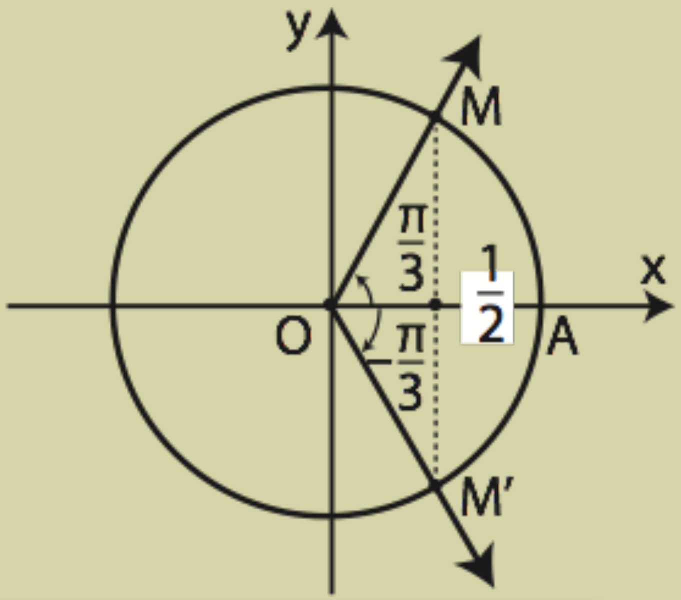
Άλγεβρα Β’ Λυκείου

Τριγωνομετρικές Εξισώσεις ΙΙ

Η εξίσωση συνx = α

Με ανάλογες σκέψεις, όπως προηγουμένως, εργαζόμαστε για να λύσουμε π.χ. την εξίσωση $\sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2}$.



Με τη βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου βρίσκουμε ότι οι λύσεις της εξίσωσης $\sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2}$ στο διάστημα $[-\pi, \pi]$ είναι οι $\frac{\pi}{3}$ και $-\frac{\pi}{3}$, γιατί

$$\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} = \sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

Επομένως το σύνολο των λύσεων της εξίσωσης $\sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2}$ δίνεται από τους τύπους

$$\begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \\ \quad\quad \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

Γενικότερα, αν θ είναι μία λύση της εξίσωση $\sigma\upsilon\nu x = \alpha$, αν δηλαδή ισχύει $\sigma\upsilon\nu\theta = \alpha$, τότε οι λύσεις της εξίσωσης αυτής δίνονται από τους τύπους

$$\begin{matrix} x = 2\kappa\pi + \theta \\ \text{ή} \quad\quad \kappa \in \mathbb{Z} \\ x = 2\kappa\pi - \theta \end{matrix}$$

Μεθοδολογία:

Για να λύσουμε εξισώσεις της μορφής συν$x = a$

i. Βρίσκουμε ποιας γωνίας το συνημίτονο είναι a

ii. Γράφουμε τη σχέση συν$x =$ συνθ όπου θ είναι η γωνία που βρήκαμε πριν.

iii. Αντικαθιστούμε σύμφωνα με τους τύπους:

$$x = 2k\pi + \theta$$

ή $\qquad k \in \mathbb{Z}$

$$x = 2k\pi - \theta$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1$^{\text{ο}}$ Να λυθεί η εξίσωση $\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{2}}{2}}$

ΛΥΣΗ

Επειδή $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, έχουμε $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}$, οπότε οι λύσεις της εξίσωσης αυτής δίνονται από τους τύπους:

$$\begin{cases} x = 2\kappa\pi + \dfrac{\pi}{4} \\ \quad\quad\text{ή} \\ x = 2\kappa\pi - \dfrac{\pi}{4} \end{cases}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

2^{o} Να λυθεί η εξίσωση $συν2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

ΛΥΣΗ

Επειδή $συν\frac{π}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ισχύει $συν\left(π - \frac{π}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ δηλαδή $συν\frac{5π}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Έχουμε επομένως $συν2x = συν\frac{5π}{6}$, οπότε

$$\begin{cases} 2x = 2κπ + \frac{5π}{6} \\ \quad ή \\ 2x = 2κπ - \frac{5π}{6} \end{cases}, \quad κ \in \mathbb{Z} \qquad ή \text{ ισοδύναμα } \qquad \begin{cases} x = κπ + \frac{5π}{12} \\ \quad ή \\ x = κπ - \frac{5π}{12} \end{cases}, \quad κ \in \mathbb{Z}$$

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $\eta\mu x = 0$ ii) $\eta\mu x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ iii) $\sigma\upsilon\nu x = 0$ iv) $\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

i) $\eta\mu x = 0$ Ποιας γωνίας το ημ είναι μηδέν; Των 0^0. Οπότε γράφουμε

$$\eta\mu x = \eta\mu 0 \quad \text{άρα} \quad \left.\begin{array}{l} x = 0 + 2k\pi \ \text{ή} \\ x = \pi - 0 + 2k\pi \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = 2k\pi \ \text{ή} \\ x = (2k+1)\pi \end{array}\right\}$$

Η διπλανή σχέση δίνει άρτια και περιττά πολλαπλάσια του π, οπότε

οι λύσεις συνοψίζονται στον τύπο

$$x = n\pi, \ n \in \mathbb{Z}.$$

ii) $\eta\mu x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ή} \\ x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{array} \quad k \in \mathbb{Z}.$

iii) $\sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}$ άρα $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ή $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$.

iv) $\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}$ άρα $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ή $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $\eta\mu x = -\dfrac{1}{2}$ ii) $\eta\mu x = -1$ iii) $\sigma\upsilon\nu x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ iv) $\sigma\upsilon\nu x = -1$

i) $\eta\mu x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = -\eta\mu\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ άρα

$x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ή $x = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi = 2k\pi + \frac{7\pi}{6}$ $k \in \mathbb{Z}$

ii) $\eta\mu x = -1 \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ή $x = \pi - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + 2k\pi$

$= \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$

iii) $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4}$ ή $x = 2k\pi - \left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4}$ ή $x = 2k\pi - \frac{3\pi}{4}$ $k \in \mathbb{Z}$

iv) $\sigma\upsilon\nu x = -1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\pi \Leftrightarrow x = 2k\pi + \pi$ ή $x = 2k\pi - \pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$x = (2k+1)\pi$ ή $x = (2k-1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

σε κάθε περίπτωση είναι τα περιττά πολλαπλάσια του π.