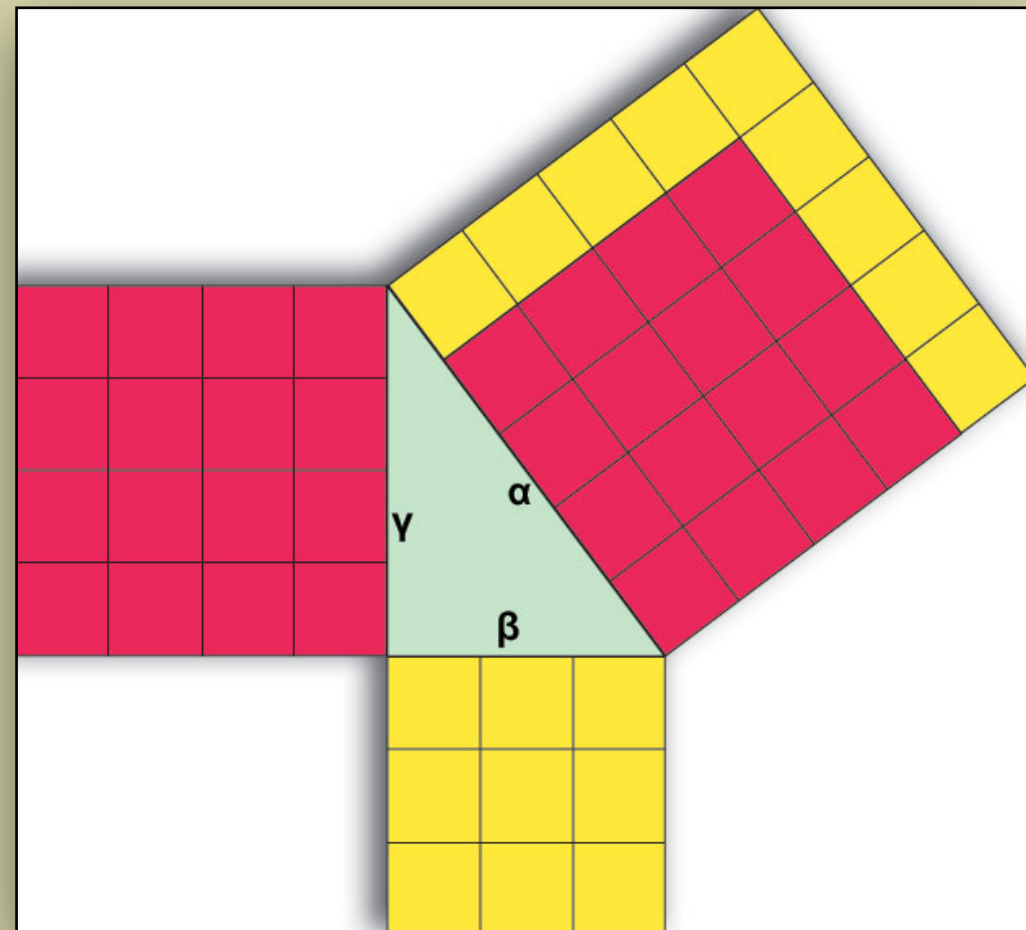


# Άλγεβρα Β' Λυκείου

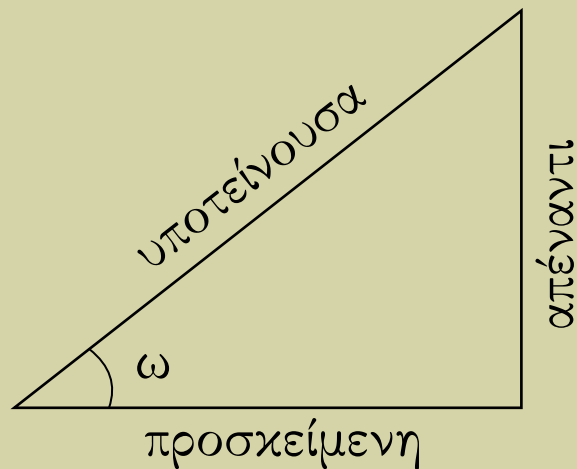
## Μάθημα 7 - Τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας

Επειδή όλα αυτά που θα πούμε ισχύουν σε ορθογώνια τρίγωνα, θυμίζουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα:

Το τετράγωνο της υποτείνουσας ενός ορθογωνίου τριγώνου, ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο καθέτων πλευρών του.



## Τί είναι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί



Η υποτείνουσα βρίσκεται πάντα απέναντι από την ορθή γωνία

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί είναι τα εξής κλάσματα:

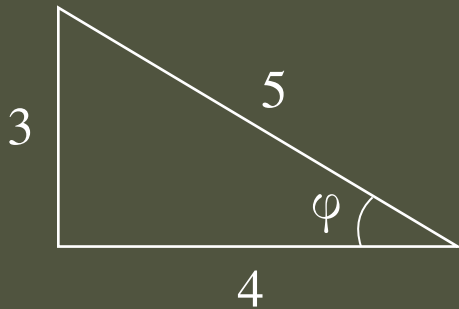
$$\eta\mu\omega = \frac{\text{απέναντι}}{\text{υποτείνουσα}}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\text{προσκειμένη}}{\text{υποτείνουσα}}$$

$$\epsilon\varphi\omega = \frac{\text{απέναντι}}{\text{προσκειμένη}}$$

## Παραδείγματα:

Να βρούμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας  $\varphi$



$$\eta\mu\varphi = \frac{\text{απέναντι}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{3}{5}$$

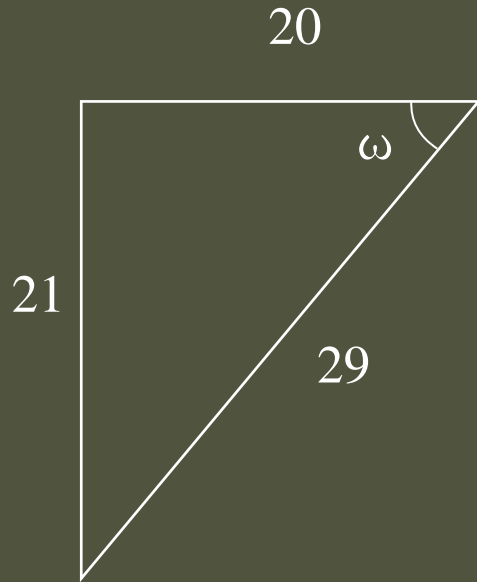
(Δε χρειάζεται να βρω δεκαδικό αριθμό, το αφήνω έτσι)

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{\text{προσκείμενη}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{4}{5}$$

$$\epsilon\varphi\varphi = \frac{\text{απέναντι}}{\text{προσκείμενη}} = \frac{3}{4}$$

## Παραδείγματα:

Να βρούμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας  $\omega$



$$\eta\mu\varphi = \frac{\text{απέναντι}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{21}{29}$$

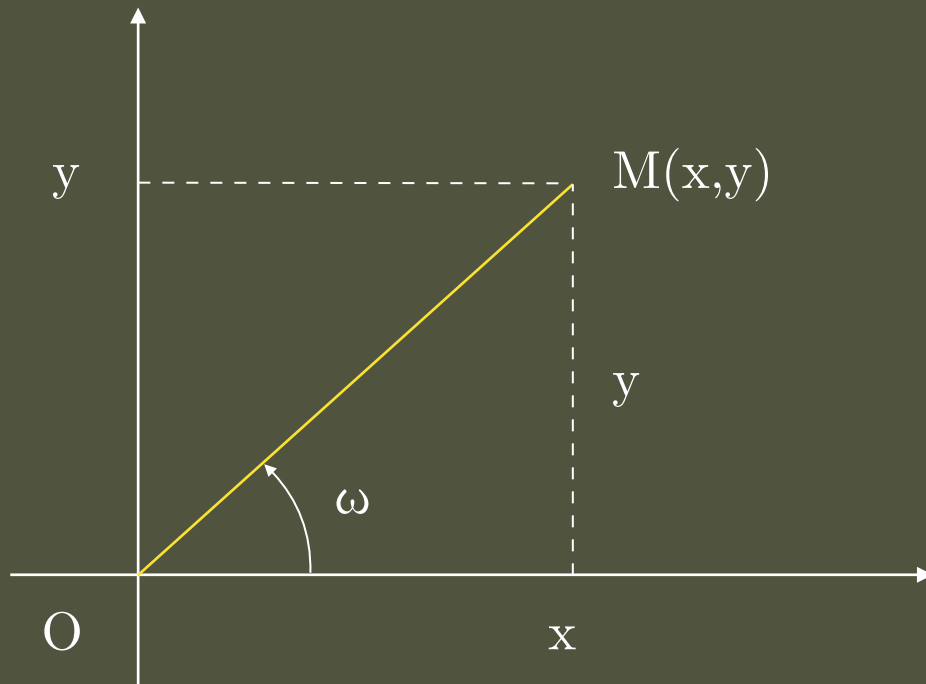
(Δε χρειάζεται να βρω δεκαδικό αριθμό, το αφήνω έτσι)

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{\text{προσκείμενη}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{20}{29}$$

$$\epsilon\varphi\varphi = \frac{\text{απέναντι}}{\text{προσκείμενη}} = \frac{21}{20}$$

Και το πιο σημαντικό παράδειγμα που  
θα χρησιμοποιούμε από δω και πέρα

Να βρούμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας  $\omega$



$$\eta\mu\omega = \frac{\text{απέναντι}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{y}{OM}$$

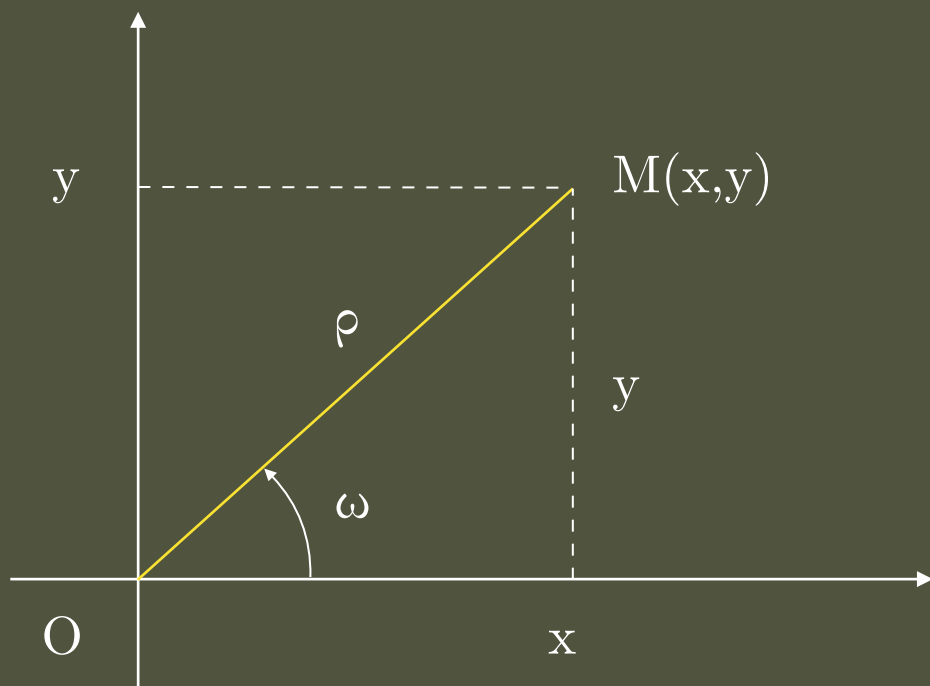
$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\text{προσκείμενη}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{x}{OM}$$

$$\epsilon\varphi\omega = \frac{\text{απέναντι}}{\text{προσκείμενη}} = \frac{y}{x}$$

Απο  
Πυθαγόρειο  
Θεώρημα

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Μετά από το προηγούμενο παράδειγμα, όλες οι γωνίες στην Άλγεβρα θα έχουν αρχική πλευρά τον ημιάξονα  $Ox$  και τελική πλευρά την  $OM$ .



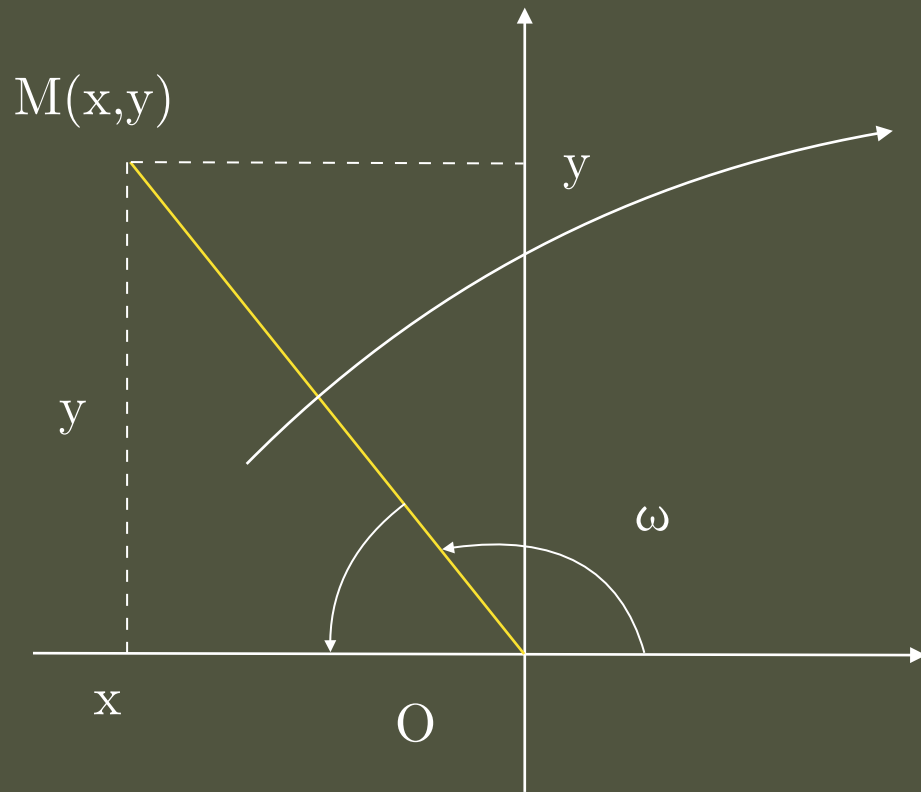
$$\eta\mu\omega = \frac{\text{απέναντι}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{y}{\rho}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\text{προσκειμένη}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{x}{\rho}$$

$$\epsilon\varphi\omega = \frac{\text{απέναντι}}{\text{προσκειμένη}} = \frac{y}{x}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Τί γίνεται με τις αμβλείες γωνίες; που δεν είναι μέσα σε κάποιο ορθογώνιο τρίγωνο;



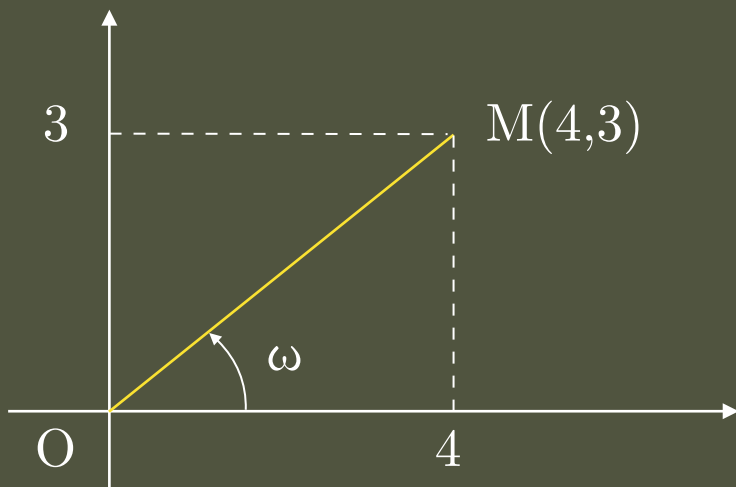
Παίρνουμε αυτό το τρίγωνο

$$\eta\mu\omega = \frac{\text{απέναντι}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{y}{\rho}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\text{προσκείμενη}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{x}{\rho}$$

$$\epsilon\varphi\omega = \frac{\text{απέναντι}}{\text{προσκείμενη}} = \frac{y}{x}$$





Να βρεθεί το μήκος  $OM$  και το ημίτονο, το συνημίτονο και η εφαπτομένη της γωνίας  $\omega$

$$OM = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

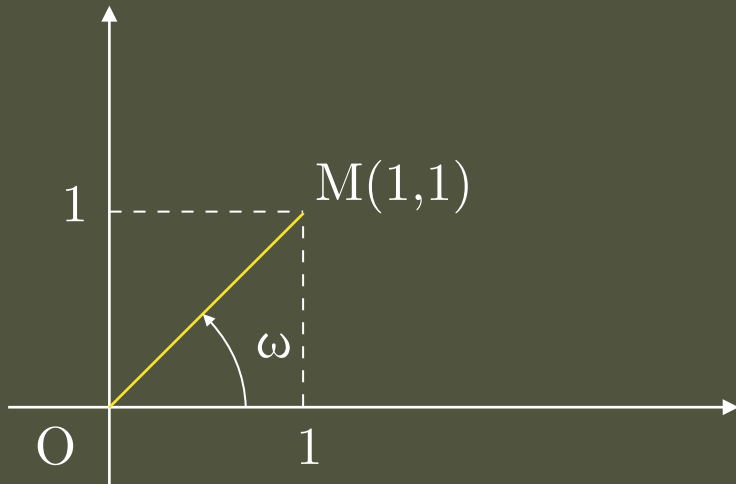
$$\eta\mu\omega = \frac{3}{5}, \quad \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{4}{5}$$

$$\epsilon\varphi\omega = \frac{3}{4}$$

$$\eta\mu\omega = \frac{\text{απέναντι}}{\text{υποτείνουσα}}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\text{προσκείμενη}}{\text{υποτείνουσα}}$$

$$\epsilon\varphi\omega = \frac{\text{απέναντι}}{\text{προσκείμενη}}$$

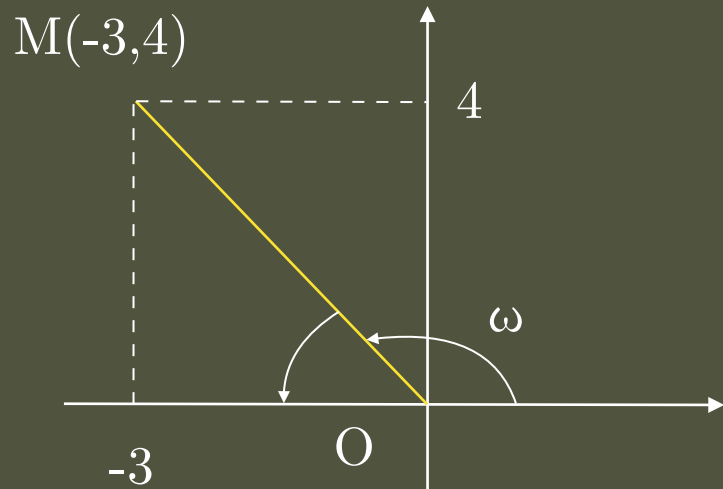


$$OM = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\eta\mu\omega = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \epsilon\varphi\omega = 1$$

Να βρεθεί το μήκος OM και το ημίτονο, το συνημίτονο και η εφαπτομένη της γωνίας  $\omega$



$$OM = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

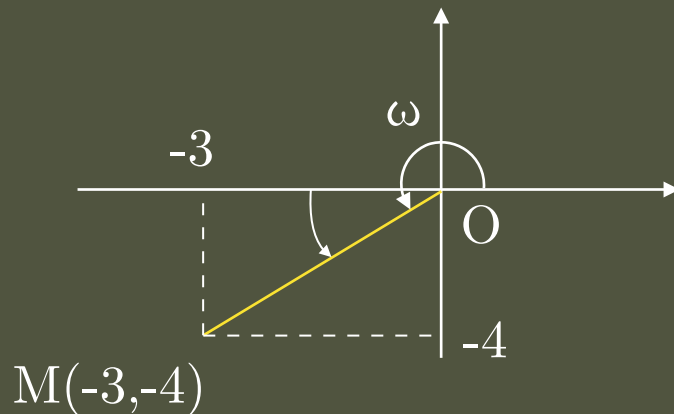
$$\eta\mu\omega = \frac{4}{5}, \quad \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{3}{5}$$

$$\epsilon\varphi\omega = \frac{4}{3}$$

$$\eta\mu\omega = \frac{\text{απέναντι}}{\text{υποτείνουσα}}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\text{προσκείμενη}}{\text{υποτείνουσα}}$$

$$\epsilon\varphi\omega = \frac{\text{απέναντι}}{\text{προσκείμενη}}$$

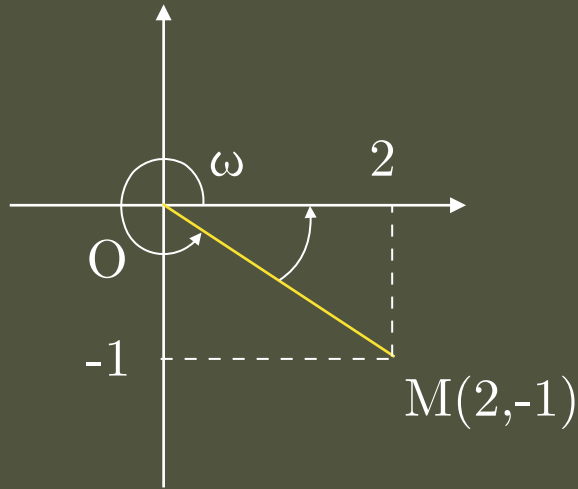


$$OM = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

$$\eta\mu\omega = -\frac{4}{5}, \quad \sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{3}{5}$$

$$\epsilon\varphi\omega = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$$

Να βρεθεί το μήκος OM και το ημίτονο, το συνημίτονο και η εφαπτομένη της γωνίας  $\omega$



$$OM = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

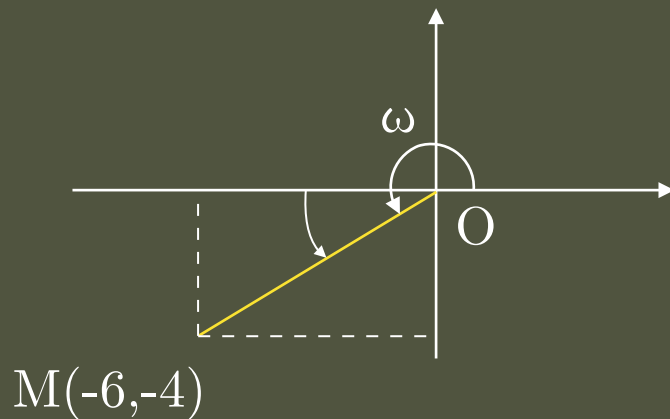
$$\eta\mu\omega = \frac{-1}{\sqrt{5}} = \frac{-\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{-\sqrt{5}}{5}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\eta\mu\omega = \frac{\text{απέναντι}}{\text{υποτείνουσα}}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\text{προσκείμενη}}{\text{υποτείνουσα}}$$

$$\epsilon\varphi\omega = \frac{\text{απέναντι}}{\text{προσκείμενη}}$$



$$OM = \sqrt{(-6)^2 + (-4)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52}$$

$$\eta\mu\omega = \frac{-4}{\sqrt{52}} = \frac{-4 \cdot \sqrt{52}}{52}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{-6}{\sqrt{52}} = \frac{-6 \sqrt{52}}{52}$$

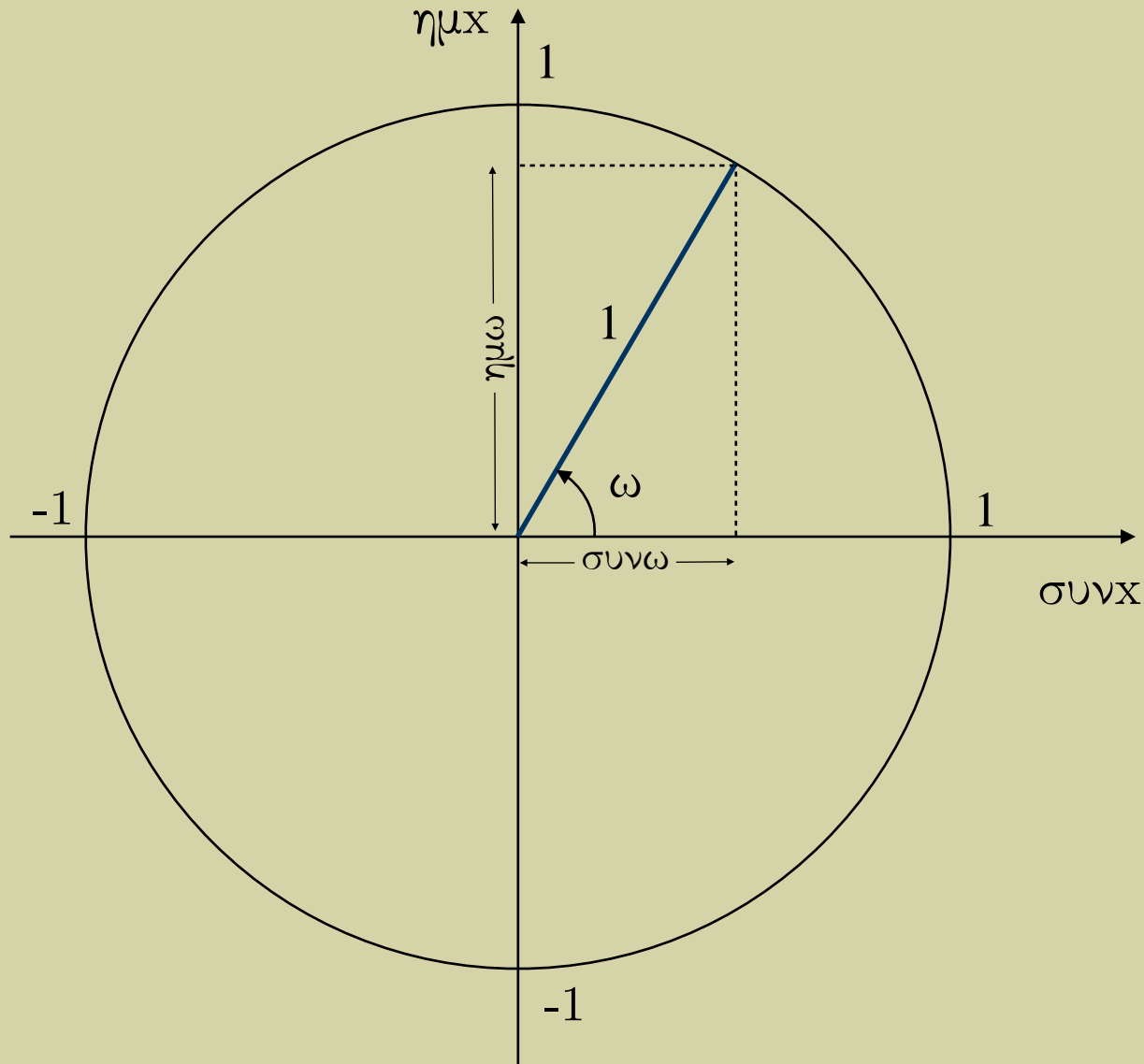
$$\epsilon\varphi\omega = \frac{-4}{-6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

## Ο τριγωνομετρικός κύκλος

Εργαλείο που μας βοηθά να υπολογίζουμε τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνιών.

έχει ακτίνα = 1

ο άξονας των  $x$  λέγεται άξονας των συνημιτόνων και ο άξονας  $y$  λέγεται άξονας των ημιτόνων

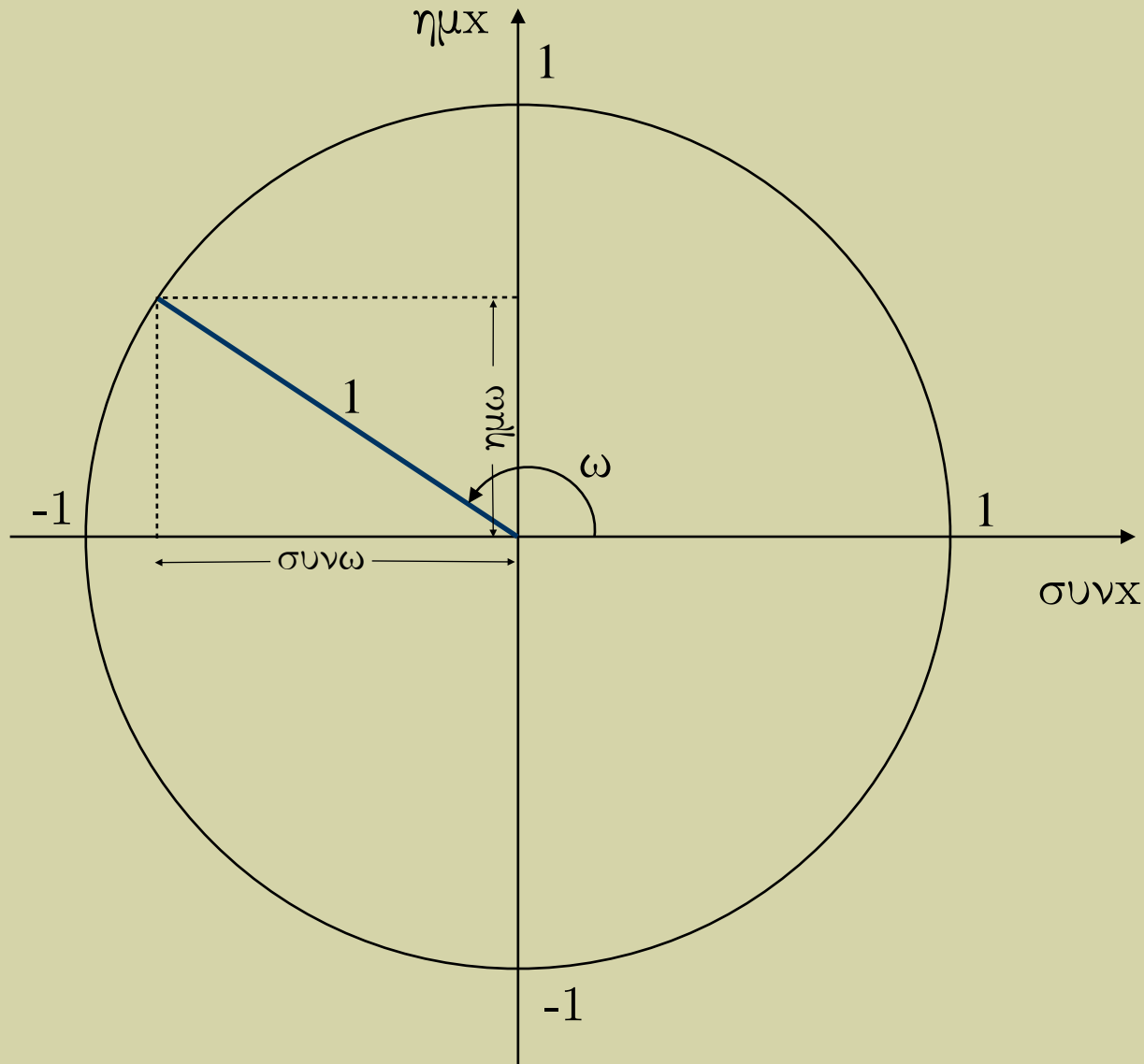


## Ο τριγωνομετρικός κύκλος

Εργαλείο που μας βοηθά να υπολογίζουμε τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνιών.

έχει ακτίνα = 1

ο άξονας των  $x$  λέγεται άξονας των συνημιτόνων και ο άξονας  $y$  λέγεται άξονας των ημιτόνων

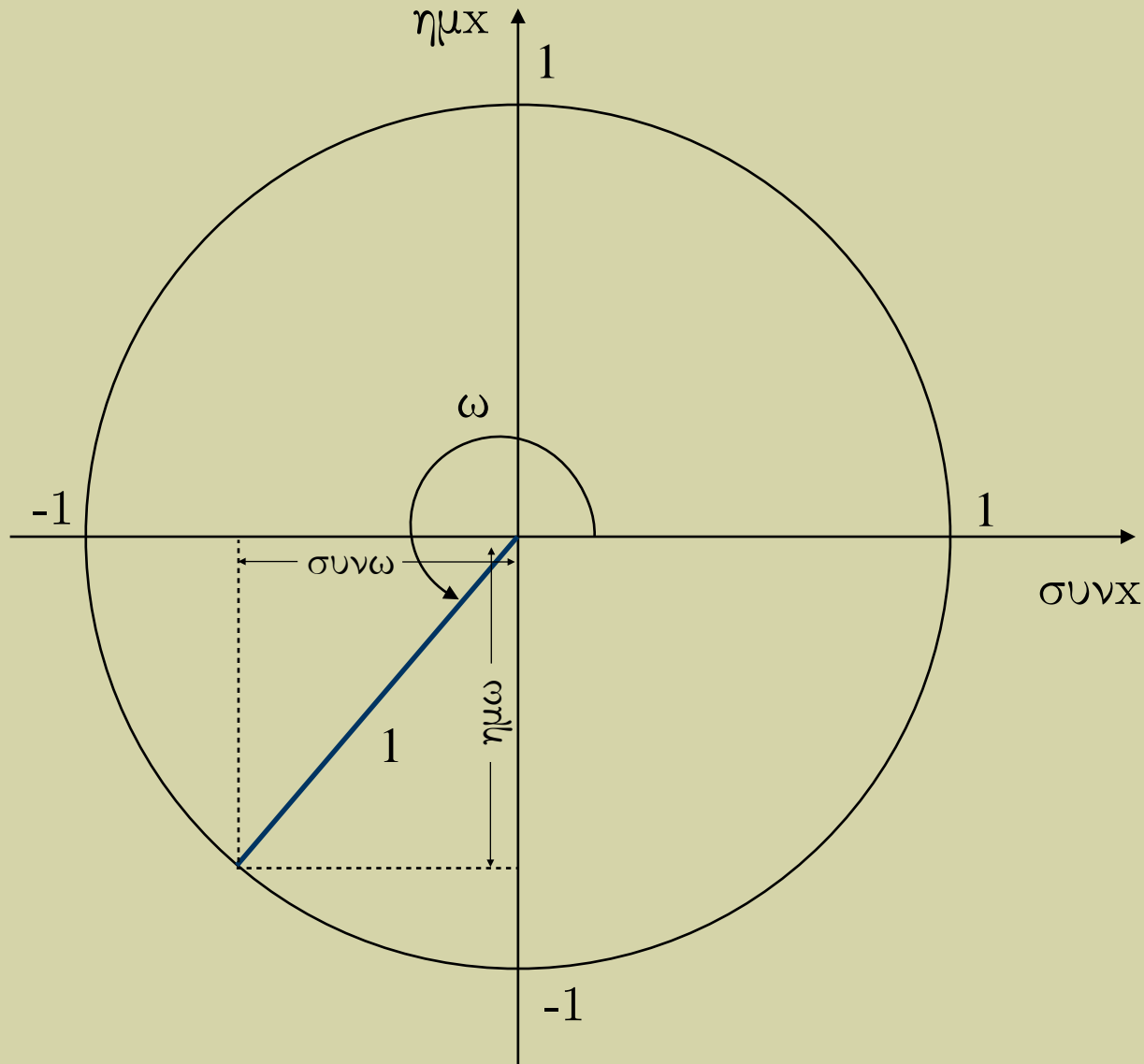


## Ο τριγωνομετρικός κύκλος

Εργαλείο που μας βοηθά να υπολογίζουμε τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνιών.

έχει ακτίνα = 1

ο άξονας των  $x$  λέγεται άξονας των συνημιτόνων και ο άξονας  $y$  λέγεται άξονας των ημιτόνων

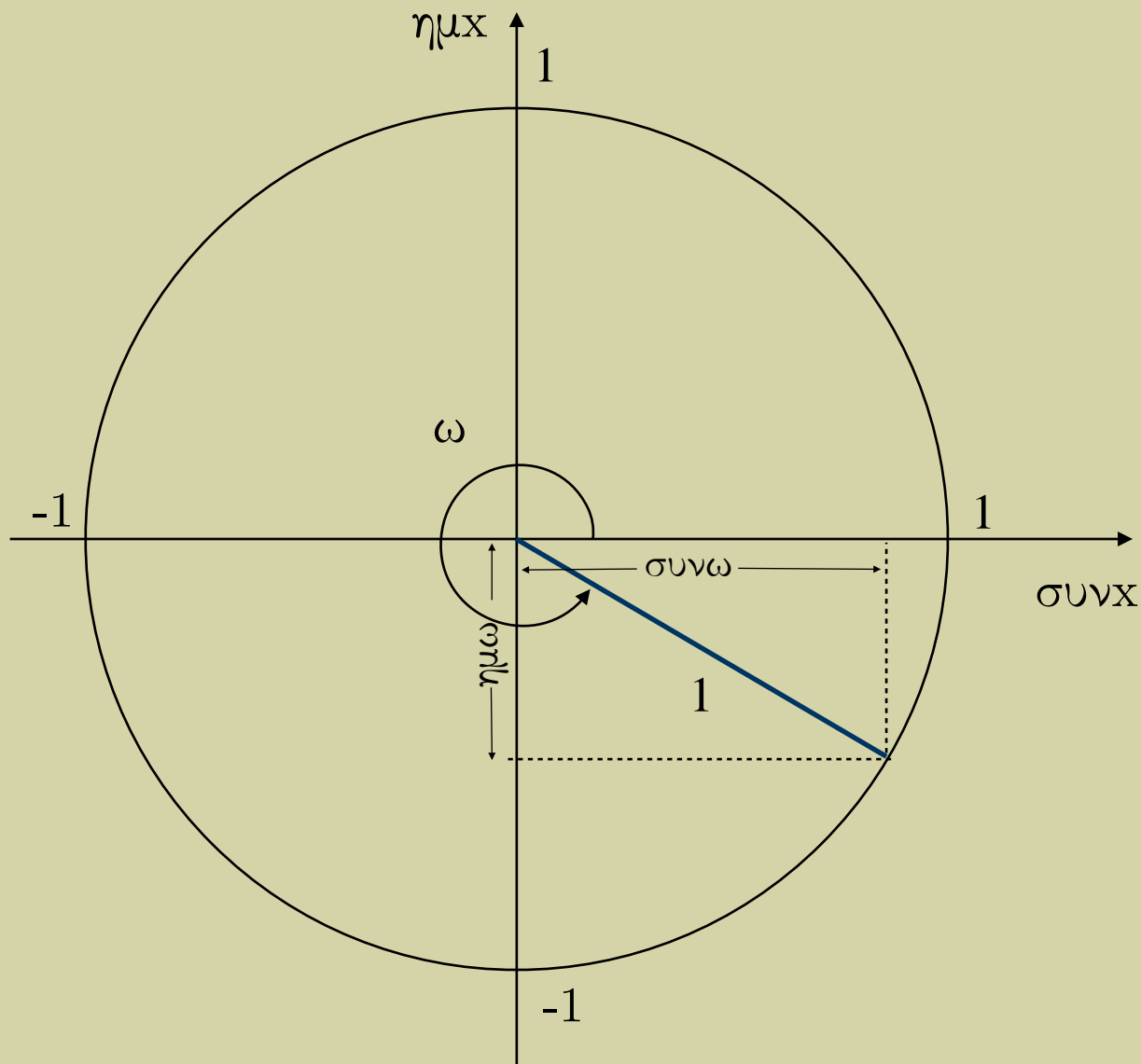


## Ο τριγωνομετρικός κύκλος

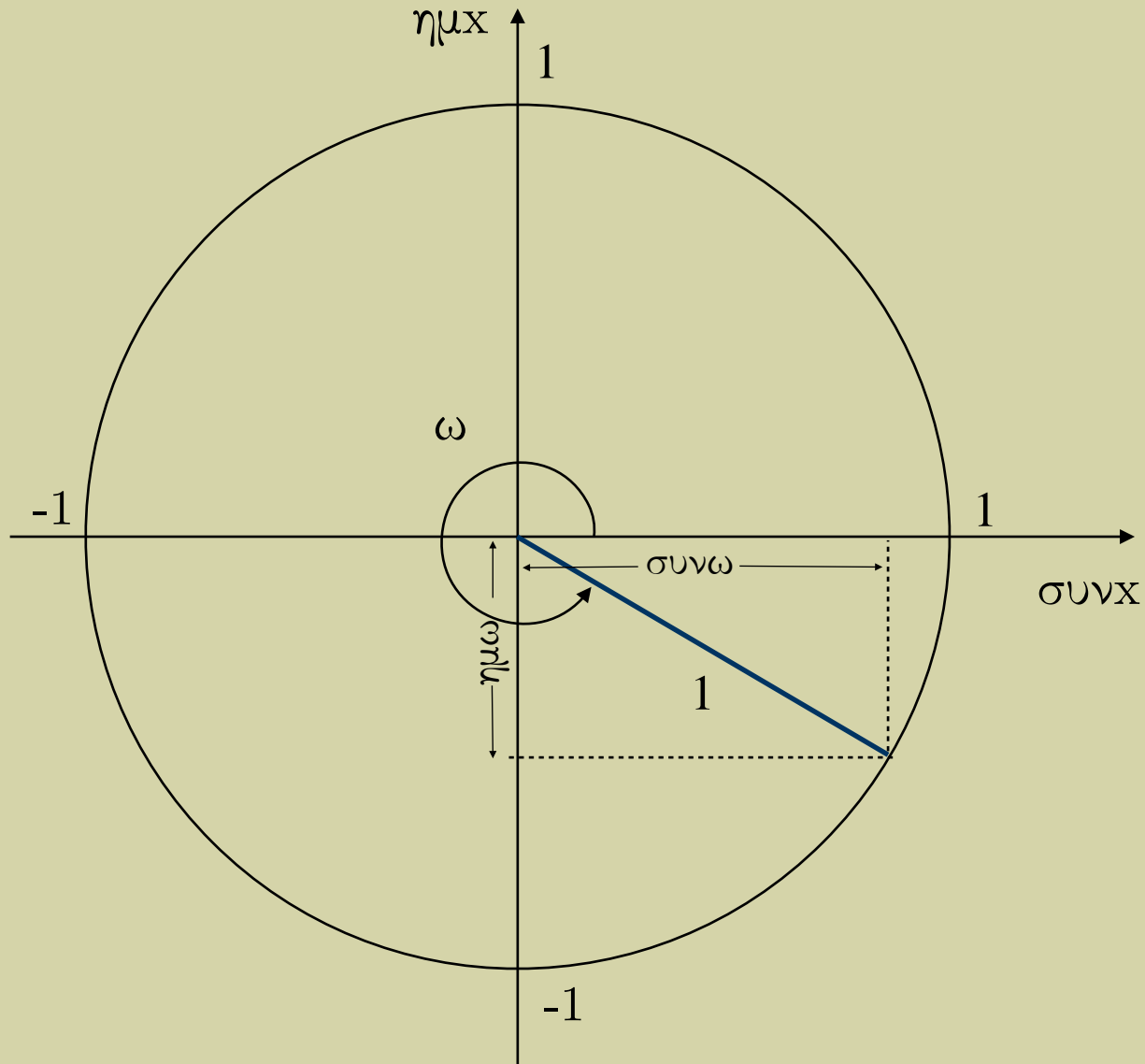
Εργαλείο που μας βοηθά να υπολογίζουμε τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνιών.

έχει ακτίνα = 1

ο άξονας των  $x$  λέγεται άξονας των συνημιτόνων και ο άξονας  $y$  λέγεται άξονας των ημιτόνων



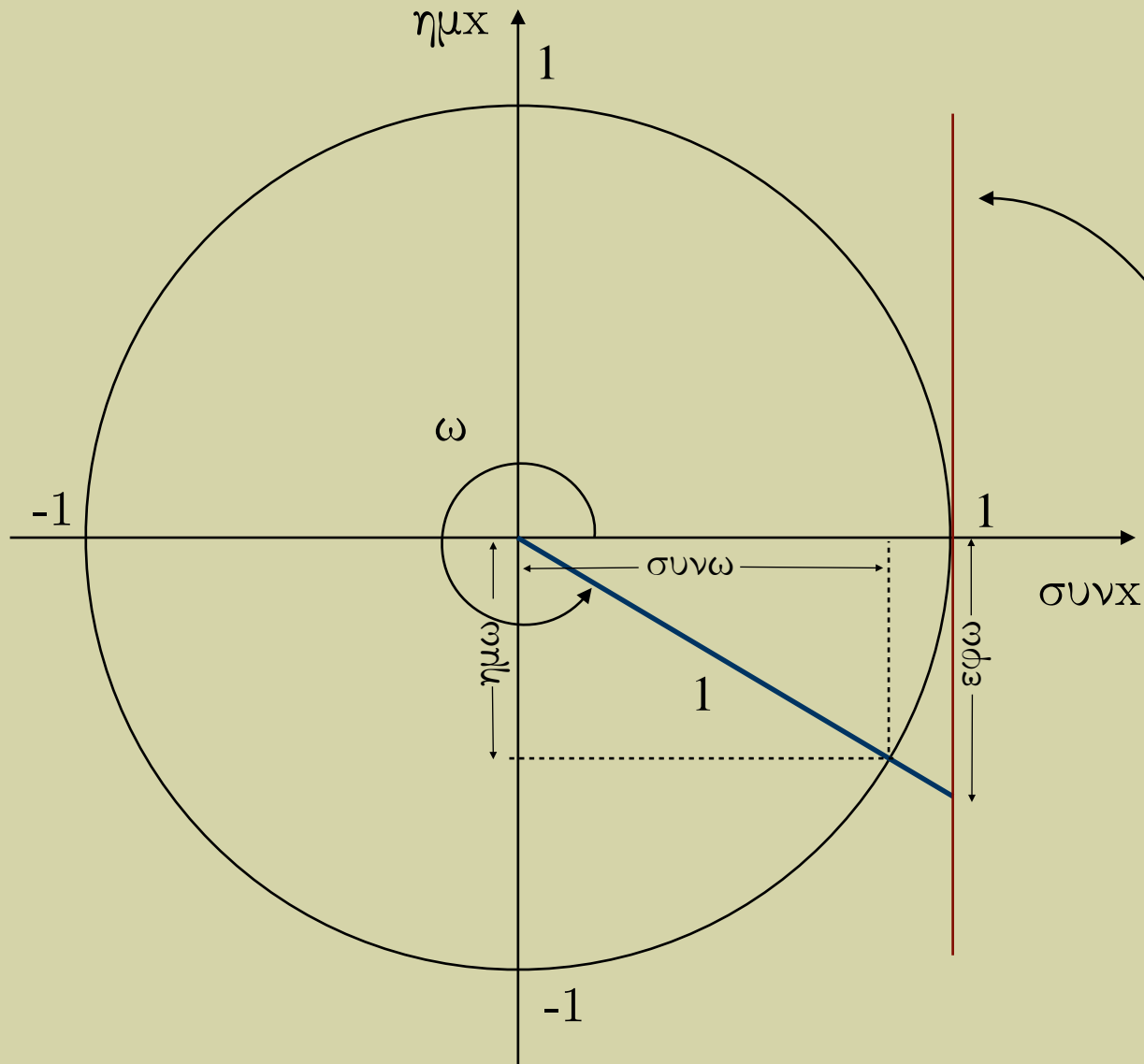
## Ο τριγωνομετρικός κύκλος



	1ο	2ο	3ο	4ο
ημx	+	+	-	-
συνω	+	-	-	+
εφω	+	-	+	-



## Ο τριγωνομετρικός κύκλος



### Ο άξονας των εφαπτομένων

εφάπτεται στον τριγωνομετρικό κύκλο στο  $(1,0)$  και είναι μία κατακόρυφη ευθεία. Για να βρω την εφαπτόμενη της γωνίας προεκτείνω την τελική πλευρά της γωνίας και βλέπω πού τέμνει τον άξονα των εφαπτομένων