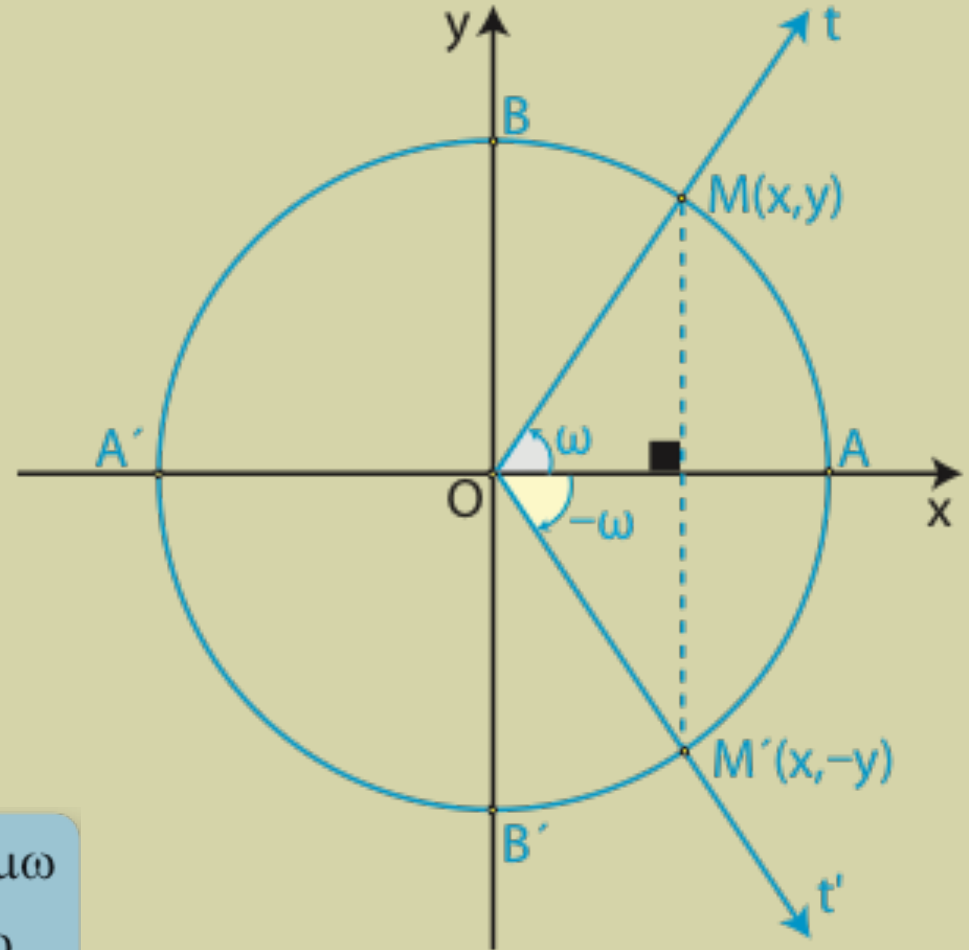
Άλγεβρα Β’ Λυκείου

Μάθημα 11: Αναγωγή στο 1ο τεταρτημόριο

Γωνίες αντίθετες

Αν οι γωνίες ω και ω' είναι αντίθετες, δηλαδή αν $\omega' = -\omega$, τότε, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, τα σημεία Μ και Μ΄ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα x'x. Επομένως τα σημεία αυτά έχουν την ίδια τετμημένη και αντίθετες τεταγμένες.

Έχοντας υπόψη τους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών, συμπεραίνουμε ότι:



$\sigma\upsilon\nu(-\omega) = \sigma\upsilon\nu\omega$	$\eta\mu(-\omega) = -\eta\mu\omega$
$\varepsilon\varphi(-\omega) = -\varepsilon\varphi\omega$	$\sigma\varphi(-\omega) = -\sigma\varphi\omega$

Δηλαδή:

Οι αντίθετες γωνίες έχουν το <u>ίδιο συνημίτονο</u> και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

Για παράδειγμα:

✓ Έχουμε:

$$\eta\mu(-30^\circ) = -\eta\mu(30^\circ) = -\frac{1}{2} \qquad \sigma\upsilon\nu(-30^\circ) = \sigma\upsilon\nu(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\varepsilon\varphi(-30^\circ) = -\varepsilon\varphi(30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \sigma\varphi(-30^\circ) = -\sigma\varphi(30^\circ) = -\sqrt{3}$$

✓ Επίσης, έχουμε:

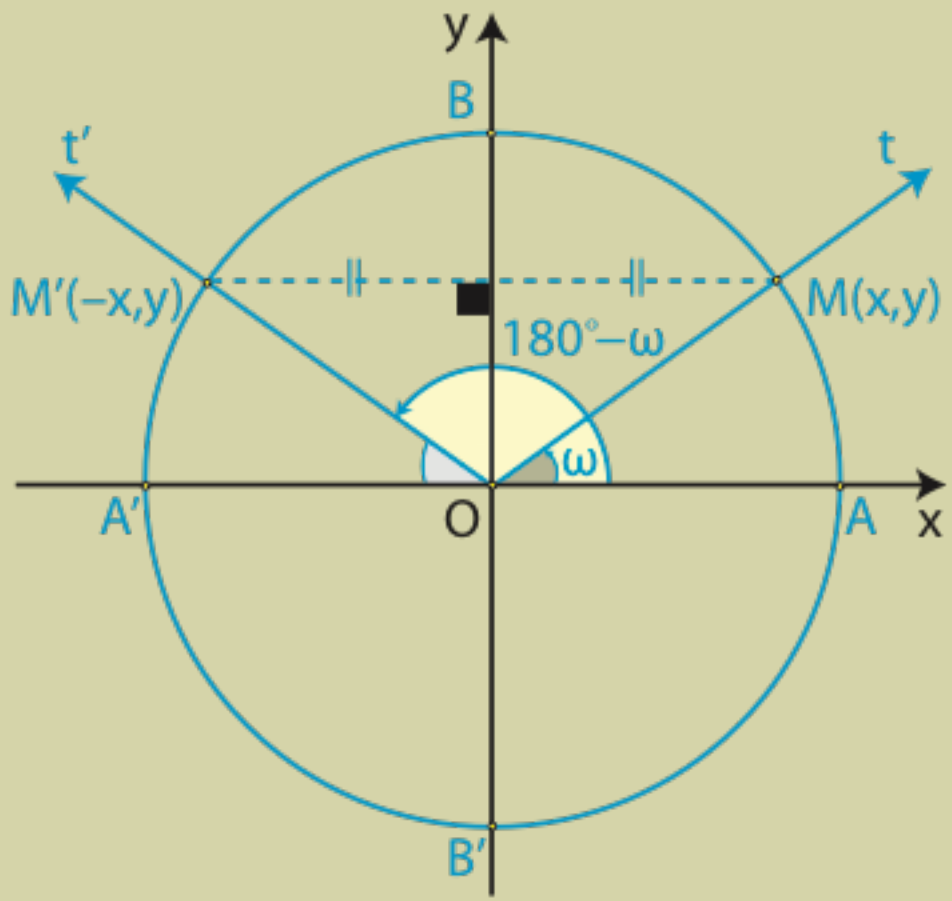
$$\eta\mu\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\eta\mu\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\varepsilon\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} = -1 \qquad \sigma\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sigma\varphi\frac{\pi}{4} = -1$$

Γωνίες με άθροισμα 180°

Αν οι γωνίες ω και ω' έχουν άθροισμα 180°, δηλαδή αν $\omega' = 180^\circ - \omega$, τότε, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, τα σημεία Μ και Μ' είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα y'y . Επομένως τα σημεία αυτά έχουν την ίδια τεταγμένη και αντίθετες τετμημένες.

Έχοντας υπόψη τους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών, συμπεραίνουμε ότι:



$$\eta\mu(180^\circ - \omega) = \eta\mu\omega \qquad \sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$$

$$\varepsilon\varphi(180^\circ - \omega) = -\varepsilon\varphi\omega \qquad \sigma\varphi(180^\circ - \omega) = -\sigma\varphi\omega$$

Οι γωνίες με άθροισμα 180° έχουν το <u>ίδιο ημίτονο</u> και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

Για παράδειγμα:

✓ Επειδή $150^\circ = 180^\circ - 30^\circ$, έχουμε:

$$ημ150^\circ = ημ(180^\circ - 30^\circ) = ημ30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$συν150^\circ = συν(180^\circ - 30^\circ) = -συν30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$εφ150^\circ = εφ(180^\circ - 30^\circ) = -εφ30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$σφ150^\circ = σφ(180^\circ - 30^\circ) = -σφ30^\circ = -\sqrt{3}$$

✓ Επειδή $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$, έχουμε:

$$\eta\mu\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \eta\mu\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \eta\mu\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

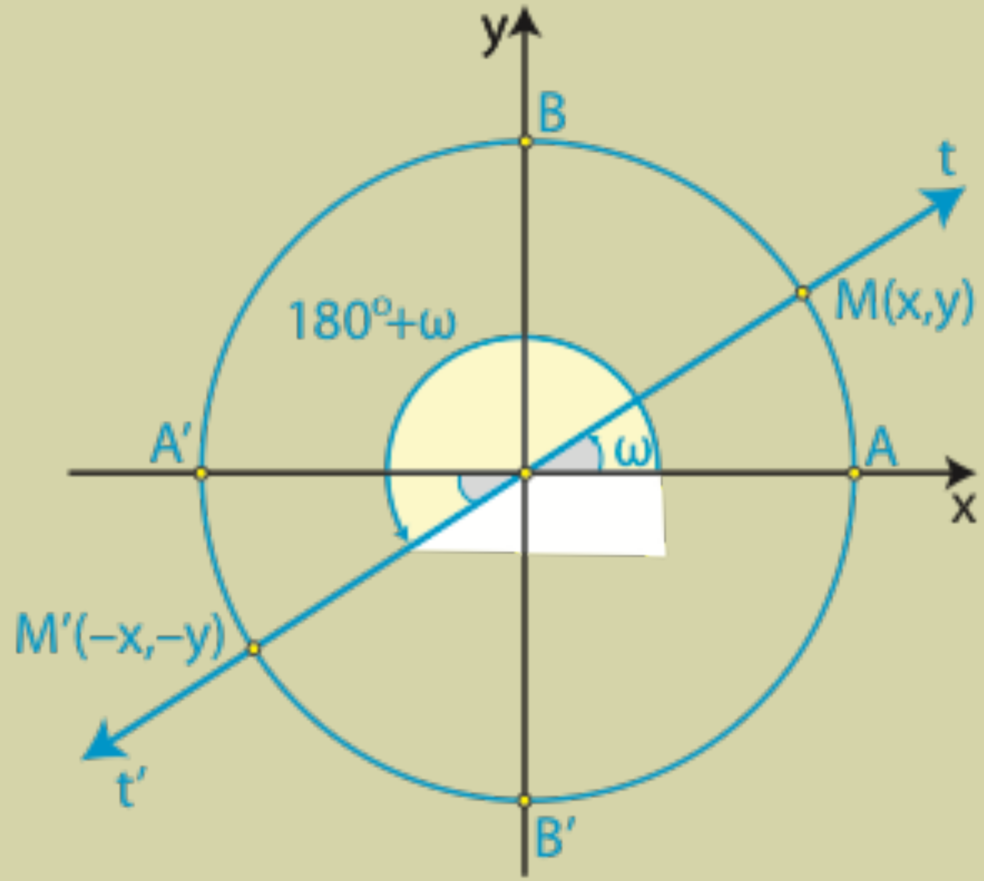
$$\varepsilon\varphi\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \varepsilon\varphi\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\varepsilon\varphi\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

$$\sigma\varphi\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sigma\varphi\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\sigma\varphi\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Γωνίες που διαφέρουν κατά 180°

Αν οι γωνίες ω και ω' διαφέρουν κατά 180° δηλαδή αν $\omega' = 180^\circ + \omega$, τότε, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, τα σημεία Μ και Μ' είναι συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων. Επομένως τα σημεία αυτά έχουν αντίθετες τετμημένες και αντίθετες τεταγμένες.

Έχοντας υπόψη τους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών, συμπεραίνουμε ότι:



$$\eta\mu(180^\circ + \omega) = -\eta\mu\omega \qquad \sigma\upsilon\nu(180^\circ + \omega) = -\sigma\upsilon\nu\omega$$

$$\varepsilon\varphi(180^\circ + \omega) = \varepsilon\varphi\omega \qquad \sigma\varphi(180^\circ + \omega) = \sigma\varphi\omega$$

Οι γωνίες που διαφέρουν κατά 180° έχουν αντίθετο ημίτονο και συνημίτονο, ενώ έχουν <u>την ίδια εφαπτομένη και συνεφαπτομένη</u>.

Για παράδειγμα:

✓ Επειδή $210^\circ = 180^\circ + 30^\circ$, έχουμε:

$$\eta\mu 210^\circ = \eta\mu(180^\circ + 30^\circ) = -\eta\mu 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu 210^\circ = \sigma\upsilon\nu(180^\circ + 30^\circ) = -\sigma\upsilon\nu 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\varepsilon\varphi 210^\circ = \varepsilon\varphi(180^\circ + 30^\circ) = \varepsilon\varphi 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sigma\varphi 210^\circ = \sigma\varphi(180^\circ + 30^\circ) = \sigma\varphi 30^\circ = \sqrt{3}$$

✓ Επειδή $\frac{4\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3}$, έχουμε:

$$\eta\mu\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \eta\mu\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\eta\mu\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

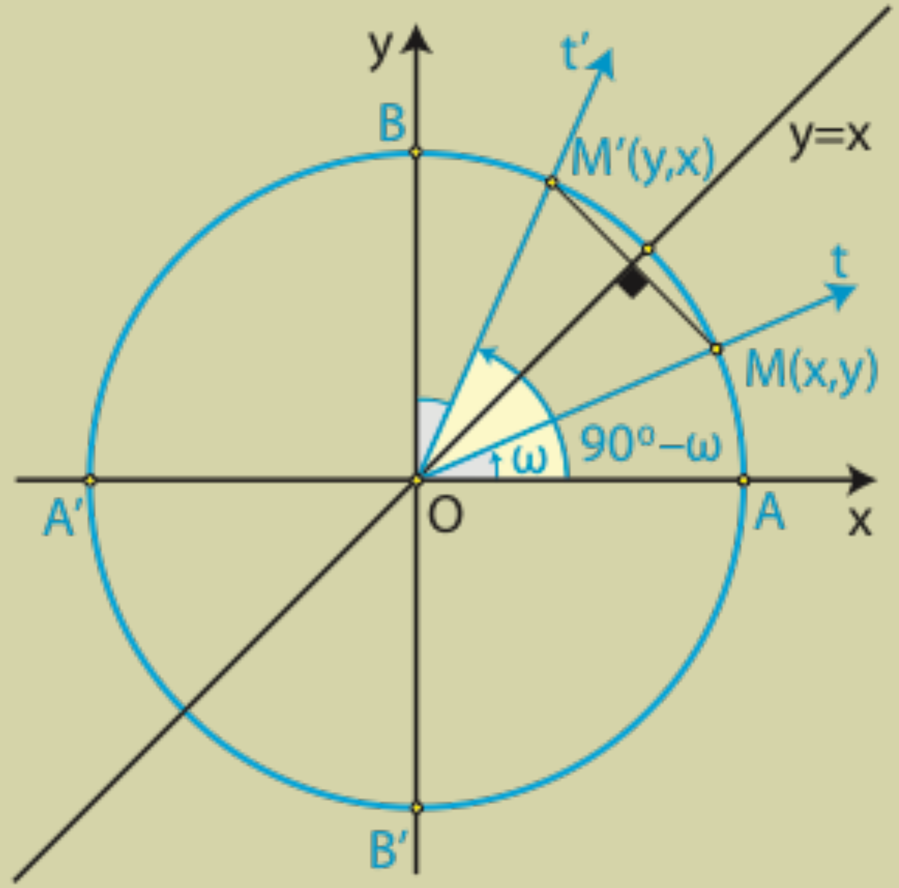
$$\varepsilon\varphi\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \varepsilon\varphi\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$\sigma\varphi\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sigma\varphi\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sigma\varphi\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Γωνίες με άθροισμα 90°

Αν οι γωνίες ω και ω' έχουν άθροισμα 90°, δηλαδή $\omega' = 90^\circ - \omega$, τότε, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, τα σημεία Μ και Μ' είναι συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο της γωνίας $x\hat{O}y$.

Επομένως η τετμημένη του καθενός ισούται με την τεταγμένη του άλλου. Έχοντας υπόψη τους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών, συμπεραίνουμε ότι:



$$\eta\mu(90^\circ - \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega \qquad \sigma\upsilon\nu(90^\circ - \omega) = \eta\mu\omega$$

$$\varepsilon\varphi(90^\circ - \omega) = \sigma\varphi\omega \qquad \sigma\varphi(90^\circ - \omega) = \varepsilon\varphi\omega$$

Αν δύο γωνίες έχουν άθροισμα 90°, τότε το ημίτονο της μιας ισούται με το συνημίτονο της άλλης και η εφαπτομένη της μιας ισούται με τη συνεφαπτομένη της άλλης.

Για παράδειγμα, επειδή $60^\circ = 90^\circ - 30^\circ$, έχουμε:

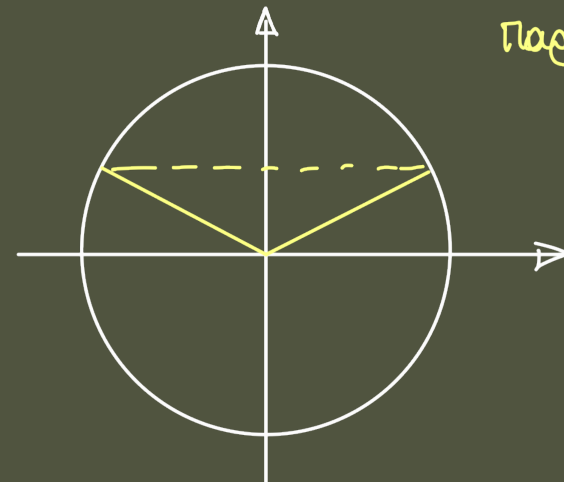
$$ημ60^\circ = συν30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad συν60^\circ = ημ30^\circ = \frac{1}{2},$$

$$εφ60^\circ = σφ30^\circ = \sqrt{3} \quad \text{και} \quad σφ60^\circ = εφ30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

1. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας:

i) 1200° **ii)** -2850°.

i) $1200^\circ = \cancel{\underbrace{3 \cdot 360^\circ}_{1080}} + 120^\circ = 180^\circ - 60^\circ$ άρα



$\eta\mu 1200^\circ = \eta\mu(180^\circ - 60^\circ) = \eta\mu 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\sigma\upsilon\nu 1200^\circ = \sigma\upsilon\nu(180^\circ - 60^\circ) = -\sigma\upsilon\nu 60^\circ = -\dfrac{1}{2}$

$\varepsilon\varphi 1200^\circ = -\varepsilon\varphi 60^\circ = -\sqrt{3}$

$\sigma\varphi 1200^\circ = -\sigma\varphi 60^\circ = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

1. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας:

i) 1200° **ii)** -2850°.

ii) $-2850^\circ = \underbrace{\cancel{-7\cdot 360^\circ}}_{-2520^\circ} - 330^\circ = -(\cancel{360^\circ} - 30^\circ) = 30^\circ$ άρα.

$ημ(-2850^\circ) = ημ30^\circ$

$συν(-2850^\circ) = συν30^\circ$

$εφ(-2850^\circ) = εφ30^\circ$

$σφ(-2850) = σφ30^\circ$

2. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας

i) $\frac{187\pi}{6}$ rad **ii)** $\frac{21\pi}{4}$ rad.

i) $\frac{187\pi}{6} = \frac{187}{12} 2\pi =$

πολλαπλασιάζω και διαιρώ με το 2.
για να βρω πόσα 2π έχει αυτή η γωνία.

$$\begin{array}{r|l} 187 & 12 \\ -12 & 15 \\ 67 & \\ -60 & \\ 7 & \end{array}$$

άρα

$187 = 12\cdot 15 + 7$

$$\frac{12\cdot 15+7}{12}\cdot 2\pi = \left(15 + \frac{7}{12}\right)2\pi = \cancel{15\cdot 2\pi} + \frac{7\cdot \cancel{2}\pi}{\cancel{12}\,6} = \frac{7\pi}{6}$$

$$\eta\mu\,\frac{7\pi}{6} = \eta\mu\left(\frac{6\pi}{\cancel{6}} + \frac{\pi}{6}\right) = \eta\mu\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\eta\mu\,\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\varepsilon\varphi\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{-\frac{1}{\cancel{2}}}{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \sigma\varphi\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}}{-\frac{1}{\cancel{2}}} = -\sqrt{3}$$

2. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας

i) $\frac{187\pi}{6}$ rad **ii)** $\frac{21\pi}{4}$ rad.

$$\frac{21\pi}{4} = \frac{21\cdot 2\pi}{8} \qquad 21 = 2\cdot 8 + 5$$

$$= \frac{(2\cdot 8+5)}{8}2\pi = \frac{2\cdot\cancel{8}}{\cancel{8}}\cdot 2\pi + \frac{5}{\cancel{8}_4}\cancel{2}\pi = \cancel{2\cdot 2\pi} + \frac{5\pi}{4} = \frac{4\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4}$$

$$ημ\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right) = -ημ\left(-\frac{\pi}{4}\right) = ημ\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$συν\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right) = -συν\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -συν\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$εφ\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right) = -1$ (γιατί διαιρώ το ημ με το συν που βρήκα πιο πάνω)

$σφ\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right) = -1$ (—״—)

4. Να απλοποιήσετε την παράσταση $\dfrac{\sigma\upsilon\nu(-\alpha)\cdot\sigma\upsilon\nu(180^\circ+\alpha)}{\eta\mu(-\alpha)\cdot\eta\mu(90^\circ+\alpha)}$.

$$\left.\begin{aligned}
\sigma\upsilon\nu(-\alpha) &= \sigma\upsilon\nu\alpha \\
\sigma\upsilon\nu(180^\circ+\alpha) &= -\sigma\upsilon\nu(-\alpha) = -\sigma\upsilon\nu\alpha \\
\eta\mu(-\alpha) &= -\eta\mu\alpha \\
\eta\mu(90^\circ+\alpha) &= \sigma\upsilon\nu(-\alpha) = \sigma\upsilon\nu\alpha
\end{aligned}\right\}$$

$$\frac{\sigma\upsilon\nu(-\alpha)\cdot\sigma\upsilon\nu(180^\circ+\alpha)}{\eta\mu(-\alpha)\cdot\eta\mu(90+\alpha)} =$$

$$\frac{\cancel{\sigma\upsilon\nu\alpha}\cdot(-\sigma\upsilon\nu\alpha)}{-\eta\mu\alpha\cdot\cancel{\sigma\upsilon\nu\alpha}} = \sigma\varphi\alpha$$

5. Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{\varepsilon\varphi(\pi-x)\cdot\sigma\upsilon\nu(2\pi+x)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{9\pi}{2}+x\right)}{\eta\mu(13\pi+x)\cdot\sigma\upsilon\nu(-x)\cdot\sigma\varphi\left(\dfrac{21\pi}{2}-x\right)}=-1.$

$\varepsilon\varphi(\pi-x) = -\varepsilon\varphi x$

$\sigma\upsilon\nu(\cancel{2\pi}+x) = \sigma\upsilon\nu x$

$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{9\pi}{2}+x\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{9\cdot 2\pi}{4}+x\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{8\cdot 2\pi+2\pi}{4}+x\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\cancel{2\pi}+\frac{\pi}{2}+x\right)$

$= \eta\mu(-x) = -\eta\mu x$

$\eta\mu(13\pi+x) = \eta\mu\left(\frac{13\cdot 2\pi}{2}+x\right) = \eta\mu\left(\frac{12\cdot 2\pi+2\pi}{2}+x\right)$

$= \eta\mu(\cancel{6\cdot 2\pi}+\pi+x) =$

$= \eta\mu(\pi+x) = \eta\mu(-x) = -\eta\mu x$

$\sigma\upsilon\nu(-x) = \sigma\upsilon\nu x$

$\sigma\varphi\left(\frac{21\pi}{2}-x\right) = \sigma\varphi\left(\frac{21\cdot 2\pi}{4}-x\right) = \sigma\varphi\left(\frac{20\cdot 2\pi+2\pi}{4}-x\right) = \sigma\varphi\left(\cancel{5\cdot 2\pi}+\frac{\pi}{2}-x\right)$

$= \varepsilon\varphi x$

5. Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{\varepsilon\varphi(\pi-x)\cdot\sigma\upsilon\nu(2\pi+x)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{9\pi}{2}+x\right)}{\eta\mu(13\pi+x)\cdot\sigma\upsilon\nu(-x)\cdot\sigma\varphi\left(\dfrac{21\pi}{2}-x\right)}=-1.$

Και αντικαθιστώντας στο 1ο μέλος παίρνουμε:

$$\frac{\varepsilon\varphi(\pi-x)\cdot\sigma\upsilon\nu(2\pi+x)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{9\pi}{2}+x\right)}{\eta\mu(13\pi+x)\,\sigma\upsilon\nu(-x)\,\sigma\varphi\left(\frac{21\pi}{2}-x\right)}=\frac{-\varepsilon\varphi x\cdot\cancel{\sigma\upsilon\nu x}\cdot\cancel{(-\eta\mu x)}}{\cancel{-\eta\mu x}\cdot\cancel{\sigma\upsilon\nu x}\cdot\varepsilon\varphi x}=-1$$

6. Να δείξετε ότι έχει σταθερή τιμή η παράσταση:

$$\eta\mu^2(\pi - x) + \sigma\upsilon\nu(\pi - x)\sigma\upsilon\nu(2\pi - x) + 2\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

$\eta\mu(\pi - x) = \eta\mu x$

$\sigma\upsilon\nu(\cancel{2\pi} - x) = \sigma\upsilon\nu(-x) = \sigma\upsilon\nu x$

$\sigma\upsilon\nu(\pi - x) = -\sigma\upsilon\nu x$

$\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sigma\upsilon\nu x$

οπότε αντικαθιστώντας

$\eta\mu^2(\pi - x) + \sigma\upsilon\nu(\pi - x)\sigma\upsilon\nu(2\pi - x) + 2\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) =$

$\eta\mu^2 x + (-\sigma\upsilon\nu x) \cdot \sigma\upsilon\nu x + 2\sigma\upsilon\nu^2 x =$

$\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x + 2\sigma\upsilon\nu^2 x =$

$\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$ άρα η ποσότητα αυτή είναι σταθερή.