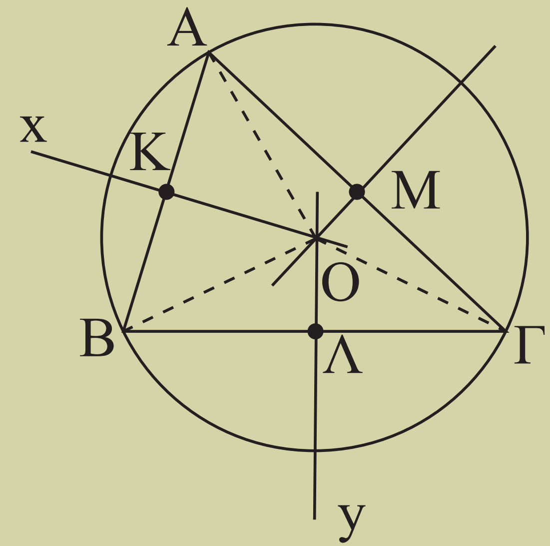
Γεωμετρία Α' Λυκείου

4.5 - Αξιοσημείωτοι κύκλοι τριγώνου

► Ο περιγεγραμμένος κύκλος τριγώνου

Θα αποδείξουμε ότι για κάθε τρίγωνο υπάρχει κύκλος που διέρχεται από τις τρεις κορυφές του. Ο κύκλος αυτός λέγεται ***περιγεγραμμένος*** κύκλος του τριγώνου και επιπλέον αποδεικνύεται ότι το κέντρο του είναι ένα σημείο στο οποίο συντρέχουν και οι τρεις μεσοκάθετοι του τριγώνου και λέγεται ***περίκεντρο***.



ΘΕΩΡΗΜΑ

Οι τρεις μεσοκάθετοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι κέντρο κύκλου που διέρχεται από τις κορυφές του τριγώνου.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

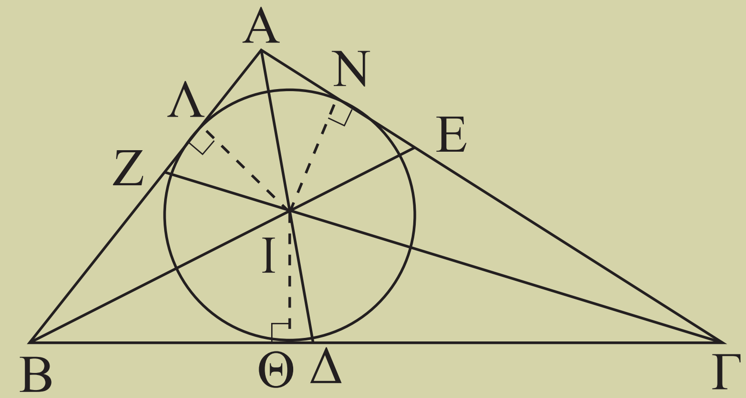
Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και Κ, Λ, Μ τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα. Οι μεσοκάθετοι Κx και Λy των ΑΒ, ΒΓ θα τέμνονται σε σημείο Ο, αφού τέμνονται οι κάθετες ευθείες τους ΑΒ και ΒΓ. Το Ο ισαπέχει από τις κορυφές Α και Β αφού ανήκει στη μεσοκάθετο της πλευράς ΑΒ, δηλαδή ΟΑ = ΟΒ. Επίσης ΟΒ = ΟΓ, αφού το Ο ανήκει στη μεσοκάθετο της πλευράς ΒΓ. Επομένως ισχύει ότι ΟΑ = ΟΓ, οπότε το Ο θα ανήκει και στη μεσοκάθετο της ΑΓ. Άρα, ο κύκλος (Ο, ΟΑ) θα διέρχεται από τις τρεις κορυφές του τριγώνου ΑΒΓ και είναι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου.

► Ο εγγεγραμμένος κύκλος τριγώνου

Ένας άλλος σημαντικός κύκλος βρίσκεται στο εσωτερικό τριγώνου και εφάπτεται και στις τρεις πλευρές του. Θα αποδείξουμε ότι για κάθε τρίγωνο υπάρχει κύκλος με την ιδιότητα αυτή. Ο κύκλος αυτός λέγεται ***εγγεγραμμένος*** κύκλος του τριγώνου και το κέντρο του, το οποίο λέγεται ***έγκεντρο***, θα είναι το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών του τριγώνου.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Οι διχοτόμοι των γωνιών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι κέντρο κύκλου που εφάπτεται και στις τρεις πλευρές του τριγώνου.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ

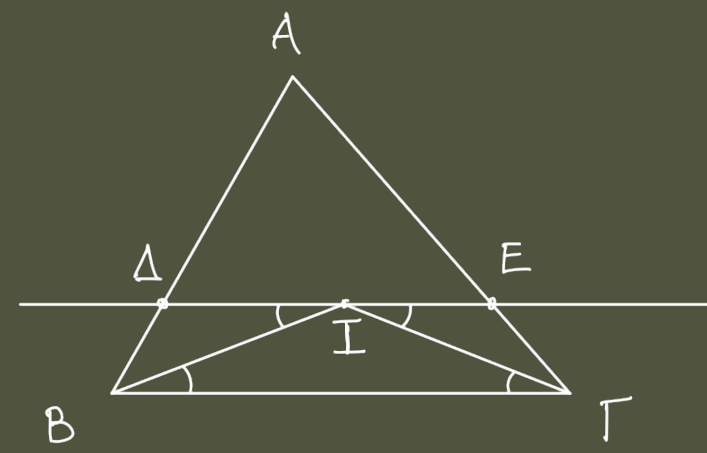
Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και οι διχοτόμοι ΒΕ και ΓΖ των γωνιών του $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ αντίστοιχα. Οι ΒΕ και ΓΖ τέμνονται σε σημείο Ι αφού $E\hat{B}\Gamma + Z\hat{\Gamma}B = \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} < \hat{B} + \hat{\Gamma} < 2L$. (§4.2 - Πρόταση IV)

Το Ι ως σημείο της διχοτόμου της $\hat{B}$ θα ισαπέχει από τις πλευρές της ΒΑ και ΒΓ, δηλαδή ΙΛ = ΙΘ. Ανάλογα το Ι θα ισαπέχει από τις πλευρές της $\hat{\Gamma}$, δηλαδή ΙΘ = ΙΝ. Επομένως το Ι ισαπέχει από τις ΑΒ και ΑΓ και θα ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{A}$.

Τελικά, το Ι είναι το σημείο τομής και των τριών διχοτόμων του τριγώνου. Με κέντρο το Ι και ακτίνα την κοινή απόσταση του Ι από τις πλευρές του ΑΒΓ, γράφεται κύκλος που εφάπτεται και στις τρεις πλευρές του τριγώνου.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

4. *Από το έγκεντρο Ι, τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε ευθεία παράλληλη της ΒΓ που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΔΕ = ΒΔ+ΓΕ.*



Το έγκεντρο είναι το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών του τριγώνου.

Οι $ΔΕ // ΒΓ$. οπότε $\hat{ΙΒΓ} = \hat{ΔΙΒ}$ (εντός εναλλάξ)

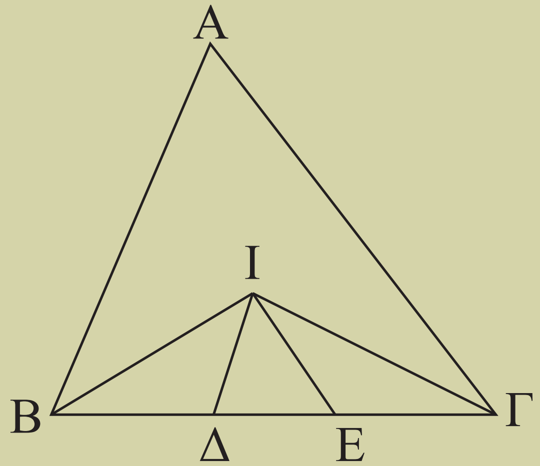
όμως $\hat{ΙΒΓ} = \hat{ΔΒΙ}$ αφού ΒΙ διχοτόμος, άρα

$\hat{ΔΒΙ} = \hat{ΔΙΒ} \Leftrightarrow \overset{\triangle}{ΔΒΙ}$ ισοσκελές άρα $ΔΒ = ΔΙ$.

Ομοίως $ΕΓ = ΕΙ$. Οπότε $ΔΕ = ΔΙ + ΙΕ$

$= ΔΒ + ΕΓ$ και αποδείχτηκε

5. *Από το έγκεντρο Ι τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε ΙΔ//ΑΒ και ΙΕ//ΑΓ. Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του τριγώνου ΔΙΕ ισούται με τη ΒΓ.*



Γνωρίζουμε ότι το έγκεντρο είναι το σημείο τομής των διχοτόμων των πλευρών του τριγώνου, άρα

$IB = I\Gamma$. (1)

Επίσης $AB /\!/ I\Delta$ άρα

$$B\hat{I}\Delta = A\hat{B}I = I\hat{B}\Delta$$

εντός εναλλάξ BI διχοτόμος

άρα $\overset{\triangle}{BI\Delta}$ ισοσκελές

ομοίως $\overset{\triangle}{IE\Gamma}$ ισοσκελές

Άρα $B\Gamma = B\Delta + \Delta E + E\Gamma = I\Delta + \Delta E + IE =$ περίμετρος του $\overset{\triangle}{I\Delta E}$