

Μαθηματικά Β' Γυμνασίου

3.5 - Η υπερβολή $y = \frac{a}{x}$

Αντιστρόφως Ανάλογα Ποσά

Δύο ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα όταν το γινόμενό τους είναι σταθερό. Αν αυτό το σταθερό γινόμενο, τότε ισχύει ότι

Για παράδειγμα τα ποσά x και y :

| | | | | |
|---|---|----|---|---------------|
| x | 2 | -2 | 3 | 4 |
| y | 3 | -3 | 2 | $\frac{3}{2}$ |

| | | | | |
|---|----|---------------|----------------|---------------|
| x | -1 | -5 | 7 | -3 |
| y | 2 | $\frac{2}{5}$ | $-\frac{2}{7}$ | $\frac{2}{3}$ |

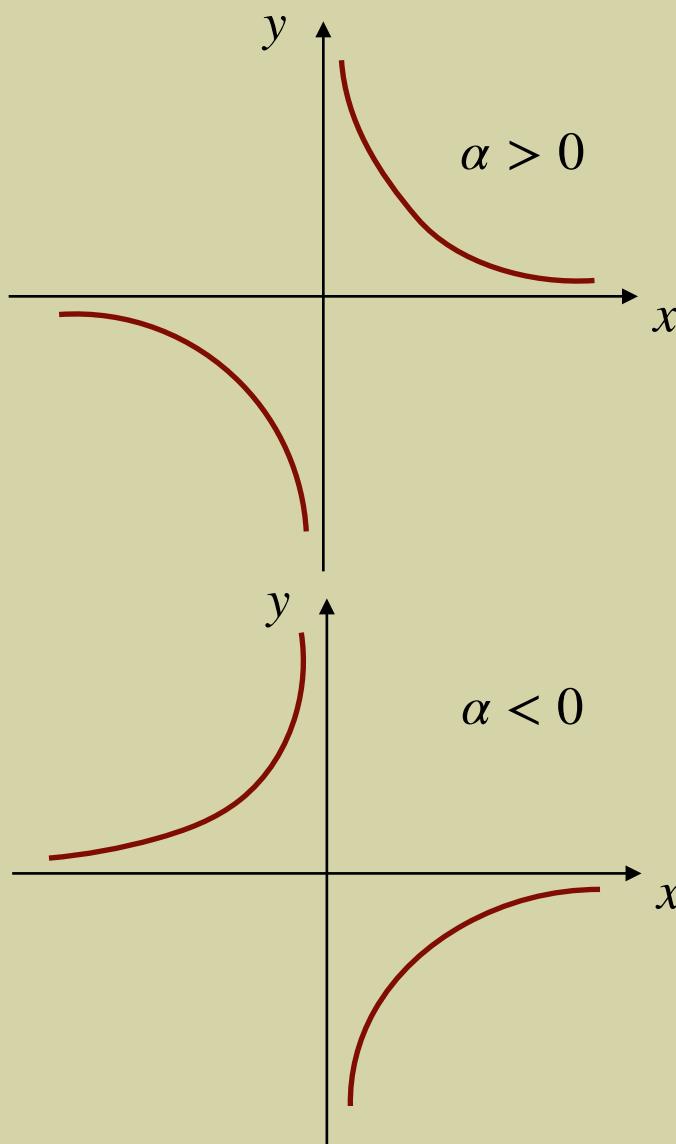
είναι αντιστρόφως ανάλογα. Παρατηρήστε ότι το γινόμενό τους είναι σταθερό

Ένα κόλπο με το οποίο καταλαβαίνουμε αν δύο ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα είναι να διπλασιάσουμε το ένα και να δούμε αν το άλλο υποδιαπλασιάζεται.

Γραφική παράσταση Υπερβολής

$$y = \frac{a}{x}$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής λέγεται **υπερβολή** και αποτελείται από δύο κλάδους ανάλογα το πρόσημο του αριθμού a , δηλαδή αν είναι αρνητικός ή θετικός.



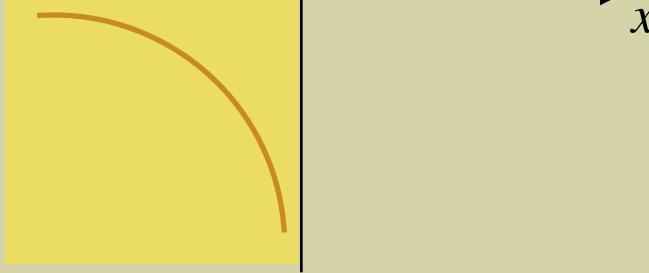
Κλάδοι της Υπερβολής

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{a}{x}$

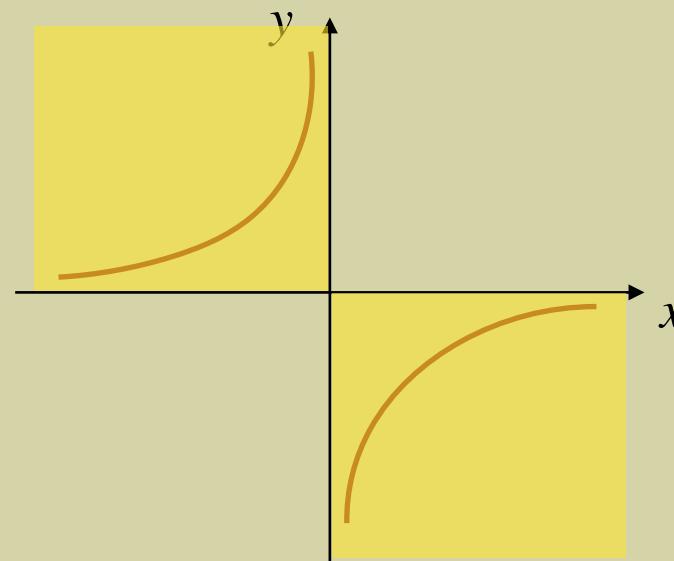
όπου $a \neq 0$ λέγεται **υπερβολή** και αποτελείται από δύο κλάδους που βρίσκονται

- στο 1^o και 3^o τεταρτημόριο των αξόνων αν $a > 0$
- στο 2^o και 4^o τεταρτημόριο των αξόνων αν $a < 0$

$$\alpha > 0$$



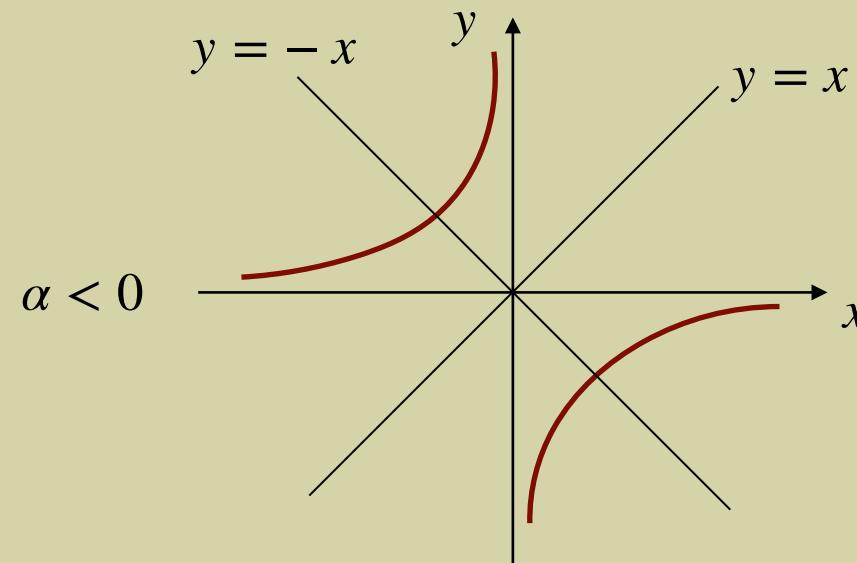
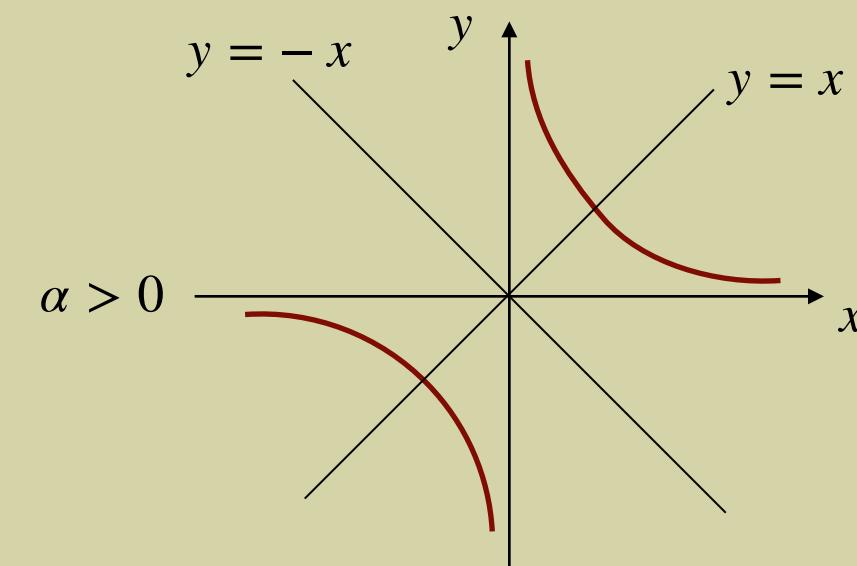
$$\alpha < 0$$



Συμμετρίες Υπερβολής

Και στις δύο περιπτώσεις η γραφική παράσταση μίας υπερβολής έχει

- **κέντρο συμμετρίας** την αρχή των αξόνων και
- **άξονες συμμετρίας** τις διχοτόμους των γωνιών των αξόνων δηλαδή τις ευθείες με εξισώσεις $y = x$ και $y = -x$



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1.

Σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις τα ποσά x και y είναι αντιστρόφως ανάλογα;

| | | | | |
|----|----------|---------------|---------------|---------------|
| α) | x | 2 | 3 | 5 |
| | y | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{5}$ |

| | | | | |
|----|----------|-----|-----|-----|
| β) | x | 2 | 3 | 5 |
| | y | 0,2 | 0,3 | 0,5 |

| | | | | |
|----|----------|---|---|-----|
| γ) | x | 2 | 3 | 5 |
| | y | 6 | 4 | 2,4 |

| | | | | |
|----|----------|----|----|----|
| δ) | x | 2 | 3 | 5 |
| | y | -2 | -3 | -5 |

2

Να χαρακτηρίσετε ως Σ (σωστή) ή Λ (λανθασμένη) τις παρακάτω προτάσεις:

ΣΩΣΤΟ ΛΑΘΟΣ

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{2}{x}$ έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = 2$.



β) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{5}{x}$ διέρχεται από την αρχή Ο των αξόνων.



γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{10}{x}$



βρίσκεται στο 1ο και στο 3ο τεταρτημόριο των αξόνων.

δ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = -\frac{5}{x}$



έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή Ο των αξόνων.

3.

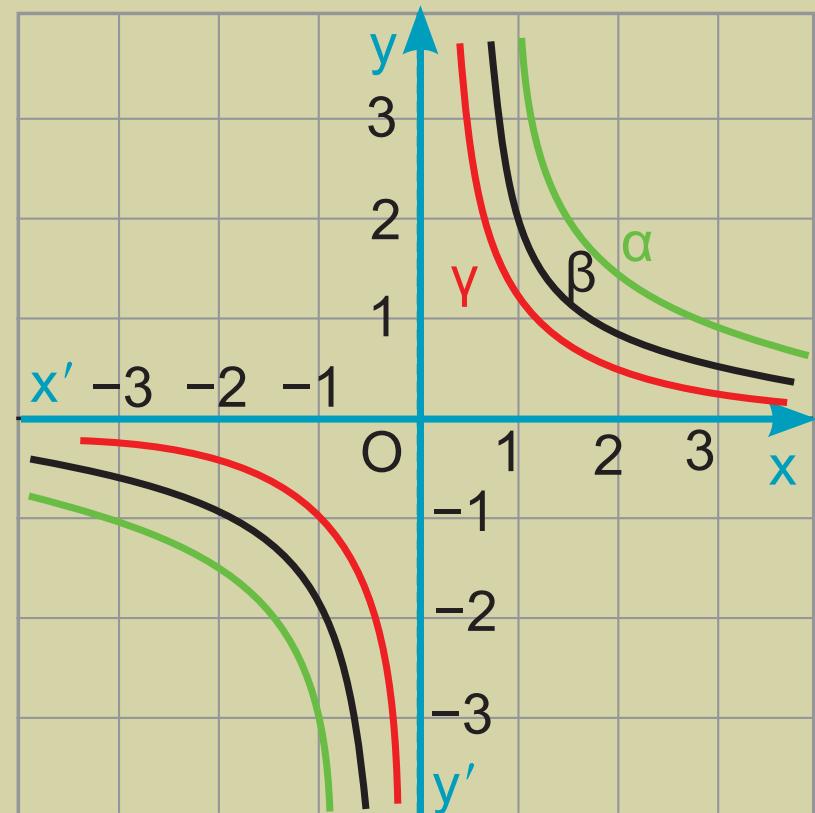
Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις (α), (β) και (γ) τριών υπερβολών.
Να αντιστοιχίσετε σε καθεμιά την εξίσωσή της.

| | |
|----|-------------------|
| A. | $y = \frac{1}{x}$ |
| B. | $y = \frac{2}{x}$ |
| Γ. | $y = \frac{3}{x}$ |

Στην $y = \frac{1}{x}$ βρίσκω όπου $x > 1$
και πλέον $y = 1$, άρα περνάει
από το σημείο $(1,1)$. (η γ)

Στην $y = \frac{2}{x}$ βρίσκω όπου $x > 2$
και πλέον $y = 1$, άρα περνάει
από το $(2,1)$ (η β)

Στην $y = \frac{3}{x}$ βρίσκω όπου $x > 3$
και πλέον $y = 1$, άρα περνάει
από το $(3,1)$ (η α)



Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις:

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{a}{x}$ όπου $a \neq 0$:

- i) λέγεται υπερβολή
- ii) έχει άξονες συμμετρίας τις ευθείες με εξισώσεις $y = x$ και $y = -x$
- iii) έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή Ο των αξόνων.
- iv) βρίσκεται στο 2o και 4o τεταρτημόριο, όταν $a < 0$

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές και με (Λ) αν είναι λανθασμένες.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{a}{x}$ όπου $a \neq 0$:

- i) λέγεται υπερβολή Σ
- ii) έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή Ο των αξόνων. Σ
- iii) αποτελείται από δύο κλάδους που βρίσκονται στο 1o και 3o τεταρτημόριο, όταν $a < 0$ Λ
- iv) έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $y = -x$ Σ
- v) έχει με τους άξονες κοινά σημεία Λ

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές και με (Λ) αν είναι λανθασμένες.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης

i) $y = -\frac{3}{x}$ έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή O των αξόνων. Σ

ii) $y = -\frac{2}{x}$ βρίσκεται στο 2o και 3o τεταρτημόριο. Λ

iii) $y = \frac{5}{x}$ έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $y = x$ Σ

iv) $y = \frac{1}{3x}$ έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $y = \frac{1}{3}x$ Λ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 1 Τα ποσά x και y είναι αντιστρόφως ανάλογα. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|----|
| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 12 |
| y | | | 4 | | | |

Έροσον $3 \cdot 4 = 12$ αρα

| | | | | | | |
|---|----|---|---|---|---|----|
| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 12 |
| y | 12 | 6 | 4 | 3 | 2 | 1 |

2

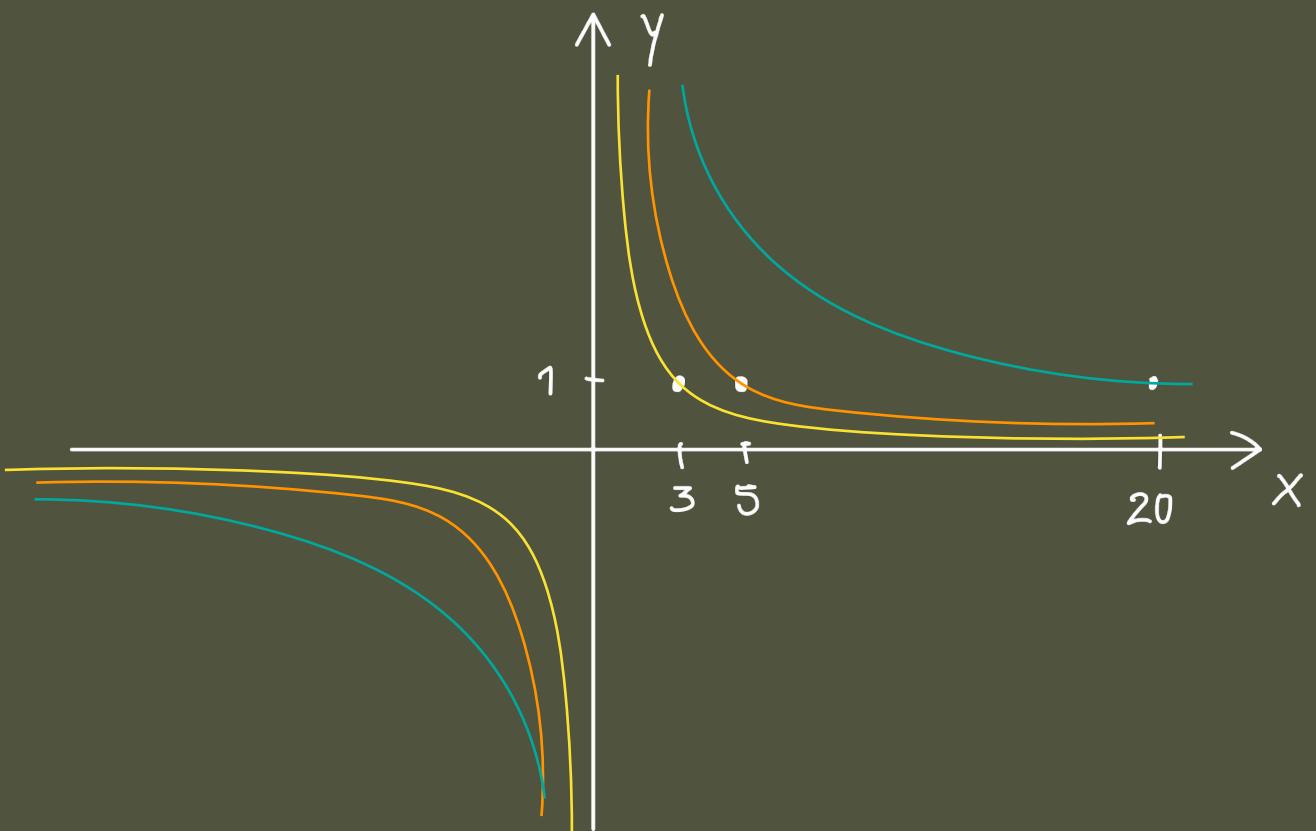
Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα ορθογωνίων αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$\alpha) \ y = \frac{3}{x} \quad \beta) \ y = \frac{5}{x} \quad \gamma) \ y = \frac{20}{x}.$$

α) Έρευνα από το $(3,1)$

β) -||- -||- 70 $(5,1)$

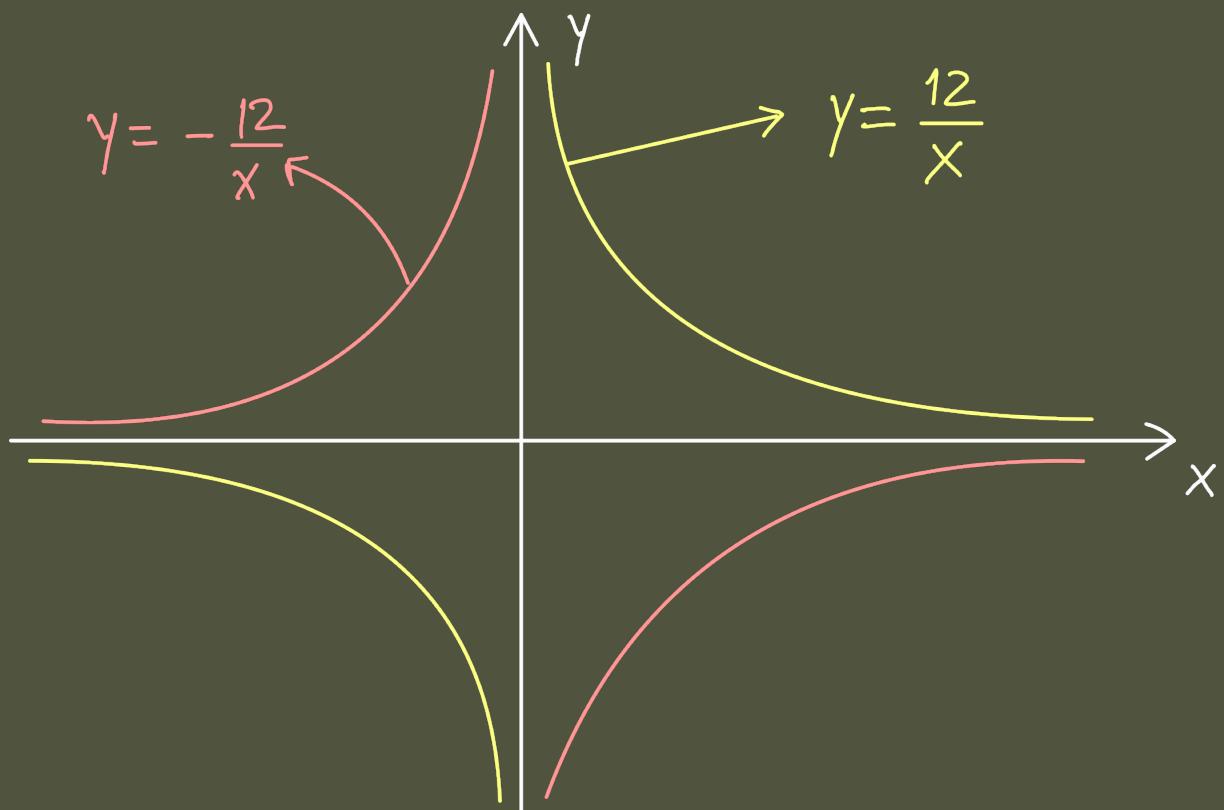
γ) -||- -||- το $(20,1)$



3

Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα ορθογωνίων αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

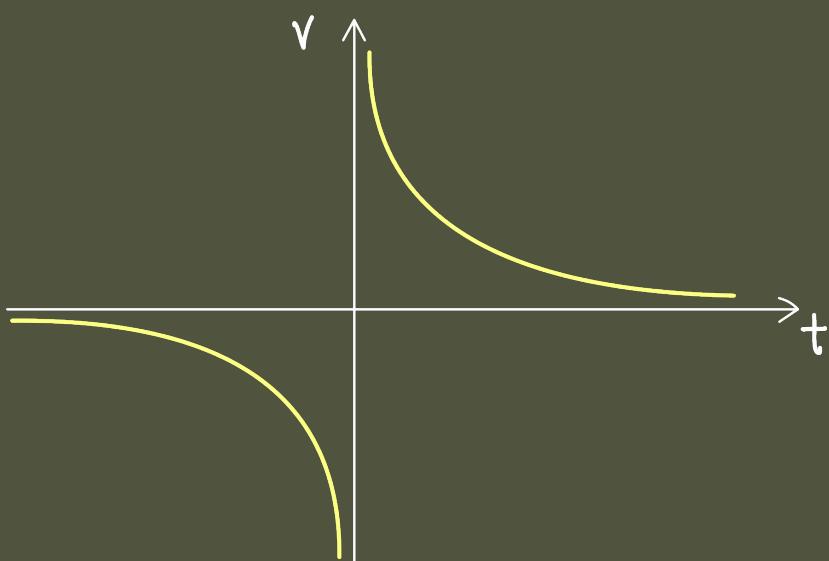
$$y = \frac{12}{x} \text{ και } y = -\frac{12}{x}.$$



4

Η απόσταση Γης - Σελήνης είναι περίπου $\Gamma\Sigma = 380.000$ χιλιόμετρα.

- α) Ποια είναι η ταχύτητα σε km/h ενός πυραύλου που διανύει την απόσταση $\Gamma\Σ$ σε 3 ημέρες;
- β) Να εκφράσετε την ταχύτητα ως συνάρτηση του χρόνου t που χρειάζεται για να διανύσει την απόσταση $\Gamma\Σ$. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής.



α) Η ταχύτητας δίνεται από τη σχέση $v = \frac{s}{t}$ άρα η ταχύτητας του πυραύλου είναι

$$v = \frac{360.000 \text{ km}}{3 \cdot 24 \text{ h}} = 5000 \text{ km/h}$$

β) Από τη σχέση $v = \frac{s}{t}$, αντικαθιστώντας την απόσταση Γης - Σελήνης παίρνουμε

$$v = \frac{360.000}{t}$$

5

Θεωρούμε όλα τα ορθογώνια με εμβαδόν 36 cm^2 .

α) Ονομάζοντας x και y τις διαστάσεις ενός τέτοιου ορθογωνίου να συμπληρώσετε τον πίνακα:

| | | | | | | | | |
|----------|---|---|---|---|---|----|----|----|
| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 12 | 18 | 36 |
| y | | | | | | | | |

Τι έχετε να παρατηρήσετε για τα μεγέθη x και y ;

- β) Να εκφράσετε το πλάτος y ενός τέτοιου ορθογωνίου ως συνάρτηση του μήκους x .
- γ) Να σχεδιάσετε σε σύστημα ορθογωνίων αξόνων τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής.

a)

| | | | | | | | | |
|---|----|----|----|---|---|----|----|----|
| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 12 | 18 | 36 |
| y | 36 | 18 | 12 | 9 | 6 | 3 | 2 | 1 |

τα μεγέθη x και y είναι αντιστρόφως αναλογικά αφού $xy = 36$ σταθερό γίνομενο.

β) Γνωρίζουμε ότι $xy = 36$ οέρας $y = \frac{36}{x}$

