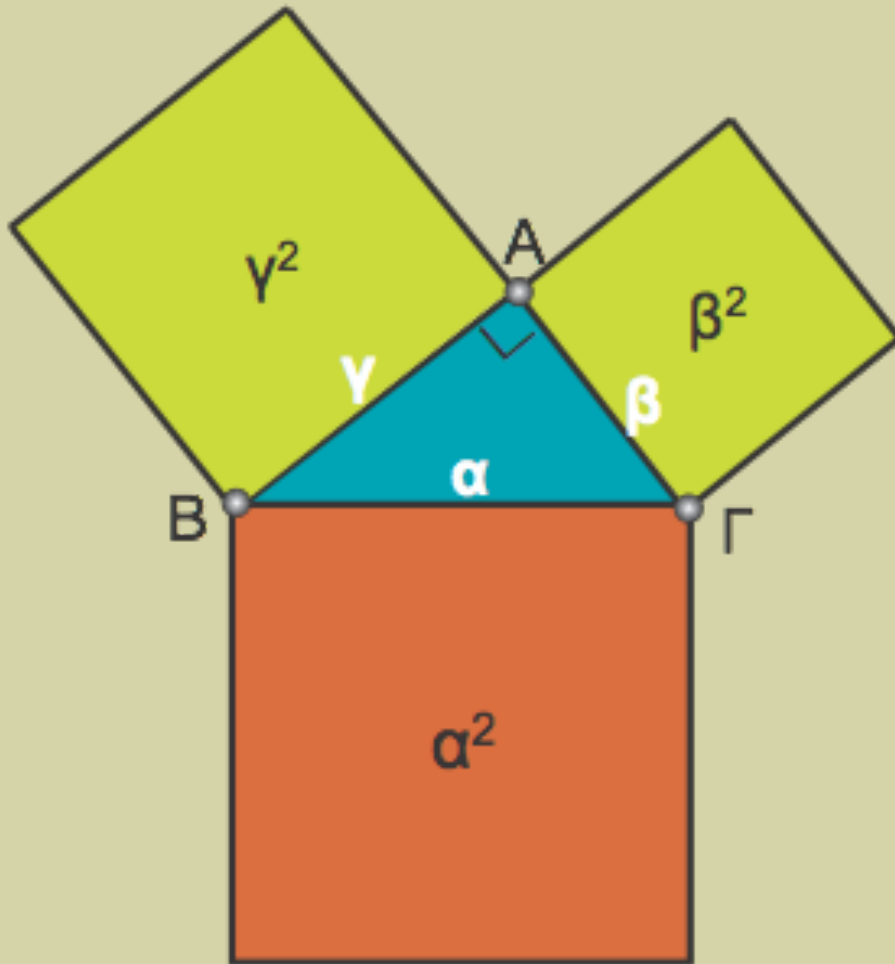


Μαθηματικά Β' Γυμνασίου

Μάθημα 4 - Πυθαγόρειο Θεώρημα

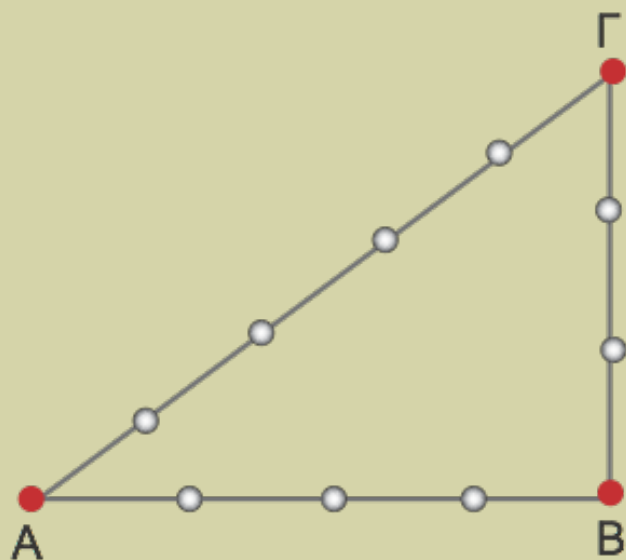


ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το άθροισμα των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας.



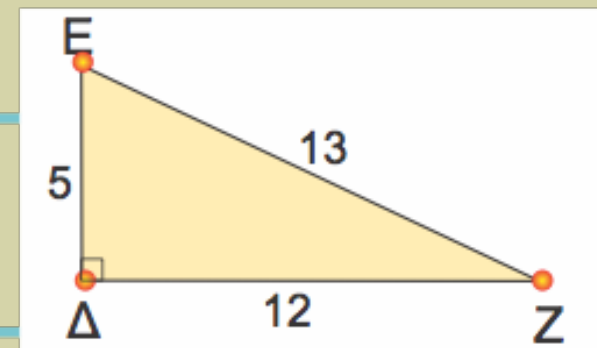
Στην Αρχαία Αίγυπτο για την κατασκευή ορθών γωνιών χρησιμοποιούσαν το σκοινί του παραπάνω σχήματος. Όπως βλέπουμε, το σκοινί έχει 13 κόμπους σε ίσες αποστάσεις μεταξύ τους που σχηματίζουν 12 ίσα ευθύγραμμα τμήματα.



Κρατώντας τους ακραίους κόμπους ενωμένους και τεντώνοντας το σκοινί στους κόκκινους κόμπους, σχηματίζεται το τρίγωνο $AB\Gamma$, το οποίο οι αρχαίοι Αιγύπτιοι πίστευαν ότι είναι ορθογώνιο με ορθή γωνία την κορυφή B . Μεταγενέστερα, οι αρχαίοι Έλληνες επαλήθευσαν τον ισχυρισμό αυτό αποδεικνύοντας την επόμενη γενική πρόταση, που είναι γνωστή ως το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος:

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Να επαληθεύσετε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο του διπλανού σχήματος.



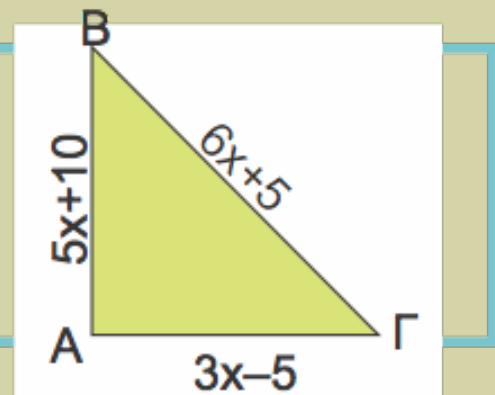
Λύση: Στο τρίγωνο ΔΕΖ οι κάθετες πλευρές έχουν μήκη 5 και 12, οπότε το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων πλευρών είναι $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$. Επιπλέον, η υποτείνουσα έχει μήκος 13 και το τετράγωνό της ισούται με: $13^2 = 169$. Επομένως, ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα, αφού: $5^2 + 12^2 = 13^2$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Στο διπλανό σχήμα, το τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει περίμετρο 150 m.

α) Να βρείτε τον αριθμό x .

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.



Λύση: α) Η περίμετρος του τριγώνου είναι:
 $AB + B\Gamma + \Gamma A = 5x + 10 + 6x + 5 + 3x - 5 = 14x + 10$.

Σύμφωνα με την εκφώνηση είναι:

$$14x + 10 = 150 \quad \text{ή} \quad 14x = 150 - 10 \quad \text{ή}$$

$$14x = 140 \quad \text{ή} \quad x = \frac{140}{14}.$$

Άρα $x = 10$.

β) Για $x = 10$ τα μήκη των πλευρών (σε μέτρα) είναι:

$$AB = 5 \cdot 10 + 10 = 60,$$

$$A\Gamma = 3 \cdot 10 - 5 = 25,$$

$$B\Gamma = 6 \cdot 10 + 5 = 65.$$

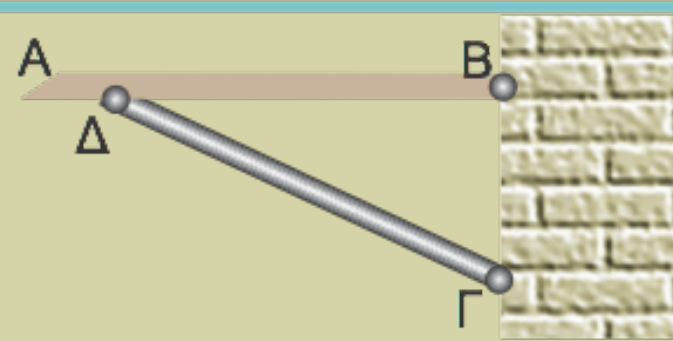
$$\text{Επομένως: } AB^2 + A\Gamma^2 = 60^2 + 25^2 = 3600 + 625 = 4225.$$

$$\text{Επίσης: } B\Gamma^2 = 65^2 = 4225.$$

Επομένως: $AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2$ και σύμφωνα με το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Ένα ράφι AB είναι στερεωμένο σε ένα κατακόρυφο τοίχο με ένα μεταλλικό στήριγμα μήκους $\Gamma\Delta = 32,6 \text{ cm}$. Αν $B\Delta = 27,7 \text{ cm}$ και $B\Gamma = 17,2 \text{ cm}$, να εξετάσετε αν το ράφι είναι οριζόντιο.



Λύση: Το ράφι θα είναι οριζόντιο, μόνο αν είναι κάθετο στον τοίχο, δηλαδή αν το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο στο B .

Είναι: $B\Delta^2 + B\Gamma^2 = 27,7^2 + 17,2^2 = 767,29 + 295,84 = 1063,13$.

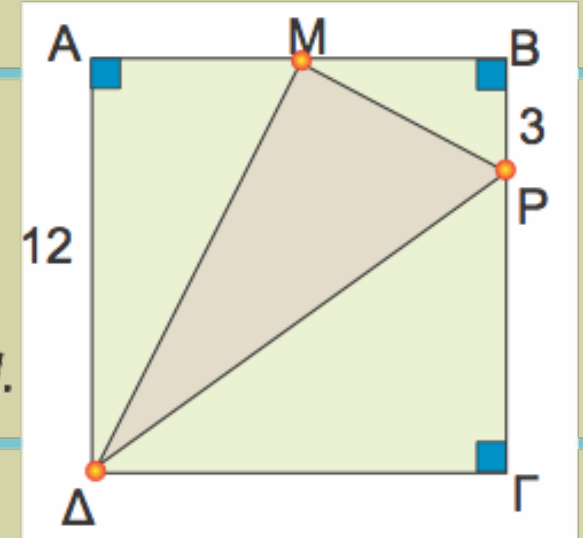
Επίσης: $\Gamma\Delta^2 = 32,6^2 = 1062,76$.

Επομένως: $B\Delta^2 + B\Gamma^2 \neq \Gamma\Delta^2$, οπότε το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ δεν είναι ορθογώνιο.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

Στο διπλανό σχήμα δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς 12 cm . Το σημείο M είναι το μέσο της πλευράς AB και $BP = 3\text{ cm}$.

- α) Να υπολογίσετε τα $M\Delta^2$, MP^2 και ΔP^2 .
β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $MP\Delta$ είναι ορθογώνιο στο M .



Λύση: α) Αφού το M είναι μέσο του AB , είναι $AM = MB = 6\text{ (cm)}$.

Επίσης: $\Gamma P = 12 - 3 = 9\text{ (cm)}$.

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $AM\Delta$ έχουμε:

$$M\Delta^2 = A\Delta^2 + AM^2 = 12^2 + 6^2 = 144 + 36 = 180.$$

Ομοίως, στο ορθογώνιο τρίγωνο MBP έχουμε:

$$MP^2 = MB^2 + BP^2 = 6^2 + 3^2 = 36 + 9 = 45,$$

και στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Delta\Gamma P$ έχουμε:

$$\Delta P^2 = \Delta\Gamma^2 + \Gamma P^2 = 12^2 + 9^2 = 144 + 81 = 225.$$

- β) Είναι $M\Delta^2 + MP^2 = 180 + 45 = 225 = \Delta P^2$, οπότε σύμφωνα με το αντίστροφο του Πυθαγόρειου θεωρήματος, το τρίγωνο $MP\Delta$ είναι ορθογώνιο στο M .