ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

2ο Θέμα

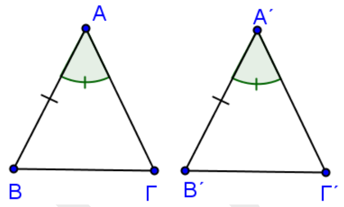
1565. Έστω δύο ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$ και Α΄Β΄Γ΄$(A'B' = A'\Gamma')$.

α) Να αποδείξετε ότι αν ισχύει $AB = A'B'$ και $A = A'$, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα. (Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι αν ισχύει $A\Gamma = A'\Gamma'$ και $B = B'$, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα. (Μονάδες 12)

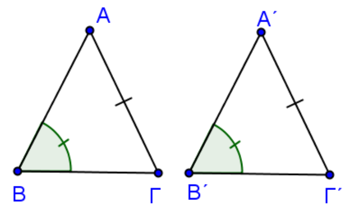
Λύση

α) Επειδή τα τρίγωνα είναι ισοσκελή, τότε αν $AB = A'B'$,
θα είναι $A\Gamma = AB = A'B' = A'\Gamma'$.
Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν:
1) $AB = A'B'$
2) $A\Gamma = A'\Gamma'$ και
3) $A = A'$, άρα με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα.



β) Επειδή τα τρίγωνα είναι ισοσκελή με βάσεις τις ΒΓ και Β΄Γ΄ έχουν τις γωνίες της βάσης τους ίσες, δηλαδή
$B = \Gamma$ και $\Gamma' = B'$. Όμως $B = B'$, άρα $\Gamma = B = B' = \Gamma'$.
Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν:
1) $A\Gamma = A'\Gamma'$
2) $AB = A'B'$ και
3) $A = A'$ γιατί $\Gamma = B = B' = \Gamma'$ (έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, οπότε και οι τρίτες γωνίες των τριγώνων είναι ίσες)

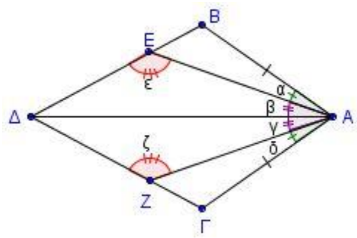
Άρα με βάση το κριτήριο ΓΠΓ τα τρίγωνα είναι ίσα.



1582. Στο διπλανό σχήμα είναι $\alpha = \delta$, $\beta = \hat{\gamma}$ και $AB = A\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) Οι γωνίες ε και ζ είναι ίσες. (Μονάδες 13)



Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ έχουν:
- $AB = A\Gamma$
- την πλευρά ΑΔ κοινή και
- $BA\Delta = \alpha + \hat{\beta} = \hat{\delta} + \hat{\gamma} = \Gamma A\Delta$

Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα.

β) Τα τρίγωνα ΕΔΑ και ΖΔΑ έχουν
- την πλευρά ΑΔ κοινή
- $E\Delta A = A\Delta Z$ γιατί τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ίσα και
- $\hat{\beta} = \hat{\gamma}$ (υπόθεση)

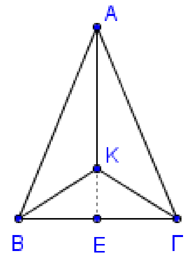
Σύμφωνα με το κριτήριο ΓΠΓ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $\hat{\varepsilon} = \hat{\zeta}$.

1591. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$ και Κ εσωτερικό σημείο του τριγώνου τέτοιο, ώστε $KB = K\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι: τα τρίγωνα ΒΑΚ και ΚΑΓ είναι ίσα. **(Μονάδες 12)**

β) Να αποδείξετε ότι η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΑΓ. **(Μονάδες 6)**

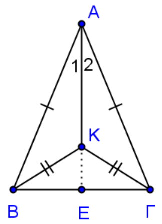
γ) Η προέκταση της ΑΚ τέμνει την ΒΓ στο Ε. Να αποδείξετε ότι η ΚΕ είναι διάμεσος του τριγώνου ΒΚΓ. **(Μονάδες 7)**



Λύση

α) Τα τρίγωνα ΒΑΚ και ΚΑΓ έχουν:
- την πλευρά ΑΚ κοινή
- $AB = A\Gamma$ και
- $KB = K\Gamma$.

-Με βάση το κριτήριο Π-Π-Π τα τρίγωνα είναι ίσα.



β) Επειδή τα τρίγωνα ΒΑΚ και ΚΑΓ είναι ίσα, έχουν και $A_1 = A_2$, άρα η ΑΕ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΑΓ.

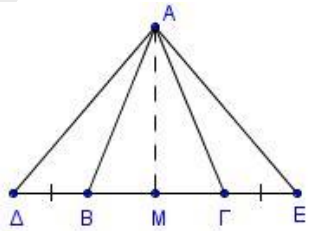
γ) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές η ΑΕ θα είναι και ύψος και διάμεσος.
Άρα η ΚΕ είναι διάμεσος στο ισοσκελές τρίγωνο ΒΚΓ.

1592. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$. Στην προέκταση της πλευράς ΒΓ και προς τα δύο της άκρα, θεωρούμε σημεία Δ και Ε αντίστοιχα έτσι ώστε $B\Delta = \Gamma E$. Να αποδείξετε ότι:

α) $B_{\varepsilon\xi} = \Gamma_{\varepsilon\xi}$ **(Μονάδες 6)**

β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα. **(Μονάδες 12)**

γ) Η διάμεσος ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ είναι και διάμεσος του τριγώνου ΑΔΕ. **(Μονάδες 7)**



Λύση

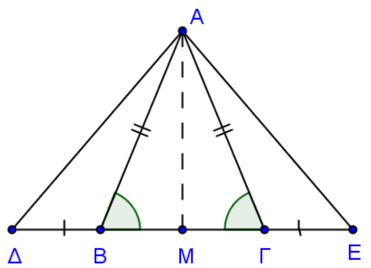
α) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση τη ΒΓ, είναι $B = \Gamma$.

Είναι $B_{\varepsilon\xi} = 180^\circ - B = 180^\circ - \Gamma = \Gamma_{\varepsilon\xi}$

β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ έχουν:
1) $AB = A\Gamma$
2) $B_{\varepsilon\xi} = \Gamma_{\varepsilon\xi}$ και
3) $B\Delta = \Gamma E$

Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

γ) Επειδή $BM = M\Gamma$ και $B\Delta = \Gamma E$, είναι και
$BM + B\Delta = M\Gamma + \Gamma E \Leftrightarrow \Delta M = ME$, άρα το Μ είναι μέσο του ΔΕ, οπότε η ΑΜ είναι διάμεσος στο τρίγωνο ΑΔΕ.



1598. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ και ΓΑ τριγώνου ΑΒΓ, παίρνουμε τα τμήματα $A\Delta = AB$ και $AE = A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

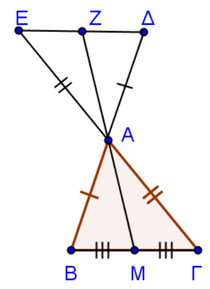
α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ίσα. **(Μονάδες 12)**

β) Αν ΑΜ είναι η διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ και η προέκταση της ΑΜ τέμνει την ΕΔ στο Ζ, να δείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΑΒΜ είναι ίσα. **(Μονάδες 7)**

ii. $Z\Delta = \dfrac{E\Delta}{2}$. **(Μονάδες 6)**

Λύση



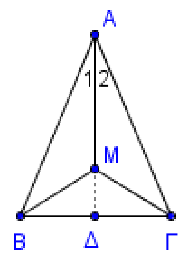
α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ έχουν:
1) $ΑΔ = ΑΒ$
2) $ΑΕ = ΑΓ$
3) $ΒΑΓ = ΔΑΕ$ ως κατακορυφήν
Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

β) i. Τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΑΒΜ έχουν:
1) $ΑΔ = ΑΒ$
2) $ΒΑΜ = ΔΑΖ$ ως κατακορυφήν και
3) $Β = Δ$ γιατί τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ίσα.
Με βάση το κριτήριο ΓΠΓ τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΑΒΜ είναι ίσα.

ii. Επειδή τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΑΒΜ είναι ίσα έχουν και $ΔΖ = ΒΜ$. Όμως $ΒΜ = \frac{ΑΒ}{2}$ και $ΑΒ = ΔΕ$ γιατί τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ίσα, άρα $ΔΖ = \frac{ΔΕ}{2}$.

1601. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$ και σημείο Μ εσωτερικό του τριγώνου τέτοιο, ώστε $ΜΒ = ΜΓ$. Να αποδείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΒΑΜ και ΜΑΓ είναι ίσα. **(Μονάδες 12)**
β) Η ΑΜ είναι διχοτομεί τη γωνία ΒΜΓ. **(Μονάδες 13)**

Λύση

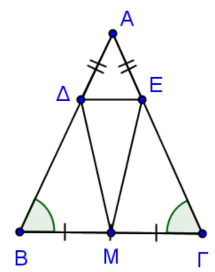


α) Τα τρίγωνα ΒΑΜ και ΜΑΓ έχουν:
1) την πλευρά ΑΚ κοινή
2) $ΑΒ = ΑΓ$ και
3) $ΜΒ = ΜΓ$.
Με βάση το κριτήριο Π-Π-Π τα τρίγωνα είναι ίσα.

β) Επειδή τα τρίγωνα ΒΑΜ και ΚΑΓ είναι ίσα, έχουν και $Α_1 = Α_2$, άρα η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΑΓ, άρα είναι ύψος και διάμεσος του.
Στο ισοσκελές τρίγωνο ΒΜΓ, η ΑΔ είναι ύψος και διάμεσος, άρα είναι και διχοτόμος της γωνίας ΒΚΓ.

1621. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$ και στις ίσες πλευρές ΑΒ, ΑΓ παίρνουμε αντίστοιχα τμήματα $ΑΔ = \frac{1}{3}ΑΒ$ και $ΑΕ = \frac{1}{3}ΑΓ$. Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι:
α) τα τμήματα ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα. **(Μονάδες 5)**
β) τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΜΕΓ είναι ίσα. **(Μονάδες 10)**
γ) το τρίγωνο ΔΕΜ είναι ισοσκελές. **(Μονάδες 10)**

Λύση



α) Επειδή $ΑΒ = ΑΓ$ και $ΑΔ = ΑΕ$, είναι και
$ΑΒ - ΑΔ = ΑΓ - ΑΕ \Leftrightarrow ΒΔ = ΓΕ$

β) Τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΜΕΓ έχουν:
1) $ΒΔ = ΓΕ$
2) $ΒΜ = ΜΓ$ γιατί το Μ είναι μέσο της ΒΓ και
3) $Β = Γ$ γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.
Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

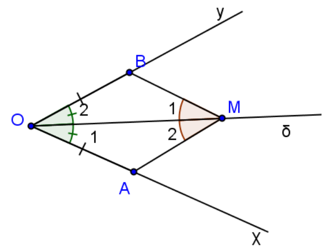
γ) Επειδή τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΜΕΓ είναι ίσα, έχουν και $ΜΔ = ΜΕ$,οπότε το τρίγωνο ΜΔΕ είναι ισοσκελές.

1627. Δίνεται γωνία xOy και η διχοτόμος της Oδ. Θεωρούμε σημείο Μ της Oδ και σημεία Α και Β στις ημιευθείες Ox και Oy αντίστοιχα, τέτοια, ώστε $ΟΑ = ΟΒ$. Να αποδείξετε ότι:

α) $ΜΑ = ΜΒ$ (Μονάδες 15)

β) Η Oδ είναι διχοτόμος της γωνίας ΑΜΒ. (Μονάδες 10)

Λύση



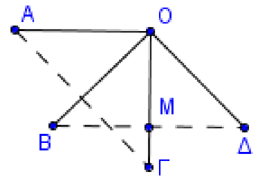
α) Τα τρίγωνα ΒΜΟ και ΑΜΟ έχουν:
1) Την πλευρά ΟΜ κοινή
2) $ΟΑ = ΟΒ$ και
3) $Ο_1 = Ο_2$ γιατί η Oδ είναι διχοτόμος της γωνίας Ο.
Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $ΜΑ = ΜΒ$.

β) Επειδή τα τρίγωνα ΒΜΟ και ΑΜΟ είναι ίσα, έχουν και $Μ_1 = Μ_2$, άρα η Oδ είναι διχοτόμος της γωνίας ΑΜΒ.

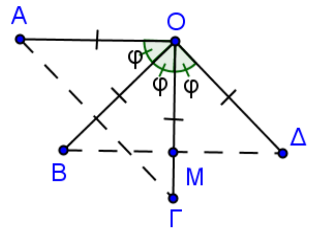
1632. Αν $ΑΟΒ = ΒΟΓ = ΓΟΔ$ και $ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ = ΟΔ$, να αποδείξετε ότι:

α) $ΑΓ = ΒΔ$ (Μονάδες 10)

β) το Μ είναι μέσο του ΒΔ, όπου Μ το σημείο τομής των τμημάτων ΟΓ και ΒΔ. (Μονάδες 15)



Λύση



α) Έστω ότι $ΑΟΒ = ΒΟΓ = ΓΟΔ = φ$.
Τα τρίγωνα ΑΟΓ και ΒΟΔ έχουν:
1) $ΟΑ = ΟΒ$
2) $ΟΓ = ΟΔ$ και
3) $ΑΟΓ = ΒΟΔ = 2φ$
Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $ΑΓ = ΒΔ$.

β) Στο ισοσκελές τρίγωνο ΒΟΔ η ΟΜ είναι διχοτόμος της γωνίας της κορυφής του, άρα είναι και διάμεσος, δηλαδή το Μ είναι μέσο του ΒΔ.

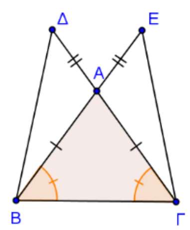
1648. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ και ΓΑ (προς το Α) θεωρούμε τα σημεία Ε και Δ αντίστοιχα τέτοια, ώστε $ΑΔ = ΑΕ$.
Να αποδείξετε ότι:

α) $ΒΕ = ΓΔ$ (Μονάδες 6)

β) $ΒΔ = ΓΕ$ (Μονάδες 10)

γ) $ΔΒΓ = ΕΓΒ$ (Μονάδες 9)

Λύση



α) Επειδή $ΑΒ = ΑΓ$ και $ΑΕ = ΑΔ$ είναι και
$ΑΒ + ΑΕ = ΑΓ + ΑΔ \Leftrightarrow ΒΕ = ΓΔ$

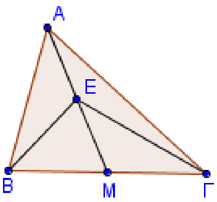
β) Τα τρίγωνα ΔΒΓ και ΕΒΓ έχουν:
1) την πλευρά ΒΓ κοινή
2) $ΒΕ = ΓΔ$

3) $ΕΒΓ = ΔΓΒ$ γιατί βρίσκονται στη βάση ΒΓ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.

Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $ΒΔ = ΓΕ$.

γ) Επειδή τα τρίγωνα ΔΒΓ και ΕΒΓ είναι ίσα, έχουν και $ΔΒΓ = ΕΓΒ$.

1660. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Ε το μέσο της διαμέσου του ΑΜ. Αν $ΒΓ = 2ΒΕ$, να αποδείξετε ότι:



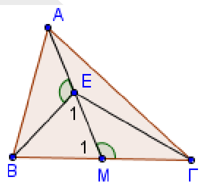
α) $ΑΕΒ = ΕΜΓ$

(Μονάδες 12)

β) $ΑΒ = ΕΓ$.

(Μονάδες 13)

Λύση



α) Είναι $ΒΜ = \frac{ΒΓ}{2} = \frac{2ΒΕ}{2} = ΒΕ$, άρα το τρίγωνο ΒΕΜ είναι ισοσκελές με βάση την ΕΜ και έχει $Ε_1 = Μ_1$. Όμως

$ΑΕΒ = 180^\circ - Ε_1$ και $ΕΜΓ = 180^\circ - Μ_1$, άρα $ΑΕΒ = ΕΜΓ$.

β) Τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΕΜΓ έχουν:

1) $ΑΕ = ΕΜ$ γιατί το Ε είναι μέσο του ΑΜ
2) $ΒΕ = ΒΜ = ΜΓ$ και
3) $ΑΕΒ = ΕΜΓ$

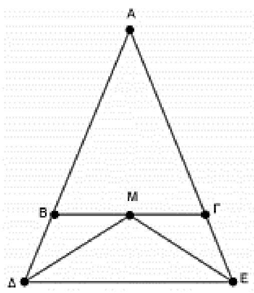
Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $ΑΒ = ΕΓ$.

12635. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ και Μ είναι το μέσο της βάσης του ΒΓ. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ, ΑΓ προς τα Β,Γ αντίστοιχα, παίρνουμε τα τμήματα ΒΔ και ΓΕ ώστε ΒΔ=ΓΕ.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΜΒΔ και ΜΓΕ είναι ίσα. (Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία ΜΔΕ είναι ίση με τη γωνία ΜΕΔ. (Μονάδες 10)

Λύση



α) Τα τρίγωνα ΜΒΔ και ΜΓΕ έχουν:

- ΜΒ = ΜΓ (Μ μέσο του ΒΓ)
- ΒΔ = ΓΕ (υπόθεση)
- $ΔΒΜ = ΕΓΜ$ ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών Β, Γ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ

Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

β) Επειδή τα τρίγωνα ΜΒΔ και ΜΓΕ είναι ίσα έχουν και ΜΔ = ΜΕ, οπότε το τρίγωνο ΜΔΕ είναι ισοσκελές. Οι γωνίες ΜΔΕ και ΜΕΔ είναι ίσες γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΜΔΕ.

12636. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ και Μ είναι το μέσο της βάσης ΒΓ. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ, ΑΓ παίρνουμε τα τμήματα ΒΔ, ΓΕ αντίστοιχα ώστε ΒΔ=ΓΕ.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΜΒΔ και ΜΓΕ είναι ίσα.

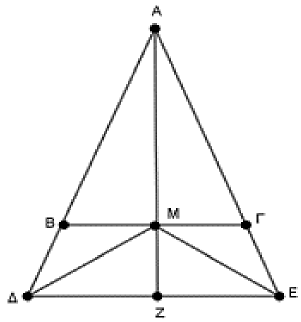
(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία ΜΔΕ είναι ίση με τη γωνία ΜΕΔ.

(Μονάδες 6)

γ) Αν η ΑΜ τέμνει την ΔΕ στο σημείο Ζ να αποδείξετε ότι η ΑΖ είναι κάθετη στην ΔΕ.

(Μονάδες 7)



Λύση

α) Τα τρίγωνα ΜΒΔ και ΜΓΕ έχουν:
- ΜΒ = ΜΓ (Μ μέσο του ΒΓ)
- ΒΔ = ΓΕ (υπόθεση)
- $\Delta BM = E\Gamma M$ ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών Β, Γ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ

Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

β) Επειδή τα τρίγωνα ΜΒΔ και ΜΓΕ είναι ίσα έχουν και ΜΔ = ΜΕ, οπότε το τρίγωνο ΜΔΕ είναι ισοσκελές. Οι γωνίες ΜΔΕ και ΜΕΔ είναι ίσες γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΜΔΕ.

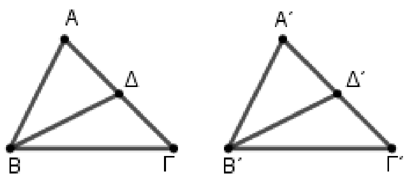
γ) Είναι ΑΒ = ΑΓ και ΒΔ = ΓΕ, οπότε προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει:
$AB + B\Delta = A\Gamma + \Gamma E \Leftrightarrow A\Delta = AE$, δηλαδή το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.
Η ΑΜ είναι διάμεσος στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, οπότε είναι και διχοτόμος της γωνίας Α.
Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΔΕ η ΑΖ είναι διχοτόμος της γωνίας Α, οπότε είναι και ύψος του τριγώνου, δηλαδή $AZ \perp \Delta E$.

13518. Δίνονται τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ του σχήματος με ΑΓ = Α΄Γ΄ και ΑΒ = Α΄Β΄. Αν οι διάμεσοι ΒΔ και Β΄Δ΄ είναι ίσες, να αποδείξετε ότι:

α) $A = A'$

(Μονάδες 15)

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι ίσα. (Μονάδες 10)



Λύση

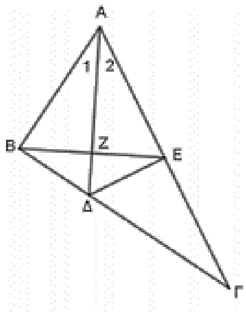
α) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και Α΄Β΄Δ΄ έχουν:
- ΒΔ = Β΄Δ΄, από υπόθεση,
- ΑΒ = Α΄Β΄, από υπόθεση,
- ΑΔ = Α΄Δ΄, ως μισά των ίσων πλευρών ΑΓ και Α΄Γ΄ αντίστοιχα.

Επομένως, τα τρίγωνα είναι ίσα γιατί έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία. Άρα $A = A'$ επειδή είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές ΒΔ και Β΄Δ΄ αντίστοιχα.

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν:
- ΑΒ = Α΄Β΄, από υπόθεση,
- ΑΓ = Α΄Γ΄, από υπόθεση,
- $A = A'$, από το προηγούμενο ερώτημα.

Επομένως, τα τρίγωνα είναι ίσα επειδή έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες.

12705.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ τέτοιο, ώστε ΑΓ = 2ΑΒ. Η διχοτόμος του ΑΔ τέμνει την διάμεσο ΒΕ στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι:



α) $AB = AE = \dfrac{A\Gamma}{2}$.

(Μονάδες 7)

β) ΔΒ = ΔΕ.

(Μονάδες 8)

γ) ΑΖ ⊥ ΒΕ

(Μονάδες 10)

Λύση

α) Επειδή η ΒΕ είναι διάμεσος, το Ε είναι μέσο της ΑΓ, οπότε $AE = \dfrac{A\Gamma}{2}$ (1).

Από την υπόθεση είναι $A\Gamma = 2AB \Leftrightarrow AB = \dfrac{A\Gamma}{2}$ (2). Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει ότι

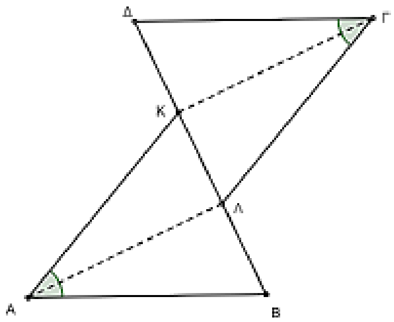
$$AB = AE = \frac{A\Gamma}{2}$$

β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΕ έχουν:
- ΑΒ = ΑΕ από το α σκέλος
- $A_1 = A_2$ γιατί η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Α
- την πλευρά ΑΔ κοινή

Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΕ είναι ίσα.
Άρα, απέναντι από τις ίσες γωνίες A_1, A_2 έχουμε αντίστοιχα ίσες πλευρές δηλαδή ΔΒ = ΔΕ.

γ) Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΕ και η ΑΖ είναι διχοτόμος του. Επομένως, η ΑΖ είναι και ύψος , άρα ΑΖ ⊥ ΒΕ.

13826.Τα τρίγωνα ΑΒΚ και ΓΔΛ του σχήματος έχουν ΑΒ = ΓΔ = ΑΚ= ΓΛ και $A = \Gamma$.



α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΚ και ΓΔΛ είναι ίσα και ότι έχουν ΒΚ = ΔΛ. (Μονάδες 12)

β) Έστω ότι Λ και Κ είναι τα μέσα των ΒΚ και ΔΛ αντίστοιχα:

i. Να εξετάσετε αν τα τμήματα ΒΛ, ΛΚ και ΚΔ είναι ίσα. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

ii. Να αποδείξετε ότι οι ΑΛ και ΓΚ είναι κάθετες στην ευθεία ΚΛ.

(Μονάδες 8)

Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΒΚ και ΓΔΛ έχουν:
- ΑΒ = ΓΛ από την υπόθεση
- ΑΚ = ΓΔ από την υπόθεση και
- $A = \Gamma$ από την υπόθεση

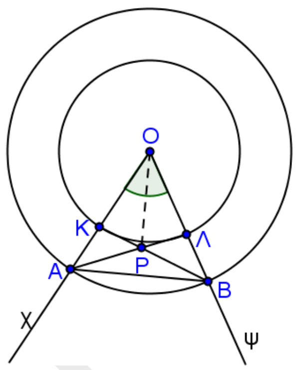
Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ΑΒΚ και ΓΔΛ είναι ίσα, οπότε είναι και ΒΚ = ΔΛ, γιατί είναι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες Α και Γ.

β) i. Αφού Λ και Κ είναι μέσα των ΒΚ και ΓΔ αντίστοιχα, τότε θα ισχύει ότι ΒΛ = ΛΚ και ΛΚ = ΚΔ, οπότε θα είναι ΒΛ = ΛΚ = ΚΔ.

ii. Αφού τα τρίγωνα ΑΒΚ και ΓΔΛ είναι ισοσκελή με ΑΒ = ΑΚ και ΓΔ = ΓΛ και Λ, Κ τα μέσα των βάσεων τους ΒΚ, ΔΛ αντίστοιχα, τότε τα ΑΛ και ΓΚ είναι διάμεσοι στις βάσεις τους, οπότε θα είναι και ύψη, οπότε είναι κάθετα σε αυτές, δηλαδή το ΑΛ είναι κάθετο στο ΒΚ και το ΓΚ είναι κάθετα στο ΔΛ. Επομένως οι ΑΛ και ΓΚ είναι κάθετες στην ευθεία ΚΛ .

4ο Θέμα

1725. Δίνεται οξεία γωνία xOψ και δύο ομόκεντροι κύκλοι (O,ρ_1) και (O,ρ_2) με $\rho_1 < \rho_2$, που τέμνουν την Οx στα σημεία Κ,Α και την Οψ στα Λ,Β αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:



α) ΑΛ = ΒΚ

(Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΑΡΒ είναι ισοσκελές, όπου Ρ το σημείο τομής των ΑΛ,ΒΚ.

(Μονάδες 8)

γ) Η ΟΡ διχοτομεί τη γωνία xOψ .

(Μονάδες 9)

Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΟΛ και ΒΟΚ έχουν:

1) $OA = OB = \rho_2$
2) $OK = O\Lambda = \rho_1$ και
3) τη γωνία $\hat{O}$ κοινή

Από το κριτήριο ισότητας τριγώνων ΠΓΠ τα τρίγωνα ΑΟΛ και ΒΟΚ είναι ίσα, οπότε έχουν και $A\Lambda = BK$.

β) Επειδή $OA = OB$, το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές, άρα $O\hat{A}B = O\hat{B}A$ (1)

Επειδή τα τρίγωνα ΑΟΛ και ΒΟΚ είναι ίσα, ισχύει ότι: $O\hat{A}\Lambda = O\hat{B}K$ (2)

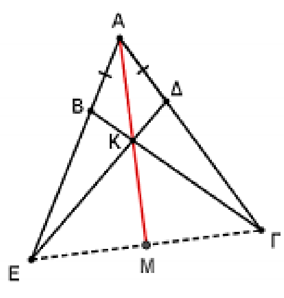
Από (1)-(2) έχουμε: $O\hat{A}B - O\hat{A}\Lambda = O\hat{B}A - O\hat{B}K \Leftrightarrow P\hat{A}B = P\hat{B}A$, οπότε το τρίγωνο ΡΑΒ είναι ισοσκελές.

γ) Τα τρίγωνα ΟΡΑ και ΟΡΒ έχουν:

1) $OA = OB$
2) τη πλευρά ΟΡ κοινή και
3) $PA = PB$(τρίγωνο ΑΡΒ ισοσκελές)

Από το κριτήριο ΠΠΠ τα τρίγωνα ΟΡΑ και ΟΡΒ είναι ίσα οπότε έχουν και $A\hat{O}P = B\hat{O}P$, δηλαδή η ΟΡ είναι διχοτόμος της γωνίας $x\hat{O}\psi$.

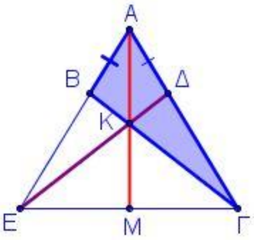
**1846.Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < A\Gamma$. Στην προέκταση της ΑΒ (προς το Β) θεωρούμε σημείο Ε έτσι ώστε ΑΕ=ΑΓ. Στην πλευρά ΑΓ θεωρούμε σημείο Δ έτσι ώστε $A\Delta = AB$.
Αν τα τμήματα ΔΕ και ΒΓ τέμνονται στο Κ και η προέκταση της ΑΚ τέμνει την ΕΓ στο Μ, να αποδείξετε ότι:**



α) $B\Gamma = \Delta E$ (Μονάδες 6)
β) $BK = K\Delta$ (Μονάδες 7)
γ) Η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας Α. (Μονάδες 6)
δ) Η ΑΜ είναι μεσοκάθετος της ΕΓ. (Μονάδες 6)

Λύση

α) Το τρίγωνο ΕΑΓ είναι ισοσκελές (ΑΕ=ΑΓ) οπότε $\hat{AEM} = \hat{A\Gamma E}$ (1).
Τα τρίγωνα ΒΕΓ και ΔΕΓ, έχουν :
 i) ΕΓ κοινή
 ii) ΒΕ=ΔΓ (διαφορές των ίσων τμημάτων ΑΕ, ΑΒ και ΑΓ, ΑΔ αντίστοιχα)
 iii) $\hat{AEM} = \hat{A\Gamma E}$ από τη σχέση (1)
Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ΒΕΓ και ΔΕΓ είναι ίσα οπότε έχουν και ΒΓ=ΔΕ

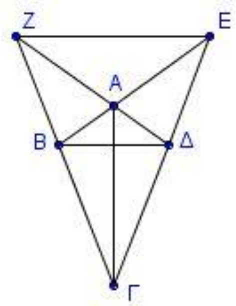


β) Το τρίγωνο ΕΚΓ είναι ισοσκελές($\hat{\Delta E\Gamma} = \hat{\Delta\Gamma E}$ από την ισότητα των τριγώνων ΒΕΓ και ΔΕΓ) οπότε ΕΚ=ΚΓ (2)
Τα τρίγωνα ΒΕΚ και ΔΚΓ έχουν:
 i) ΕΚ=ΚΓ (από τη σχέση (2))
 ii) ΒΕ=ΔΓ (διαφορές των ίσων τμημάτων ΑΕ,ΑΒ και ΑΓ,ΑΔ αντίστοιχα)
 iii) $\hat{BEK} = \hat{\Delta\Gamma K}$ (Διαφορές των ίσων γωνιών $\hat{BE\Gamma}, \hat{KE\Gamma}$ και $\hat{\Delta\Gamma E}, \hat{K\Gamma E}$ αντίστοιχα)
Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ΒΕΚ και ΔΚΓ είναι ίσα, οπότε είναι και ΒΚ=ΚΔ.

γ) Τα τρίγωνα ΑΒΚ και ΑΚΔ έχουν τρείς πλευρές ίσες μία προς μία (ΒΚ=ΚΔ,ΑΚ κοινή και ΑΒ=ΑΔ) άρα είναι ίσα. Επομένως $\hat{BAK} = \hat{KA\Delta}$ οπότε η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$.

δ) Το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισοσκελές και η ΑΜ διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ άρα η ΑΜ είναι μεσοκάθετος της ΕΓ.

14880. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $AB = A\Delta$ και $\Gamma B = \Gamma\Delta$. Αν Ε το σημείο τομής των προεκτάσεων των ΒΑ και ΓΔ και Ζ το σημείο τομής των προεκτάσεων των ΔΑ και ΓΒ, να αποδείξετε ότι:
α) Η ΓΑ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΓΔ.
(Μονάδες 7)
β) $\Gamma Z = \Gamma E$.
(Μονάδες 9)
γ) $EZ \parallel B\Delta$.
(Μονάδες 8)



Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΓ έχουν:
 1) $AB = A\Delta$
 2) $\Gamma B = \Gamma\Delta$ και
 3) τη πλευρά ΓΑ κοινή, άρα
από το κριτήριο ΠΠΠ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $B\Gamma A = A\Gamma\Delta$, $BA\Gamma = \Delta A\Gamma$.
Άρα η ΓΑ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΓΔ.

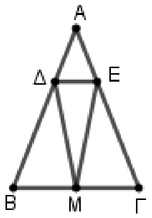
β) Τα τρίγωνα ΖΑΓ και ΕΑΓ έχουν:
 1) τη πλευρά ΑΓ κοινή
 2) $B\Gamma A = A\Gamma\Delta$ και
 3) $ZA\Gamma = EA\Gamma$ γιατί $ZAB = EA\Delta$ ως κατακορυφήν και $BA\Gamma = \Delta A\Gamma$.
Άρα λόγω του ΓΠΓ τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε και $\Gamma Z = \Gamma E$.

γ) Επειδή τα Α,Γ ισαπέχουν από τα Β και Δ, ανήκουν στη μεσοκάθετο του ΒΔ.
Στο ισοσκελές τρίγωνο ΓΖΕ η ΓΑ είναι διχοτόμος της γωνίας Γ, όποτε είναι ύψος και διάμεσος του τριγώνου. Επειδή $\Gamma A \perp B\Delta$ και $\Gamma A \perp EZ$, είναι $EZ \parallel B\Delta$.

3ο Θέμα

12069. Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) παίρνουμε στην πλευρά ΑΒ σημείο Δ, ώστε ΔΒ = 2ΑΔ, και στην πλευρά ΑΓ σημείο Ε, ώστε ΕΓ= 2ΑΕ. Το Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ.
α) Να αποδείξετε ότι:
i. Τα τμήματα ΔΒ και ΕΓ είναι ίσα. (Μονάδες 6)
ii. Το τρίγωνο ΜΔΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)
β) Αν Ρ το σημείο τομής των τμημάτων ΒΕ και ΓΔ να δείξετε ότι:
i. Οι γωνίες $\Gamma B E$ και $B\Gamma\Delta$ είναι ίσες. (Μονάδες 6)
ii. Το τμήμα ΡΜ διχοτομεί τη γωνία $B P \Gamma$. (Μονάδες 7)

Λύση



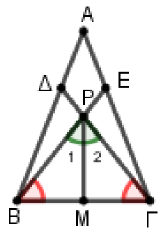
α) i. Επειδή ΔΒ = 2ΑΔ, είναι $A\Delta = \frac{1}{3}AB$ και $\Delta B = \frac{2}{3}AB$.

Επειδή ΕΓ= 2ΑΕ είναι $AE = \frac{1}{3}A\Gamma$ και $E\Gamma = \frac{2}{3}A\Gamma$.

Επειδή ΑΒ = ΑΓ είναι και ΔΒ = ΕΓ.

ii. Τα τρίγωνα ΔΒΜ και ΕΜΓ έχουν:
- ΔΒ = ΕΓ
- ΜΒ = ΜΓ γιατί το Μ είναι μέσο του ΒΓ
- $B = \Gamma$ γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.

Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ΔΒΜ και ΕΜΓ είναι ίσα, οπότε έχουν και ΔΜ = ΕΜ. Επομένως το τρίγωνο ΜΔΕ είναι ισοσκελές.



β) i. Τα τρίγωνα ΔΒΓ και ΕΒΓ έχουν:
- ΒΓ πλευρά κοινή
- ΔΒ = ΕΓ
- $B = \Gamma$

Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ΔΒΓ και ΕΒΓ είναι ίσα οπότε έχουν και $\Gamma B E = B\Gamma\Delta$.

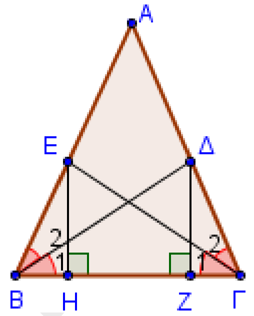
ii. Επειδή $\Gamma B E = B\Gamma\Delta$, το τρίγωνο ΡΒΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΒΓ. Επειδή η ΡΜ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΡΒΓ, είναι και διχοτόμος του τριγώνου, δηλαδή το τμήμα ΡΜ διχοτομεί τη γωνία $B P \Gamma$.

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

2ο Θέμα

1532. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$ και οι διχοτόμοι του ΒΔ και ΓΕ. Αν $ΕΗ \perp ΒΓ$ και $ΔΖ \perp ΒΓ$, να αποδείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΒΓΔ και ΓΒΕ είναι ίσα. **(Μονάδες 13)**
β) $ΕΗ = ΔΖ$ **(Μονάδες 12)**

Λύση

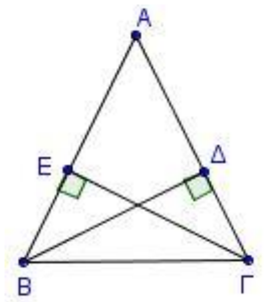


α) Τα τρίγωνα ΒΓΔ και ΓΒΕ έχουν:
1) Την πλευρά ΒΓ κοινή
2) $Β = Γ$ γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ και
3) $Β_1 = \frac{Β}{2} = \frac{Γ}{2} = Γ_1$
Με βάση το κριτήριο Γ-Π-Γ τα τρίγωνα είναι ίσα.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΕΒΗ και ΔΖΓ έχουν:
1) $Β = Γ$ και
2) $ΒΕ = ΓΔ$ (από ισότητα τριγώνων ΒΓΔ και ΓΒΕ).
Άρα τα τρίγωνα ΕΒΗ και ΔΖΓ έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία ίσες και είναι ίσα, οπότε έχουν και $ΕΗ = ΔΖ$.

1545. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$ και τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ. Να αποδείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΓΕΒ είναι ίσα. **(Μονάδες 15)**
β) $ΑΔ = ΑΕ$ **(Μονάδες 10)**

Λύση

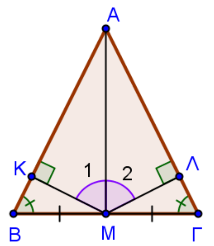


α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΔΓ και ΓΕΒ έχουν:
1) την πλευρά ΒΓ κοινή και
2) $Β = Γ$ γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ
Άρα τα τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία ίσες και είναι ίσα.

β) Επειδή τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΓΕΒ είναι ίσα, έχουν και $ΒΕ = ΓΔ$.
Όμως είναι $ΑΒ = ΑΓ$,άρα είναι και $ΑΒ - ΒΕ = ΑΓ - ΓΔ \Leftrightarrow ΑΕ = ΑΔ$.

1546. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$ και το μέσο Μ της βάσης του ΒΓ. Φέρουμε τις αποστάσεις ΜΚ και ΜΛ του σημείου Μ από τις ίσες πλευρές του τριγώνου. Να αποδείξετε ότι:
α) $ΜΚ = ΜΛ$ **(Μονάδες 13)**
β) Η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας ΚΜΛ. **(Μονάδες 12)**

Λύση



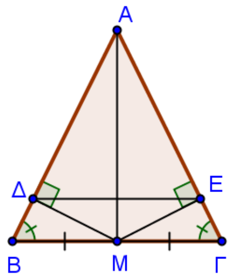
α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΜΚΒ και ΜΛΓ έχουν:
1) $ΜΒ = ΜΓ$ γιατί το Μ είναι μέσο του ΒΓ και
2) $Β = Γ$ βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου
Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $ΜΚ = ΜΛ$.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΚΜ και ΑΛΜ έχουν:
1) την πλευρά ΑΜ κοινή και
2) $ΜΚ = ΜΛ$,

Δηλαδή τα τρίγωνα έχουν μια κάθετη πλευρά ίση και μια οξεία γωνία του ενός είναι ίση με μια οξεία γωνία του άλλου, άρα είναι ίσα, οπότε έχουν και $M_1 = M_2$, δηλαδή η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας ΚΜΛ.

1547. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$. Από το μέσο Μ της βάσης του ΒΓ φέρουμε κάθετα τμήματα ΜΔ και ΜΕ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
α) $M\Delta = ME$ (Μονάδες 12)
β) το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 13)

Λύση



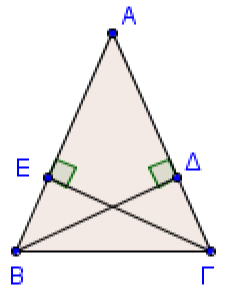
α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΜΔΒ και ΜΕΓ έχουν:
1) $MB = M\Gamma$ γιατί το Μ είναι μέσο του ΒΓ και
2) $B = \Gamma$ βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου

Δηλαδή τα τρίγωνα έχουν τις υποτείνουσες τους ίσες και μια οξεία γωνία του ενός είναι ίση με μια οξεία γωνία του άλλου, άρα είναι ίσα, οπότε έχουν και $M\Delta = ME$.

β) Επειδή τα τρίγωνα ΜΔΒ και ΜΕΓ είναι ίσα, έχουν και $\Delta B = E\Gamma$.
Όμως $AB = A\Gamma$, άρα και $AB - \Delta B = A\Gamma - E\Gamma \Leftrightarrow A\Delta = AE$, οπότε το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

1568. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ που αντιστοιχούν στις πλευρές του ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
α) Αν το τρίγωνο είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$, τότε τα ύψη ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα. (Μονάδες 12)
β) Αν τα ύψη ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα, τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$. (Μονάδες 13)

Λύση



α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΕΓ και ΒΔΓ έχουν:
1) την πλευρά ΒΓ κοινή και
2) $B = \Gamma$ γιατί το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση τη ΒΓ, αφού έχει $AB = A\Gamma$

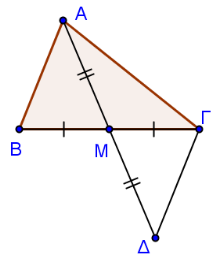
Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $B\Delta = \Gamma E$.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΕΓ και ΒΔΓ έχουν:
1) την πλευρά ΒΓ κοινή και
2) $B\Delta = \Gamma E$

Δηλαδή τα τρίγωνα έχουν τις υποτείνουσες τους ίσες και μια κάθετη πλευρά του ενός είναι ίση με μια κάθετη πλευρά του άλλου, άρα είναι ίσα, οπότε έχουν και $B = \Gamma$.
Το τρίγωνο ΑΒΓ έχει δύο γωνίες του ίσες, οπότε είναι ισοσκελές και έχει $AB = A\Gamma$.

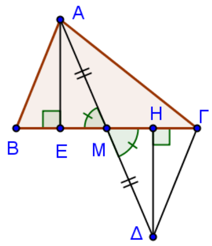
1569. Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ (προς το Μ) κατά ίσο τμήμα ΜΔ. Να αποδείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΜΓΔ είναι ίσα. (Μονάδες 12)
β) Τα σημεία Α και Δ ισαπέχουν από την πλευρά ΒΓ. (Μονάδες 13)

Λύση



α) Τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΜΓΔ έχουν:
1) $AM = M\Delta$
2) $BM = M\Gamma$ γιατί το Μ είναι μέσο της ΒΓ και
3) $AMB = \Delta M\Gamma$ ως κατακορυφήν

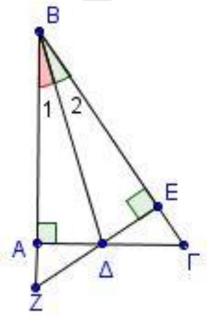
Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα.



β) Έστω ΑΕ και ΔΗ οι αποστάσεις των Α,Δ από τη ΒΓ.
Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΕΜ και ΜΔΗ έχουν:
1) $ΑΜ = ΜΔ$
2) $\hat{ΑΜΒ} = \hat{ΔΜΓ}$
Επειδή τα τρίγωνα έχουν τις υποτείνουσες τους ίσες και μια οξεία γωνία του ενός είναι ίση με μια οξεία γωνία του άλλου τριγώνου είναι ίσα, οπότε έχουν και $ΑΕ = ΔΗ$.

1571. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{Α} = 90^\circ\right)$ και ΒΔ η διχοτόμος της γωνίας Β. Από το Δ φέρουμε $ΔΕ \perp ΒΓ$ και έστω Ζ το σημείο στο οποίο η ευθεία ΕΔ τέμνει την προέκταση της ΒΑ (προς το Α). Να αποδείξετε ότι:
α) $ΑΒ = ΒΕ$ **(Μονάδες 13)**
β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΕΒ είναι ίσα. **(Μονάδες 12)**

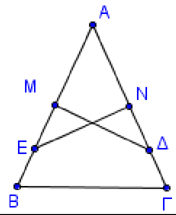
Λύση



α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΕΔ έχουν:
1) τη πλευρά ΒΔ κοινή
2) $\hat{Β}_1 = \hat{Β}_2$ λόγω της διχοτόμησης
Άρα τα δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν τις υποτείνουσες τους ίσες και μια οξεία γωνία του ενός τριγώνου είναι ίση με μια οξεία γωνία του άλλου, οπότε είναι ίσα, κατά συνέπεια έχουν και $ΑΒ = ΒΕ$.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΕΒ έχουν:
1) Τη γωνία Β κοινή
2) $ΑΒ = ΒΕ$
Άρα τα δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μια κάθετη πλευρά τους ίση και μια οξεία γωνία του ενός τριγώνου είναι ίση με μια οξεία γωνία του άλλου, οπότε είναι ίσα.

1656. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ΜΔ, ΝΕ οι μεσοκάθετοι των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
α) Αν $ΜΔ = ΝΕ$ τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.
(Μονάδες 12)
β) Αν $ΑΒ = ΑΓ$ τότε $ΜΔ = ΝΕ$.
(Μονάδες 13)

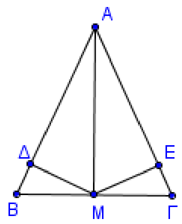


Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΜΔ και ΑΕΝ έχουν:
1) $ΜΔ = ΜΕ$ και 2) τη γωνία Α κοινή, άρα έχουν μια κάθετη πλευρά και μια οξεία γωνία τους ίση, οπότε είναι ίσα και έχουν $ΑΜ = ΑΝ \Leftrightarrow \frac{ΑΒ}{2} = \frac{ΑΓ}{2} \Leftrightarrow ΑΒ = ΑΓ$, δηλαδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΜΔ και ΑΕΝ έχουν:
1) $ΑΜ = ΑΝ$ γιατί είναι μισά των ίσων πλευρών ΑΒ και ΑΓ και
2) τη γωνία Α κοινή, άρα
έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία τους ίση, οπότε είναι ίσα και έχουν $ΜΔ = ΜΕ$.

1657. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και από σημείο Μ της πλευράς ΒΓ φέρουμε τα κάθετα τμήματα ΜΔ και ΜΕ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.
Να αποδείξετε ότι:
α) Αν $ΜΔ = ΜΕ$, τότε τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΑΜΕ είναι ίσα. **(Μονάδες 13)**
β) Αν $ΑΒ = ΑΓ$ και Μ το μέσο του ΒΓ, τότε $ΜΔ = ΜΕ$. **(Μονάδες 12)**

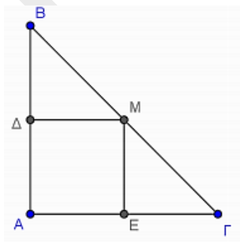


Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΜΔ και ΑΜΕ έχουν:
1) την πλευρά ΜΑ κοινή και 2) $ΜΔ = ΜΕ$, δηλαδή έχουν τις υποτείνουσες και μια κάθετη πλευρά τους ίση, οπότε είναι ίσα.

β) Αν $ΑΒ = ΑΓ$, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.
Τα ορθογώνια τρίγωνα ΜΔΒ και ΜΕΓ έχουν:
1) $\hat{Β} = \hat{Γ}$ γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ και
2) $ΜΒ = ΜΓ$, γιατί το Μ είναι μέσο του ΒΓ
Άρα τα δύο τρίγωνα έχουν τις υποτείνουσες και μια οξεία γωνία τους ίση, οπότε είναι ίσα και έχουν $ΜΔ = ΜΕ$.

1658. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με τη γωνία Α ορθή και από το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ φέρουμε τα κάθετα τμήματα ΜΔ και ΜΕ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
α) Αν ΜΔ = ΜΕ τότε:
i. τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ είναι ίσα. **(Μονάδες 8)**
ii. το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. **(Μονάδες 9)**
β) Αν ΑΒ = ΑΓ τότε ΜΔ = ΜΕ. **(Μονάδες 8)**



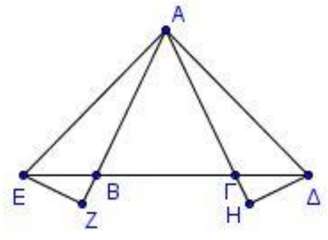
Λύση

α) i. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ έχουν:
- ΜΔ = ΜΕ
- ΜΒ = ΜΓ, διότι Μ μέσο της ΒΓ.
Άρα τα δύο τρίγωνα έχουν δύο αντίστοιχες πλευρές τους ίσες οπότε είναι ίσα.

ii. Από τα ίσα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ προκύπτει ότι $\hat{Β} = \hat{Γ}$, διότι είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές ΜΔ και ΜΕ. Άρα ΑΒΓ ισοσκελές τρίγωνο.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ έχουν:
- ΜΒ = ΜΓ, διότι Μ μέσο της ΒΓ
- $\hat{Β} = \hat{Γ}$, ως προσκείμενες στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.
Άρα τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ είναι ίσα, οπότε ισχύει ΜΔ = ΜΕ ως απέναντι από τις ίσες γωνίες $\hat{Β}$, $\hat{Γ}$.

1659. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$. Στην προέκταση της ΒΓ (προς το Γ) θεωρούμε σημείο Δ και στην προέκταση της ΓΒ (προς το Β) θεωρούμε σημείο Ε έτσι ώστε $ΓΔ = ΒΕ$. Από το Δ φέρουμε ΔΗ κάθετη στην ευθεία ΑΓ και από το Ε φέρουμε ΕΖ κάθετη στην ευθεία ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:
α) $ΑΔ = ΑΕ$ **(Μονάδες 12)**
β) $ΕΖ = ΔΗ$ **(Μονάδες 13)**

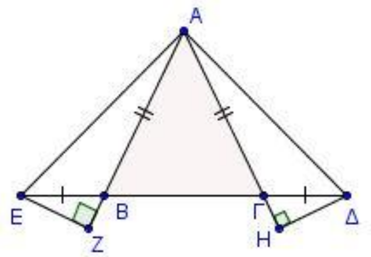


Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΔ έχουν:

1) $AB = A\Gamma$
2) $\Gamma\Delta = BE$ και
3) $ABE = A\Gamma\Delta$ παραπληρωματικές των ίσων γωνιών Β και Γ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.

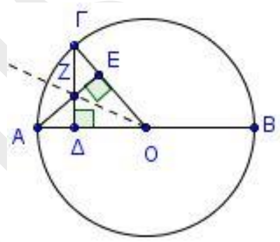
Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $A\Delta = AE$.



β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΕΒΖ και ΓΗΔ έχουν:
1) $\Gamma\Delta = BE$ και
2) $EBZ = \Delta\Gamma H$ κατακορυφήν με τις ίσες γωνίες Β και Γ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.

Τα δύο τρίγωνα έχουν μια κάθετη πλευρά και μια οξεία γωνία τους ίση, οπότε είναι ίσα και έχουν $EZ = \Delta H$.

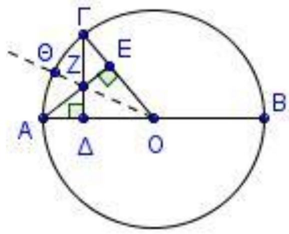
1677. Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Θεωρούμε διάμετρο ΑΒ και τυχαίο σημείο Γ του κύκλου. Αν ΑΕ κάθετο στην ΟΓ και ΓΔ κάθετο στην ΑΟ να αποδείξετε ότι:
α) Το τρίγωνο ΔΟΕ είναι ισοσκελές.
(Μονάδες 13)
β) Η ΟΖ διχοτομεί τη γωνία ΑΟΓ και προεκτεινόμενη διέρχεται από το μέσο του τόξου ΑΓ.
(Μονάδες 12)



Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΕΟ και ΓΔΟ έχουν:
1) $OA = O\Gamma = \rho$ και
2) τη γωνία Ο κοινή,

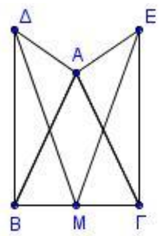
δηλαδή τα δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν τις υποτείνουσες τους ίσες και μία οξεία γωνία τους ίση, άρα είναι ίσα. Οπότε και $O\Delta = OE$ άρα το τρίγωνο ΟΔΕ είναι ισοσκελές.



β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΖΔΟ και ΖΕΟ έχουν:
1) $O\Delta = OE$ και
2) τη πλευρά ΟΖ κοινή,

δηλαδή έχουν τις υποτείνουσες τους ίσες και μια κάθετη πλευρά τους ίση, οπότε είναι ίσα, άρα έχουν και $\Delta OZ = ZOE$, δηλαδή η ΟΖ είναι διχοτόμος της γωνίας ΑΟΓ. Επειδή οι γωνίες ΑΟΖ και ΖΟΓ είναι επίκεντρες και είναι ίσες, τότε και τα αντίστοιχα τόξα ΑΘ και ΘΓ είναι ίσα, οπότε το Θ είναι μέσο του τόξου ΑΓ.

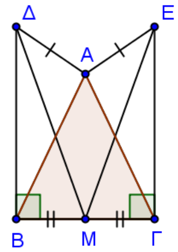
1698. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$. Στα σημεία Β και Γ της ΒΓ φέρουμε προς το ίδιο μέρος της ΒΓ τα τμήματα $B\Delta \perp B\Gamma$ και $\Gamma E \perp B\Gamma$ τέτοια, ώστε $B\Delta = \Gamma E$. Αν Μ το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι:
α) τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ είναι ίσα
(Μονάδες 12)
β) $A\Delta = AE$.
(Μονάδες 13)



Λύση

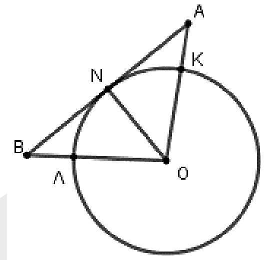
α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ έχουν:
1) $B\Delta = \Gamma E$ και 2) $BM = M\Gamma$ γιατί το Μ είναι μέσο της ΒΓ

Τα δύο τρίγωνα έχουν τις κάθετες πλευρές τους μία προς μία ίσες, οπότε είναι ίσα.



β) Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΕΓ έχουν:
1) $ΒΔ = ΓΕ$
2) $ΑΒ = ΑΓ$ και
3) $ΑΒΔ = ΔΒΜ - Β = 90^\circ - Γ = ΑΓΕ$ (οι γωνίες Β και Γ είναι στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ και είναι ίσες)

Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $ΑΔ = ΑΕ$.



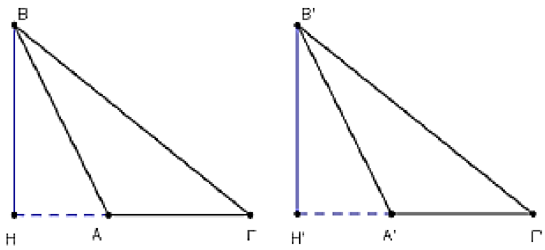
1676.Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Σε σημείο Ν του κύκλου φέρουμε την εφαπτόμενή του, και εκατέρωθεν του Ν θεωρούμε σημεία Α και Β, τέτοια ώστε ΝΑ=ΝΒ. Οι ΟΑ και ΟΒ τέμνουν τον κύκλο στα Κ και Λ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
α) Το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 13)
β) Το σημείο Ν είναι μέσο του τόξου ΚΛ. (Μονάδες 12)

Λύση

α) Επειδή η ΑΒ είναι εφαπτομένη του κύκλου, ισχύει ότι $ΑΒ \perp ΟΝ$.
Στο τρίγωνο ΟΑΒ η ΟΝ είναι ύψος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

β) Η ΟΝ εκτός από ύψος και διάμεσος είναι και διχοτόμος της γωνίας ΒΟΑ, άρα $ΒΟΝ = ΝΟΑ$.
Επειδή σε ίσες επίκεντρες γωνίες ενός κύκλου αντιστοιχούν ίσα τόξα, είναι $ΚΝ = ΝΛ$, οπότε το Ν είναι μέσο του τόξου ΚΛ.

12149.Δίνονται τα αμβλυγώνια τρίγωνα ΑΒΓ $\left(Α = 90^\circ\right)$ και Α΄Β΄Γ΄ $\left(Α΄ = 90^\circ\right)$ με $γ = γ΄$ και $β = β΄$.
Αν τα ύψη ΒΗ και Β΄Η΄ των τριγώνων ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ αντίστοιχα είναι ίσα, να αποδείξετε ότι:
α) $ΒΑΗ = Β΄Α΄Η΄$. (Μονάδες 13)
β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι ίσα.



(Μονάδες 12)

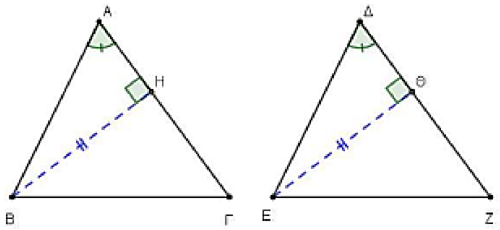
Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΗΑ και Β΄Η΄Α΄ έχουν:
- $ΒΗ = Β΄Η΄$, από υπόθεση
- $γ = γ΄$, από υπόθεση

Επομένως είναι ίσα, επειδή είναι ορθογώνια και έχουν την υποτείνουσα και μία κάθετη πλευρά αντίστοιχα ίσες μία προς μία. Άρα και οι γωνίες που είναι απέναντι από τις ίσες πλευρές ΒΗ και Β΄Η΄ είναι ίσες, δηλαδή $ΒΑΗ = Β΄Α΄Η΄$.

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν:
- $γ = γ΄$, από υπόθεση
- $β = β΄$, από υπόθεση
- $ΒΑΓ = Β΄Α΄Γ΄$ ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $ΒΑΗ$ και $Β΄Α΄Η΄$.

Επομένως, τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι ίσα, αφού έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες.



13517.Δίνονται δύο οξυγώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ με
$Α = Δ$, $ΑΒΓ = ΔΕΖ$.Αν τα ύψη τους ΒΗ και ΕΘ είναι ίσα τότε να αποδείξετε ότι:
α) ΑΒ = ΔΕ.
(Μονάδες 13)
β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα .
(Μονάδες 12)

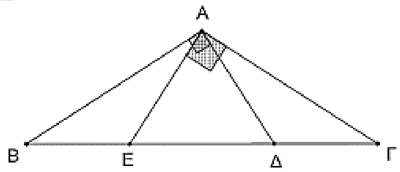
Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΗ και ΔΕΘ έχουν:
- ΒΗ = ΕΘ από την υπόθεση,
- $ΑΒΗ = ΑΕΘ$ γιατί τα δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες τους ίσες μία προς μία, οπότε και οι τρίτες γωνίες τους είναι ίσες

Επομένως, τα τρίγωνα ΑΒΗ και ΔΕΘ είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια και έχουν μια κάθετη πλευρά τους και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία. Επομένως, θα έχουν τις υποτείνουσες ίσες, δηλαδή ΑΒ = ΔΕ (1).

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν:
- ΑΒ =ΔΕ, από (1),
- $Α = Δ$ υπόθεση
- $ΑΒΓ = ΔΕΖ$ υπόθεση.

Επομένως τα τρίγωνα είναι ίσα γιατί έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία.



13533.Δίνεται ισοσκελές και αμβλυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Η κάθετη στην ΑΒ στο σημείο Α τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Δ και η κάθετη στην ΑΓ στο σημείο Α τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:
α) τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα. (Μονάδες 10)
β) το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)
γ) ΒΕ = ΓΔ. (Μονάδες 8)

Λύση

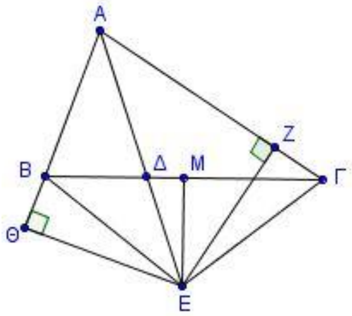
α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ έχουν:
- ΑΒ = ΑΓ υπόθεση
- $Β = Γ$ γιατί βρίσκονται στη βάση ΒΓ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ

Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια και έχουν μια κάθετη πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία ίσες μία προς μία.

β) Από την ισότητα των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΓΕ προκύπτει ότι ΑΔ = ΑΕ ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες τους $Β, Γ$ αντίστοιχα. Άρα το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

γ) Από την ισότητα των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΓΕ έχουμε ότι ΒΔ = ΓΕ (1) ως πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες τους $ΒΑΔ$ και $ΓΑΕ$ αντίστοιχα.
Λόγω της (1) είναι ΒΕ = ΒΔ − ΔΕ = ΓΕ − ΔΕ = ΓΔ.

4ο Θέμα



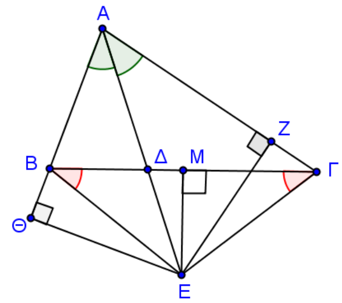
1707. Στο τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος, η κάθετη από το μέσο Μ της ΒΓ τέμνει την προέκταση της διχοτόμου ΑΔ στο σημείο Ε. Αν Θ,Ζ είναι οι προβολές του Ε στις ΑΒ,ΑΓ, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΕΒΓ είναι ισοσκελές. **(Μονάδες 5)**

β) Τα τρίγωνα ΘΒΕ και ΖΓΕ είναι ίσα. **(Μονάδες 8)**

γ) $\mathbf{\hat{ΑΓΕ}+\hat{ΑΒΕ}=180^\circ}$. **(Μονάδες 12)**

Λύση



α) Στο τρίγωνο ΕΒΓ η ΕΜ είναι ύψος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.
2ος τρόπος: Ε σημείο της μεσοκαθέτου του ΒΓ , οπότε ισαπέχει από τα άκρα του.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΘΒΕ και ΕΖΓ έχουν:
1) $ΕΒ=ΕΓ$
2) $ΕΘ=ΕΖ$ γιατί το Ε ανήκει στη διχοτόμο ΑΕ της γωνίας Α, οπότε ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας.

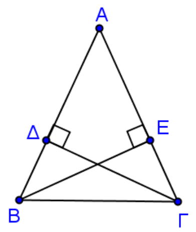
Άρα τα τρίγωνα έχουν τις υποτείνουσες τους ίσες και μια κάθετη πλευρά του ενός τριγώνου, είναι ίση με μια κάθετη πλευρά του άλλου, οπότε είναι ίσα.

γ) Επειδή τα τρίγωνα ΘΒΕ και ΕΓΖ είναι ίσα είναι και $\hat{ΑΓΕ}=\hat{ΘΒΕ}$ (1)

Είναι $\hat{ΘΒΕ}+\hat{ΑΒΕ}=180^\circ \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \hat{ΑΓΕ}+\hat{ΑΒΕ}=180^\circ$

1724. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΒΕ και ΓΔ που αντιστοιχούν στις πλευρές ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Δίνεται η ακόλουθη πρόταση:
Π: **Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $ΑΒ=ΑΓ$, τότε τα ύψη ΒΕ και ΓΔ που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του είναι ίσα.**
α) Να εξετάσετε αν ισχύει η πρόταση Π αιτιολογώντας την απάντησή σας. **(Μονάδες 10)**
β) Να διατυπώσετε την αντίστροφη πρόταση της Π και να αποδείξετε ότι ισχύει. **(Μονάδες 10)**
γ) Να διατυπώσετε την πρόταση Π και την αντίστροφή της ως ενιαία πρόταση. **(Μονάδες 5)**

Λύση



α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΓΔ και ΒΕΓ έχουν:
1) τη πλευρά ΒΓ κοινή και
2) $\hat{ΑΒΓ}=\hat{ΑΓΒ}$ γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.

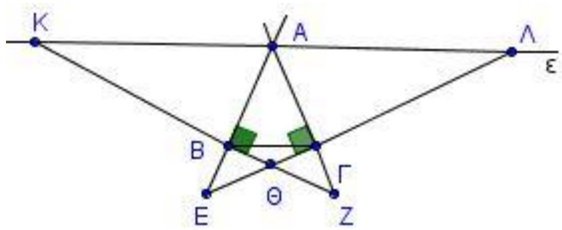
Άρα τα τρίγωνα έχουν τις υποτείνουσας τους ίσες και μια κάθετη πλευρά του ενός τριγώνου, είναι ίση με μια κάθετη πλευρά του άλλου, οπότε είναι ίσα.
Επομένως είναι και $ΒΕ=ΓΔ$.

β) Π΄: Αν δύο ύψη τριγώνου είναι ίσα, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές με ίσες τις πλευρές στις οποίες αντιστοιχούν τα ύψη.

Απόδειξη

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΔΓ και ΒΕΓ έχουν:
1) τη πλευρά ΒΓ κοινή και 2) $ΒΕ=ΓΔ$
άρα τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε έχουν και $\hat{ΑΒΓ}=\hat{ΑΓΒ}$. Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ έχει δύο γωνίες ίσες, είναι ισοσκελές με $ΑΒ=ΑΓ$.

γ) Ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές αν και μόνο αν τα ύψη που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του είναι ίσα.



1875. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, και την ευθεία ε της εξωτερικής διχοτόμου της γωνίας Α. Η κάθετη στη πλευρά ΑΒ στο Β τέμνει την ε στο Κ και την ευθεία ΑΓ στο Ζ. Η κάθετη στη πλευρά ΑΓ στο Γ τέμνει την ε στο Λ και την ευθεία ΑΒ στο Ε.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $ΑΖ = ΑΕ$ (Μονάδες 8)

ii. $ΑΚ = ΑΛ$ (Μονάδες 9)

β) Ένας μαθητής κοιτώντας το σχήμα, διατύπωσε την άποψη ότι η ΑΘ είναι διχοτόμος της γωνίας Α του τριγώνου ΑΒΓ, όπου Θ το σημείο τομής των ΚΖ,ΕΛ. Συμφωνείτε με την παραπάνω σκέψη του μαθητή ή όχι; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

Λύση

α)i. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΖ και ΑΓΕ έχουν:

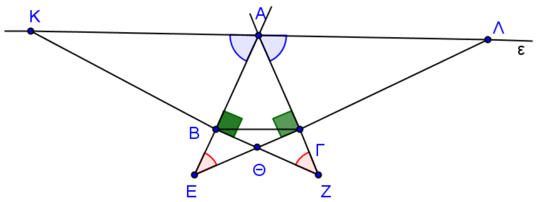
1) τη γωνία Α κοινή

2) $ΑΒ = ΑΓ$ (ίσες πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ)

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε

και $ΑΕ = ΑΖ$, $ΑΕΓ = ΑΖΒ$.

ii. Τα τρίγωνα ΕΑΛ και ΚΑΖ έχουν:



1) $ΑΕ = ΑΖ$

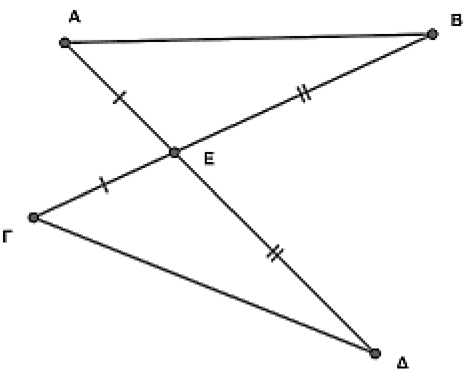
2) $ΑΕΓ = ΑΖΒ$ και

3) $ΕΑΛ = ΚΑΖ = Α + \frac{1}{2}Α_{εξ}$ (ή με σύγκριση των τριγώνων ΚΑΒ και ΛΑΓ)

Από το κριτήριο ΓΠΓ τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε και $ΑΚ = ΑΛ$.

β) Είναι $ΑΒΖ = ΑΓΕ = 90^\circ$ και $ΑΒΓ = ΑΓΒ$ (στη βάση του ισοσκελούς ΑΒΓ), άρα και

$ΑΒΖ - ΑΒΓ = ΑΓΕ - ΑΓΒ \Leftrightarrow ΓΒΘ = ΒΓΘ$. Τότε το τρίγωνο ΒΘΓ είναι ισοσκελές και $ΒΘ = ΘΓ$. Όμως τα ΒΘ,ΘΓ είναι οι αποστάσεις του Θ από τις πλευρές της γωνίας Α, οπότε το Θ ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας Α. Δηλαδή η ΑΘ είναι διχοτόμος της Α .



13839.Τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΔ και ΒΓ τέμνονται στο σημείο Ε έτσι ώστε ΑΕ=ΓΕ και ΒΕ=ΕΔ.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΓΔΕ είναι ίσα. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι οι αποστάσεις ΕΗ και ΕΘ του σημείου Ε από τις πλευρές ΑΒ και ΓΔ, αντίστοιχα, είναι ίσες. (Μονάδες 5)

γ) Αν οι προεκτάσεις των ΑΒ και ΓΔ προς τα Α και Γ αντίστοιχα τέμνονται στο Ζ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΖ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 12)

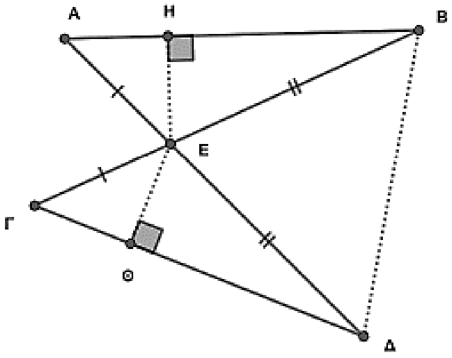
Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΓΔΕ έχουν:

- ΑΕ=ΓΕ (υπόθεση)
- ΒΕ=ΔΕ (υπόθεση)

- $\widehat{AEB} = \widehat{\Gamma E\Delta}$ (ως κατακορυφήν)

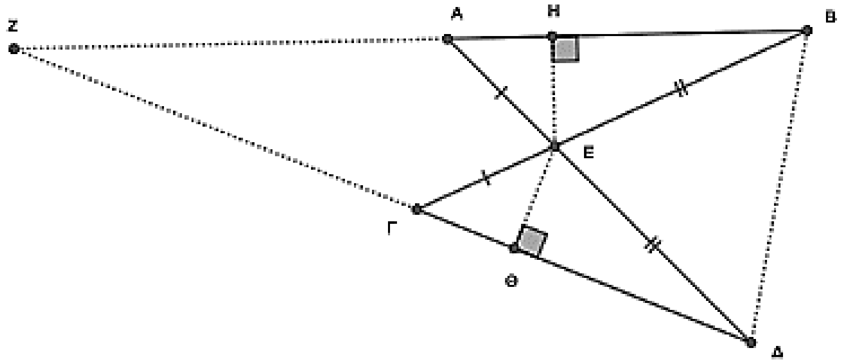
Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΓΔΕ είναι ίσα



β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΗΕ και ΕΘΓ έχουν:
- ΑΕ = ΓΕ
- $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ (από σύγκριση ερωτήματος α) αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΕΒ και ΕΔ)

Τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια, που έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία ίσες μία προς μία, άρα και ΕΗ=ΕΘ ως πλευρές απέναντι από τις ίσες γωνίες Α και Γ αντίστοιχα.

γ)



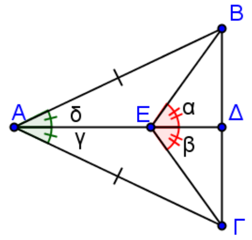
Από την ισότητα των τριγώνων του α) ερωτήματος έχουμε ότι $\widehat{ABE} = \widehat{\Gamma\Delta E}$ αφού βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΕ και ΕΓ αντίστοιχα.

Από υπόθεση έχουμε ΕΒ=ΕΔ άρα το τρίγωνο ΕΒΔ είναι ισοσκελές με βάση ΒΔ συνεπώς οι προσκείμενες στη βάση γωνίες θα είναι ίσες μεταξύ τους, δηλαδή $\widehat{EB\Delta} = \widehat{E\Delta B}$. Το τρίγωνο ΒΔΖ είναι ισοσκελές με βάση τη ΒΔ αφού οι προσκείμενες στη βάση γωνίες, $\widehat{ZB\Delta}$ και $\widehat{Z\Delta B}$, είναι ίσες μεταξύ τους ως άθροισμα ίσων γωνιών: $\widehat{ABE} + \widehat{EB\Delta} = \widehat{\Gamma\Delta E} + \widehat{E\Delta B} \Leftrightarrow \widehat{ZB\Delta} = \widehat{Z\Delta B}$

ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟ – ΜΕΣΟΚΑΘΕΤΟΣ - ΔΙΧΟΤΟΜΟΣ

2ο Θέμα

1587. Αν για το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$ του σχήματος ισχύουν $\hat{α} = \hat{β}$ και $\hat{γ} = \hat{δ}$, να γράψετε μια απόδειξη για καθέναν από τους παρακάτω ισχυρισμούς:



α) Τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΕΓ είναι ίσα. **(Μονάδες 8)**

β) Το τρίγωνο ΓΕΒ είναι ισοσκελές. **(Μονάδες 8)**

γ) Η ευθεία ΑΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΒΓ. **(Μονάδες 9)**

Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΕΓ έχουν:
1) την πλευρά ΑΕ κοινή
2) $\hat{γ} = \hat{δ}$ (υπόθεση) και
3) ΑΒ=ΑΓ (υπόθεση)
Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

β) Επειδή τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΕΓ είναι ίσα, έχουν και $ΕΒ = ΕΓ$, άρα το τρίγωνο ΕΒΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΒΓ.

γ) Επειδή τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΕΓ είναι ίσα, έχουν και $ΑΒ = ΑΓ$, δηλαδή το Α ισαπέχει από τα Β και Γ οπότε βρίσκεται στη μεσοκάθετο του ΒΓ. Επειδή $ΕΒ = ΕΓ$, το Ε ισαπέχει από τα Β,Γ άρα βρίσκεται στη μεσοκάθετο του ΒΓ. Επειδή τα Α,Ε βρίσκονται στη μεσοκάθετο του ΒΓ, η ΑΔ είναι η μεσοκάθετος του τμήματος αυτού.

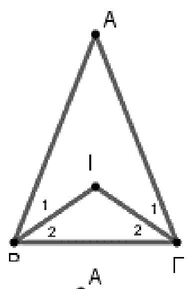
1558.Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και Ι το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών $\hat{Β}$ και $\hat{Γ}$.Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΒΙΓ είναι ισοσκελές. **(Μονάδες 8)**

β) Οι γωνίες $Α\hat{Ι}Β$ και $Α\hat{Ι}Γ$ είναι ίσες. **(Μονάδες 10)**

γ) Η ευθεία ΑΙ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΒΓ. **(Μονάδες 7)**

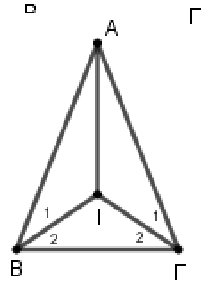
Λύση



α) Επειδή οι ΒΙ, ΓΙ είναι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{Β}$ και $\hat{Γ}$ αντίστοιχα, ισχύι ότι $Β_2 = \frac{Β}{2}$ και $Γ_2 = \frac{Γ}{2}$. Όμως $\hat{Β} = \hat{Γ}$ γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ, οπότε $Β_2 = Γ_2$. Το τρίγωνο ΒΙΓ έχει δύο γωνίες ίσες, οπότε είναι ισοσκελές.

β) Τα τρίγωνα ΑΙΒ και ΑΙΓ έχουν:
- ΑΒ = ΑΓ (υπόθεση)
- ΒΙ = ΙΓ γιατί το τρίγωνο ΙΒΓ είναι ισοσκελές με βάση τη ΒΓ
- $Β_1 = Γ_1$ γιατί είναι ίσες με το μισό των ίσων γωνιών $\hat{Β}$ και $\hat{Γ}$

Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ΑΙΒ και ΒΙΓ είναι ίσα, οπότε έχουν και $Α\hat{Ι}Β = Α\hat{Ι}Γ$.



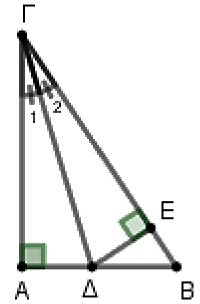
γ) Επειδή ΑΒ = ΑΓ και ΙΒ = ΙΓ, τα σημεία Α και Ι ισαπέχουν από τα άκρα του τμήματος ΒΓ, οπότε η ευθεία ΑΙ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΒΓ.

1574. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A}=90^\circ\right)$ η διχοτόμος της γωνίας Γ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ. Από το Δ φέρουμε προς την πλευρά ΒΓ την κάθετο ΔΕ, η οποία τέμνει τη ΒΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΔΓΕ είναι ίσα. **(Μονάδες 13)**

β) Η ευθεία ΓΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΕ. **(Μονάδες 12)**

Λύση



α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΓΔ και ΔΓΕ έχουν:
- την πλευρά ΓΔ κοινή
- $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2$ λόγω διχοτόμησης της γωνίας Γ.

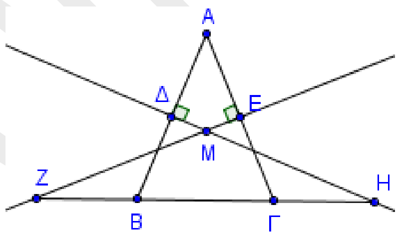
Άρα τα δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα τους ίση και μια οξεία γωνία του ενός είναι ίση με μια οξεία γωνία του άλλου, οπότε είναι ίσα.

β) Επειδή τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΓΔΕ είναι ίσα, έχουν ΓΑ = ΓΕ και ΔΑ = ΔΕ. Δηλαδή τα σημεία Γ, Δ ισαπέχουν από τα άκρα του τμήματος ΔΕ, επομένως η ευθεία ΓΔ είναι μεσοκάθετος του ΔΕ.

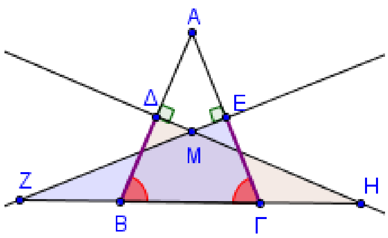
1578. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$. Οι μεσοκάθετοι των ίσων πλευρών του τέμνονται στο Μ και προεκτεινόμενες τέμνουν τη βάση ΒΓ στα Ζ και Η.

α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔΒΗ και ΕΖΓ. **(Μονάδες 15)**

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΜΖΗ είναι ισοσκελές. **(Μονάδες 10)**



Λύση



α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΒΗ και ΕΖΓ έχουν:

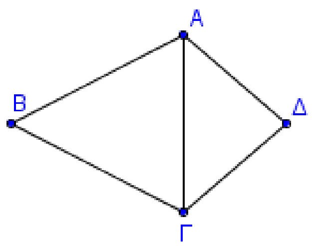
1) $\Delta B = E\Gamma$ γιατί είναι μισά των ίσων πλευρών ΑΒ και ΑΓ

2) $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.

Επομένως τα τρίγωνα είναι ίσα.

β) Επειδή τα τρίγωνα ΔΒΗ και ΕΓΖ είναι ίσα, έχουν και $\hat{Z} = \hat{H}$. Το τρίγωνο ΜΖΗ έχει δύο γωνίες ίσες, άρα είναι ισοσκελές.

1585. Έστω κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $BA = B\Gamma$ και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι:

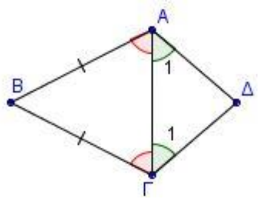


α) $B\hat{A}\Gamma = B\hat{\Gamma}A$ **(Μονάδες 8)**

β) Το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές. **(Μονάδες 10)**

γ) Η ευθεία ΒΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΓ. **(Μονάδες 7)**

Λύση

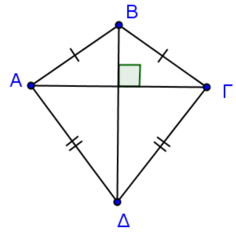


α) Επειδή $BA = B\Gamma$, το τρίγωνο ΒΑΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΓ, άρα $B\hat{A}\Gamma = B\hat{\Gamma}A$.

β) Επειδή $A=\Gamma$ και $BA\Gamma=B\Gamma A$, είναι και $A-BA\Gamma=\Gamma-B\Gamma A \Leftrightarrow A_1=\Gamma_1$, άρα το τρίγωνο ΔΑΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΓ και είναι $\Delta A=\Delta\Gamma$.

γ) Επειδή $BA=B\Gamma$ και $\Delta A=\Delta\Gamma$, τα σημεία Β,Δ ισαπέχουν από τα Α,Γ, άρα η ΒΔ είναι μεσοκάθετος του ΑΓ.

1624. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $BA=B\Gamma$ και $\Delta A=\Delta\Gamma$. Οι διαγώνιοι ΑΓ, ΒΔ του τετράπλευρου είναι ίσες και τέμνονται κάθετα. Να αποδείξετε ότι:



α) Η ΒΔ είναι διχοτόμος των γωνιών Β και Δ του τετράπλευρου ΑΒΓΔ.
(Μονάδες 12)

β) Η ΒΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΓ.
(Μονάδες 13)

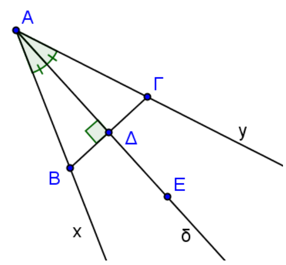
Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΔ έχουν:
1) $BA=B\Gamma$
2) $\Delta A=\Delta\Gamma$ και
3) τη πλευρά ΒΔ κοινή

Με βάση το κριτήριο Π-Π-Π τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν $AB\Delta=\Delta B\Gamma$ και $A\Delta B=B\Delta\Gamma$, δηλαδή η ΒΔ είναι διχοτόμος των γωνιών Β και Δ του τετράπλευρου ΑΒΓΔ.

β) Επειδή $BA=B\Gamma$ και $\Delta A=\Delta\Gamma$, τα σημεία Α και Γ ισαπέχουν από τα Β,Δ, άρα ανήκουν στη μεσοκάθετο του ΑΓ. Οπότε η ΒΔ είναι η μεσοκάθετος του ΑΓ.

1670. Δίνεται γωνία xAy και η διχοτόμος της Αδ. Από τυχαίο σημείο Β της Αx φέρνουμε κάθετη στη διχοτόμο, η οποία τέμνει την Αδ στο Δ και την Αy στο Γ. Να αποδείξετε ότι:



α) $AB=A\Gamma$
(Μονάδες 12)

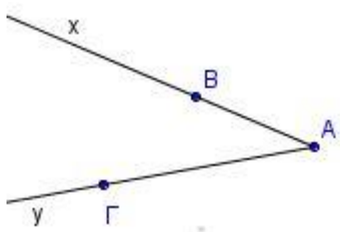
β) Το τυχαίο σημείο Ε της Αδ ισαπέχει από τα Β και Γ.
(Μονάδες 13)

Λύση

α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΔ είναι διχοτόμος και ύψος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές με βάση τη ΒΓ, επομένως $AB=A\Gamma$.

β) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές η ΑΔ θα είναι και διάμεσος. Επειδή η ΑΔ είναι κάθετη στο μέσο Δ της ΒΓ, είναι μεσοκάθετη της ΒΓ. Επειδή κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ισαπέχει από τα άκρα του τμήματος, το ίδιο ισχύει και για το τυχαίο σημείο Ε της Αδ.

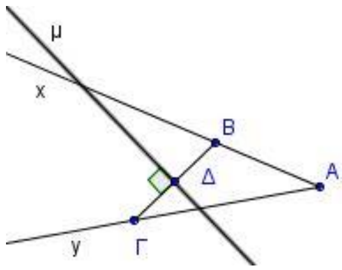
1688. Στο διπλανό σχήμα έχουμε το χάρτη μιας περιοχής όπου είναι κρυμμένος ένας θησαυρός. Οι ημιευθείες Αx και Αy παριστάνουν δύο ποτάμια και στα σημεία Β και Γ βρίσκονται δύο πλατάνια.
Να προσδιορίσετε γεωμετρικά τις δυνατές θέσεις του θησαυρού, αν είναι γνωστό ότι:



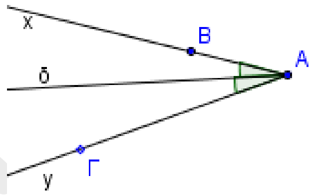
α) ισαπέχει από τα δύο πλατάνια. (Μονάδες 9)
β) ισαπέχει από τα δύο ποτάμια. (Μονάδες 9)
γ) ισαπέχει και από τα δύο πλατάνια και από τα δύο ποτάμια.
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας σε κάθε περίπτωση. (Μονάδες 7)

Λύση

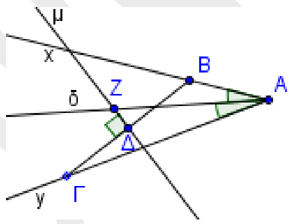
α) Γνωρίζουμε ότι τα σημεία που ισαπέχουν από δύο σημεία Β και Γ, βρίσκονται στη μεσοκάθετο του τμήματος ΒΓ. Κατά συνέπεια ο θησαυρός βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετο μ του ΒΓ.



β) Για να ισαπέχει ο θησαυρός από τα δύο ποτάμια, θα ισαπέχει από τις πλευρές Αχ και Αy της γωνίας xΑy,άρα θα βρίσκεται στη διχοτόμο της γωνίας αυτής.

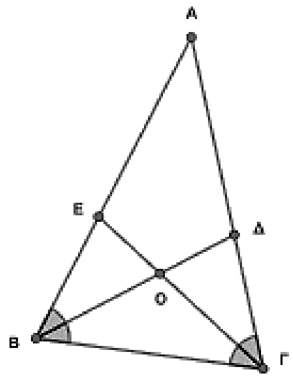


γ) Αν ο θησαυρός ισαπέχει και από τα δύο πλατάνια και από τα δύο ποτάμια, τότε ανήκει και στη μεσοκάθετο του ΒΓ και στη διχοτόμο Αδ της γωνίας xΑy, άρα ο θησαυρός βρίσκεται στο σημείο τομής Ζ των Αδ, μ.



4^{ο} Θέμα

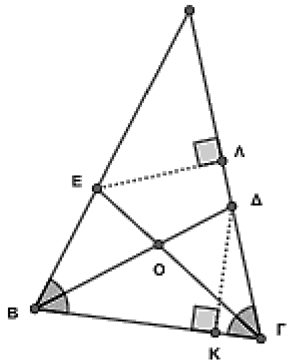
13854.Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Οι διχοτόμοι ΒΔ και ΓΕ των γωνιών Β και Γ αντίστοιχα, τέμνονται στο σημείο Ο.
α) Να αποδείξετε ότι ΒΔ=ΓΕ.
(Μονάδες 9)
β) Από τα σημεία Ε και Δ φέρνουμε κάθετες ΕΛ και ΔΚ στις πλευρές ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι: ΔΚ=ΕΛ.
(Μονάδες 9)
γ) Να εντοπίσετε και να σχεδιάσετε σημείο Ζ της πλευράς ΒΓ που η απόστασή του από το σημείο Ε να ισούται με την απόσταση των σημείων Δ και Κ αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή σας.
(Μονάδες 7)



Λύση

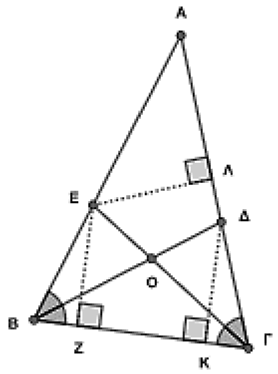
α) Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΒΕΓ έχουν:
- τη ΒΓ κοινή πλευρά
- $\widehat{ΑΒΓ} = \widehat{ΑΓΒ}$ ως προσκείμενες στη βάση ΒΓ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ
- $\widehat{ΔΒΓ} = \widehat{ΕΓΒ}$ ως μισά των ίσων γωνιών $\widehat{ΑΒΓ}$ και $\widehat{ΑΓΒ}$

Τα τρίγωνα είναι ίσα γιατί έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, άρα ΒΔ=ΓΕ ως απέναντι πλευρές των ίσων γωνιών $\widehat{ΑΓΒ}$ και $\widehat{ΑΒΓ}$.



β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΔΚ και ΓΕΛ έχουν:
- ΒΔ = ΓΕ από το προηγούμενο ερώτημα
- $\widehat{ΔΒΚ} = \widehat{ΕΓΛ}$ ως μισά των ίσων γωνιών $\widehat{ΑΒΓ}$ και $\widehat{ΑΓΒ}$

Τα τρίγωνα είναι ίσα γιατί είναι ορθογώνια, που έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία ίσες μία προς μία, άρα ΔΚ=ΕΛ ως απέναντι πλευρές των ίσων γωνιών $\widehat{ΚΒΔ}$ και $\widehat{ΛΓΕ}$.



γ) Αναζητούμε ένα σημείο Ζ της πλευράς ΒΓ το οποίο να ικανοποιεί τη σχέση ΖΕ=ΔΚ.
Από το β) ερώτημα έχουμε ότι ΔΚ=ΕΛ συνεπώς το σημείο Ζ που αναζητούμε θα πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση ΖΕ=ΕΛ. Το σημείο Ε ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας $\widehat{ΑΓΒ}$ και ΕΛ είναι η απόστασή του από την πλευρά ΓΑ, η οποία είναι ίση με την απόσταση του σημείο Ε από τη άλλη πλευρά, ΒΓ, της γωνίας. Συνεπώς το ζητούμενο σημείο Ζ θα είναι το ίχνος της κάθετης από το σημείο Ε στην πλευρά ΒΓ.

ΑΝΙΣΟΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

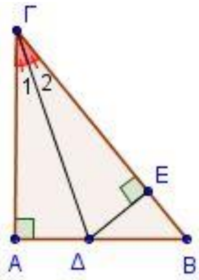
2ο Θέμα

1540. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\mathrm{A}=90^{\circ}\right)$ η διχοτόμος της γωνίας Γ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ. Από το Δ φέρουμε προς την πλευρά ΒΓ την κάθετο ΔΕ, η οποία τέμνει τη ΒΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

α) $\mathrm{A\Delta}=\mathrm{\Delta E}$ (Μονάδες 13)

β) $\mathrm{A\Delta}<\mathrm{\Delta B}$ (Μονάδες 12)

Λύση



α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΓ και ΓΔΕ έχουν:

1) την πλευρά ΓΔ κοινή και

2) $\Gamma_1=\Gamma_2$ λόγω της διχοτόμησης της γωνίας Γ.

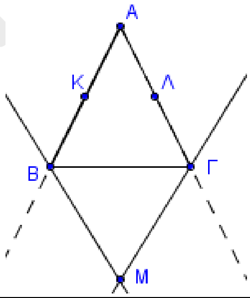
Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $\mathrm{A\Delta}=\mathrm{\Delta E}$.

β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΒ η ΔΒ είναι η υποτείνουσα, άρα είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου, δηλαδή $\mathrm{\Delta B}>\mathrm{\Delta E}$, όμως $\mathrm{A\Delta}=\mathrm{\Delta E}$, άρα $\mathrm{\Delta B}>\mathrm{A\Delta}$.

1553. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$. Οι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών Β και Γ τέμνονται στο σημείο Μ και Κ,Λ είναι αντίστοιχα τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΒΜΓ είναι ισοσκελές με $\mathrm{MB}=\mathrm{M\Gamma}$. (Μονάδες 12)

β) $\mathrm{MK}=\mathrm{M\Lambda}$ (Μονάδες 13)

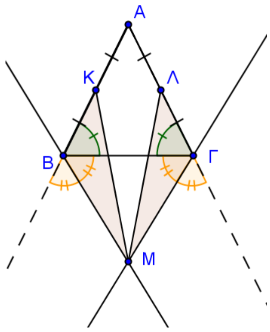


Λύση

α) Επειδή οι ΒΜ και ΓΜ είναι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών Β και Γ αντίστοιχα, έχουμε:

$$\mathrm{MB\Gamma}=\frac{\mathrm{B}_{\varepsilon\xi}}{2}=\frac{180^{\circ}-\mathrm{B}}{2}=\frac{180^{\circ}-\Gamma}{2}=\frac{\Gamma_{\varepsilon\xi}}{2}=\mathrm{M\Gamma B}.$$

Το τρίγωνο ΜΓΒ έχει δύο γωνίες του ίσες και είναι ισοσκελές με βάση την ΒΓ, άρα $\mathrm{MB}=\mathrm{M\Gamma}$.



β) Τα τρίγωνα ΚΒΜ και ΛΓΜ έχουν:

1) $\mathrm{KB}=\mathrm{\Lambda\Gamma}$ γιατί είναι μισά των ίσων πλευρών ΑΒ και ΑΓ

2) $\mathrm{MB}=\mathrm{M\Gamma}$ και

3) $\mathrm{KBM}=\mathrm{B}+\mathrm{MB\Gamma}=\Gamma+\mathrm{M\Gamma B}=\mathrm{\Lambda\Gamma M}$

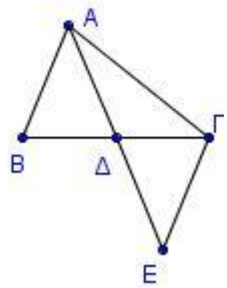
Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $\mathrm{MK}=\mathrm{M\Lambda}$.

1573. Στο διπλανό σχήμα, η ΑΔ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ και το Ε είναι σημείο στην προέκταση της ΑΔ, ώστε $\mathrm{\Delta E}=\mathrm{A\Delta}$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $\mathrm{AB}=\mathrm{\Gamma E}$. (Μονάδες 12)

β) $\mathrm{A\Delta}<\dfrac{\mathrm{AB}+\mathrm{A\Gamma}}{2}$. (Μονάδες 13)

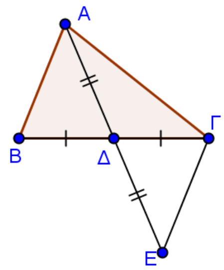


Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΔΓΕ έχουν:

1) $ΑΔ = ΔΕ$
2) $ΒΔ = ΔΓ$ γιατί το Δ είναι μέσο της ΒΓ και
3) $\hat{ΑΔΒ} = \hat{ΕΔΓ}$ ως κατακορυφήν

Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $ΑΒ = ΓΕ$ (1).



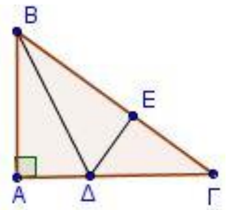
β) $ΑΕ = ΑΔ + ΔΕ \Leftrightarrow ΑΕ = 2ΑΔ$

Από την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο ΑΓΕ ισχύει ότι:

$ΑΕ < ΑΕ + ΑΓ \Leftrightarrow ΑΕ < ΑΒ + ΑΓ \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 2ΑΔ < ΑΒ + ΑΓ \Leftrightarrow ΑΔ < \dfrac{ΑΒ + ΑΓ}{2}$.

1646. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία Α. Η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Β, η ΔΕ είναι κάθετη στην ΒΓ και η γωνία Γ είναι μικρότερη της γωνίας Β. Να αποδείξετε ότι:

α) $ΑΔ = ΔΕ$ (Μονάδες 8)
β) $ΑΔ < ΔΓ$ (Μονάδες 9)
γ) $ΑΓ > ΑΒ$ (Μονάδες 8)

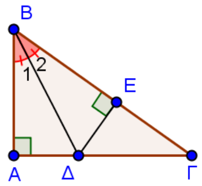


Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΒ και ΒΔΕ έχουν:

1) την πλευρά ΒΔ κοινή και
2) $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ λόγω της διχοτόμησης της γωνίας Β.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $ΑΔ = ΔΕ$.

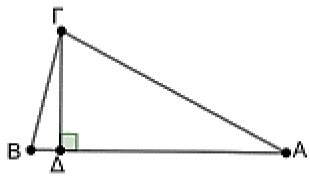


β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΓ η ΔΓ είναι η υποτείνουσα, άρα είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου, δηλαδή $ΔΓ > ΔΕ$, όμως $ΑΔ = ΔΕ$, άρα $ΔΓ > ΑΔ$.

γ) Γνωρίζουμε ότι απέναντι από άνισες γωνίες βρίσκονται ομοίως άνισες πλευρές, άρα στο τρίγωνο ΑΒΓ επειδή $\hat{Γ} < \hat{Β}$ είναι και $ΑΒ < ΑΓ$.

13844. Στο διπλανό σχήμα ισχύει ότι ΒΔ < ΑΔ, ΑΒ = ΑΓ και $\hat{ΑΔΓ} = 90^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι ΑΓ > ΒΓ. (Μονάδες 10)
β) Ποια είναι η μικρότερη γωνία του τριγώνου ΑΒΓ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 15)



Λύση

α) Από το σημείο Γ που είναι εκτός της ευθείας ΑΒ έχουμε το κάθετο τμήμα ΓΔ και τα πλάγια τμήματα ΓΒ και ΓΑ. Το Δ είναι το ίχνος της καθέτου ΓΔ στην ΑΒ. Το ίχνος της ΑΓ στην ΑΒ είναι το Α, ενώ το ίχνος της ΒΓ στην ΑΒ είναι το Β.
Εφόσον ΑΔ>ΒΔ, το ίχνος της ΑΓ (δηλαδή το Α) απέχει από το ίχνος της καθέτου (δηλαδή το Δ) περισσότερο από όσο απέχει το ίχνος της ΒΓ (δηλαδή το Β). Άρα ΑΓ>ΒΓ.

β) Στο τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία Β βρίσκεται απέναντι από την πλευρά ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ, ενώ η γωνία Α βρίσκεται απέναντι από την πλευρά ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ. Εφόσον ΑΓ >ΒΓ, ομοίως άνισες είναι και οι απέναντι γωνίες, άρα $\hat{Β} > \hat{Α}$. Επιπλέον, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ. Επομένως για τις γωνίες της βάσης του, ΒΓ ισχύει ότι $\hat{Β} = \hat{Γ}$. Άρα $\hat{Γ} > \hat{Α}$, οπότε η μικρότερη γωνία του τριγώνου ΑΒΓ είναι η Α.

4ο Θέμα

1749. Θεωρούμε δύο σημεία Α και Β τα οποία βρίσκονται στο ίδιο μέρος ως προς μια ευθεία ε, τέτοια ώστε η ευθεία ΑΒ δεν είναι κάθετη στην ε. Έστω $Α'$ το συμμετρικό του Α ως προς την ευθεία ε.

α) Αν η $ΒΑ'$ τέμνει την ευθεία ε στο σημείο Ο, να αποδείξετε ότι:

i. Η ευθεία ε διχοτομεί τη γωνία $ΑΟΑ'$. (Μονάδες 6)

ii. Οι ημιευθείες ΟΑ και ΟΒ σχηματίζουν ίσες οξείες γωνίες με την ευθεία ε. (Μονάδες 6)

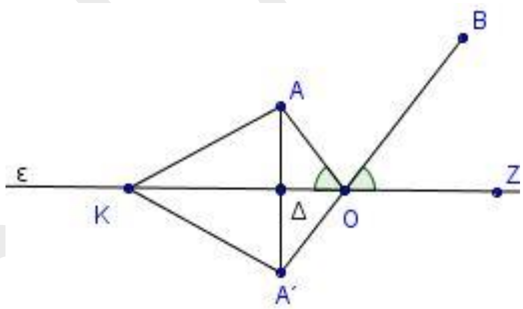
β) Αν Κ είναι ένα άλλο σημείο πάνω στην ευθεία ε, να αποδείξετε ότι:

i. $ΚΑ = ΚΑ'$ (Μονάδες 6)

ii. $ΚΑ + ΚΒ > ΑΟ + ΟΒ$ (Μονάδες 7)

Λύση

α) i. Επειδή στο τρίγωνο $ΟΑΑ'$ η ΟΔ είναι ύψος και διάμεσος, το τρίγωνο είναι ισοσκελές και η ΟΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $ΑΟΑ'$.



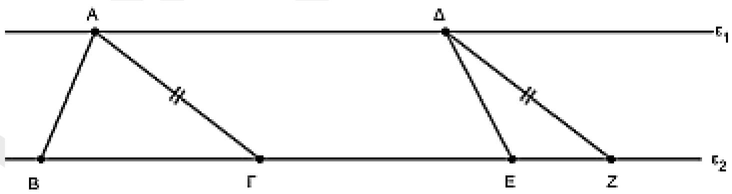
ii. Επειδή το τρίγωνο ΑΔΟ είναι ορθογώνιο, η γωνία $ΑΟΔ$ είναι οξεία. Είναι $ΔΟΑ' = ΒΟΖ$ ως κατακορυφήν και $ΔΟΑ' < 90^\circ$, άρα και $ΒΟΖ < 90^\circ$. Άρα οι ζητούμενες οξείες γωνίες είναι οι $ΑΟΔ$, $ΒΟΖ$ και είναι ίσες.

β) i. Επειδή το Κ ανήκει στη μεσοκάθετο του $ΑΑ'$ ισχύει ότι: $ΚΑ = ΚΑ'$.

ii. Στο τρίγωνο $ΚΒΑ'$ από τη τριγωνική ανισότητα, ισχύει ότι:

$ΚΑ' + ΚΒ > ΒΑ' \Leftrightarrow ΚΑ + ΚΒ > ΟΑ' + ΟΒ \Leftrightarrow ΚΑ + ΚΒ > ΟΑ + ΟΒ$

13751.Στο διπλανό σχήμα οι ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ είναι παράλληλες. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο, ενώ το ΔΕΖ είναι αμβλυγώνιο με $Ε > 90^\circ$.Ισχύει επίσης ότι ΑΓ = ΔΖ.



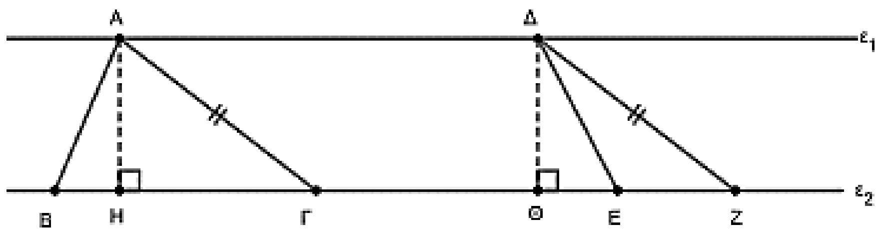
α) i. Να σχεδιάσετε τα ύψη των τριγώνων από τις κορυφές Α και Δ ονομάζοντας τα ΑΗ και ΔΘ αντίστοιχα. (Μονάδες 05)

ii. Να αποδείξετε ότι ΗΓ = ΘΖ. (Μονάδες 12)

β) Να δικαιολογήσετε γιατί ΕΖ < ΒΓ. (Μονάδες 08)

Λύση

α) i.



ii. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΗΓ και ΔΘΖ έχουν:

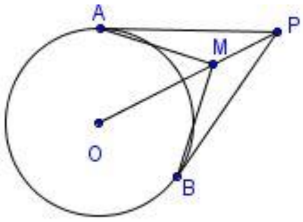
- ΑΘ = ΔΘ, ως αποστάσεις παραλλήλων ευθειών

• ΑΓ = ΔΗ, από την υπόθεση
Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια με ίσες υποτείνουσες και μία κάθετη πλευρά ίση. Οπότε και οι άλλες κάθετες πλευρές τους είναι ίσες, δηλαδή ΗΓ = ΘΖ.

β) Το σημείο Η είναι εσωτερικό του τμήματος ΒΓ γιατί το τρίγωνο είναι οξυγώνιο, οπότε ΗΓ < ΒΓ.
Το σημείο Θ είναι εξωτερικό του τμήματος ΕΖ γιατί η γωνία Ε είναι αμβλεία, οπότε ΕΖ < ΘΖ.
Από το α) ii. ερώτημα βρήκαμε ότι ΘΓ = ΘΗ. Άρα ΕΖ < ΘΖ, ΗΓ = ΘΓ και ΗΓ < ΒΓ, επομένως ΕΗ < ΒΓ.

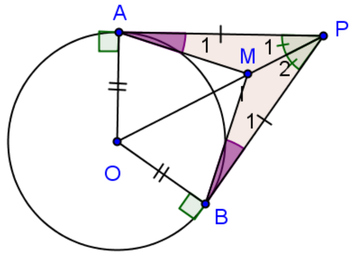
Σχετική θέση ευθείας - κύκλου

2ο Θέμα



1617. Από εξωτερικό σημείο Ρ ενός κύκλου (Ο, ρ) φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Αν Μ είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο του ευθυγράμμου τμήματος ΟΡ, να αποδείξετε ότι:
α) τα τρίγωνα ΡΑΜ και ΡΜΒ είναι ίσα.
(Μονάδες 12)
β) $MAO = MBO$. (Μονάδες 13)

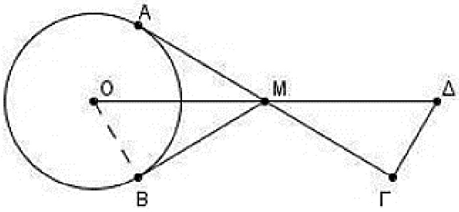
Λύση



α) Τα τρίγωνα ΡΑΜ και ΡΜΒ έχουν:
1) τη πλευρά ΡΜ κοινή
2) $PA = PB$ γιατί είναι τα εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από το Ρ προς τον κύκλο
3) $P_1 = P_2$ γιατί η διακεντρική ευθεία ΡΟ διχοτομεί την γωνία των εφαπτομένων

Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα.

β) Επειδή τα τρίγωνα ΡΑΜ και ΡΜΒ είναι ίσα, έχουν και $A_1 = B_1$. Όμως $OAM = OBM = 90^\circ$ γιατί οι ακτίνες που καταλήγουν στα σημεία επαφής είναι κάθετες στις εφαπτομένες, άρα $MAO = 90^\circ - A_1 = 90^\circ - B_1 = MBO$.



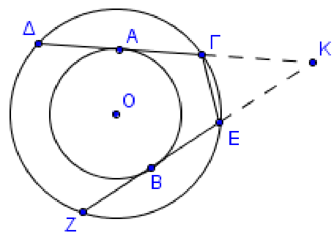
1620. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (Ο,R) και τα εφαπτόμενα τμήματα ΜΑ και ΜΒ. Προεκτείνουμε την ΑΜ κατά τμήμα ΜΓ=ΜΑ και την ΟΜ κατά τμήμα ΜΔ=ΟΜ.
α) Να αποδείξετε ότι ΜΒ = ΜΓ.
(Μονάδες 10)
β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΜΒ και ΜΓΔ είναι ίσα.
(Μονάδες 15)

Λύση

α) Τα εφαπτόμενα τμήματα ΜΑ και ΜΒ που άγονται από το Μ προς τον κύκλο είναι μεταξύ τους ίσα. Ακόμη ΜΑ = ΜΓ, οπότε είναι και ΜΒ = ΜΓ.

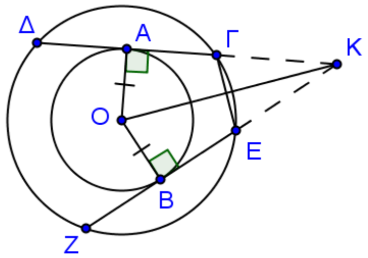
β) Η διακεντρική ευθεία ΜΟ διχοτομεί τη γωνία ΑΜΒ των εφαπτομένων, δηλαδή $AMO = OMB$.
Όμως $AMO = ΓMΔ$ ως κατακορυφήν, άρα $AMO = ΓMΔ$.
Τα τρίγωνα ΟΜΒ και ΜΓΔ έχουν:
- ΟΜ=ΜΔ (υπόθεση)
- ΜΒ = ΜΓ
- $AMO = ΓMΔ$

Σύμφωνα με το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα ΟΜΒ και ΜΓΔ είναι ίσα



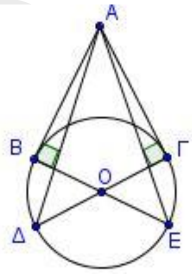
1667. Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο Ο και ακτίνες ρ και R (ρ<R). Οι χορδές ΔΓ και ΖΕ του κύκλου (Ο,R) εφάπτονται στον κύκλο (0,ρ) στα σημεία Α και Β αντίστοιχα.
α) Να αποδείξετε ότι $ΔΓ = ZE$
(Μονάδες 12)
β) Αν οι ΔΓ και ΖΕ προεκτεινόμενες τέμνονται στο σημείο Κ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΕΓ είναι ισοσκελές.
(Μονάδες 13)

Λύση



α) Έστω ΟΑ και ΟΒ οι ακτίνες του κύκλου (Ο, ρ) που καταλήγουν στα σημεία επαφής με τις εφαπτομένες.
Τότε $ΟΑ \perp ΓΔ$ και $ΟΒ \perp ΕΖ$.
Τα ΟΑ, ΟΒ είναι αποστήματα των χορδών ΓΔ και ΕΖ στον κύκλο (Ο,R) και είναι ίσα $\left(ΟΑ = ΟΒ = ρ\right)$, άρα και οι χορδές ΓΔ και ΕΖ είναι ίσες.

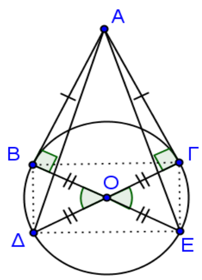
β) Επειδή τα ΚΑ, ΚΒ είναι εφαπτόμενα τμήματα από το Κ προς τον κύκλο (Ο, ρ), είναι μεταξύ τους ίσα.
Επειδή τα ΟΑ, ΟΒ είναι αποστήματα των χορδών ΓΔ και ΕΖ, τα σημεία Α και Β είναι μέσα των χορδών και επειδή οι χορδές είναι ίσες, είναι και $ΑΓ = ΒΕ$.
Είναι $ΚΑ = ΚΒ$ και $ΑΓ = ΒΕ$, άρα και $ΚΑ - ΑΓ = ΚΒ - ΒΕ \Leftrightarrow ΚΓ = ΚΕ$, οπότε το τρίγωνο ΚΓΕ είναι ισοσκελές.



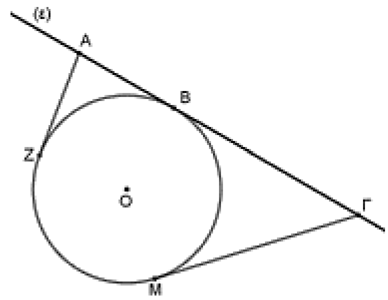
1684. Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Από σημείο εκτός του κύκλου, φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΑΒ και ΑΓ. Τα σημεία Ε και Δ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία των Β και Γ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΔ είναι ίσα.
(Μονάδες 13)
β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα.
(Μονάδες 12)

Λύση

α) Επειδή οι εφαπτομένες ενός κύκλου είναι κάθετες στις ακτίνες στα σημεία επαφής, οι γωνίες ΑΒΕ και ΑΓΔ είναι ορθές.
Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΔ έχουν:
1) $ΑΒ = ΑΓ$ γιατί τα εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από σημείο εκτός κύκλου προς αυτόν είναι ίσα και
2) $ΒΕ = ΓΔ = 2ρ$
Άρα τα δύο τρίγωνα έχουν τις κάθετες πλευρές τους μία προς μία ίσες, οπότε είναι ίσα.



β) Τα τρίγωνα ΟΒΔ και ΟΓΕ έχουν:
1) $ΟΒ = ΟΕ = ρ$, 2) $ΟΔ = ΟΓ = ρ$ και 3) $\hat{ΒΟΔ} = \hat{ΓΟΕ}$ ως κατακορυφήν.
Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $ΒΔ = ΓΕ$.
Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ έχουν:
1) $ΑΒ = ΑΓ$
2) $ΑΔ = ΑΕ$ γιατί τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΔ είναι ίσα και
3) $ΒΔ = ΓΕ$
Με βάση το κριτήριο ΠΠΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.



13817.Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Σε σημείο Β του κύκλου φέρουμε εφαπτόμενη ευθεία (ε). Θεωρούμε στην ευθεία (ε) δύο σημεία Α και Γ εκατέρωθεν του Β έτσι ώστε ΒΑ < ΒΓ και από τα σημεία αυτά, φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΑΖ και ΓΜ στον κύκλο.
α) Να γράψετε τα ευθύγραμμα τμήματα τα οποία είναι ίσα, αιτιολογώντας την απάντησή σας.
(Μονάδες 15)
β) Να αποδείξετε ότι ΑΓ = ΑΖ + ΜΓ. **(Μονάδες 10)**

Λύση

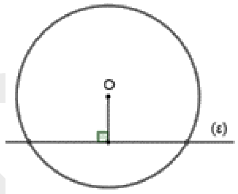
α) Από τα δεδομένα τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΑΖ είναι εφαπτόμενα στον κύκλο από σημείο εκτός

αυτό, άρα είναι ίσα, δηλαδή ΑΒ = ΑΖ.
Όμοια από το σημείο Γ που είναι εκτός του κύκλου τα ευθύγραμμα τμήματα ΓΒ,ΓΜ είναι εφαπτόμενα σε αυτόν, άρα ΓΒ =ΓΜ .

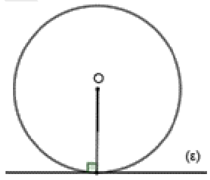
β) Λόγω του ερωτήματος (α) έχουμε ΑΓ = ΑΒ + ΒΓ = ΑΖ + ΜΓ.

13759.Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ = 6. Έστω d η απόσταση του κέντρου Ο του κύκλου από μια ευθεία (ε). Να βρείτε τη σχετική θέση του κύκλου και της ευθείας (ε) στις εξής περιπτώσεις:
α) d = 3. (Μονάδες 9)
β) d = 6. (Μονάδες 8)
γ) d = 9. (Μονάδες 8)

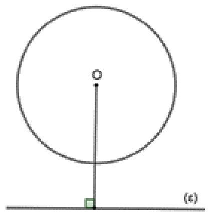
Λύση



α) Επειδή η απόσταση d = 3 του κέντρου από την ευθεία (ε) είναι μικρότερη από την ακτίνα ρ = 6 του κύκλου, η ευθεία (ε) έχει δύο κοινά σημεία με τον κύκλο, δηλαδή είναι τέμνουσα του κύκλου.



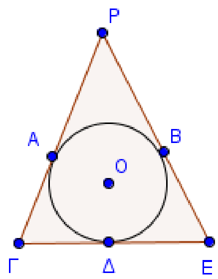
β) Επειδή η απόσταση d = 6 του κέντρου από την ευθεία (ε) είναι ίση με την ακτίνα ρ = 6 του κύκλου, η ευθεία (ε) έχει ένα κοινό σημείο με τον κύκλο, δηλαδή είναι εφαπτόμενη του κύκλου.



γ) Επειδή η απόσταση d = 9 του κέντρου από την ευθεία (ε) είναι μεγαλύτερη με την ακτίνα ρ = 6 του κύκλου, η ευθεία (ε) δεν έχει κοινά σημεία με τον κύκλο, δηλαδή είναι εξωτερική του κύκλου.

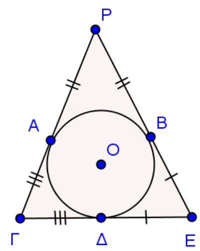
4ο Θέμα

1751. Έστω ότι ο κύκλος (O,ρ) εφάπτεται των πλευρών του τριγώνου ΡΓΕ στα σημεία Α,Δ και Β.



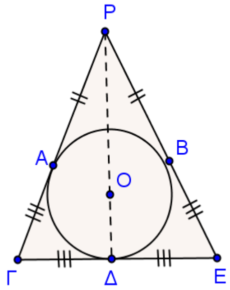
α) Να αποδείξετε ότι:
i. $P\Gamma = \Gamma\Delta + AP$ (Μονάδες 6)
ii. $P\Gamma - \Gamma\Delta = PE - \Delta E$ (Μονάδες 8)
β) Αν $A\Gamma = BE$, να αποδείξετε ότι
i. Το τρίγωνο ΡΓΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)
ii. Τα σημεία Ρ, Ο και Δ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 5)

Λύση



α) i. Τα ΓΑ,ΓΔ είναι εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από το Γ προς τον κύκλο, οπότε $\Gamma A = \Gamma\Delta$. Είναι $P\Gamma = PA + A\Gamma \Leftrightarrow P\Gamma = PA + \Gamma\Delta$.

ii. Τα ΕΒ, ΕΔ είναι εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από το Ε προς τον κύκλο, οπότε $EB = E\Delta$. Όμοια ΡΑ,ΡΒ εφαπτόμενα τμήματα από το Ρ και ισχύει $PA = PB$.
Όμως $P\Gamma = \Gamma\Delta + PA \Leftrightarrow PA = P\Gamma - \Gamma\Delta$ και $PB = PE - BE = PE - \Delta E$, άρα $P\Gamma - \Gamma\Delta = PE - \Delta E$.

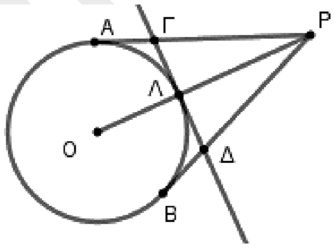


β) i. Αν $ΑΓ = ΒΕ$, τότε $ΑΓ = ΓΔ = ΔΕ = ΒΕ$.
Είναι $ΡΓ = ΓΔ + ΡΑ$, $ΡΕ = ΡΒ + ΔΕ$, οπότε $ΡΓ = ΡΕ$, άρα το τρίγωνο ΡΓΕ είναι ισοσκελές.

ii. Επειδή $ΟΑ = ΟΒ = ρ$ και $ΟΑ \perp ΡΓ$, $ΟΒ \perp ΡΒ$, το Ο ισαπέχει από τις πλευρές ΡΓ, ΡΕ της γωνίας Ρ, οπότε βρίσκεται στη διχοτόμο της γωνίας. Επειδή το τρίγωνο ΡΓΕ είναι ισοσκελές και το ΡΔ είναι διάμεσος, θα είναι και διχοτόμος της γωνίας Ρ. Άρα τα Ο,Δ ανήκουν στη διχοτόμο της γωνίας Ρ, οπότε τα σημεία Ρ,Ο,Δ είναι συνευθειακά.

1752.Θεωρούμε κύκλο κέντρου Ο και εξωτερικό σημείο του Ρ . Από το Ρ φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήμα ΡΑ και ΡΒ. Η διακεντρική ευθεία ΡΟ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Λ. Η εφαπτόμενη του κύκλου στο Λ τέμνει τα ΡΑ και ΡΒ στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
α) το τρίγωνο ΡΓΔ είναι ισοσκελές. **(Μονάδες 10)**
β) ΓΑ= ΔΒ. **(Μονάδες 8)**
γ) η περίμετρος του τριγώνου ΡΓΔ είναι ίση με ΡΑ+ ΡΒ. **(Μονάδες 7)**

Λύση



α) Επειδή η ΓΔ είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Λ, ισχύει ότι $ΓΔ \perp ΡΟ$. Επειδή η διακεντρική ευθεία ΡΟ διχοτομεί την γωνία ΓΡΔ των εφαπτομένων, στο τρίγωνο ΡΓΔ, το ΡΛ είναι ύψος και διχοτόμος, οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

β) Επειδή τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ είναι ίσα και οι πλευρές ΡΓ και ΡΔ του ισοσκελούς τριγώνου ΡΓΔ είναι επίσης ίσες, ισχύει ότι:
$ΡΑ - ΡΓ = ΡΒ - ΡΔ \Leftrightarrow ΓΑ = ΔΒ$

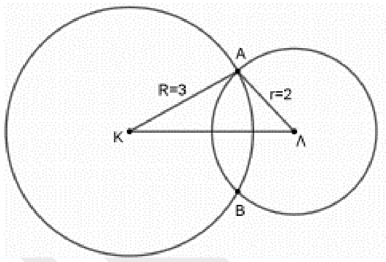
γ) Τα ΓΑ, ΓΛ είναι εφαπτόμενα τμήματα από το Γ προς τον κύκλο, οπότε είναι ίσα.
Τα ΔΒ, ΔΛ είναι εφαπτόμενα τμήματα από το Δ προς τον κύκλο, οπότε είναι ίσα.
Αν Π η περίμετρος του τριγώνου ΡΓΔ, είναι Π=ΡΓ+ΓΔ+ΡΔ=ΡΓ+ΓΛ+ΛΔ+ΡΔ=ΡΓ+ΓΑ+ΔΒ+ΡΔ=ΡΑ+ΡΒ

Σχετική θέση δύο κύκλων

2ο Θέμα

12417. Έστω δύο κύκλοι (K, R) και (Λ, r), με R=3, r=2 και ΚΛ=4. Να αποδείξετε ότι:
α) Οι κύκλοι (K, R) και (Λ, r) τέμνονται σε δύο σημεία, έστω Α και Β. (Μονάδες 15)
β) $\widehat{K\Lambda A} > \widehat{A\Lambda K}$ (Μονάδες 10)

Λύση



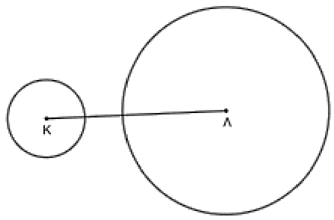
α) Είναι $R + r = 5$ και $R - r = 1$.
Επειδή $R - r < K\Lambda < R + r$ οι κύκλοι τέμνονται σε δύο σημεία Α και Β.

β) Στο τρίγωνο ΚΑΛ είναι ΚΛ > ΑΚ και επειδή απέναντι από άνισες πλευρές σε ένα τρίγωνο βρίσκονται ομοίως άνισες γωνίες, ισχύει ότι $\widehat{K\Lambda A} > \widehat{A\Lambda K}$.

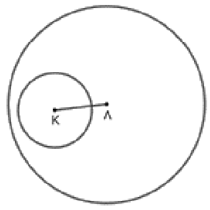
13758. Δίνονται δύο κύκλοι (Κ,3) και (Λ,8). Να βρείτε τη σχετική θέση των δύο κύκλων, αιτιολογώντας την απάντησή σας, όταν:
α) ΚΛ = 13. (Μονάδες 5)
β) ΚΛ = 2. (Μονάδες 5)
γ) ΚΛ = 5. (Μονάδες 5)
δ) ΚΛ = 11. (Μονάδες 5)
ε) ΚΛ = 9. (Μονάδες 5)

Λύση

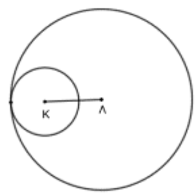
Έστω R = 8 και ρ = 3. Υπολογίζουμε τη διαφορά και το άθροισμα των δύο ακτίνων, δηλαδή
R - ρ = 8 - 3 = 5 και R + ρ = 8 + 3 = 11.



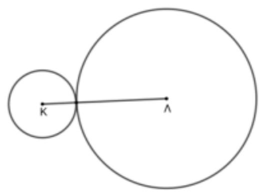
α) Επειδή η διάκεντρος ΚΛ = 13 έχει μεγαλύτερο μήκος από το άθροισμα των δύο ακτίνων R + ρ = 11, ο κύκλος (Λ,8) βρίσκεται στο εξωτερικό του κύκλου (Κ,3)



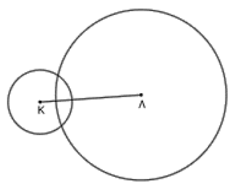
β) Επειδή η διάκεντρος ΚΛ = 2 έχει μικρότερο μήκος από τη διαφορά των δύο ακτίνων R - ρ = 5, ο κύκλος (Κ,3) βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου (Λ,8).



γ) Επειδή η διάκεντρος ΚΛ = 5 έχει ίσο μήκος με τη διαφορά των δύο ακτίνων R - ρ = 5, οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά.



δ) Επειδή η διάκεντρος ΚΛ = 11 έχει ίσο μήκος με το άθροισμα των δύο ακτίνων R + ρ = 11, οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.



ε) Επειδή η διάκεντρος ΚΛ = 9 έχει μήκος μεταξύ της διαφοράς R - ρ = 5 και του αθροίσματος των δύο ακτίνων R + ρ = 11, οι κύκλοι τέμνονται.

13757.Δίνονται δύο κύκλοι (Κ,2) και (Λ,5).
α) Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου ΚΛ, αν οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά. **(Μονάδες 6)**
β) Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου ΚΛ, αν οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά. **(Μονάδες 6)**
γ) Μεταξύ ποιων τιμών βρίσκεται το μήκος της διακέντρου ΚΛ, αν ο κύκλος (Κ,2) βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου (Λ,5); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **(Μονάδες 6)**
δ) Μεταξύ ποιων τιμών βρίσκεται το μήκος της διακέντρου ΚΛ, αν οι κύκλοι τέμνονται; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **(Μονάδες 7)**

Λύση

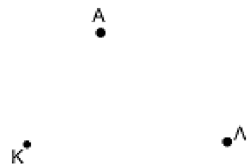
Έστω R = 5 και ρ = 2.
α) Αν οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά, τότε για τη διάκεντρο ΚΛ έχουμε : ΚΛ = R + ρ = 5 + 2 = 7.

β) Αν οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά, τότε για τη διάκεντρο ΚΛ έχουμε : ΚΛ = R - ρ = 5 - 2 = 3.

γ) Για να είναι ο κύκλος (Κ,2) στο εσωτερικό του κύκλου (Λ,5) θα πρέπει ΚΛ < R –ρ, δηλαδή ΚΛ < 5- 2 ή ΚΛ < 3.

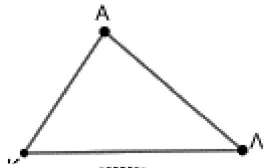
δ) Για να τέμνονται οι κύκλοι θα πρέπει R- ρ < ΚΛ < R + ρ, δηλαδή 5 – 2 < ΚΛ < 5 + 2 ή 3 < ΚΛ < 7.

13835. Τα σημεία Α, Κ και Λ δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Το σημείο Α απέχει 4 από το Κ και 5 από το Λ.
α) Να αποδείξετε ότι 1< ΚΛ < 9. **(Μονάδες 12)**
β) Να βρείτε ένα σημείο Β του επιπέδου διαφορετικό από το Α, που να απέχει 4 από το Κ και 5 από το Λ. **(Μονάδες 13)**

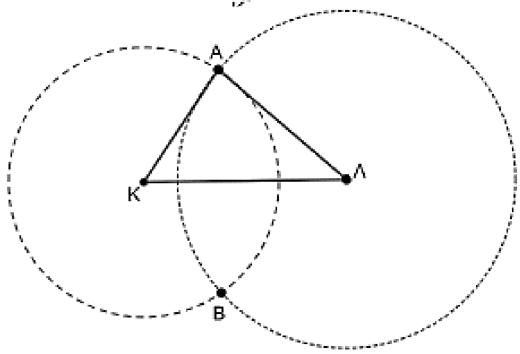


Λύση

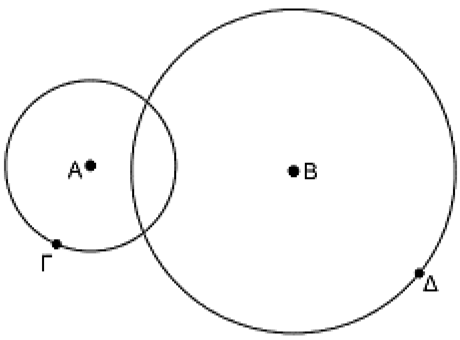
α) Τα τρία μη συνευθειακά σημεία Α, Κ και Λ ορίζουν το τρίγωνο ΑΚΛ. Λόγω της τριγωνικής ανισότητας ισχύει ότι $ΑΛ - ΑΚ < ΚΛ < ΑΛ + ΑΚ$.
Άρα $5 - 4 < ΚΛ < 5 + 4$ ή $1 < ΚΛ < 9$.



β) Το ζητούμενο σημείο είναι σημείο του κύκλου (Κ, 4) και του κύκλου (Λ, 5). Σχεδιάζουμε δύο κύκλους: ο ένας έχει κέντρο το Κ και ακτίνα 4 και ο άλλος έχει κέντρο το Β και ακτίνα 5. Από το α)ερώτημα για τη διάκεντρο των κύκλων έχουμε ότι:
$ΑΛ - ΑΚ < ΚΛ < ΑΛ + ΑΚ$ ή $R - ρ < ΚΛ < R + ρ$,
όπου R είναι η ακτίνα του κύκλου με κέντρο το Λ και ρ είναι η ακτίνα του κύκλου με κέντρο το Κ.
Άρα οι κύκλοι τέμνονται σε δύο σημεία. Το ένα είναι το Α και το άλλο είναι το Β, που είναι και το ζητούμενο σημείο.



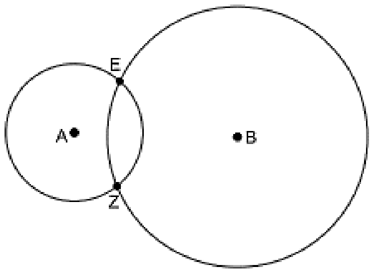
13836.α) Στο παρακάτω σχήμα για τους κύκλους (Α, ρ) και (Β, R) ισχύει ρ < R.



Να αποδείξετε ότι $B\Delta - A\Gamma < AB < A\Gamma + B\Delta$. **(Μονάδες 10)**
β) Ο χάρτης ενός κρυμμένου θησαυρού έχει δύο σταθερά σημεία Α και Β, τα οποία απέχουν μεταξύ τους 6. Επίσης γράφει ότι ο θησαυρός είναι κρυμμένος σε ένα σημείο το οποίο απέχει 3 από το Α του χάρτη και 5 από το Β του χάρτη. Ποια είναι τα σημεία του χάρτη στα οποία μπορεί να είναι κρυμμένος ο θησαυρός; **(Μονάδες 15)**

Λύση

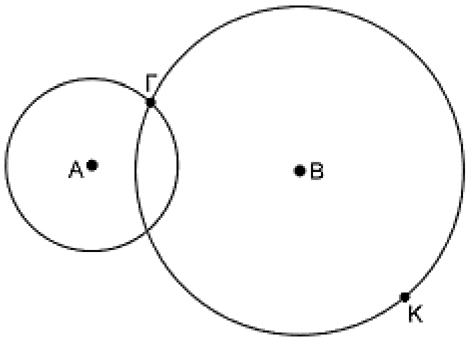
α) Οι κύκλοι είναι τεμνόμενοι. Άρα ισχύει $R - \rho < \delta < R + \rho$, όπου ρ είναι η ακτίνα του κύκλου με κέντρο το Α, R είναι η ακτίνα του κύκλου με κέντρο Β και δ η διάκεντρός τους. Όμως η διάκεντρος είναι η ΑΒ και επιπλέον ισχύουν ΑΓ = ρ και ΒΔ = R. Επομένως $B\Delta - A\Gamma < AB < B\Delta + A\Gamma$.



β) Ο θησαυρός, επειδή απέχει 3 από το Α και 5 από το Β είναι σε σημείο του κύκλου με κέντρο το Α και ακτίνα 3 και σε σημείο του κύκλου με κέντρο το Β και ακτίνα 5.
Σχεδιάζουμε δύο κύκλους (Α, ρ) και (Β, R) με ρ = 3 και R = 5. Τότε η ΑΒ = 6 είναι η διάκεντρος του κύκλου και ισχύει $R - \rho < AB < R + \rho$ γιατί αντικαθιστώντας έχουμε $5 - 3 < 6 < 5 + 3$, που είναι αληθές. Επομένως οι κύκλοι είναι τεμνόμενοι δηλαδή έχουν δύο κοινά σημεία τα Ε και Ζ. Αυτά τα σημεία έχουν την ιδιότητα να απέχουν 3 από το Α και 5 από το Β, άρα είναι τα σημεία που μπορεί να κρύβεται ο θησαυρός.

4ο Θέμα

13823.α) Στο παρακάτω σχήμα για τους κύκλους (Α, ρ) και (Β, R) ισχύει ρ < R και ΑΒ = 6.

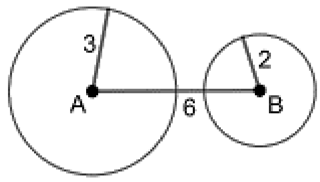


i. Να αποδείξετε ότι $BK - A\Gamma < AB < BK + A\Gamma$.
ii. Παρακάτω γράφονται οι ιδιότητες 1 και 2. Ποιο σημείο από τα Κ και Γ έχει την ιδιότητα 1, ποιο την ιδιότητα 2 και ποιο έχει και τις δύο;
Ιδιότητα 1: «Το σημείο απέχει R από το Β.»
Ιδιότητα 2: «Το σημείο απέχει ρ από το Α.»
Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας. **(Μονάδες 16)**
β) Ο χάρτης ενός κρυμμένου θησαυρού έχει δύο σταθερά σημεία Α και Β, τα οποία απέχουν μεταξύ τους 6. Επίσης γράφει ότι ο θησαυρός είναι κρυμμένος σε ένα σημείο το οποίο απέχει 3 από το Α του χάρτη και 2 από το Β του χάρτη. Μπορεί να είναι σωστή η πληροφορία που δίνει ο χάρτης για να βρει κανείς το θησαυρό; **(Μονάδες 9)**

Λύση

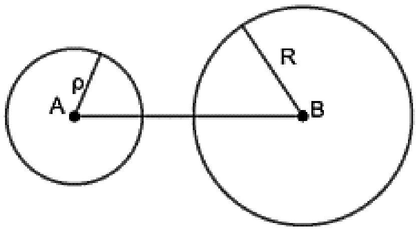
α) i. Οι κύκλοι είναι τεμνόμενοι. Άρα ισχύει $R - \rho < \delta < R + \rho$, όπου ρ είναι η ακτίνα του κύκλου με κέντρο το Α, R είναι η ακτίνα του κύκλου με κέντρο Β και δ η διάκεντρός τους.
Όμως η διάκεντρος είναι η ΑΒ και επίσης $\rho = A\Gamma$ και $R = BK$. Επομένως $BK - A\Gamma < AB < BK + A\Gamma$.

ii. Το σημείο Κ έχει μόνο την ιδιότητα 1, γιατί είναι σημείο του κύκλου (Β, R) και όχι του κύκλου (Α, ρ). Το σημείο Γ έχει και τις δύο ιδιότητες γιατί είναι σημείο και των δύο κύκλων, δηλαδή απέχει ρ από το Α και R από το Β.



β) Έστω Α και Β τα δύο σημεία του χάρτη.
Σύμφωνα με την οδηγία το σημείο του θησαυρού ανήκει σε ένα κύκλο κέντρου Α και ακτίνας 3 και σε κύκλο κέντρου Β και ακτίνας 2. Επειδή απέχει 3 από το Α και 2 από το Β θα είναι το σημείο τομής των δύο αυτών κύκλων, αν υπάρχει. Όμως η απόσταση των σημείων Α και Β που είναι η διάκεντρος των κύκλων (Α,3) και (Β,2) είναι 6, δηλαδή είναι μεγαλύτερη από το άθροισμα των ακτίνων τους. Αυτό σημαίνει ότι οι κύκλοι δεν έχουν κοινά σημεία και μάλιστα ο ένας είναι εξωτερικός του άλλου. Συνεπώς η οδηγία δεν είναι σωστή, γιατί δεν υπάρχει σημείο του επιπέδου (άρα και του χάρτη) για το οποίο να ισχύει αυτό που περιγράφει η οδηγία.

13846.Δίνεται το διπλανό σχήμα με τους κύκλους (Α, ρ) και (Β, R) με R > ρ. Επίσης ΑΒ = 9.

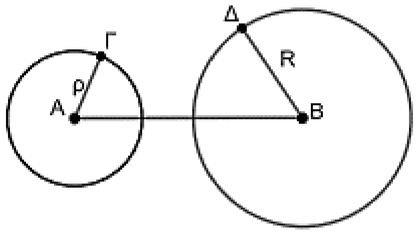


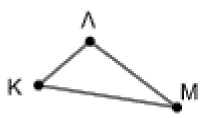
α) Να αποδείξετε ότι R + ρ < 9. (Μονάδες 7)
β) Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο ΚΛΜ με ΚΛ να είναι ίση με ρ και η πλευρά ΛΜ να είναι ίση με R. Να περιγράψετε τον τρόπο που το σχεδιάσατε και να αποδείξετε ότι η τρίτη πλευρά του είναι μικρότερη από 9. (Μονάδες 10)
γ) Έστω το τρίγωνο ΚΛΜ που σχεδιάσατε στο β) ερώτημα.
Πόσα σημεία του επιπέδου έχουν και τις δύο ιδιότητες Ι1 και Ι2 που περιγράφονται παρακάτω;
Ι1: «Η απόσταση των σημείων από το Κ είναι ίση με ρ».
Ι2: «Η απόσταση των σημείων από το Μ είναι ίση με R».
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

Λύση

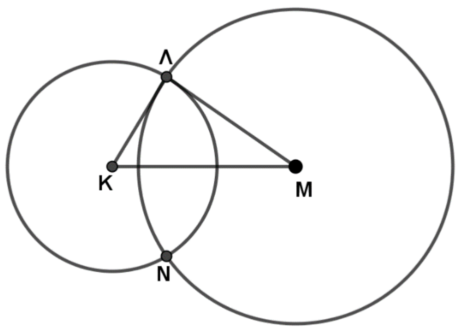
α) Οι κύκλοι δεν έχουν κοινά σημεία και είναι ο ένας στο εξωτερικό του άλλου και η διάκεντρός τους είναι το ευθύγραμμο ΑΒ. Άρα ισχύει $R + \rho < AB$ ή $R + \rho < 9$.

β) Έστω Γ σημείο του κύκλου με κέντρο Α και ακτίνα ρ και Δ σημείο του κύκλου με κέντρο Β και ακτίνα R, όπως στο παρακάτω σχήμα. Με το διαβήτη «μεταφέρουμε» τα ΑΓ=ρ και ΒΔ=R έτσι ώστε να σχηματίζονται τα ευθύγραμμα τμήματα ΚΛ και ΛΜ. Στη συνέχεια σχεδιάζουμε και την ΚΜ.





Ισχύει ότι ΛΜ > ΚΛ , γιατί R > ρ. Άρα από την τριγωνική ανισότητα για το τρίγωνο ΚΛΜ έχουμε ότι $\Lambda M - K\Lambda < KM < \Lambda M + K\Lambda$ ή $R - \rho < KM < R + \rho$.
Όμως από το α) έχουμε ότι $R + \rho < 9$. Άρα $KM < 9$.
Δηλαδή η τρίτη πλευρά του τριγώνου είναι μικρότερη από 9.



γ) Έστω το τρίγωνο ΚΛΜ που έχουμε σχεδιάσει. Τα σημεία του επιπέδου που έχουν την ιδιότητα Ι1 είναι τα σημεία του κύκλου με κέντρο Κ και ακτίνα ρ, ενώ τα σημεία του επιπέδου που έχουν την ιδιότητα Ι2 είναι τα σημεία του κύκλου με κέντρο Μ και ακτίνα R.
Επομένως, τα σημεία του επιπέδου που έχουν και τις δύο ιδιότητες Ι1 και Ι2 είναι εκείνα που βρίσκονται και στους δύο αυτούς κύκλους. Δηλαδή είναι τα κοινά σημεία των δύο κύκλων.
Όπως έχουμε αποδείξει στο προηγούμενο ερώτημα $R - \rho < KM < R + \rho$ όπου ΚΜ η διάμετρος των δύο κύκλων. Επομένως οι κύκλοι είναι τεμνόμενοι οπότε έχουν δύο σημεία τομής.

Άρα δύο σημεία είναι τα ζητούμενα σημεία τα Λ και Ν.

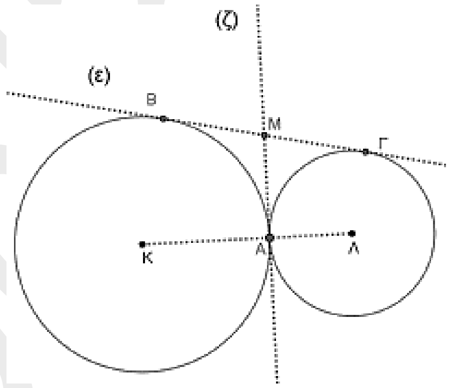
3ο Θέμα

13702.Δίνονται δυο κύκλοι (Κ, ρ_1) και (Λ, ρ_2) που εφάπτονται εξωτερικά σε σημείο Α. Μια ευθεία (ε) εφάπτεται εξωτερικά στους δυο κύκλους σε σημεία Β και Γ αντίστοιχα. Αν η εσωτερική εφαπτομένη των κύκλων στο σημείο επαφής τους Α τέμνει την ευθεία (ε) σε σημείο Μ, να αποδείξετε ότι:

α) τα σημεία Α, Β και Γ ανήκουν σε κύκλο του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα. (Μονάδες 12)

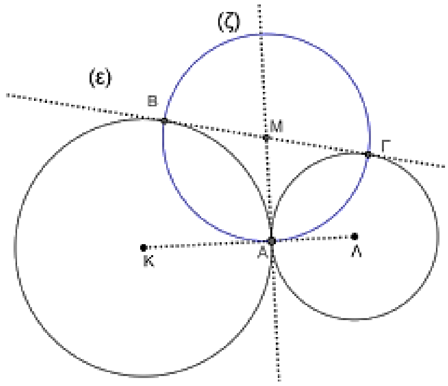
β) ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία Α, Β και Γ εφάπτεται στη διάκεντρο ΚΛ των κύκλων (Κ, ρ_1) και (Λ, ρ_2). (Μονάδες 13)

Λύση



Έστω οι κύκλοι (Κ, ρ_1) και (Λ, ρ_2) που εφάπτονται εξωτερικά σε σημείο Α, (ε) η ευθεία η οποία εφάπτεται εξωτερικά στους δυο κύκλους σε σημεία τους Β και Γ αντίστοιχα, (ζ) η κοινή εσωτερική εφαπτομένη των κύκλων στο σημείο επαφής τους Α και Μ το σημείο στο οποίο τέμνει την ευθεία (ε)

α) Το σημείο Α είναι σημείο της διακέντρου ΚΛ και τα Β, Γ είναι σημεία επαφής της κοινής εξωτερικής εφαπτομένης των δυο κύκλων με αυτούς, οπότε τα τρία σημεία Α, Β και Γ δεν είναι συνευθειακά. Άρα τα σημεία Α, Β και Γ θα είναι σημεία ενός μοναδικού κύκλου. Το σημείο Μ είναι εξωτερικό σημείο των κύκλων (Κ, ρ_1) και (Λ, ρ_2) ως σημείο τομής των κοινών εφαπτομένων τους από τα δεδομένα. Είναι ΜΒ = ΜΑ ως εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου (Κ, ρ_1) από το σημείο Μ. Επίσης είναι ΜΑ = ΜΓ ως εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου (Λ, ρ_2) από το σημείο Μ. Οπότε θα είναι ΜΒ = ΜΑ = ΜΓ (= κ). Άρα ο κύκλος που ζητείται να κατασκευαστεί θα έχει κέντρο το σημείο Μ και ακτίνα ίση με κ.



β) Επειδή οι κύκλοι (Κ, ρ_1) και (Λ, ρ_2) εφάπτονται εξωτερικά στο Α, η κοινή εφαπτομένη τους (ζ) είναι κάθετη στην ακτίνα ΚΑ και κάθετη στην ακτίνα ΛΑ αντίστοιχα. Και επειδή το σημείο Α είναι σημείο της διακέντρου ΚΛ, η εφαπτομένη (ζ) των δυο κύκλων στο Α θα είναι κάθετη στη διάκεντρο ΚΛ. Η ακτίνα ΜΑ (=κ) του κύκλου που σχεδιάζεται με κέντρο το Μ έχει ως φορέα την εφαπτομένη (ζ) των δυο κύκλων στο σημείο επαφής τους Α, οπότε η ακτίνα ΜΑ θα είναι κάθετη στη διάκεντρο ΚΛ. Άρα ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία Α, Β και Γ θα εφάπτεται της διακέντρου ΚΛ στο σημείο Α.