

# Μαθηματικά Γ' Γυμνασίου

Μάθημα 8 - Η ταυτότητα  $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

Ταυτότητα λέγεται μία αλγεβρική παράσταση που ισχύει για κάθε τιμή των μεταβλητών που περιέχει

$$x(x + 1) = x^2 + x$$

$$x - 1 = 0 \quad \text{Δεν είναι ταυτότητα, αληθεύει ΜΟΝΟ για } x=1$$

$$x^2 = x \cdot x$$

$$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

Στην παράγραφο αυτή θα μάθουμε τις πιο βασικές ταυτότητες που θα μας χρειαστούν σε όλη μας τη σχολική και φοιτητική ζωή

## Τετράγωνο αθροίσματος

Αν την παράσταση  $(a + b)^2$  τη γράψουμε  $(a + b)(a + b)$  και βρούμε το ανάπτυγμα του γινομένου, έχουμε:

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= (a + b)(a + b) = \\ &= a^2 + ab + ba + b^2 = \\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι κάθε φορά που θέλουμε να υπολογίσουμε το τετράγωνο ενός αθροίσματος μπορούμε αντί να κάνουμε την επιμεριστική ιδιότητα και να χάνουμε χρόνο, να παίρνουμε κατευθείαν το αποτέλεσμα της ταυτότητας. Δηλαδή να παίρνουμε το τετράγωνο του πρώτου όρου συν το διπλάσιο του πρώτου επί το δεύτερο συν το τετράγωνο του δεύτερου.

Η προηγούμενη ταυτότητα, όπως και όλες οι επόμενες, χρησιμοποιούνται και όταν τα  $a$ ,  $b$  είναι οποιεσδήποτε αλγεβρικές παραστάσεις, π.χ.

$$(2x + 3y)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3y + (3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$$

$$\begin{array}{ccccccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ (a + b)^2 & = & a^2 & + & 2ab & + & b^2 \end{array}$$

## Παραδείγματα

$$\begin{array}{ccccccc} (\alpha + \beta)^2 & = & \alpha^2 & + & 2\alpha\beta & + & \beta^2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \searrow & \searrow \\ (3 + x)^2 & = & 3^2 & + & 2 \cdot 3 \cdot x & + & x^2 \end{array} \quad \text{εδώ } \alpha=3 \text{ και } \beta=x$$

$$\begin{array}{ccccccc} (\alpha + \beta)^2 & = & \alpha^2 & + & 2\alpha\beta & + & \beta^2 \\ \downarrow & \downarrow & \searrow & & \searrow & \searrow & \searrow \\ (2x + 3)^2 & = & (2x)^2 & + & 2 \cdot (2x) \cdot 3 & + & 3^2 \end{array} \quad \text{εδώ } \alpha=2x \text{ και } \beta=3$$

1 Ποιες από τις παρακάτω ισότητες είναι ταυτότητες;  
α)  $0x = 0$    β)  $x + y = 0$    γ)  $a^2a = a^3$    δ)  $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$    ε)  $αβ = 0$

2 Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

i) Το ανάπτυγμα του  $(x + a)^2$  είναι:

α)  $x^2 + a^2$    β)  $x^2 - 2xa + a^2$    γ)  $x^2 + xa + a^2$    δ)  $x^2 + 2xa + a^2$

δ

ii) Το ανάπτυγμα του  $(2a + 1)^2$  είναι:

α)  $2a^2 + 4a + 1$    β)  $4a^2 + 1$    γ)  $4a^2 + 4a + 1$    δ)  $4a^2 + 2a + 1$

γ

1

Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α)  $(x + 2)^2$

β)  $(y + 5)^2$

γ)  $(2\omega + 1)^2$

δ)  $(\kappa + 2\lambda)^2$

ε)  $(3y + 2\beta)^2$

στ)  $(x^2 + 1)^2$

ζ)  $(y^2 + y)^2$

η)  $(2x^2 + 3x)^2$

θ)  $(x + \sqrt{2})^2$

ι)  $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2$

ια)  $\left(a + \frac{1}{2}\right)^2$

ιβ)  $\left(\omega + \frac{4}{\omega}\right)^2$

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$\alpha) (x+2)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 = x^2 + 4x + 4$$

$$\beta) (y+5)^2 = y^2 + 2 \cdot y \cdot 5 + 5^2 = y^2 + 10y + 25$$

$$\gamma) (2\omega+1)^2 = (2\omega)^2 + 2 \cdot (2\omega) \cdot 1 + 1^2 = 4\omega^2 + 4\omega + 1$$

$$\delta) (\kappa+2\lambda)^2 = \kappa^2 + 2 \cdot \kappa \cdot 2\lambda + (2\lambda)^2 = \kappa^2 + 4\kappa\lambda + 4\lambda^2$$

$$\epsilon) (3y+2\beta)^2 = (3y)^2 + 2(3y)(2\beta) + (2\beta)^2 = 9y^2 + 12y\beta + 4\beta^2$$

1 Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α)  $(x + 2)^2$

β)  $(y + 5)^2$

γ)  $(2\omega + 1)^2$

δ)  $(\kappa + 2\lambda)^2$

ε)  $(3y + 2\beta)^2$

στ)  $(x^2 + 1)^2$

ζ)  $(y^2 + y)^2$

η)  $(2x^2 + 3x)^2$

θ)  $(x + \sqrt{2})^2$

ι)  $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2$

ια)  $\left(a + \frac{1}{2}\right)^2$

ιβ)  $\left(\omega + \frac{4}{\omega}\right)^2$

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$\sigma\tau) (x^2 + 1)^2 = (x^2)^2 + 2(x^2) \cdot 1 + 1^2 = x^4 + 2x^2 + 1$$

$$\zeta) (y^2 + y)^2 = (y^2)^2 + 2 \cdot y^2 \cdot y + y^2 = y^4 + 2y^3 + y^2$$

$$\eta) (2x^2 + 3x)^2 = (2x^2)^2 + 2(2x^2)(3x) + (3x)^2 = 4x^4 + 12x^3 + 9x^2$$

$$i\alpha) \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 = 4x^4 + 12x^3 + 9x^2$$

$$i\beta) \left(\omega + \frac{4}{\omega}\right)^2 = \omega^2 + 2 \cdot \cancel{\omega} \cdot \frac{4}{\cancel{\omega}} + \left(\frac{4}{\omega}\right)^2 = \omega^2 + 8 + \frac{16}{\omega^2}$$