9(x-2)(x+2)=0$

$\Leftrightarrow (x+2)(x^2-2x+4) = (x+2)\cdot\left[7(x+3)+9(x-2)\right]=0$

$\Leftrightarrow (x+2)\cdot\left[x^2-2x+4-(7x+21+9x-18)\right]=0$

$\Leftrightarrow (x+2)(x^2-2x+4-16x-3)=0 \Leftrightarrow (x+2)(x^2-18x+1)=0$

$\Delta = 18^2-4\cdot1\cdot1 = 324-4 = 320 = 2\cdot160$

$x_{1,2} = \dfrac{18\pm\sqrt{320}}{2} = \dfrac{18\pm\sqrt{64\cdot5}}{2} = \dfrac{18\pm8\sqrt{5}}{2}$ → $9+4\sqrt{5}$, $9-4\sqrt{5}$

άρα ρίζες $x=-2$

$x=9+4\sqrt{5}$, $x=9-4\sqrt{5}$.

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις.

i) $5x^4 = 6x^2$ **ii)** $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$

iii) $3x^5 + 5x^4 = 3x^3 + 5x^2$ **iv)** $x^6 - 64 = 0$

v) $x^3 + x^2 - 2 = 0$ **vi)** $x^3 - 7x + 6 = 0$

vii) $(x+1)^3 + 1 = 0$ **viii)** $7(3x+2)^2(1-x)^2 - (3x+2)(1-x)^3 = 0$

ix) $x^3 + 8 = 7(x^2 + 5x + 6) + 9x^2 - 36$ **x)** $x^4 - 3x^3 + 6x - 4 = 0$

x) $x^4 - 3x^3 + 6x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x^2)^2 - 2^2 - 3x(x^2-2) = 0 \Leftrightarrow (x^2-2)(x^2+2) - 3x(x^2-2) = 0$

$\Leftrightarrow (x^2-2)(x^2+2-3x) = 0 \Leftrightarrow (x^2-2)(x^2-3x+2) = 0$

$\Leftrightarrow x^2-2=0$ ή $x^2-3x+2=0$

$x = \pm\sqrt{2}$ ή $x = \dfrac{3 \pm 1}{2}$ → 2, → 1

2. Να βρείτε τις ακέραιες ρίζες των εξισώσεων

i) $x^3 - 3x^2 + x + 2 = 0$ **ii)** $3x^3 + 8x^2 - 15x + 4 = 0$

iii) $x^3 - 10x - 12 = 0$ **iv)** $x^3 + 2x^2 + 7x + 6 = 0$

i) $x^3 - 3x^2 + x + 2 = 0$

Αναζητώ μια ρίζα ανάμεσα στους διαιρέτες του σταθερού όρου: τους $\{\pm 1, \pm 2\}$. Το $\rho = 2$ είναι ρίζα αφού

$$2^3 - 3 \cdot 2^2 + 2 + 2 = 8 - 12 + 4 = 0$$

Κάνουμε σχήμα Horner:

$$\left.\begin{array}{cccc|l} 1 & -3 & 1 & 2 & \rho = 2 \\ & 2 & -2 & -2 & \\ 1 & -1 & -1 & \boxed{0} & \end{array}\right\}$$

Άρα η εξίσωση γίνεται:

$$(x^2 - x - 1)(x - 2) = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1(-1) = 1 + 4 = 5$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad (\text{μη ακέραιες})$$

$$x - 2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = 2}$$

2. Να βρείτε τις ακέραιες ρίζες των εξισώσεων

i) $x^3 - 3x^2 + x + 2 = 0$ **ii)** $3x^3 + 8x^2 - 15x + 4 = 0$

iii) $x^3 - 10x - 12 = 0$ **iv)** $x^3 + 2x^2 + 7x + 6 = 0$

ii) $3x^3 + 8x^2 - 15x + 4 = 0$. Προφανής ρίζα το $\rho = 1$ άρα Horner

3	8	−15	4	$\rho = 1$
	3	11	−4	
3	11	−4	$\boxed{0}$	

$$3x^3 + 8x^2 - 15x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x^2 + 11x - 4)(x - 1) = 0$$

$$\downarrow$$

$$\Delta = 121 - 4 \cdot 3(-4) = 121 + 48$$

$$= 169 .$$

$$x_1, x_2 = \frac{-11 \pm 13}{6} \begin{cases} \frac{1}{3} \\ -4 \end{cases}$$

Άρα η εξίσωση έχει ως εξής :

$3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x + 4) \cdot (x - 1) = 0$ οπότε οι ακέραιες ρίζες είναι οι

$\boxed{x = -4}$ και $\boxed{x = 1}$

2. Να βρείτε τις ακέραιες ρίζες των εξισώσεων

i) $x^3-3x^2+x+2=0$ **ii)** $3x^3+8x^2-15x+4=0$

iii) $x^3-10x-12=0$ **iv)** $x^3+2x^2+7x+6=0$

iii) $x^3-10x-12=0$ Δοκιμάζω το $\rho=-2$ $(-2)^3-10\cdot(-2)-12=0$

άρα $\rho=-2$ ρίζα. Κάνω Horner με $\rho=-2$

$$\left.\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -10 & -12 & \rho=-2 \\ & -2 & 4 & 12 & \\ 1 & -2 & -6 & \boxed{0} & \end{array}\right\}$$

Άρα

$x^3-10x-12=(x+2)(x^2-2x-6)=0$

$\Leftrightarrow x+2=0$ ή $x^2-2x-6=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-2$ ή $x^2-2x-6=0$.

Λύνω την $x^2-2x-6=0$

$\Delta=4-4\cdot1\cdot(-6)=28$ $x_{1,2}=\dfrac{2\pm\sqrt{28}}{2}$ ..μη ακέραιες ρίζες

άρα η μόνη ακέραιη ρίζα είναι η $x=-2$.

2. Να βρείτε τις ακέραιες ρίζες των εξισώσεων

i) $x^3-3x^2+x+2=0$ **ii)** $3x^3+8x^2-15x+4=0$

iii) $x^3-10x-12=0$ **iv)** $x^3+2x^2+7x+6=0$

iv) $x^3+2x^2+7x+6=0$

Δοκιμάζω $\rho=-1$

$-1+2-7+6 = 8-8=0$ άρα ρίζα. οπότε κάνω

Horner με $\rho=-1$.

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 7 & 6 & \rho=-1 \\ & -1 & -1 & -6 & \\ 1 & 1 & 6 & \boxed{0} & \end{array}$$

Άρα η εξίσωση γράφεται:

$(x+1)\cdot(x^2+x+6)=0 \Leftrightarrow$

$x+1=0$ ή $x^2+x+6=0 \Leftrightarrow$

$x=-1$ ή $x^2+x+6=0$

Λύνω την $x^2+x+6=0$, $\Delta=1-4\cdot 6=-23<0$ άρα δεν έχει λύση στο $\mathbb{R}$.

Οπότε η μόνη ρίζα είναι η $\boxed{x=-1}$.

3. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις δεν έχουν ακέραιες ρίζες.

i) $x^4 + 3x - 2 = 0$ **ii)** $2x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 24x + 5 = 0$

i) Αν έχει ακέραια ρίζα, θα είναι διαιρέτης του σταθερού όρου. Επομένως ψάχνω για ρίζα ανάμεσα στα $\pm 1, \pm 2$.

$P(-1) = (-1)^4 + 3\cdot(-1) - 2 = 1 - 3 - 2 = -4 \neq 0$

$P(1) = 1 + 3 - 2 = 2 \neq 0$

$P(-2) = (-2)^4 + 3\cdot(-2) - 2 \neq 0$

$P(2) = 2^4 + 3\cdot 2 - 2 \neq 0$

3. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις δεν έχουν ακέραιες ρίζες.

i) $x^4 + 3x - 2 = 0$ **ii)** $2x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 24x + 5 = 0$

ii) Ομοίως ψάχνω ανάμεσα στα $\pm 1, \pm 5$.

$P(1) = 2 - 3 + 6 - 24 + 5 \neq 0$

$P(-1) = \dots \neq 0$

$P(5) = \dots \neq 0$

$P(-5) = \dots \neq 0$

7. Να βρείτε τα σημεία τομής του άξονα x'x και της γραφικής παράστασης καθεμίας από τις συναρτήσεις:

i) $f(x)=3x^3-3x^2-5x-2$ **ii)** $g(x)=4x^3-3x-1$

i) Ψάχνω τα x εκείνα για τα οποία $f(x)=0 \Leftrightarrow 3x^3-3x^2-5x-2=0$

Παρατηρώ ότι $f(2)=0$ άρα το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $p=2$.

Κάνουμε Horner:

$$\begin{array}{cccc|c} 3 & -3 & -5 & -2 & p=2 \\ & 6 & 6 & 2 & \\ 3 & 3 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

Άρα

$f(x)=(x-2)(3x^2+3x+1)$

$\Delta=9-4\cdot3\cdot1<0$

άρα δεν έχει ρίζες

Οπότε:

$f(x)=0 \Leftrightarrow 3x^3-3x^2-5x-2=0 \Leftrightarrow (x-2)(3x^2+3x+1)=0 \Leftrightarrow x-2=0$ ή $3x^2+3x+1=0$

οπότε $x=2$ η μοναδική ρίζα. άρα η f τέμνει τον x'x στο σημείο $(2,0)$.

7. Να βρείτε τα σημεία τομής του άξονα x'x και της γραφικής παράστασης καθεμίας από τις συναρτήσεις:

i) $f(x) = 3x^3 - 3x^2 - 5x - 2$ **ii)** $g(x) = 4x^3 - 3x - 1$

ii) $g(x) = 4x^3 - 3x - 1$

Παρατηρούμε ότι $g(1) = 0$. Άρα το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $x-1$. Κάνουμε Horner

4	0	−3	−1	$\rho = 1$
	4	4	1	
4	4	1	$\boxed{0}$	

Επομένως

$g(x) = (x-1)(4x^2 + 4x + 1)$

$\Delta = 16 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 0$

άρα

$g(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(4x^2 + 4x + 1) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0$ ή $4x^2 + 4x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ ή $(2x+1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -\frac{1}{2}$

9. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $x^8 - 15x^4 - 16 = 0$ **ii)** $(x-1)^6 - 9(x-1)^3 + 8 = 0$

iii) $6\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2 + 5\left(\dfrac{x}{x+1}\right) - 6 = 0$

i) $x^8 - 15x^4 - 16 = 0$ θέτω $x^4 = \omega$. Η εξίσωση γίνεται:

$\omega^2 - 15\omega - 16 = 0$ τριώνυμο!

$\Delta = 225 - 4 \cdot 1 \cdot (-16) = 225 + 64 = 289$

$\omega = \dfrac{15 \pm 17}{2}$ → 16, → -1

Άρα $\omega = 16 \Leftrightarrow x^4 = 16 \Leftrightarrow x^4 - 2^4 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2-4)(x^2+4) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$

(το x^2+4 δεν έχει ρίζα στο $\mathbb{R}$.)

επίσης $\omega = -1 \Leftrightarrow x^4 = -1$ αδύνατο στο $\mathbb{R}$

9. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $x^8 - 15x^4 - 16 = 0$ **ii)** $(x-1)^6 - 9(x-1)^3 + 8 = 0$

iii) $6\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + 5\left(\frac{x}{x+1}\right) - 6 = 0$

ii) $(x-1)^6 - 9(x-1)^3 + 8 = 0$. θέτω $(x-1)^3 = \omega$ και η εξίσωση γίνεται:

$\omega^2 - 9\omega + 8 = 0$, $\Delta = 81 - 4\cdot 1\cdot 8 = 81 - 32 = 49$

$\omega = \frac{9 \pm 7}{2}$ → $\omega = 8$, $\omega = 1$

- $\omega = 8 \Leftrightarrow (x-1)^3 = 8 \Leftrightarrow x-1 = 2 \Leftrightarrow x = 3$
- $\omega = 1 \Leftrightarrow (x-1)^3 = 1 \Leftrightarrow x-1 = 1 \Leftrightarrow x = 2$

9. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $x^8 - 15x^4 - 16 = 0$ **ii)** $(x-1)^6 - 9(x-1)^3 + 8 = 0$

iii) $6\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2 + 5\left(\dfrac{x}{x+1}\right) - 6 = 0$

iii) $6\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2 + 5\left(\dfrac{x}{x+1}\right) - 6 = 0$ θέτω $\dfrac{x}{x+1} = \omega$ με $x \neq -1$ και η εξισωση γίνεται:

$6\omega^2 + 5\omega - 6 = 0$ $\Delta = 25 - 4 \cdot 6 \cdot (-6) = 25 + 144 = 169$

$\omega = \dfrac{-5 \pm 13}{12}$ → $\omega = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3}$, $\omega = \dfrac{-18}{12} = -\dfrac{3}{2}$

• $\omega = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow 3x = 2(x+1) \Leftrightarrow 3x = 2x + 2 \Leftrightarrow x = 2$

• $\omega = -\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \dfrac{x}{x+1} = -\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow -2x = 3(x+1) \Leftrightarrow -2x = 3x + 3 \Leftrightarrow -5x = 3 \Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{5}$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\frac{1}{10}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{5}x-\frac{4}{5}=0$, ii) $x^3-\frac{5}{6}x^2-\frac{22}{3}x+\frac{5}{2}=0$

i) Κάνω απαλοιφή παρονομαστών πολλαπλασιάζοντας με 10. και η εξίσωση γίνεται:

$x^3+5x^2+2x-8=0$ και παρατηρώ ότι ανάμεσα στους διαιρέτες του σταθερού όρου $\pm1, \pm2, \pm4, \pm8$ το $\rho=1$ είναι ρίζα άρα κάνω Horner με $\rho=1$

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & 5 & 2 & -8 & \rho=1 \\ & 1 & 6 & 8 & \\ 1 & 6 & 8 & \boxed{0} & \end{array}$$

Άρα το πολυώνυμο γράφεται:

$(x-1)\cdot(x^2+6x+8)=0$

$\downarrow$

$\Delta=36-32=4$

$x=\frac{-6\pm2}{2}$ $\nearrow -2$, $\searrow -4$

Άρα οι ρίζες είναι το $x=1$, $x=-2$, $x=-4$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\frac{1}{10}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{5}x-\frac{4}{5}=0$, **ii)** $x^3-\frac{5}{6}x^2-\frac{22}{3}x+\frac{5}{2}=0$

ii) Κάνω απαλοιφή πολλαπλασιάζοντας με 6 και έχω:

$6x^3-5x^2-44x+15=0$ Αναζητώ ρίζες ανάμεσα στους διαιρέτες του σταθερού όρου, δηλαδή $\pm1, \pm3, \pm5, \pm15$

$$\begin{array}{cccc|c} 6 & -5 & -44 & 15 & \rho=3 \\ & 18 & 39 & -15 & \\ 6 & 13 & -5 & \boxed{0} & \end{array}$$

άρα το πολυώνυμο γράφεται:

$(x-3)(6x^2+13x-5)=0$

$\Leftrightarrow x-3=0$ ή $6x^2+13x-5=0$

$\Leftrightarrow x=3$ ή $6x^2+13x-5=0$

$\Delta = 169-4\cdot6(-5) = 169+120 = 289$ $x=\frac{-13\pm17}{6} \begin{cases} \frac{4}{6}=\frac{2}{3} \\ -5 \end{cases}$

άρα οι ρίζες είναι το $x=3$, $x=\frac{2}{3}$ και $x=-5$.

2. Να βρείτε για ποιες τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ το $P(x)=x^4+\alpha x^3+\beta x^2-16x-12$ έχει παράγοντες τους $x+1$ και $x-2$. Στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

Για να έχει παράγοντα το $x+1$ θα πρέπει το -1 να είναι ρίζα, οπότε:

$$P(-1)=0 \Leftrightarrow (-1)^4+\alpha(-1)^3+\beta(-1)^2-16\cdot(-1)-12=0 \Leftrightarrow 1-\alpha+\beta+16-12=0$$

$$\Leftrightarrow -\alpha+\beta=-5 \Leftrightarrow \alpha-\beta=5. \quad (1)$$

Ομοίως $P(2)=0 \Leftrightarrow 2^4+\alpha\cdot 2^3+\beta\cdot 2^2-16\cdot 2-12=0 \Leftrightarrow 16+8\alpha+4\beta-32-12=0$

$$\Leftrightarrow 8\alpha+4\beta=28 \overset{\div 4}{\Leftrightarrow} 2\alpha+\beta=7 \quad (2)$$

Προσθέτοντας τις (1) και (2) έχουμε: $3\alpha=12 \Leftrightarrow \alpha=4$ οπότε:

$$(1) \overset{(\alpha=4)}{\Longleftrightarrow} \beta=4-5 \Leftrightarrow \beta=-1$$

2. Να βρείτε για ποιες τιμές των $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ το $P(x)=x^4+\alpha x^3+\beta x^2-16x-12$ έχει παράγοντες τους $x+1$ και $x-2$. Στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

Οπότε το πολυώνυμο γίνεται : $P(x)=x^4+4x^3-x^2-16x-12$. και για να λύσουμε την εξίσωση $P(x)=0$ ψάχνουμε να βρούμε ρίζα ανάμεσα στους διαιρέτες του σταθερού όρου, δηλαδή $\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm6$

Αυτή τη φορά δοκιμάζω με Horner και βλέπω αν το υπόλοιπο βγει μηδέν.

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & -1 & -16 & -12 & \rho=1 \\ & 1 & 5 & 4 & -12 & \\ 1 & 5 & 4 & -12 & -24 & \end{array} \qquad \left.\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & -1 & -16 & -12 & \rho=-1 \\ & -1 & -3 & 4 & 12 & \\ 1 & 3 & -4 & -12 & \boxed{0} & \end{array}\right\}$$

Άρα το $\rho=-1$ είναι ρίζα

ή το $x+1$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

άρα $P(x)=(x+1)(x^3+3x^2-4x-12)$. Τώρα θα χρειαστεί να σπάσω κι άλλο το πολυώνυμο, οπότε αναζητώ παράγοντα του $x^3+3x^2-4x-12$

2. Να βρείτε για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ το $P(x) = x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 - 16x - 12$ έχει παράγοντες τους $x+1$ και $x-2$. Στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & 3 & -4 & -12 & \rho = 2 \\ & 2 & 12 & 16 & \\ 1 & 6 & 8 & 4 & \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr|l} 1 & 3 & -4 & -12 & \rho = -2 \\ & -2 & -2 & 12 & \\ 1 & 1 & -6 & \boxed{0} & \end{array}$$

Άρα $P(x) = (x+1)(x+2)(x^2+x-6)$, οπότε:

$P(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x+2)(x^2+x-6) = 0 \Leftrightarrow x+1=0$ ή $x+2=0$ ή $x^2+x-6=0$

$\Leftrightarrow x=-1, \; x=-2, \; x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4(-6)}}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \dfrac{-1 \pm 5}{2} \to 2, \; -3$

3. Να βρείτε τις τιμές του $k \in \mathbb{Z}$ για τις οποίες, η εξίσωση $x^3 - x^2 + kx + 3 = 0$ έχει μία τουλάχιστον ακέραια ρίζα.

Αν το $x^3-x^2+kx+3=0$ έχει μια τουλ. ακέραια ρίζα, τότε αυτή θα είναι διαιρέτης του σταθερού όρου. άρα $\pm 1, \pm 3$

1	-1	k	3	1
	1	0	k	
1	0	k	$k+3$	

$k=-3$ και τότε θα έχει το $\rho=1$ ακέραια ρίζα

1	-1	k	3	-1
	-1	2	$-k-2$	
1	-2	$k+2$	$1-k$	

$k=1$ και τότε θα έχει το $\rho=-1$ ακέραια ρίζα.

3. Να βρείτε τις τιμές του $k \in \mathbb{Z}$ για τις οποίες, η εξίσωση $x^3 - x^2 + kx + 3 = 0$ έχει μία τουλάχιστον ακέραια ρίζα.

1	-1	k	3	$\rho=-3$
	-3	12	$-12-k$	
1	-4	$12+k$	$-9-k$	

$k=-9$ και τότε θα είχε μια ακέραια ρίζα.

1	-1	k	3	$\rho=3$
	3	6	$18+3k$	
1	2	$6+k$	$21+3k$	

$k=-7$ και τότε θα είχε μια ακέραια ρίζα

Ασκήσεις:

1. Να λύσετε τις εξισώσεις: **α**) $x^4-9x^3=0$ **β**) $x^3+x^2-12=0$ **γ**) $x^4-x^2-4x-4=0$
δ) $3x^3-4x^2-x+2=0$ **ε**) $(x+2)^2+(x^2-4)^2=0$.

2. Να βρείτε το $\lambda\in Z$ ώστε η εξίσωση $(3\lambda^3+1)x^4-(6\lambda+4)x^3+(7\lambda^2+8)x-9\lambda=0$ να έχει ρίζα το 1. Μετά να βρείτε και τις άλλες ρίζες.

3. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^3+(\beta-1)x^2-3x-2\beta+6$ με $\alpha,\beta\in R$

i) Αν ο αριθμός 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x+1$ είναι ίσο με 2, τότε να δείξετε ότι $\alpha=2$ και $\beta=4$.

ii) Για τις τιμές των α και β του ερωτήματος (**i**), να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^4+x^3-x^2+\alpha x-\alpha-1$, $\alpha\in R$. Αν η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο $A(1,0)$, να δείξετε ότι θα τον τέμνει και σε ένα ακόμα σημείο το οποίο να βρείτε.

5. Ένα σφαιρικό δοχείο με ακτίνα R και ένα κυλινδρικό με ακτίνα επίσης R και ύψος 2 cm έχουν συνολικό όγκο 54π cm^3. Να βρείτε το R. (υπόψη: $V_{\sigma\varphi}=4/3\pi r^3$, $V_{\kappa\upsilon\lambda}=\pi R^2 \upsilon$)

6. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^3+(2\alpha-3)x^2+(2\sigma\upsilon\nu\theta-1)x+1$ με ακέραιους συντελεστές και ρίζα ακέραια και αρνητική. Να βρείτε τα α, θ.

Πρόσημο γινομένου

Πρόσημο γινομένου

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα γινόμενο:

$$(x-1)(-x+2)(x^2-5x+6)$$

και θέλουμε να βρούμε το πρόσημο, δηλαδή για ποιες τιμές του x είναι θετική και για ποιες είναι αρνητική

Βρίσκουμε τις ρίζες κάθε παράγοντα

$$x-1=0 \Leftrightarrow x=1$$

$$-x+2=0 \Leftrightarrow x=2$$

$$x^2-5x+6=0$$

$\Delta = 25-24 \qquad x=\dfrac{5\pm 1}{2} \qquad x=2,\ x=3$

Πρόσημο 1ου βαθμού παράγοντα

Δεξιά από το σημείο μηδενισμού, βάζουμε ό,τι πρόσημο έχει το x

Πρόσημο 2ου βαθμού παράγοντα

Ανάμεσα στις ρίζες, ετερόσημο του x^2

	$-\infty$	1		2		3	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$-x+2$	$+$		$+$	0	$-$		$-$
x^2-5x+6	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$
Γινόμενο	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

4. Να βρείτε το πρόσημο των παρακάτω γινομένων, για τις διάφορες τιμές του x.

i) $P(x)=(2-3x)(x^2-x-2)(x^2-x+1)$

ii) $Q(x)=(-x^2+4)(x^2-3x+2)(x^2+x+1)$

i) Θα κατασκευάσω πίνακα προσήμων οπότε θα χρειαστεί να βρω τις ρίζες κάθε παράγοντα:

- $2-3x=0 \Leftrightarrow 3x=2 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$
- $x^2-x-2=0 \Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1-4(-2)}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}$ $\nearrow 2$, $\searrow -1$
- $x^2-x+1=0 \longrightarrow \Delta=1-4\cdot 1<0$, δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$.

	$-\infty$		-1		$2/3$		2		$+\infty$
$2-3x$		+		+	0	−		−	
x^2-x-2		+	0	−		−	0	+	
x^2-x+1		+		+		+		+	
$P(x)$		+	0	−	0	+	0	−	

- Άρα για $x\in(-\infty,-1)\cup\left(\frac{2}{3},2\right)$ $P(x)>0$

ενώ για $x\in\left(-1,\frac{2}{3}\right)\cup(2,+\infty)$ $P(x)<0$

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

4. Να βρείτε το πρόσημο των παρακάτω γινομένων, για τις διάφορες τιμές του x.

i) $P(x) = (2-3x)(x^2-x-2)(x^2-x+1)$

ii) $Q(x) = (-x^2+4)(x^2-3x+2)(x^2+x+1)$

ii) Ομοίως:

- $-x^2+4=0 \Leftrightarrow x=\pm 2$ • $x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{9-4\cdot 2}}{2}=\dfrac{3\pm 1}{2}$ → 2, 1
- $x^2+x+1=0 \rightarrow \Delta = 1-4<0$ άρα δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$.

	$-\infty$	-2		1		2	$+\infty$
$-x^2+4$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
x^2-3x+2	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$
x^2+x+1	$+$		$+$		$+$		$+$
$Q(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$

Άρα $Q(x)<0$ για $x\in(-\infty,-2)\cup(1,2)$

$Q(x)>0$ για $x\in(-2,1)$

Πολυωνυμικές Ανισώσεις

Επίλυση ανισώσεων

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μία ανίσωση:

$$(x-1)(-x+2)(x^2-5x+6) \leq 0$$

και θέλουμε να τη λύσουμε, δηλαδή να βρούμε για ποιες τιμές του x ισχύει

επομένως η λύση είναι όλα τα x που ανήκουν στο σύνολο:

$$(-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$$

Βρίσκουμε τις ρίζες κάθε παράγοντα

$$x-1=0 \Leftrightarrow x=1$$

$$-x+2=0 \Leftrightarrow x=2$$

$$x^2-5x+6=0$$

$$\Delta = 25-24 \qquad x=\frac{5\pm 1}{2} \qquad x=2, x=3$$

	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$-x+2$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
x^2-5x+6		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Γινόμενο		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να λυθεί η ανίσωση $x^3-3x^2+x+2>0$

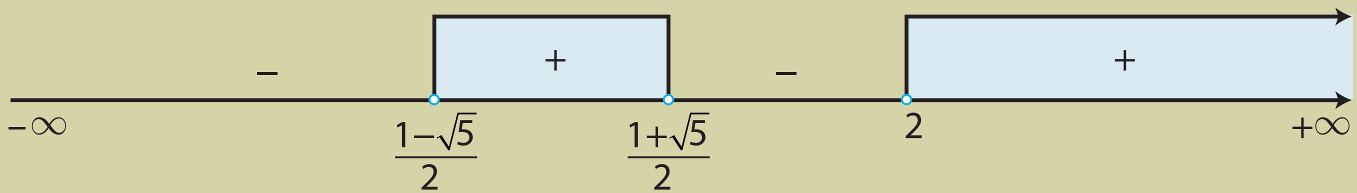
ΛΥΣΗ

Αν εργαστούμε όπως στο παράδειγμα 1, η ανίσωση γράφεται

$$(x-2)(x^2-x-1)>0 \quad ή \quad (x-2)\left(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)>0.$$

Τοποθετούμε τις ρίζες του $P(x)=x^3-3x^2+x+2$ σε άξονα και παρατηρούμε ότι:

Στο 1ο από δεξιά διάστημα $(2,+\infty)$ το P(x) είναι θετικό, αφού όλοι οι παράγοντες είναι θετικοί. Στο επόμενο διάστημα $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},2\right)$ το P(x) είναι αρνητικό, αφού ένας μόνο παράγοντας, ο $x-2$, είναι αρνητικός. Αν συνεχίσουμε έτσι, βρίσκουμε το πρόσημο του P(x) σε όλα τα διαστήματα όπως φαίνεται στο σχήμα.



Επομένως οι λύσεις της ανίσωσης είναι τα $x\in\mathbb{R}$, με $\frac{1-\sqrt{5}}{2}<x<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ή $x>2$.

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

6. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $x^3+2x^2+3x+6>0$ **ii)** $x^4-6x^3+22x^2-30x+13\le 0$

iii) $x^3-3x+2<0$ **iv)** $x^4-x^3+x^2-3x-6\ge 0$

i) $x^3+2x^2+3x+6>0 \Leftrightarrow x^2(x+2)+3(x+2)>0 \Leftrightarrow (x+2)(x^2+3)>0$

- $x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$
- $x^2+3=0$ αδύνατον στο $\mathbb{R}$. άρα $x^2+3>0$ για κάθε x. Άρα το πρόσημο εξαρτάται μόνο απο τον παράγοντα $x+2$.

	$-\infty$	-2	$+\infty$
$x+2$	$-$	0	$+$

Η λύση της ανισότητας είναι το διάστημα

$(-2,+\infty)$

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

6. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $x^3+2x^2+3x+6>0$ **ii)** $x^4-6x^3+22x^2-30x+13\le 0$

iii) $x^3-3x+2<0$ **iv)** $x^4-x^3+x^2-3x-6\ge 0$

ii) $x^4-6x^3+22x^2-30x+13\le 0$

Θα προσπαθήσω να παραγοντοποιήσω το πολυώνυμο. Ψάχνω μήπως έχει ρίζα κάποιον από τους διαιρέτες του σταθερού όρου, δηλαδή τους $\pm 1, \pm 13$. Δοκιμάζω το $+1$ (είτε με αντικατάσταση είτε με Horner)

1	−6	22	−30	13	ρ=1
	1	−5	17	−13	
1	−5	17	−13	$\boxed{0}$	

Άρα έχει παράγοντα το $(x-1)$.

οπότε $x^4-6x^3+22x^2-30x+13 = (x-1)(x^3-5x^2+17x-13)$

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

6. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $x^3+2x^2+3x+6>0$ **ii)** $x^4-6x^3+22x^2-30x+13\le 0$

iii) $x^3-3x+2<0$ **iv)** $x^4-x^3+x^2-3x-6\ge 0$

όμως θα χρειαστεί να παραγοντοποιήσω το $x^3-5x^2+17x-13$. Δοκιμάζω το 1

1	−5	17	−13	ρ = 1
	1	−4	13	
1	−4	13	$\boxed{0}$	

Άρα έχει παράγοντα το x−1. και μάλιστα

$$x^3-5x^2+17x-13=(x-1)(x^2-4x+13)$$

άρα η ανισωση γίνεται:

$$x^4-6x^3+22x^2-30x+13=(x-1)^2\cdot(x^2-4x+13)\le 0$$

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

6. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $x^3+2x^2+3x+6>0$ **ii)** $x^4-6x^3+22x^2-30x+13\leq 0$

iii) $x^3-3x+2<0$ **iv)** $x^4-x^3+x^2-3x-6\geq 0$

iii) $x^3-3x+2<0$. Θέλω να παραγοντοποιήσω το x^3-3x+2. Δοκιμάζω το $x=1$

$$\left.\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 2 & \rho=1 \\ & 1 & 1 & -2 & \\ 1 & 1 & -2 & \boxed{0} & \end{array}\right\}$$

Άρα $x^3-3x+2=(x-1)(x^2+x-2)$

- $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$
- $x^2+x-2=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{9}}{2}$ → 1, → -2

	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
x^2+x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	
Γιν		$-$		$+$		$+$	

Οπότε $x^3-3x+2<0$

$\Leftrightarrow x\in(-\infty,-2)$

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

6. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $x^3+2x^2+3x+6>0$ **ii)** $x^4-6x^3+22x^2-30x+13\le 0$

iii) $x^3-3x+2<0$ **iv)** $x^4-x^3+x^2-3x-6\ge 0$

iv) $x^4-x^3+x^2-3x-6\geq 0$ Δοκιμάζουμε το $p=-1$

$$\begin{array}{ccccc|l} 1 & -1 & 1 & -3 & -6 & p=-1 \\ & -1 & 2 & -3 & 6 & \\ 1 & -2 & 3 & -6 & \boxed{0} & \end{array}$$

$x^4-x^3+x^2-3x-6\geq 0 \Leftrightarrow$

$(x+1)(x^3-2x^2+3x-6)\geq 0 \Leftrightarrow$

$(x+1)\left[x^2(x-2)+3(x-2)\right]\geq 0 \Leftrightarrow$

$(x+1)(x-2)\underbrace{(x^2+3)}_{>0}\geq 0$

	$-\infty$ -1	-1 2	2 $+\infty$
$x+1$	$-$ 0	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$ 0	$+$
x^2+3	$+$	$+$	$+$
ΓΙΝ	$+$ 0	$-$ 0	$+$

Άρα η λύση της ανισωσης είναι η

$(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$

8. Να βρείτε τα διαστήματα, στα οποία η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $f(x)=x^4-5x^3+3x^2+x$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα x'x.

i) Εφόσον θέλουμε να βρούμε για ποια x η γραφική παράσταση βρίσκεται <u>κάτω</u> από τον άξονα x'x, αρκεί να λύσουμε την ανίσωση:

$$f(x)<0 \Leftrightarrow x^4-5x^3+3x^2+x<0 \Leftrightarrow x(x^3-5x^2+3x+1)<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\cdot(x^3-3x^2-x^2-x^2+3x+1)<0 \Leftrightarrow x\left[x^2(x-1)-3x(x-1)-(x^2-1)\right]<0$$

$$\Leftrightarrow x\left[x^2(x-1)-3x(x-1)-(x-1)(x+1)\right]<0 \Leftrightarrow x(x-1)\left[x^2-3x-(x+1)\right]<0$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)(x^2-4x-1)<0$$

- $x=0$
- $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$
- $x^2-4x-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{4\pm\sqrt{16-4(-1)}}{2}=\dfrac{4\pm\sqrt{20}}{2}=\dfrac{4\pm2\sqrt5}{2}$ → $2+\sqrt5$, $2-\sqrt5$

8. Να βρείτε τα διαστήματα, στα οποία η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $f(x)=x^4-5x^3+3x^2+x$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα x'x.

	$-\infty$	$2-\sqrt{5}$		0		1		$2+\sqrt{5}$		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
x^2-4x-1		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$
ΓΙΝ		$+$		$-$		$+$		$-$		$+$

Άρα η λύση της ανίσωσης είναι το διάστημα $(2-\sqrt{5},0)\cup(1,2+\sqrt{5})$

5. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $2x^5 - 162x \leq 0$ **ii)** $(x^3 - x^2 + 2x - 2)(x^2 - 9) > 0$

iii) $2x^3 - 5x^2 - 6x + 9 > 0$ **iv)** $x^3 - 4x^2 - 3x + 18 \leq 0$

i) $2x^5 - 162x \leq 0 \Leftrightarrow 2x(x^4 - 81) \leq 0 \Leftrightarrow 2x(x^2-9)(x^2+9) \leq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x(x-3)(x+3)(x^2+9) \leq 0.$

φτιάχνω πίνακα προσήμων :

	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
x		−		−	0	+		+	
$x-3$		−		−		−	0	+	
$x+3$		−	0	+		+		+	
x^2+9		+		+		+		+	
ΓΙΝ.		−	0	+	0	−	0	+	

Η λύση της ανίσωσης είναι

$x \in (-\infty, -3) \cup (0, 3).$

5. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $2x^5 - 162x \le 0$ **ii)** $(x^3 - x^2 + 2x - 2)(x^2 - 9) > 0$

iii) $2x^3 - 5x^2 - 6x + 9 > 0$ **iv)** $x^3 - 4x^2 - 3x + 18 \le 0$

ii) $(x^3 - x^2 + 2x - 2)(x^2 - 9) > 0 \Leftrightarrow \left[x^2(x-1) + 2(x-1)\right](x-3)(x+3) > 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+2)(x-3)(x+3) > 0$

	$-\infty$	-3	1	3	$+\infty$
$x-1$	$-$		$-$ 0 $+$		$+$
x^2+2	$+$		$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$		$-$	$-$ 0	$+$
$x+3$	$-$ 0	$+$	$+$		$+$
ΓΙΝ	$-$ 0	$+$ 0	$-$ 0		$+$

Άρα η λύση είναι $x \in (-3,1) \cup (3,+\infty)$.

5. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $2x^5 - 162x \le 0$ **ii)** $(x^3 - x^2 + 2x - 2)(x^2 - 9) > 0$

iii) $2x^3 - 5x^2 - 6x + 9 > 0$ **iv)** $x^3 - 4x^2 - 3x + 18 \le 0$

iii) $2x^3 - 5x^2 - 6x + 9 > 0$

Έστω $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 6x + 9$. Παρατηρώ ότι $P(1) = 0$ οπότε το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - 1$.

$$\left.\begin{array}{cccc|c} 2 & -5 & -6 & 9 & \rho = 1 \\ & 2 & -3 & -9 & \\ 2 & -3 & -9 & \boxed{0} & \end{array}\right\}$$

Άρα $P(x) = (x-1)(2x^2 - 3x - 9)$ και φτιάχνω πίνακα προσήμων :

5. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $2x^5 - 162x \leq 0$ **ii)** $(x^3 - x^2 + 2x - 2)(x^2 - 9) > 0$

iii) $2x^3 - 5x^2 - 6x + 9 > 0$ **iv)** $x^3 - 4x^2 - 3x + 18 \leq 0$

- $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- $2x^2 - 3x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2(-9)}}{4} = \dfrac{3 \pm 9}{4}$ → 3, $-\dfrac{3}{2}$

	$-\infty$	$-3/2$		1		3		$+\infty$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x^2-3x-9$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
ΓΙΝ	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$x \in \left(-\dfrac{3}{2}, 1\right) \cup (3, +\infty)$

Ασκήσεις:

1. Να λυθούν οι ανισώσεις: **α**) $x^3-x^2-2x\geq 0$ **β**) $(x-2)^3\cdot(x-3)^2\cdot(x^2+x+5)\cdot(4-x^2)\geq 0$

γ) $x^3+x>2x^2+2$ **δ**) $|x+1|\leq|2x+1|$ **ε**) $x^3+3x^2-4x-12<0$.

2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων **α**) $f(x)=\sqrt{x^3-3x^2+2x}$ **β**) $f(x)=\sqrt{x^3-4x}$

3. Να λύσετε την ανίσωση: $x^4-13x^2+36>0$.

Ασκήσεις:

1. Να λύσετε τις ανισώσεις: **α)** $x^3+5x^2+3x-9\geq 0$

β) $x^3+6x^2+12x+8>0$

γ) $x^4-6x^3+11x^2-6x>0$.

2. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=kx^3-(k+\lambda)x^2+\lambda x+1$.

α. Αν $P(-1/2)=7$ και $P(-1)=23$, να δείξετε ότι $k=-6$ και $\lambda=-5$

β. Να γίνει η διαίρεση του $P(x)$, για $k=-6$ και $\lambda=-5$ με το $2x+1$ και να γραφεί το $P(x)$ με την ταυτότητα της διαίρεσης

γ. Να λυθεί η ανίσωση $P(x)>7$.

3. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^4-8x^3+(5\alpha-1)x^2+8x-3\alpha-6$, $\alpha\in R$.

α) Να κάνετε τη διαίρεση του $P(x)$ δια του x^2-1 και να γράψετε τη σχετική ταυτότητα.

β) Να βρείτε το α ώστε η παραπάνω διαίρεση να είναι τέλεια.

γ) Για $\alpha=3$ να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $P(x)=0$ καθώς και τα διαστήματα, στα οποία η $P(x)$ είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

4. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της $f(x)=x^3-2x^2-5x+6$ με τον άξονα $x'x$ και να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση είναι "πάνω" από τον $x'x$.

5. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η $f(x)=x^3-2x^2+1$ βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y=x-1$.

6. Μία εταιρεία ηλεκτρικών συσκευών έχει υπολογίσει ότι το κόστος κατασκευής x χιλιάδων συσκευών δίνεται από τον τύπο $K(x)=x^4+x^2+6$ σε χιλιάδες €, ενώ τα έσοδα από την πώληση τους αναμένεται να είναι $E(x)=4x^3-x^2-x$ χιλιάδες €. Πόσες χιλιάδες συσκευές πρέπει να παραχθούν ώστε η εταιρεία να έχει κέρδη;