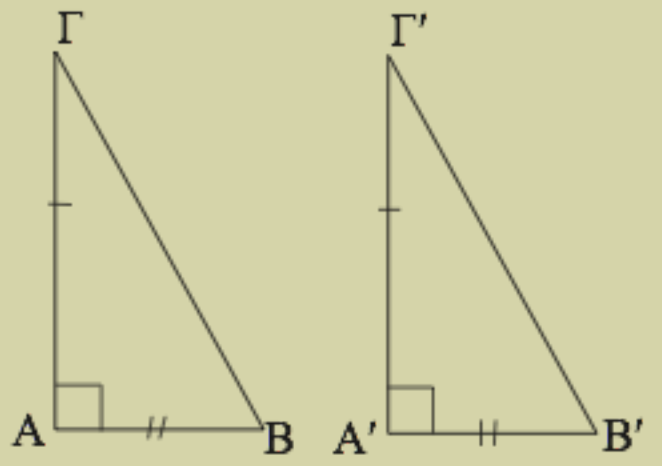
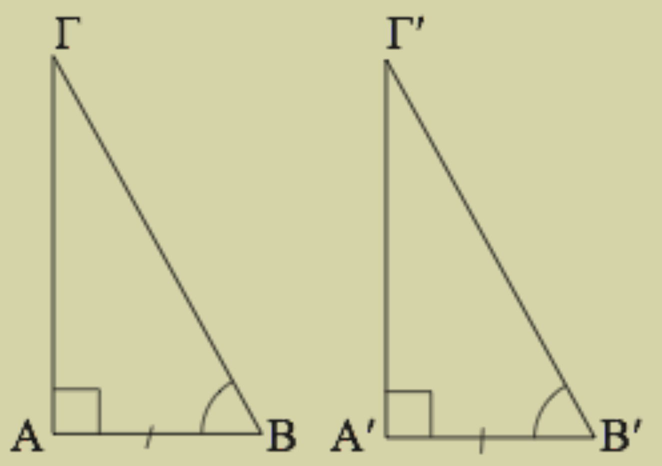
Γεωμετρία Α’ Λυκείου

3.6 - Κριτήρια Ισότητας Ορθογωνίων Τριγώνων



Σχήμα 24



Σχήμα 25

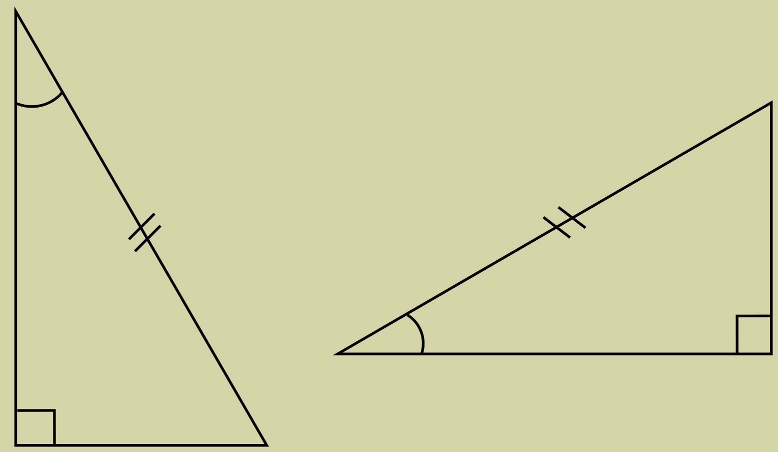
Επειδή δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μια γωνία ίση, την ορθή, από το 1ο (ΠΓΠ) και 2ο (ΓΠΓ) κριτήριο ισότητας τυχαίων τριγώνων προκύπτει άμεσα ότι:

- **Δύο ορθογώνια τρίγωνα, που έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία, είναι ίσα. (σχ.24)**
- **Δύο ορθογώνια τρίγωνα, που έχουν μια κάθετη πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία ίσες μία προς μία, είναι ίσα. (σχ.25)**

Η ισότητα ορθογώνιων τριγώνων εξασφαλίζεται ακόμη και από τα επόμενα θεωρήματα.

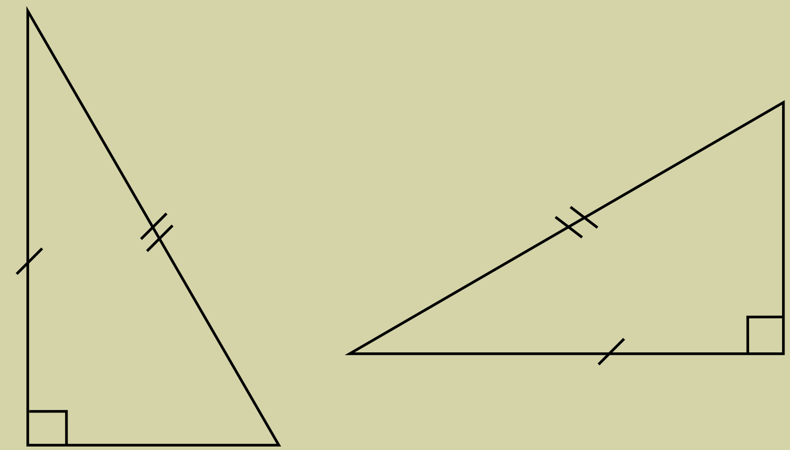
ΘΕΩΡΗΜΑ Ι

Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.



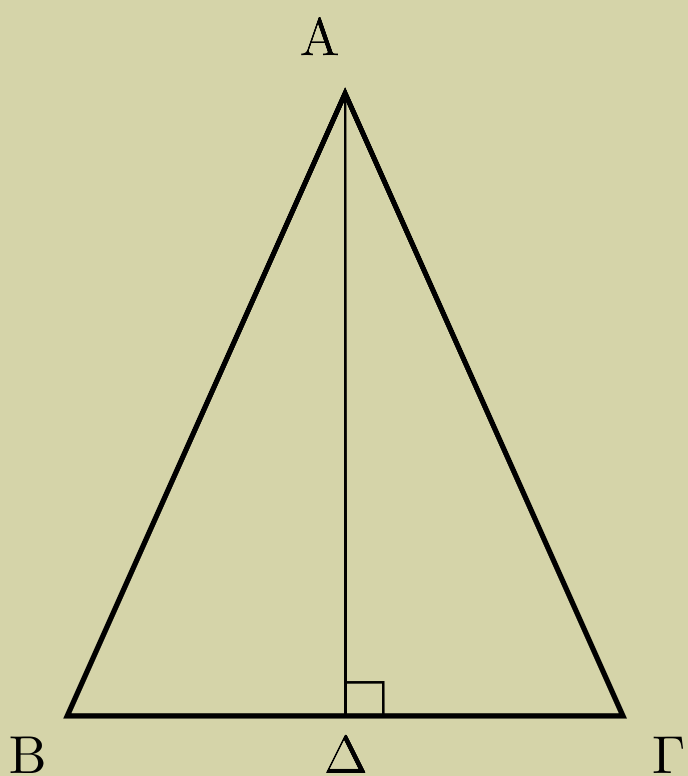
ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ

Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μία κάθετη πλευρά αντίστοιχα ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.



ΠΟΡΙΣΜΑ Ι

Το ύψος ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχεί στη βάση είναι διάμεσος και διχοτόμος της γωνίας της κορυφής.



Τα δύο ορθογώνια τρίγωνα που σχηματίζονται έχουν τις υποτείνουσές τους ίσες και την ΑΔ κοινή, οπότε είναι ίσα άρα ΑΔ διάμεσος και διχοτόμος

ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΙ

Η κάθετος που φέρεται από το κέντρο ενός κύκλου προς μια χορδή του διχοτομεί τη χορδή και το αντίστοιχο τόξο της.

Ας θεωρήσουμε έναν κύκλο (Ο, ρ), μια χορδή του ΑΒ και την κάθετη ΟΚ της ΑΒ, που τέμνει τον κύκλο στο σημείο Μ (σχ.28). Επειδή το τμήμα ΟΚ είναι ύψος στο ισοσκελές τρίγωνο ΟΑΒ (ΟΑ = ΟΒ = ρ), σύμφωνα με το προηγούμενο πόρισμα είναι διάμεσος και διχοτόμος, δηλαδή το Κ είναι μέσο του ΑΒ και $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$. Αφού $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ προκύπτει ότι $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙΙ

Δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες αν και μόνο αν τα αποστήματά τους είναι ίσα.

Έστω οι ίσες χορδές ΑΒ και ΓΔ ενός κύκλου (Ο, ρ) και ΟΚ, ΟΛ τα αποστήματά τους αντίστοιχα (σχ.29). Τα τρίγωνα ΚΟΑ και ΛΟΓ, έχουν $\hat{K} = \hat{\Lambda} = 90°$, ΟΑ = ΟΓ (= ρ) και ΑΚ = ΓΛ (αφού ΑΒ = ΓΔ). Επομένως είναι ίσα, οπότε ΟΚ = ΟΛ.

Σχήμα 29

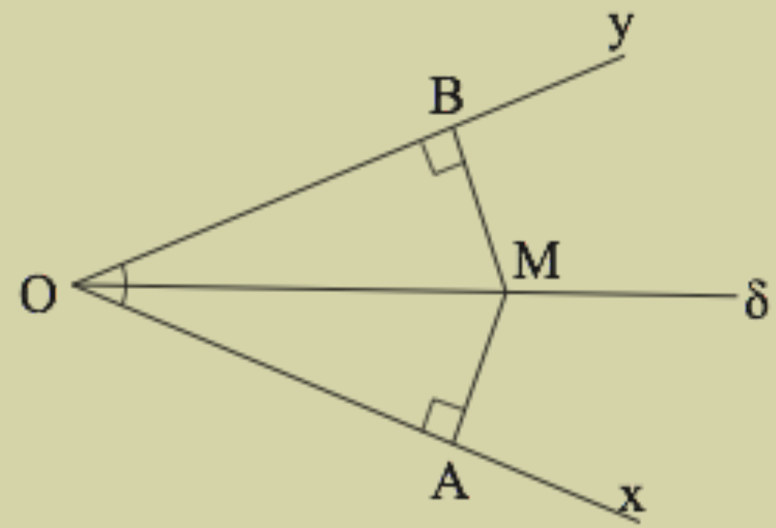
Αντίστροφα. Έστω ότι τα αποστήματα ΟΚ και ΟΛ είναι ίσα. Τότε τα τρίγωνα ΚΟΑ και ΛΟΓ έχουν $\hat{K} = \hat{\Lambda} = 90°$, ΟΑ = ΟΓ και ΟΚ = ΟΛ, επομένως είναι ίσα, οπότε

$$A K = \Gamma\Lambda \text{ ή } \frac{AB}{2} = \frac{\Gamma\Delta}{2} \text{ ή } AB = \Gamma\Delta.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ IV

Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της και αντίστροφα κάθε εσωτερικό σημείο της γωνίας που ισαπέχει από τις πλευρές είναι σημείο της διχοτόμου.

Έστω μια γωνία $x\hat{O}y$ και M ένα σημείο της διχοτόμου της Oδ (σχ.30). Φέρουμε $MA \perp Ox$ και $MB \perp Oy$. Τότε τα ορθογώνια τρίγωνα AOM και BOM είναι ίσα γιατί έχουν $\hat{A} = \hat{B} = 90°$, OM κοινή και $M\hat{O}A = M\hat{O}B$, επομένως $MA = MB$.

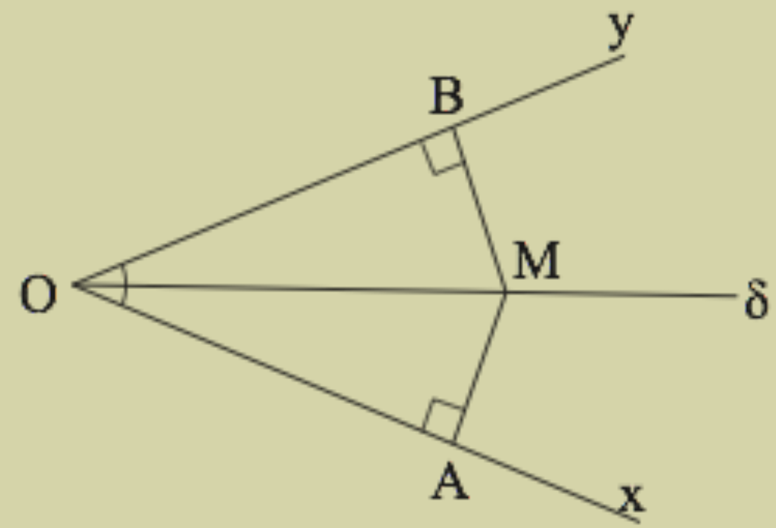


Σχήμα 30

ΘΕΩΡΗΜΑ IV

Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της και αντίστροφα κάθε εσωτερικό σημείο της γωνίας που ισαπέχει από τις πλευρές είναι σημείο της διχοτόμου.

Αντίστροφα. Έστω Μ ένα εσωτερικό σημείο της γωνίας. Φέρουμε $MA \perp Ox$ και $MB \perp Oy$ και υποθέτουμε ότι $MA = MB$. Τότε τα τρίγωνα ΑΟΜ και ΒΟΜ είναι πάλι ίσα, αφού $\hat{A} = \hat{B} = 90°$, ΟΜ κοινή και $MA = MB$ και επομένως $M\hat{O}A = M\hat{O}B$, οπότε το Μ είναι σημείο της διχοτόμου Οδ. Από το παραπάνω θεώρημα συμπεραίνουμε ότι: **Η διχοτόμος μιας γωνίας είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν από τις πλευρές της.**



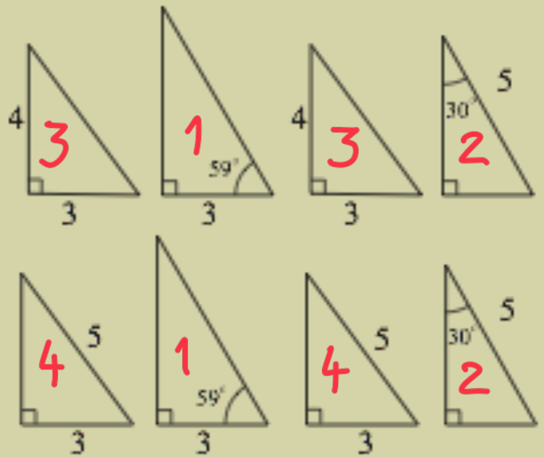
Σχήμα 30

3. *Διατυπώστε τις δύο ανακεφαλαιωτικές περιπτώσεις ισότητας ορθογώνιων τριγώνων.*

Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν :

- Δύο ομόλογες πλευρές τους ίσες μία προς μία
- Μια πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία

4. *Στο διπλανό σχήμα έχουμε σχεδιάσει οκτώ ορθογώνια τρίγωνα. Καθένα από αυτά είναι ίσο με ένα από τα υπόλοιπα. Να βρείτε τα ζεύγη των ίσων τριγώνων και να αναφέρετε το λόγο για τον οποίο είναι ίσα.*



1 ~ 1 μια πλευρά και την προσκείμενη σ' αυτήν οξεία γωνία.

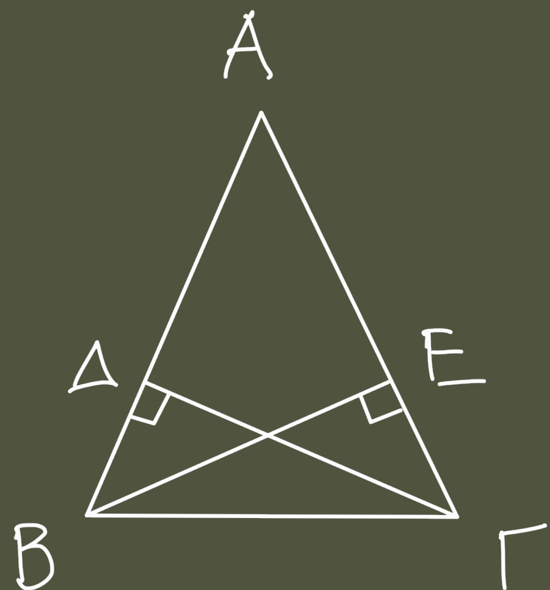
2 ~ 2 -||- -||-

3 ~ 3 δύο ομόλογες πλευρές ίσες μια προς μία

4 ~ 4 -||- -||-

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Να αποδείξετε ότι τα ύψη ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του είναι ίσα.*



Θα δείξουμε ότι $\Gamma\Delta = BE$.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα

$\overset{\triangle}{B\Delta\Gamma}$, $\overset{\triangle}{\Gamma\Delta B}$

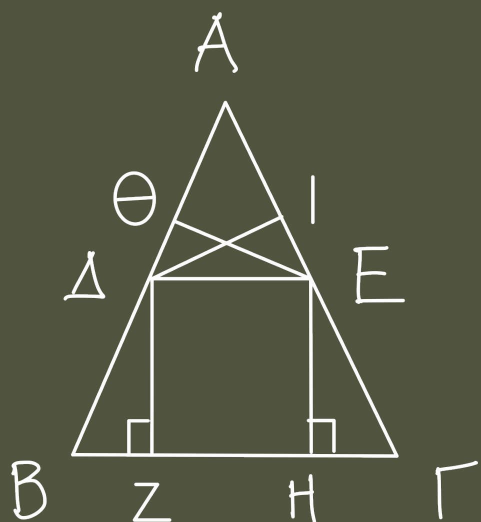
$$\left.\begin{array}{l} B\Gamma \text{ κοινή} \\ \hat{B} = \hat{\Gamma} \end{array}\right\} \quad \overset{\triangle}{B\Delta\Gamma} = \overset{\triangle}{\Gamma\Delta B}$$

άρα $\Delta\Gamma = BE$

2. *Να αποδείξετε ότι τα μέσα των ίσων πλευρών ισοσκελούς τριγώνου ισαπέχουν:*

i) από τη βάση,

ii) από τις ίσες πλευρές.



i) $\overset{\triangle}{\mathrm{B Z \Delta}}$, $\overset{\triangle}{\mathrm{\Gamma H E}}$

$$\left.\begin{matrix} \mathrm{B\Delta = E\Gamma} \\ \hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma} \end{matrix}\right\} \quad \mathrm{\Delta Z = EH}$$

ii) Αρκεί να δείξουμε ότι $\mathrm{\Delta I = \Theta E}$.

Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα $\overset{\triangle}{\mathrm{\Delta I E}}$ και $\overset{\triangle}{\mathrm{E \Theta \Delta}}$. $\mathrm{\Delta E}$ κοινή και $\mathrm{\Theta}\hat{\Delta}\mathrm{E} = \mathrm{I}\hat{\mathrm{E}}\Delta$ ($\overset{\triangle}{\mathrm{A \Delta E}}$ ισοσκελές άρα οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες) Άρα $\mathrm{\Delta I = \Theta E}$.