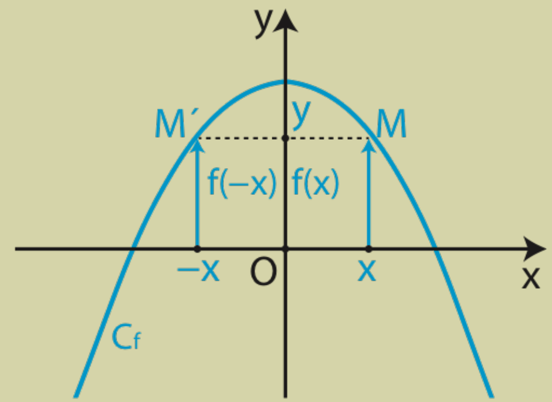
Άλγεβρα Β’ Λυκείου

Μάθημα 4: Άρτιες και περιττές συναρτήσεις

Άρτια συνάρτηση

α) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f που έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι η C_f έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y'y, αφού το συμμετρικό κάθε σημείου της C_f ως προς τον άξονα y'y ανήκει στη C_f.



Επειδή, όμως, το συμμετρικό του τυχαίου σημείου M(x, y) της C_f ως προς τον άξονα y'y είναι το σημείο $M'(-x, y)$ και επειδή τα σημεία M(x, y) και $M'(-x, y)$ ανήκουν στη C_f, θα ισχύει $y = f(x)$ και $y = f(-x)$, οπότε θα έχουμε:

$$f(-x) = f(x)$$

Η συνάρτηση f με την παραπάνω ιδιότητα λέγεται **άρτια**. Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A, θα λέγεται **άρτια**, όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει:

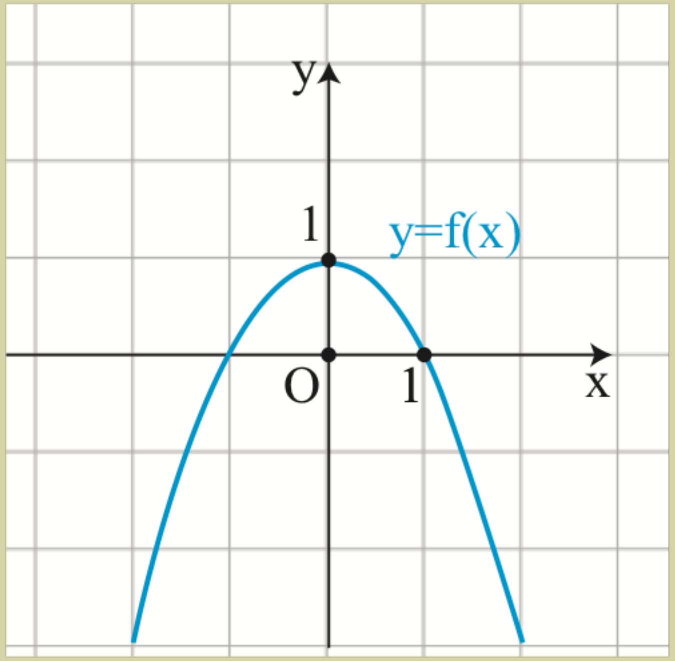
$$-x \in A \quad \text{και} \quad f(-x) = f(x)$$

Η γραφική παράσταση μιας **άρτιας** συνάρτησης έχει **άξονα συμμετρίας** τον άξονα y΄y.

Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x)=2x^4-x^2+1$ είναι άρτια συνάρτηση, αφού έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

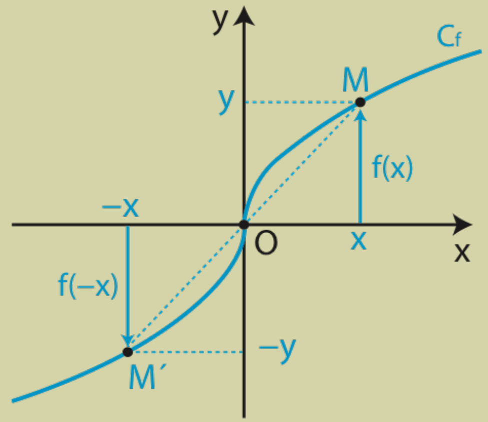
$$f(-x)=2(-x)^4-(-x)^2+1=2x^4-x^2+1=f(x)$$

Συνεπώς, η γραφική της παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y'y.



Περιττή συνάρτηση

β) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f που έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$.
Παρατηρούμε ότι η C_f έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων, αφού το συμμετρικό κάθε σημείου της C_f ως προς την αρχή των αξόνων ανήκει στη C_f.



Επειδή, όμως, το συμμετρικό του τυχαίου σημείου M(x, y) της C_f ως προς την αρχή των αξόνων είναι το σημείο $M'(-x,-y)$ και επειδή τα σημεία M(x, y) και $M'(-x,-y)$ ανήκουν στη C_f, θα ισχύει $y = f(x)$ και $-y = f(-x)$, οπότε θα έχουμε:

$$f(-x) = -f(x)$$

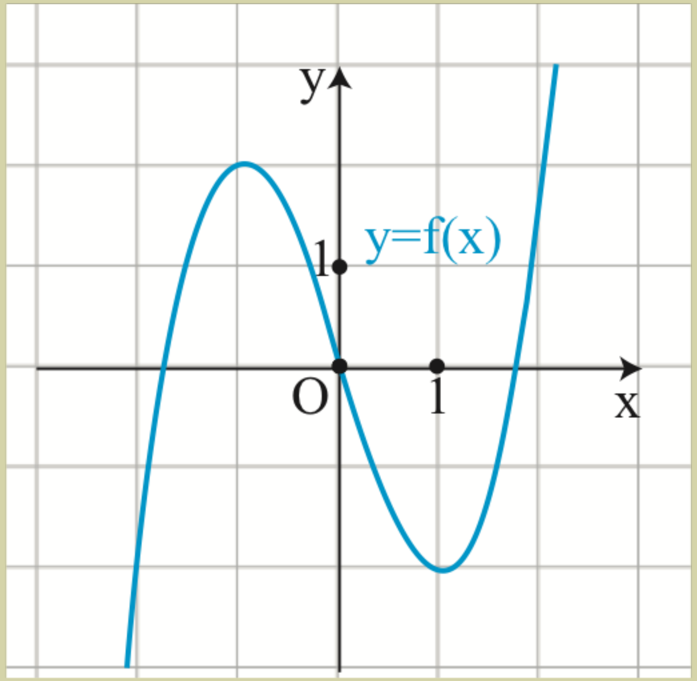
Η συνάρτηση f με την παραπάνω ιδιότητα λέγεται **περιττή**. Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, θα λέγεται **περιττή**, όταν για κάθε $x \in A$ ισχύει:

$$-x \in A \text{ και } f(-x) = -f(x)$$

Η γραφική παράσταση μιας **περιττής** συνάρτησης έχει **κέντρο συμμετρίας** την αρχή των αξόνων.



Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x)=2x^3-x$ είναι περιττή συνάρτηση, διότι έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(-x)=2(-x)^3-(-x)=-2x^3+x=-f(x)$$

Συνεπώς, η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

4) Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες είναι περιττές:

i) $f_1(x) = 3x^2 + 5x^4$ ii) $f_2(x) = 3|x| + 1$ iii) $f_3(x) = |x+1|$

iv) $f_4(x) = x^3 - 3x^5$ v) $f_5(x) = \dfrac{x^2}{1+x}$ vi) $f_6(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

i) Για να δούμε αν μία συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή, θα πρέπει να δώσουμε σαν είσοδο το "$-x$". Έτσι έχουμε

$$f_1(-x) = 3(-x)^2 + 5(-x)^4 = 3x^2 + 5x^4 = f_1(x)$$

βλέπουμε ότι η συνάρτηση έδωσε έξοδο το $f_1(x)$ άρα αφού

$$f(-x) = f(x) \Leftrightarrow f \text{ άρτια}$$

η $f_1(x)$ είναι άρτια.

ii) $f_2(-x) = 3|-x| + 1 = 3|x| + 1 = f_2(x)$ άρα η $f_2(x)$ είναι άρτια.

iii) $f_3(-x) = |-x+1|$ εδώ βλέπουμε ότι η συνάρτηση δέχεται το $-x$ και αλλάζει τελείως ο τύπος της. Δηλαδή ούτε το εξαφανίζει, ούτε το "φτύνει". Άρα δεν είναι ούτε άρτια αλλά ούτε και περιττή.

4) Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες είναι περιττές:

i) $f_1(x)=3x^2+5x^4$ ii) $f_2(x)=3|x|+1$ iii) $f_3(x)=|x+1|$

iv) $f_4(x)=x^3-3x^5$ v) $f_5(x)=\dfrac{x^2}{1+x}$ vi) $f_6(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$.

iv) $f_4(-x)=(-x)^3-3(-x)^5=-x^3+3x^5=-(x^3-3x^5)=-f_4(x)$

εδώ η συνάρτηση "έφτυσε" το "−" οπότε αφού

$$f(-x)=-f(x) \Leftrightarrow f \text{ περιττή}$$

θα είναι περιττή.

v) $f_5(-x)=\dfrac{(-x)^2}{1+(-x)}=\dfrac{x^2}{1-x}$ ούτε άρτια ούτε περιττή.

vi) $f_6(-x)=\dfrac{2(-x)}{(-x)^2+1}=\dfrac{-2x}{x^2+1}=-\dfrac{2x}{x^2+1}=-f_6(x)$ άρα είναι περιττή