

Γεωμετρία Β' Λυκείου

Μάθημα 8 - Πυθαγόρειο Θεώρημα

Ασκήσεις II

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο, που έχει πλευρές $\alpha = \kappa^2 + \lambda^2$, $\beta = 2\kappa\lambda$ και $\gamma = \kappa^2 - \lambda^2$, όπου κ, λ θετικοί ακέραιοι με $\kappa > \lambda$, είναι ορθογώνιο.

$$\alpha^2 = (\kappa^2 + \lambda^2)^2 = \kappa^4 + 2\kappa^2\lambda^2 + \lambda^4$$

$$\beta^2 = (2\kappa\lambda)^2 = 4\kappa^2\lambda^2$$

$$\gamma^2 = (\kappa^2 - \lambda^2)^2 = \kappa^4 - 2\kappa^2\lambda^2 + \lambda^4$$

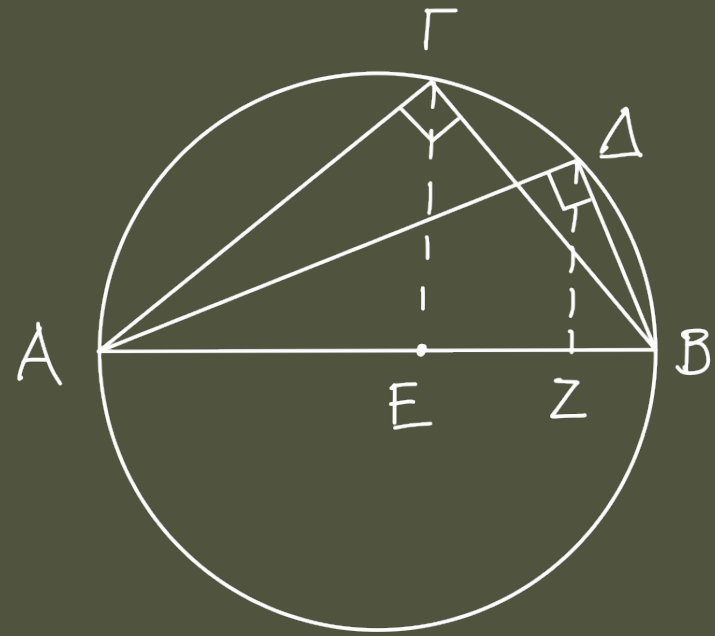
παρατηρούμε ότι

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$$

οπότε το τρίγωνο είναι
ορθογώνιο.

Αν για το τρίγωνο αυτό ισχύει το
Πυθαγόρειο Θεώρημα, τότε είναι
ορθογώνιο. Ας πάρουμε τα τετράγωνα
των πλευρών του :

2. Αν AE , AZ είναι αντίστοιχα οι προβολές δύο χορδών AG και AD ενός κύκλου σε μία διάμετρό του AB , να αποδείξετε ότι $AZ \cdot AG^2 = AE \cdot AD^2$.



Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle ABG$ ισχύει

ότι $AG^2 = AB \cdot AE$ (1)

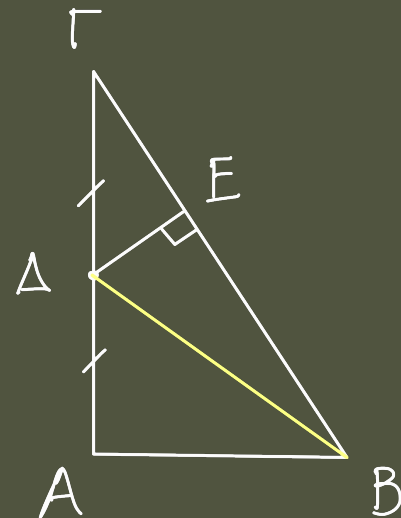
Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle ADB$ ισχύει

ότι $AD^2 = AB \cdot AZ$ (2)

Διαιρούμε $\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{AG^2}{AD^2} = \frac{AE}{AZ}$

Δηλαδή $AZ \cdot AG^2 = AE \cdot AD^2$.

3. Αν Δ είναι μέσο της κάθετης πλευράς AG ενός ορθογώνιου τριγώνου $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 1\text{L}$) και E η προβολή του στη $B\Gamma$, τότε να αποδείξετε ότι $EG^2 + AB^2 = EB^2$. Στη συνέχεια διατάζετε κατά αύξουσα σειρά μήκους τα τμήματα ΔB , EB , EG .



Για το τρίγωνο $\Gamma\Delta E$ ισχύει το Πυθαγόρειο Θεώρημα ισχύει ότι :

$$EG^2 = \Gamma\Delta^2 - E\Delta^2 \quad (1)$$

Φέρνω το τμήμα ΔB . Στο ορθογώνιο τρίγωνο $E\Delta B$ ισχύει πάλι το

Πυθαγόρειο Θεώρημα : $\Delta B^2 = E\Delta^2 + EB^2$

Επίσης στο τρίγωνο $A\Delta B$ ισχύει $\Delta B^2 = A\Delta^2 + AB^2 \quad (2)$

$$EG^2 + AB^2 \stackrel{(1)}{=} \Gamma\Delta^2 - E\Delta^2 + \Delta B^2 \stackrel{(2)}{=} \cancel{\Gamma\Delta^2} - E\Delta^2 + \Delta B^2 - \cancel{A\Delta^2}$$

$$= \Delta B^2 - E\Delta^2 \quad \text{αφού } \Delta \text{ μέσον της } AG$$

$$= EB^2 \quad \text{αφού } \Delta B^2 = E\Delta^2 + EB^2$$