Μαθηματικά Γ' Γυμνασίου

Μάθημα 10 - Τετράγωνο διαφοράς

Τετράγωνο Διαφοράς

$$\boxed{(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2}$$

Θυμόμαστε από το προηγούμενο μάθημα το τετράγωνο του αθροίσματος

$$(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

Εδώ το τετράγωνο της διαφοράς μοιάζει πολύ αρκεί να θυμάστε ότι πριν το διπλάσιο γινόμενο του πρώτου όρου με τον δεύτερο βάζουμε πλην.

Απόδειξη:

Πράγματι έχουμε:

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha - \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \alpha\beta - \beta\alpha + \beta^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

Για παράδειγμα, το ανάπτυγμα του $(y-4)^2$ προκύπτει, αν αντικαταστήσουμε το α με το y και το β με το 4, οπότε έχουμε:

$$(y-4)^2 = y^2 - 2 \cdot y \cdot 4 + 4^2 = y^2 - 8y + 16$$

Ομοίως, για να υπολογίσουμε το ανάπτυγμα του $(3x-4y)^2$ έχουμε:

$$(3x - 4y)^2 = (3x)^2 - 2 \cdot (3x) \cdot (4y) + (4y)^2 = 9x^2 - 24xy + 16y^2$$

$$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

2 Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(x-3)^2$ β) $(y-5)^2$ γ) $(3\omega-1)^2$ δ) $(2\kappa-\lambda)^2$

ε) $(3y-2\beta)^2$ στ) $(x^2-2)^2$ ζ) $(y^2-y)^2$ η) $(2x^2-5x)^2$

θ) $(x-\sqrt{3})^2$ ι) $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$ ια) $\left(\alpha-\frac{3}{2}\right)^2$ ιβ) $\left(\omega-\frac{2}{\omega}\right)^2$

α) $(x-3)^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot 3 + 3^2 = x^2 - 6x + 9$

$$(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

β) $(y-5)^2 = y^2 - 2\cdot y\cdot 5 + 5^2 = y^2 - 10y + 25$

γ) $(\underbrace{3\omega}_{\alpha}-\underbrace{1}_{\beta})^2 = (3\omega)^2 - 2(3\omega)1 + 1^2 = 3^2\omega^2 - 6\omega + 1 = 9\omega^2 - 6\omega + 1$

δ) $(\underbrace{2x}_{\alpha}-\underbrace{\lambda}_{\beta})^2 = (2x)^2 - 2\cdot 2x\cdot\lambda + \lambda^2 = 2^2\cdot x^2 - 4\lambda x + \lambda^2 = 4x^2 - 4\lambda x + \lambda^2$

ε) $(\underbrace{3y}_{\alpha}-\underbrace{2\beta}_{\beta})^2 = (3y)^2 - 2(3y)(2\beta) + (2\beta)^2 = 3^2y^2 - 12y\beta + 2^2\beta^2 = 9y^2 - 12y\beta + 4\beta^2$

· πρόσημα
· αριθμοί
· γράμματα

2 Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(x-3)^2$ β) $(y-5)^2$ γ) $(3\omega-1)^2$ δ) $(2\kappa-\lambda)^2$

ε) $(3y-2\beta)^2$ στ) $(x^2-2)^2$ ζ) $(y^2-y)^2$ η) $(2x^2-5x)^2$

θ) $(x-\sqrt{3})^2$ ι) $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$ ια) $\left(\alpha-\dfrac{3}{2}\right)^2$ ιβ) $\left(\omega-\dfrac{2}{\omega}\right)^2$

στ) $(\underbrace{x^2}_{\alpha}-\underbrace{2}_{\beta})^2=(x^2)^2-2x^2\cdot 2+2^2=x^4-4x^2+4$

ζ) $(\underbrace{y^2}_{\alpha}-\underbrace{y}_{\beta})^2=(y^2)^2-2y^2\cdot y+y^2=y^4-2y^3+y^2$

η) $(\underbrace{2x^2}_{\alpha}-\underbrace{5x}_{\beta})^2=(2x^2)^2-2(2x^2)\cdot(5x)+(5x)^2=2^2\cdot(x^2)^2-20x^3+5^2x^2=4x^4-20x^3+25x^2$

θ) $(\underbrace{x}_{\alpha}-\underbrace{\sqrt{3}}_{\beta})^2=x^2-2x\sqrt{3}+\sqrt{3}^2=x^2-2\sqrt{3}x+3$

ι) $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2=\sqrt{x}^2-2\sqrt{x}\sqrt{y}+\sqrt{y}^2=x-2\sqrt{xy}+y$

2 Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(x-3)^2$ β) $(y-5)^2$ γ) $(3\omega-1)^2$ δ) $(2\kappa-\lambda)^2$

ε) $(3y-2\beta)^2$ στ) $(x^2-2)^2$ ζ) $(y^2-y)^2$ η) $(2x^2-5x)^2$

θ) $(x-\sqrt{3})^2$ ι) $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$ ια) $\left(\alpha-\frac{3}{2}\right)^2$ ιβ) $\left(\omega-\frac{2}{\omega}\right)^2$

ια) $\left(\alpha-\frac{3}{2}\right)^2 = \alpha^2 - \cancel{2}\alpha\frac{3}{\cancel{2}} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \alpha^2 - 3\alpha + \frac{9}{4}$

ιβ) $\left(\omega-\frac{2}{\omega}\right)^2 = \omega^2 - 2\cancel{\omega}\frac{2}{\cancel{\omega}} + \left(\frac{2}{\omega}\right)^2 = \omega^2 - 4 + \frac{2^2}{\omega^2} = \omega^2 - 4 + \frac{4}{\omega^2}$

3 Χρησιμοποιώντας την κατάλληλη ταυτότητα να υπολογίσετε τις παραστάσεις:
α) $(\sqrt{3}+1)^2$ β) $(\sqrt{6}+\sqrt{5})^2$ γ) $(\sqrt{2}-3)^2$ δ) $(1-\sqrt{7})^2$

α) Αυτό είναι τετράγωνο αθροίσματος οπότε $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$

$$(\underbrace{\sqrt{3}}_{\alpha}+\underbrace{1}_{\beta})^2=\sqrt{3}^2+2\sqrt{3}\cdot 1+1^2=3+2\sqrt{3}+1=4+2\sqrt{3}.$$

β) Θα χρησιμοποιήσουμε την ίδια ταυτότητα: (τετράγωνο αθροίσματος)

$$(\underbrace{\sqrt{6}}_{\alpha}+\underbrace{\sqrt{5}}_{\beta})^2=\sqrt{6}^2+2\sqrt{6}\sqrt{5}+\sqrt{5}^2=6+2\sqrt{30}+5=11+2\sqrt{30}.$$

γ) Αυτό είναι τετράγωνο διαφοράς $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

$$(\underbrace{\sqrt{2}}_{\alpha}-\underbrace{3}_{\beta})^2=\sqrt{2}^2-2\sqrt{2}\cdot 3+3^2=2-6\sqrt{2}+9=11-6\sqrt{2}$$

δ) Θα χρησιμοποιήσουμε την ίδια ταυτότητα.

$$(\underbrace{1}_{\alpha}-\underbrace{\sqrt{7}}_{\beta})^2=1^2-2\cdot 1\cdot\sqrt{7}+\sqrt{7}^2=1-2\sqrt{7}+7=8-2\sqrt{7}$$

4 Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

α) $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$

β) $(\ldots\ldots \cdots 4)^2 = y^2 - \ldots\ldots \cdots \ldots\ldots$

γ) $(4x - \alpha)^2 = 16x^2 - 8x\alpha + \alpha^2$

δ) $(\ldots\ldots \cdots 2\omega)^2 = \ldots\ldots - 4x^2\omega \cdots \ldots\ldots$

7 Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x) = (x-3)^2 + (3x+1)^2 - 10(x-1)(x+1)$ είναι σταθερό.

Θα κάνουμε τις πράξεις και αν μας βγεί κάποιος αριθμός και όχι μεταβλητή τότε το P(x) είναι σταθερό.

$$P(x) = (\underbrace{x}_{\alpha}-\underbrace{3}_{\beta})^2 + (\underbrace{3x}_{\alpha}+\underbrace{1}_{\beta})^2 - 10(x-1)(x+1)$$

$$= x^2 - 2x\cdot 3 + 3^2 + (3x)^2 + 2(3x)\cdot 1 + 1^2 - 10(x^2 + \cancel{x} - \cancel{x} - 1)$$

$$= x^2 - 6x + 9 + 3^2x^2 + 6x + 1 - 10x^2 + 10$$

$$= \cancel{x^2} - \cancel{6x} + \cancel{9} + \cancel{9x^2} + \cancel{6x} + \cancel{1} - \cancel{10x^2} + \cancel{10}$$

$$= 20$$ άρα P(x) σταθερό.

14 α) Να αποδείξετε ότι $\left(\alpha+\frac{5}{\alpha}\right)^2-\left(\alpha-\frac{5}{\alpha}\right)^2=20$

β) Να υπολογίσετε τον αριθμό $x=\left(2005+\frac{1}{401}\right)^2-\left(2005-\frac{1}{401}\right)^2$

α) $\left(\alpha+\frac{5}{\alpha}\right)^2-\left(\alpha-\frac{5}{\alpha}\right)^2=$

$$\alpha^2+2\cancel{\alpha}\frac{5}{\cancel{\alpha}}+\frac{25}{\alpha^2}-\left(\alpha^2-2\cancel{\alpha}\frac{5}{\cancel{\alpha}}+\frac{25}{\alpha^2}\right)=\cancel{\alpha^2}+10+\cancel{\frac{25}{\alpha^2}}-\cancel{\alpha^2}+10-\cancel{\frac{25}{\alpha^2}}=20$$

β) $\left(2005+\frac{1}{401}\right)^2-\left(2005-\frac{1}{401}\right)^2=2005^2+2\cdot2005\cdot\frac{1}{401}+\left(\frac{1}{401}\right)^2-\left(2005^2-2\cdot2005\frac{1}{401}+\left(\frac{1}{401}\right)^2\right)$

$$=\cancel{2005^2}+2\cdot2005\frac{1}{401}+\cancel{\left(\frac{1}{401}\right)^2}-\cancel{2005^2}+2\cdot2005\frac{1}{401}-\cancel{\left(\frac{1}{401}\right)^2}$$

$$=4\cdot2005\frac{1}{401}$$

Άσκηση για το σπίτι:

Να δείξετε ότι:

α) $(\alpha-\beta)^2-(\beta-\alpha)^2=0$

β) $(\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2=4\alpha\beta$

γ) $(\alpha^2-\beta^2)^2+(2\alpha\beta)^2=(\alpha^2+\beta^2)^2$