...η άσκηση που είχαμε για το σπίτι.

1) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών: 1125^o, 1860^o, $\frac{25\pi}{3}$, $\frac{61\pi}{6}$.

2) Να επαληθεύσετε τις ισότητες:

α) $συν60^o = συν^2 30^o - ημ^2 30^o$ β) $ημ60^o = 2ημ30^o \cdot συν30^o$

3) Να δειχθεί ότι: $\frac{ημ45^o - ημ30^o}{συν45^o + συν60^o} = 3 - 2\sqrt{2}$.

1) $1125^\circ = \cancel{\underbrace{3\cdot 360}_{1080}} + 45^\circ$ άρα

$$\eta\mu 1125^\circ = \eta\mu 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu 1125^\circ = \sigma\upsilon\nu 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\varepsilon\varphi 1125^\circ = \varepsilon\varphi 45^\circ = 1$$

$$\sigma\varphi 1125^\circ = \sigma\varphi x = 1$$

$1860^\circ = \cancel{\underbrace{5\cdot 360^\circ}_{1800}} + 60^\circ$ άρα

$$\eta\mu 1860^\circ = \eta\mu 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu 1860^\circ = \sigma\upsilon\nu 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\varepsilon\varphi 1860^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}}{\frac{1}{\cancel{2}}} = \sqrt{3}$$

$$\sigma\varphi 1860^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{25\pi}{3} = \frac{25 \cdot 2\pi}{3 \cdot 2}$$ (πολλαπλασιάζω και διαιρώ με το 2 για να εμφανιστεί το 2π)

$$= \frac{25}{6} \cdot 2\pi = \frac{24+1}{6} \cdot 2\pi = \left(\frac{24}{6} + \frac{1}{6}\right) 2\pi = \left(4 + \frac{1}{6}\right) 2\pi = \cancel{4 \cdot 2\pi} + \frac{2\pi}{6}$$

$$\eta\mu\frac{2\pi}{3} = \eta\mu\left(\cancel{4\cdot 2\pi} + \frac{2\pi}{6}\right) = \eta\mu\left(\frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{6}_3}\right) = \eta\mu\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

οπότε οι υπόλοιποι τριγ. αριθμοί θα είναι της γωνίας $\frac{\pi}{3}$.

$$\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\ , \quad \varepsilon\varphi\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}\ , \quad \sigma\varphi\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\frac{61\pi}{6} = \frac{61\cdot 2\pi}{6\cdot 2}$$

(πολλαπλασιάζω και διαιρώ με το 2 για να εμφανιστεί το 2π)

$$= \frac{61}{12}\cdot 2\pi = \frac{60+1}{12}\cdot 2\pi = \frac{60}{12}\cdot 2\pi + \frac{1}{\cancel{12}_6}\cancel{2}\pi$$

$$= 5\cdot 2\pi + \frac{\pi}{6}$$

άρα οι τριγ. αριθμοί θα είναι ίδιοι με τους τρ. αριθμούς της γωνίας $\frac{\pi}{6}$ (ή 30°) άρα:

$$\eta\mu\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\ , \quad \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ , \quad \varepsilon\varphi\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}\ , \quad \sigma\varphi\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}.$$

2) $\sigma\upsilon\nu 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ οπότε αντικαθιστώ :

$\eta\mu 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

α) $\frac{1}{2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ που ισχύει !

β) $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ που ισχύει!

3) έχω ότι $\eta\mu 45 = \sigma\upsilon\nu 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ και χρησιμοποιώντας και τα προηγούμενα

έχω ότι :

$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{2}-1}{\cancel{2}}}{\frac{\sqrt{2}+1}{\cancel{2}}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = \frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}$$

πολλαπλασιάζω με $\sqrt{2}-1$

και $\frac{\sqrt{2}^2 - 2\sqrt{2} + 1}{2-1} = \frac{3-2\sqrt{2}}{1} =$

$= 3 - 2\sqrt{2}$.

Άλγεβρα Β' Λυκείου

3.2 - Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες

$$\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$$

Προσοχή!
$\eta\mu^2 x = (\eta\mu x)^2$

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$$

$$\sigma\varphi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$$

$$\varepsilon\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\omega = 1$$

Αν $\eta\mu\omega = \frac{5}{13}$ και $90^\circ < \omega < 180^\circ$, να βρεθούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω.

Από την ταυτότητα $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ προκύπτει ότι $\sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 - \eta\mu^2\omega$.

Αντικαθιστούμε το ημω με $\frac{5}{13}$ και έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1 - \frac{25}{169} = \frac{169-25}{169} = \frac{144}{169}.$$

Επειδή $90^\circ < \omega < 180^\circ$, είναι $\sigma\upsilon\nu\omega < 0$, οπότε έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu\omega = -\sqrt{\frac{144}{169}} = -\frac{12}{13}$$

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν $ημx = \frac{3}{5}$ και $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x rad.

Ισχύει ότι $ημ^2x + συν^2x = 1$ άρα

$$συν^2x = 1 - ημ^2x = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25}$$

$$= \frac{25-9}{25} = \frac{16}{25}$$ και επειδή

η γωνία βρίσκεται στο 2ο τεταρτημόριο

$$συνx = -\frac{4}{5}. \qquad εφx = \frac{ημx}{συνx} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{15}{-20} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$$

2. Αν $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{2}{3}$ και $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x rad.

Από την ταυτότητα $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ έχω :

$$\eta\mu^2\omega + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega = 1 - \frac{4}{9} \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega = \frac{9-4}{9}$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu^2\omega = \frac{5}{9} \Leftrightarrow \eta\mu\omega = \pm\sqrt{\frac{5}{9}}$$

επειδή η γωνία βρίσκεται στο 3º τεταρτημόριο το $\eta\mu\omega < 0$ άρα κρατάμε το "–". $\eta\mu\omega = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

3. Αν $εφx = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ και $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x rad.

$$εφx = -\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \frac{ημx}{συνx} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow ημx = -\frac{\sqrt{3}}{3}συνx$$

$$ημ^2x + συν^2x = 1 \Leftrightarrow \frac{3}{9}συν^2x + συν^2x = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{9}+1\right)συν^2x = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{12}{9}συν^2x = 1 \Leftrightarrow συν^2x = \frac{9}{12} \Leftrightarrow συν^2x = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow συνx = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(κρατήσαμε το "+" γιατί η πλευρά της γωνίας φτάνει στο 4ο τεταρτημόριο)

άρα $ημx = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$

ενώ $σφx = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$

4. Αν $\sigma\varphi x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ και $0 < x < \frac{\pi}{2}$, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x rad.

$$\varepsilon\varphi x = \frac{5}{2\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{2\sqrt{5}^2} = \frac{\cancel{5}\sqrt{5}}{2\cdot\cancel{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = \frac{\sqrt{5}}{2}\sigma\upsilon\nu x$$

$$\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{5}{4}\sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{9}{4}\sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu^2 x = \frac{4}{9} \Rightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu x = \frac{2}{3}$$

άρα $\eta\mu x = \frac{\sqrt{5}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{3} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

5. Αν $\sigma\varphi x = -2$ και $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\frac{2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}$.

$$\sigma\varphi x = -2 \Leftrightarrow \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} = -2 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = -2\eta\mu x \quad (1)$$

$$\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2 x + (-2\eta\mu x)^2 = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2 x + 4\eta\mu^2 x = 1$$

$$\Leftrightarrow 5\eta\mu^2 x = 1 \Leftrightarrow \eta\mu^2 x = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \eta\mu x = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

(1): $\sigma\upsilon\nu x = -2\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

Επειδή στο 4ο τ.μ το $\eta\mu x < 0$.

άρα
$$\frac{2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}{1+\sigma\upsilon\nu x} = \frac{2\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}}{1+\frac{2\sqrt{5}}{5}} = \frac{-\frac{4}{\cancel{5}}}{\frac{5+2\sqrt{5}}{\cancel{5}}} = -\frac{4}{5+2\sqrt{5}}$$

6. Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x για τις οποίες:

i) Να ισχύει συγχρόνως ημx = 0 και συνx = 0.

ii) Να ισχύει συγχρόνως ημx = 1 και συνx = 1.

iii) Να ισχύει συγχρόνως $ημx = \frac{3}{5}$ και $συνx = \frac{4}{5}$.

i) Έστω ότι υπήρχε x : ημx=0 , συνx=0.

$$ημ^2x + συν^2x = 1 \Leftrightarrow 0^2+0^2 = 1 \quad \text{άτοπο}$$

ii) Έστω ότι υπάρχει x : ημx=1 , συνx=1

$$ημ^2x + συν^2x = 1 \Leftrightarrow 1^2+1^2 = 1 \quad \text{άτοπο}$$

iii) Έστω x : $ημx = \frac{3}{5}$ $συνx = \frac{4}{5}$

$$ημ^2x + συν^2x = 1 \Leftrightarrow \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = 1 \Leftrightarrow \frac{25}{25} = 1$$

που ισχύει άρα μπορεί να

υπάρχει.

10. Να αποδείξετε ότι:

i) $\dfrac{\eta\mu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}=\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}$ **ii)** $\sigma\upsilon\nu^4\alpha-\eta\mu^4\alpha=2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1$

i) $\dfrac{\eta\mu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}=\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha} \Leftrightarrow \eta\mu^2\alpha=(1-\sigma\upsilon\nu\alpha)(1+\sigma\upsilon\nu\alpha) \Leftrightarrow \eta\mu^2\alpha=1^2-\sigma\upsilon\nu^2\alpha$

$\Leftrightarrow \eta\mu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha=1$ που ισχύει άρα ισχύει και το αρχικό.

ii) $\sigma\upsilon\nu^4\alpha-\eta\mu^4\alpha=(\sigma\upsilon\nu^2\alpha)^2-(\eta\mu^2\alpha)^2=(\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha)\underbrace{(\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\eta\mu^2\alpha)}_{1}$

$=\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha=\sigma\upsilon\nu^2\alpha-(1-\sigma\upsilon\nu^2\alpha)$

$=\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1+\sigma\upsilon\nu^2\alpha=2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1$

11. Να αποδείξετε ότι:

i) $\dfrac{ημθ}{1+συνθ}+\dfrac{1+συνθ}{ημθ}=\dfrac{2}{ημθ}$ ii) $\dfrac{συνx}{1-ημx}+\dfrac{συνx}{1+ημx}=\dfrac{2}{συνx}$.

i) $$\dfrac{\overset{ημθ}{ημθ}}{1+συνθ}+\dfrac{\overset{1+συνθ}{1+συνθ}}{ημθ}=\dfrac{ημ^2θ+(1+συνθ)^2}{ημθ\,(1+συνθ)}=\dfrac{ημ^2θ+1+2συνθ+συν^2θ}{ημθ\,(1+συνθ)}=$$

$$=\dfrac{1+1+2συνθ}{ημθ\,(1+συνθ)}=\dfrac{2\cancel{(1+συνθ)}}{ημθ\,\cancel{(1+συνθ)}}=\dfrac{2}{ημθ}.$$

ii) $$\dfrac{\overset{1+ημx}{συνx}}{1-ημx}+\dfrac{\overset{1-ημx}{συνx}}{1+ημx}=\dfrac{συνx\,(1+ημx)+συνx\,(1-ημx)}{(1-ημx)\,(1+ημx)}=\dfrac{συνx+\cancel{συνx\cdot ημx}+συνx-\cancel{συνx\cdot ημx}}{1-ημ^2x}$$

$$=\dfrac{2\cancel{συνx}}{συν^{\cancel{2}}x}=\dfrac{2}{συνx}.$$

12. Να αποδείξετε ότι:

i) $\dfrac{εφα+σφβ}{εφβ+σφα}=\dfrac{εφα}{εφβ}$ ii) $εφ^2α-ημ^2α=εφ^2α\cdot ημ^2α.$

i) $$\frac{εφα+σφβ}{εφβ+σφα}=\frac{\dfrac{\frac{ημβ}{ημα}}{συνα}+\dfrac{\frac{συνα}{συνβ}}{ημβ}}{\dfrac{\frac{ημα}{ημβ}}{συνβ}+\dfrac{\frac{συνβ}{συνα}}{ημα}}=\frac{\dfrac{\cancel{ημβ\cdot ημα+συνα\cdot συνβ}}{ημβ\cdot συνα}}{\dfrac{\cancel{ημα\, ημβ+συνβ\cdot συνα}}{ημα\cdot συνβ}}=\frac{ημα\cdot συνβ}{ημβ\cdot συνα}$$

$$=εφα\cdot\frac{1}{εφβ}=\frac{εφα}{εφβ}$$

Άσκηση για το σπίτι!!

13. Να αποδείξετε ότι:

i) $\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{1-\varepsilon\varphi x}+\dfrac{\eta\mu x}{1-\sigma\varphi x}=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x$ **ii)** $(1-\sigma\upsilon\nu x)\left(1+\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\right)=\eta\mu x\cdot\varepsilon\varphi x$

iii) $\dfrac{1}{\varepsilon\varphi x+\sigma\varphi x}=\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x$ **iv)** $\left(\dfrac{1}{\eta\mu x}-\eta\mu x\right)\left(\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu x}-\sigma\upsilon\nu x\right)=\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x.$