Μαθηματικά Γ’ Γυμνασίου

Παραγοντοποίηση

Παράγοντες

είναι τα συστατικά ενός γινομένου, δηλαδή οι παραστάσεις που πολλαπλασιάζονται για να φτιάξουν ένα γινόμενο

$\alpha \cdot \beta$ — παράγοντες

$\alpha \cdot (\beta + \gamma)$ — παράγοντες

$(\alpha + \beta)(\gamma + \delta)$ — παράγοντες

$x(x+1)(x+2)$ — παράγοντες

$$-3(2x^2-1)(x^3+6)(x-5)$$

παράγοντες

Ποιες από τις παρακάτω παραστάσεις είναι γινόμενα παραγόντων;

α) $2(x-y)(x+y)$ β) $2+(x-y)(x+y)$ γ) $4(\alpha-\beta)^2$ δ) $4+(\alpha-\beta)^2$

ε) $(x+2y)x-y$ στ) $(x+2y)(x-y)$ ζ) $(\alpha+\beta)(\alpha+3\beta)$

η) $(\alpha+\beta)(\alpha+3\beta)+1$.

α) Είναι γινόμενο παραγόντων, του 2, του (x-y) και του (x+y)

β) Δεν είναι γινόμενο παραγόντων αφού η παράσταση αποτελείται από ένα άθροισμα δύο όρων

γ) Είναι γινόμενο παραγόντων, του 4 και του $(\alpha-\beta)^2$

δ) Δεν είναι γινόμενο παραγόντων αφού η παράσταση αποτελείται από ένα άθροισμα δύο όρων του 4 και του $(\alpha-\beta)^2$

ε) Δεν είναι γινόμενο παραγόντων αφού αποτελείται από άθροισμα δύο όρων, του $(x+2y)x$ και του y

στ) Είναι γινόμενο παραγόντων, του $x-y$ και του $x+y$

ζ) Είναι γινόμενο παραγόντων, του $\alpha+\beta$ και του $\alpha+3\beta$

η) Δεν είναι γινόμενο παραγόντων αφού είναι άθροισμα δύο όρων

Επιμεριστική Ιδιότητα

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

Ας τη γράψουμε ανάποδα...

$$\alpha\beta + \alpha\gamma = \alpha \cdot (\beta + \gamma)$$

Παρατηρώ ότι στο αριστερό μέλος εχω ένα άθροισμα δύο όρων. Κάθε όρος αποτελείται από ένα γινόμενο παραγοντων και μάλιστα κάθε γινόμενο παραγόντων έχει έναν ίδιο παράγοντα (το α). Αυτό που κάνουμε στην παραγοντοποίηση είναι να γράφουμε τον ίδιο παράγοντα μία φορά “απ’ έξω” και μέσα στην παρένθεση να γράφουμε αυτά που περισσεύουν από τον κάθε όρο

Η παραγοντοποίηση λοιπόν είναι
μία διαδικασία όπως η επιμεριστική
ιδιότητα αλλά ανάποδα.

$$5x + 5y = 5(x + y)$$

$$4x + 3x = x(4 + 3)$$

Άσκηση 2 σελίδας 59 σχ. βιβλίου

$$8x + 16 = 8x + 8 \cdot 2 = 8(x + 2)$$

$$3ay - y^2 = 3ay - y \cdot y = y(3a - y)$$

$$6x^2 + 12x = 6x \cdot x + 6 \cdot 2x = 6x(x + 2)$$

$$-4x^2 + 8x = -4x \cdot x + 2 \cdot 4x = 4x(-x + 2)$$

$$\sqrt{2}x + \sqrt{2} = \sqrt{2}(x + 1)$$

$$(x-1)^2 - (x-1) = (x-1) \cdot (x-1) - (x-1) = (x-1)(x-1-1) = (x-1)(x-2)$$

Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:

α) $12x^2y - 30xy^2 + 6x^2y^2$ β) $\alpha(\omega - x) + 3\beta(x - \omega)$ γ) $3(2x - 1) + x(4x - 2)$

α) Κοιτάζω τους κοινούς παράγοντες που υπάρχουν στους 3 όρους.

$$6xy\left(2x^2 - 5y + xy\right)$$

β) $\alpha(\omega - x) + 3(x - \omega)$ Εδώ παρατηρώ ότι οι δύο παρενθέσεις μοιάζουν λίγο. Αναρωτιέμαι αν μπορώ να τις κάνω ίδιες. Αν αλλάξω τα πρόσημα στη δεύτερη παρένθεση τότε γίνονται ίδιοι οι παράγοντες.

$$\alpha(\omega - x) - 3(\omega - x) = (\omega - x)\cdot(\alpha - 3)$$

γ) $3(2x-1) + x(4x-2) = 3(2x-1) + x\cdot 2(2x-1) =$

$$= (2x-1)(3 + 2x)$$

2 Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες.

α) $8x + 16 = 8(x + 2)$

β) $3\alpha y - y^2 = y(3\alpha - y)$

γ) $6x^2 + 12x = 6x \cdot (x + 2)$

δ) $-4x^2 + 8x = -4x(x - 2)$

ε) $\sqrt{2}x + \sqrt{2} = \sqrt{2}(x + 1)$

στ) $(x - 1)^2 - (x - 1) = (x - 1)(x - 1 - 1)$

1 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $3\alpha + 6\beta$ β) $2x - 8$ γ) $8\omega^2 + 6\omega$

δ) $-9x^2 - 6x$ ε) $8\alpha^2\beta + 4\alpha\beta^2$ στ) $2x^2 - 2xy + 2x$

ζ) $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \alpha\beta$ η) $2\alpha^3 - 4\alpha^2 + 6\alpha^2\beta$ θ) $\sqrt{2}\,xy - \sqrt{18}\,y + \sqrt{8}\,y^2$

α) $3\alpha + 6\beta = 3(\alpha + 2\beta)$

β) $2x - 8 = 2(x - 4)$

γ) $8\omega^2 + 6\omega = 2\omega(4\omega + 3)$

δ) $-9x^2 - 6x = -3x(3x + 2)$

ε) $8\alpha^2\beta + 4\alpha\beta^2 = 4\alpha\beta(2\alpha + \beta)$

στ) $2x^2 - 2xy + 2x = 2x(x - y + 1)$

ζ) $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \alpha\beta = \alpha\beta(\alpha + \beta - 1)$

η) $2\alpha^3 - 4\alpha^2 + 6\alpha^2\beta = 2\alpha^2(\alpha - 2 + 3\beta)$

θ) $\sqrt{2}\,xy - \sqrt{18}\,y + \sqrt{8}\,y^2 = \sqrt{2}\,xy - \sqrt{2\cdot 9}\,y + \sqrt{2\cdot 4}\,y^2 =$

$= \sqrt{2}\,xy - \sqrt{2}\cdot\sqrt{9}\,y + \sqrt{2}\cdot\sqrt{4}\,y^2$

$= \sqrt{2}\,xy - 3\sqrt{2}\,y + 2\sqrt{2}\,y^2$

$= \sqrt{2}\,y\,(x - 3 + 2y)$

2 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $x(\alpha-\beta)+y(\alpha-\beta)$ **β)** $\alpha(x+y)+\beta(x+y)$ **γ)** $(3x-1)(x-2)-(x+4)(x-2)$

δ) $\alpha^2(\alpha-2)-3(2-\alpha)$ **ε)** $4x(x-1)-x+1$ **στ)** $2x^2(x-3)-6x(x-3)^2$

α) $x(\alpha-\beta)+y(\alpha-\beta)=(\alpha-\beta)(x+y)$

β) $\alpha(x+y)+\beta(x+y)=(x+y)(\alpha+\beta)$

γ) $(3x-1)(x-2)-(x+4)(x-2)=(x-2)[(3x-1)-(x+4)]$

$=(x-2)(3x-1-x-4)$

$=(x-2)(2x-5)$

δ) $\alpha^2(\alpha-2)-3(2-\alpha)=\alpha^2(\alpha-2)+3(-2+\alpha)=\alpha^2(\alpha-2)+3(\alpha-2)$

$=(\alpha-2)(\alpha^2+3)$

ε) $4x(x-1)-x+1=4x\underline{(x-1)}-\underline{(x-1)}=(x-1)(4x-1)$

στ) $\underline{2}\underline{x}^2\underline{(x-3)}-\underline{6}\underline{x}\,\underline{(x-3)}^2=2x(x-3)(x-3(x-3))=2x(x-3)(x-3x+9)$

3 i) Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $x^2 + x$ β) $2y^2 - 5y$ γ) $\omega(\omega - 3) - 2(3 - \omega)$ δ) $\alpha(3\alpha + 1) - 4\alpha$

ii) Να επιλύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^2 + x = 0$ β) $2y^2 = 5y$ γ) $\omega(\omega - 3) - 2(3 - \omega) = 0$ δ) $\alpha(3\alpha + 1) = 4\alpha$

(i) α) $x^2+x = x(x+1)$

β) $2y^2-5y = y(2y-5)$

γ) $\omega(\omega-3)-2(3-\omega) = \omega(\omega-3)-2(\omega-3)$

$=(\omega-3)(\omega-2)$

δ) $\alpha(3\alpha+1)-4\alpha = \alpha\cdot(3\alpha+1-4) = \alpha(3\alpha-3) = 3\alpha(\alpha-1)$

(ii) α) $x^2+x=0$, $x(x+1)=0$ — $x=0$ ή $x+1=0$, $x=-1$.

β) $2y^2=5y \Rightarrow 2y^2-5y=0$

$y(2y-5)=0$ → $y=0$ ή → $2y-5=0$

$2y=5$

$y=\frac{5}{2}$

γ) $\omega(\omega-3)-2(3-\omega)=0 \Rightarrow (\omega-3)(\omega-2)=0$ → $\omega-3=0 \Rightarrow \omega=3$ → $\omega-2=0 \Rightarrow \omega=2$

δ) $\alpha(3\alpha+1)=4\alpha \Rightarrow \alpha(3\alpha+1)-4\alpha=0 \Rightarrow 3\alpha(\alpha-1)=0$ → $\alpha=0$ → $\alpha-1=0 \Rightarrow \alpha=1$.

Παραγοντοποίηση κατά ομάδες

Στην παράσταση αx + αy + 2x + 2y, δεν υπάρχει κοινός παράγοντας σε όλους τους όρους της. Αν όμως βγάλουμε κοινό παράγοντα, από τους δύο πρώτους όρους το α και από τους δύο τελευταίους το 2, τότε σχηματίζονται δύο όροι με κοινό παράγοντα τον x + y. Έτσι, η παράσταση παραγοντοποιείται ως εξής:

$$\underbrace{\alpha x + \alpha y} + \underbrace{2x + 2y} = \alpha(x + y) + 2(x + y) = (x + y)(\alpha + 2)$$

Την προηγούμενη παράσταση μπορούμε να τη χωρίσουμε και σε διαφορετικές **ομάδες**. Το αποτέλεσμα όμως της παραγοντοποίησης είναι και πάλι το ίδιο. Πράγματι, έχουμε:

$$\alpha x + \alpha y + 2x + 2y = x(\alpha + 2) + y(\alpha + 2) = (\alpha + 2)(x + y)$$

Παραδείγματα

Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:

α) $3x^3 - 12x^2 + 5x - 20$ β) $αβ - 3α - 3β + 9$ γ) $3x^2 + 5xy + 2y^2$

Λύση

α) $3x^3 - 12x^2 + 5x - 20 = 3x^2(x - 4) + 5(x - 4) = (x - 4)(3x^2 + 5)$

β) $αβ - 3α - 3β + 9 = α(β - 3) - 3(β - 3) = (β - 3)(α - 3)$

γ) $3x^2 + 5xy + 2y^2 = 3x^2 + 3xy + 2xy + 2y^2 =$

$= 3x(x + y) + 2y(x + y) =$

$= (x + y)(3x + 2y).$

Μερικές παραστάσεις παραγοντοποιούνται κατά ομάδες, αν **διασπάσουμε** κατάλληλα έναν ή περισσότερους όρους
π.χ. $5xy = 3xy + 2xy$

4 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $x^2 + xy + \alpha x + \alpha y$ β) $x^3 - x^2 + x - 1$ γ) $x^3 - 5x^2 + 4x - 20$

δ) $2x^3 - 3x^2 + 4x - 6$ ε) $4x^2 - 8x - \alpha x + 2\alpha$ στ) $9\alpha\beta - 18\beta^2 + 10\beta - 5\alpha$

ζ) $12x^2 - 8xy - 15x + 10y$ η) $x^3 + \sqrt{2}\,x^2 + x + \sqrt{2}$ θ) $\sqrt{6}x^2 + 2\sqrt{2}x - \sqrt{3}x - 2$

α) $x^2+xy+\alpha x+\alpha y = x(x+y)+\alpha(x+y) = (x+y)(x+\alpha)$

β) $x^3-x^2+x-1 = x^2(x-1)+(x-1) = (x-1)(x^2+1)$

γ) $x^3-5x^2+4x-20 = x^2(x-5)+4(x-5) = (x-5)(x^2+4)$

δ) $2x^3-3x^2+4x-6 = x^2(2x-3)+2(2x-3) = (2x-3)(x^2+2)$

ε) $4x^2-8x-\alpha x+2\alpha = 4x(x-2)-\alpha(x-2) = (x-2)(4x-\alpha)$

4 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $x^2 + xy + αx + αy$ β) $x^3 - x^2 + x - 1$ γ) $x^3 - 5x^2 + 4x - 20$

δ) $2x^3 - 3x^2 + 4x - 6$ ε) $4x^2 - 8x - αx + 2α$ στ) $9αβ - 18β^2 + 10β - 5α$

ζ) $12x^2 - 8xy - 15x + 10y$ η) $x^3 + \sqrt{2}x^2 + x + \sqrt{2}$ θ) $\sqrt{6}x^2 + 2\sqrt{2}x - \sqrt{3}x - 2$

στ) $9αβ - 18β^2 + 10β - 5α = 9β(α - 2β) - 5(α - 2β) = (α - 2β)(9β - 5)$

ζ) $12x^2 - 8xy - 15x + 10y = 4x(3x - 2y) - 5(3x - 2y) = (3x - 2y)(4x - 5)$

η) $x^3 + \sqrt{2}x^2 + x + \sqrt{2} = x^2(x + \sqrt{2}) + x + \sqrt{2} = (x + \sqrt{2})(x^2 + x)$

θ) $\sqrt{6}x^2 + 2\sqrt{2}x - \sqrt{3}x - 2 = \sqrt{2}\cdot\sqrt{3}x^2 + 2\sqrt{2}x - \sqrt{3}x - 2 = \sqrt{2}x(\sqrt{3}x + 2) - (\sqrt{3}x + 2) =$

$= (\sqrt{3}x + 2)(\sqrt{2}x - 1)$