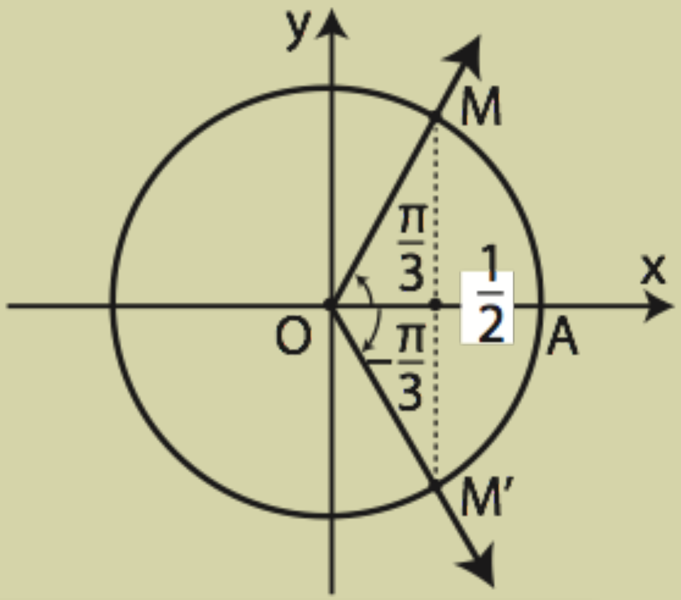
Άλγεβρα Β’ Λυκείου

Τριγωνομετρικές Εξισώσεις ΙΙ

Η εξίσωση συνx = α

Με ανάλογες σκέψεις, όπως προηγουμένως, εργαζόμαστε για να λύσουμε π.χ. την εξίσωση $\sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2}$.



Με τη βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου βρίσκουμε ότι οι λύσεις της εξίσωσης $\sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2}$ στο διάστημα $[-\pi, \pi]$ είναι οι $\frac{\pi}{3}$ και $-\frac{\pi}{3}$, γιατί

$$\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} = \sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

Επομένως το σύνολο των λύσεων της εξίσωσης $\sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2}$ δίνεται από τους τύπους

$$\left\{\begin{array}{l} x = 2\kappa\pi + \dfrac{\pi}{3} \\ \quad\quad ή \\ x = 2\kappa\pi - \dfrac{\pi}{3} \end{array}\right. , \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

Γενικότερα, αν θ είναι μία λύση της εξίσωση $\sigma\upsilon\nu x = \alpha$, αν δηλαδή ισχύει $\sigma\upsilon\nu\theta = \alpha$, τότε οι λύσεις της εξίσωσης αυτής δίνονται από τους τύπους

$$\begin{array}{l} x = 2\kappa\pi + \theta \\ \quad\quad ή \quad\quad \kappa \in \mathbb{Z} \\ x = 2\kappa\pi - \theta \end{array}$$

Μεθοδολογία:

Για να λύσουμε εξισώσεις της μορφής συν$x = a$

i. Βρίσκουμε ποιας γωνίας το συνημίτονο είναι a

ii. Γράφουμε τη σχέση συν$x =$ συνθ όπου θ είναι η γωνία που βρήκαμε πριν.

iii. Αντικαθιστούμε σύμφωνα με τους τύπους:

$$x = 2k\pi + \theta$$

ή $\qquad k \in \mathbb{Z}$

$$x = 2k\pi - \theta$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1ο Να λυθεί η εξίσωση $\text{συν}x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

ΛΥΣΗ

Επειδή $\text{συν}\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, έχουμε $\text{συν}x = \text{συν}\dfrac{\pi}{4}$, οπότε οι λύσεις της εξίσωσης αυτής δίνονται από τους τύπους:

$$\begin{cases} x = 2\kappa\pi + \dfrac{\pi}{4} \\ \quad\quad\text{ή} \\ x = 2\kappa\pi - \dfrac{\pi}{4} \end{cases}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

2ο Να λυθεί η εξίσωση $\sigma\upsilon\nu 2x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ΛΥΣΗ

Επειδή $\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, ισχύει $\sigma\upsilon\nu\left(\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ δηλαδή $\sigma\upsilon\nu\dfrac{5\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Έχουμε επομένως $\sigma\upsilon\nu 2x = \sigma\upsilon\nu\dfrac{5\pi}{6}$, οπότε

$$\begin{cases} 2x = 2\kappa\pi + \dfrac{5\pi}{6} \\ \quad\quad ή \\ 2x = 2\kappa\pi - \dfrac{5\pi}{6} \end{cases}, \quad \kappa \in \mathbb{Z} \qquad ή \text{ ισοδύναμα } \qquad \begin{cases} x = \kappa\pi + \dfrac{5\pi}{12} \\ \quad\quad ή \\ x = \kappa\pi - \dfrac{5\pi}{12} \end{cases}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $ημx = 0$ ii) $ημx = \frac{\sqrt{2}}{2}$ iii) $συνx = 0$ iv) $συνx = \frac{\sqrt{2}}{2}$

i) $ημx = 0$ Ποιας γωνίας το ημ είναι μηδέν; Των 0°. Οπότε γράφουμε

$ημx = ημ0$ άρα $\left.\begin{array}{l} x = 0 + 2κπ \text{ ή} \\ x = π - 0 + 2κπ \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x = 2κπ \text{ ή} \\ x = (2κ+1)π \end{array}\right\}$ Η διπλανή σχέση δίνει άρτια και περιττά πολλαπλάσια του π, οπότε

οι λύσεις συνοψίζονται στον τύπο

$$x = nπ, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

ii) $ημx = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow ημx = ημ\frac{π}{4} \Leftrightarrow$ $\left.\begin{array}{l} x = \frac{π}{4} + 2κπ \\ \text{ή} \\ x = π - \frac{π}{4} + 2κπ \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x = \frac{π}{4} + 2κπ \\ x = \frac{3π}{4} + 2κπ \end{array}$ $κ \in \mathbb{Z}$.

iii) $συνx = 0 \Leftrightarrow συνx = συν\frac{π}{2}$ άρα $x = \frac{π}{2} + 2κπ$ ή $x = -\frac{π}{2} + 2κπ$ με $κ \in \mathbb{Z}$.

iv) $συνx = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow συνx = συν\frac{π}{4}$ άρα $x = \frac{π}{4} + 2κπ$ ή $x = -\frac{π}{4} + 2κπ$ με $κ \in \mathbb{Z}$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $\eta\mu x = -\frac{1}{2}$ ii) $\eta\mu x = -1$ iii) $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ iv) $\sigma\upsilon\nu x = -1$

i) $\eta\mu x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = -\eta\mu\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ άρα

$x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ή $x = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi = 2k\pi + \frac{7\pi}{6}$ $k \in \mathbb{Z}$

ii) $\eta\mu x = -1 \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ή $x = \pi - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + 2k\pi$

$= \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$

iii) $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4}$ ή $x = 2k\pi - \left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4}$ ή $x = 2k\pi - \frac{3\pi}{4}$ $k \in \mathbb{Z}$

iv) $\sigma\upsilon\nu x = -1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\pi \Leftrightarrow x = 2k\pi + \pi$ ή $x = 2k\pi - \pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$x = (2k+1)\pi$ ή $x = (2k-1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

σε κάθε περίπτωση είναι τα περιττά πολλαπλάσια

του π.

5. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $(1-\eta\mu x)(2\eta\mu x-\sqrt{3})=0$ ii) $(2\eta\mu x+\sqrt{2})(1-\sigma\upsilon\nu x)=0$

(i) Όταν έχουμε ένα γινόμενο ίσο με μηδέν, τότε κάποιος απο τους παράγοντες θα είναι μηδέν. Οπότε $1-\eta\mu x=0$ ή $2\eta\mu x-\sqrt{3}=0$. Άρα:

- $\eta\mu x=1 \Leftrightarrow \eta\mu x=\eta\mu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ή $\pi-\frac{\pi}{2}+2k\pi$

  $\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ή $\frac{\pi}{2}+2k\pi$ (το ίδιο!) $k\in\mathbb{Z}$

- $2\eta\mu x-\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow \eta\mu x=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x=\eta\mu\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{3}$ ή $2k\pi+\pi-\frac{\pi}{3}$

  $\Leftrightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{3}$ ή $2k\pi+\frac{2\pi}{3}$

  $k\in\mathbb{Z}$

5. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $(1-\eta\mu x)(2\eta\mu x-\sqrt{3})=0$ ii) $(2\eta\mu x+\sqrt{2})(1-\sigma\upsilon\nu x)=0$

ii) $(2\eta\mu x+\sqrt{2})\cdot(1-\sigma\upsilon\nu x)=0$ ομοίως $2\eta\mu x+\sqrt{2}=0$ ή $1-\sigma\upsilon\nu x=0$ άρα

- $2\eta\mu x=-\sqrt{2} \Leftrightarrow \eta\mu x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x=\eta\mu\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x=2k\pi-\dfrac{\pi}{4}$ ή

$x=2k\pi+\pi-\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$ $k\in\mathbb{Z}$

δηλαδή $x=2k\pi-\dfrac{\pi}{4}$ ή $x=2k\pi+\pi+\dfrac{\pi}{4}=2k\pi+\dfrac{5\pi}{4}$, $k\in\mathbb{Z}$.

- $1-\sigma\upsilon\nu x=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu 0$ άρα $x=2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

Να λύσετε τις παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις:

i) $\sigma\upsilon\nu x = 0$

ii) $\sigma\upsilon\nu x = 1$

iii) $\sigma\upsilon\nu x = -1$

iv) $\sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2}$

v) $\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

vi) $\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

vii) $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

viii) $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{2}$