

# Άλγεβρα Β' Λυκείου

## Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

Μία συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το  $A$  λέγεται **περιοδική**, όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός  $T > 0$  τέτοιος, ώστε για κάθε  $x \in A$  να ισχύει:

$$\text{i)} \quad x + T \in A, \quad x - T \in A$$

και

$$\text{ii)} \quad f(x + T) = f(x - T) = f(x)$$

Ο πραγματικός αριθμός  $T$  λέγεται **περίοδος** της συνάρτησης  $f$ .

— Η συνάρτηση με την οποία κάθε πραγματικός αριθμός  $x$  αντιστοιχίζεται στο  $\eta\mu(x \text{ rad})$  λέγεται **συνάρτηση ημίτονο** και συμβολίζεται με  **$\eta\mu$** .

Ορίζουμε δηλαδή ότι

$$\eta\mu x = \eta\mu(x \text{ rad})$$

Επειδή  $\eta\mu(\omega + 360^\circ) = \eta\mu(\omega - 360^\circ) = \eta\mu\omega$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  θα ισχύει:

$$\eta\mu(x + 2\pi) = \eta\mu(x - 2\pi) = \eta\mu x$$

Άρα η **συνάρτηση ημίτονο** είναι **περιοδική με περίοδο  $2\pi$** .

— Ομοίως ορίζουμε και τη **συνάρτηση συνημίτονο** που συμβολίζεται με  **$\sigma\upsilon\nu$** .

Ορίζουμε δηλαδή ότι

$$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu(x \text{ rad}).$$

**Και η συνάρτηση συνημίτονο είναι περιοδική με περίοδο  $2\pi$ .**

## Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x$

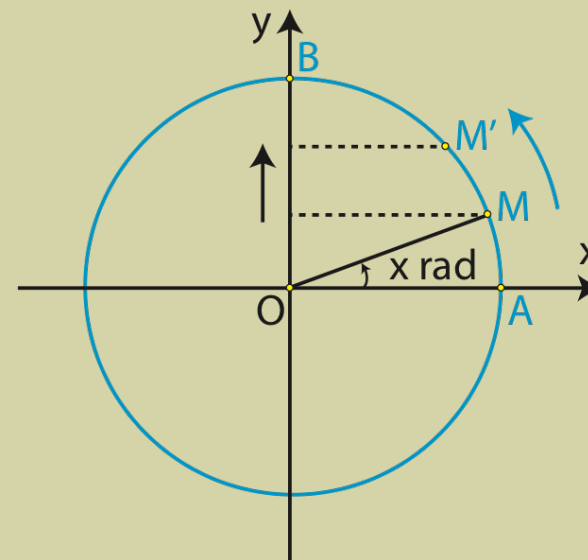
Επειδή η συνάρτηση  $f(x) = \eta\mu x$  είναι περιοδική με περίοδο  $2\pi$ , αρκεί να τη μελετήσουμε σε ένα διάστημα πλάτους  $2\pi$ , π.χ το  $[0, 2\pi]$ . Έχουμε αναφέρει όμως ότι το  $\eta\mu x$  είναι η τεταγμένη του σημείου  $M$  στο οποίο η τελική πλευρά της γωνίας  $x \text{ rad}$  τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο. Επομένως αρκεί να εξετάσουμε πώς μεταβάλλεται η τεταγμένη του  $M$ , όταν αυτό περιφέρεται στον τριγωνομετρικό κύκλο κατά τη θετική φορά, ξεκινώντας από το  $A$ .

Παρατηρούμε ότι:

- Όταν το  $x$  μεταβάλλεται από το  $0$  μέχρι το  $\frac{\pi}{2}$ , το  $M$  κινείται από το  $A$  μέχρι το  $B$ . Άρα η τεταγμένη του αυξάνει, που σημαίνει ότι η συνάρτηση  $f(x) = \eta\mu x$  είναι γνησίως αύξουσα

στο διάστημα  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

Ομοίως βρίσκουμε ότι η συνάρτηση  $f(x) = \eta\mu x$  είναι:



x	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
ημx	0	1 μέγ.	0	-1 ελάχ.	0

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
y	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

