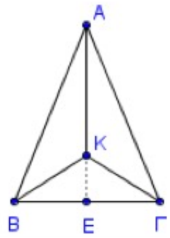
1591. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$ και Κ εσωτερικό σημείο του τριγώνου τέτοιο, ώστε $KB = K\Gamma$.



α) Να αποδείξετε ότι: τα τρίγωνα ΒΑΚ και ΚΑΓ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΑΓ. (Μονάδες 6)

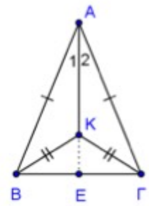
γ) Η προέκταση της ΑΚ τέμνει την ΒΓ στο Ε. Να αποδείξετε ότι η ΚΕ είναι διάμεσος του τριγώνου ΒΚΓ. (Μονάδες 7)

Λύση

α) Τα τρίγωνα ΒΑΚ και ΚΑΓ έχουν:

- την πλευρά ΑΚ κοινή
- $AB = A\Gamma$ και
- $KB = K\Gamma$.

-Με βάση το κριτήριο Π-Π-Π τα τρίγωνα είναι ίσα.



β) Επειδή τα τρίγωνα ΒΑΚ και ΚΑΓ είναι ίσα, έχουν και $A_1 = A_2$, άρα η ΑΕ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΑΓ.

γ) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές η ΑΕ θα είναι και ύψος και διάμεσος. Άρα η ΚΕ είναι διάμεσος στο ισοσκελές τρίγωνο ΒΚΓ.

1598. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ και ΓΑ τριγώνου ΑΒΓ, παίρνουμε τα τμήματα $A\Delta = AB$ και $AE = A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) Αν ΑΜ είναι η διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ και η προέκταση της ΑΜ τέμνει την ΕΔ στο Ζ, να δείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΑΒΜ είναι ίσα. (Μονάδες 7)

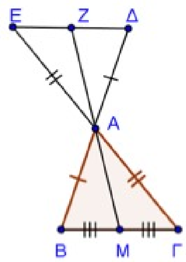
ii. $Z\Delta = \frac{E\Delta}{2}$. (Μονάδες 6)

Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ έχουν:

1) $A\Delta = AB$
2) $AE = A\Gamma$
3) $B\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{A}E$ ως κατακορυφήν

Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.



β) i. Τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΑΒΜ έχουν:

1) $A\Delta = AB$
2) $B\hat{A}M = \Delta\hat{A}Z$ ως κατακορυφήν και
3) $\hat{B} = \hat{\Delta}$ γιατί τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ίσα.

Με βάση το κριτήριο ΓΠΓ τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΑΒΜ είναι ίσα.

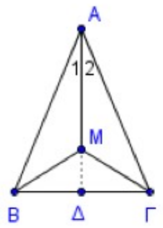
ii. Επειδή τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΑΒΜ είναι ίσα έχουν και $\Delta Z = BM$. Όμως $BM = \frac{AB}{2}$ και $AB = \Delta E$ γιατί τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ίσα, άρα $\Delta Z = \frac{\Delta E}{2}$.

1601. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$ και σημείο Μ εσωτερικό του τριγώνου τέτοιο, ώστε $MB = M\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΒΑΜ και ΜΑΓ είναι ίσα. **(Μονάδες 12)**

β) Η ΑΜ είναι διχοτομεί τη γωνία ΒΜΓ. **(Μονάδες 13)**

Λύση



α) Τα τρίγωνα ΒΑΜ και ΜΑΓ έχουν:

1) την πλευρά ΑΚ κοινή

2) $AB = A\Gamma$ και

3) $MB = M\Gamma$.

Με βάση το κριτήριο Π-Π-Π τα τρίγωνα είναι ίσα.

β) Επειδή τα τρίγωνα ΒΑΜ και ΚΑΓ είναι ίσα, έχουν και $A_1 = A_2$, άρα η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΑΓ, άρα είναι ύψος και διάμεσος του.
Στο ισοσκελές τρίγωνο ΒΜΓ, η ΑΔ είναι ύψος και διάμεσος, άρα είναι και διχοτόμος της γωνίας ΒΚΓ.

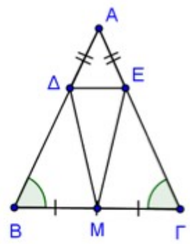
1621. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$ και στις ίσες πλευρές ΑΒ, ΑΓ παίρνουμε αντίστοιχα τμήματα $A\Delta = \frac{1}{3}AB$ και $AE = \frac{1}{3}A\Gamma$. Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι:

α) τα τμήματα ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα. **(Μονάδες 5)**

β) τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΜΕΓ είναι ίσα. **(Μονάδες 10)**

γ) το τρίγωνο ΔΕΜ είναι ισοσκελές. **(Μονάδες 10)**

Λύση



α) Επειδή $AB = A\Gamma$ και $A\Delta = AE$, είναι και
$AB - A\Delta = A\Gamma - AE \Leftrightarrow B\Delta = \Gamma E$

β) Τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΜΕΓ έχουν:

1) $B\Delta = \Gamma E$

2) $BM = M\Gamma$ γιατί το Μ είναι μέσο της ΒΓ και

3) $B = \Gamma$ γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.

Με βάση το κριτήριο ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

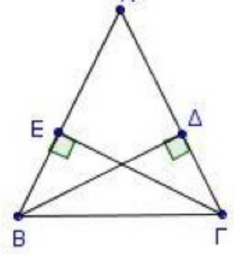
γ) Επειδή τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΜΕΓ είναι ίσα, έχουν και $M\Delta = ME$,οπότε το τρίγωνο ΜΔΕ είναι ισοσκελές.

1545. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$ και τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΓΕΒ είναι ίσα. **(Μονάδες 15)**

β) $A\Delta = AE$ **(Μονάδες 10)**

Λύση



α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΔΓ και ΓΕΒ έχουν:

1) την πλευρά ΒΓ κοινή και

2) $B = \Gamma$ γιατί βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ

Άρα τα τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία ίσες και είναι ίσα.

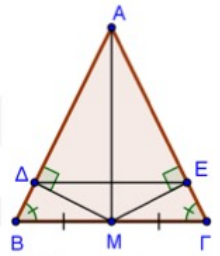
β) Επειδή τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΓΕΒ είναι ίσα, έχουν και $BE = \Gamma\Delta$.
Όμως είναι $AB = A\Gamma$,άρα είναι και $AB - BE = A\Gamma - \Gamma\Delta \Leftrightarrow AE = A\Delta$.

1547. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$. Από το μέσο Μ της βάσης του ΒΓ φέρουμε κάθετα τμήματα ΜΔ και ΜΕ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $M\Delta = ME$ (Μονάδες 12)

β) το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 13)

Λύση



α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΜΔΒ και ΜΕΓ έχουν:

1) $MB = M\Gamma$ γιατί το Μ είναι μέσο του ΒΓ και

2) $B = \Gamma$ βρίσκονται στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου

Δηλαδή τα τρίγωνα έχουν τις υποτείνουσες τους ίσες και μια οξεία γωνία του ενός είναι ίση με μια οξεία γωνία του άλλου, άρα είναι ίσα, οπότε έχουν και $M\Delta = ME$.

β) Επειδή τα τρίγωνα ΜΔΒ και ΜΕΓ είναι ίσα, έχουν και $\Delta B = E\Gamma$.

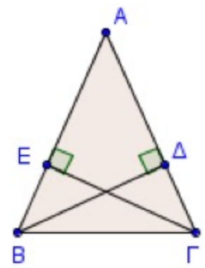
Όμως $AB = A\Gamma$, άρα και $AB - \Delta B = A\Gamma - E\Gamma \Leftrightarrow A\Delta = AE$, οπότε το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

1568. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ που αντιστοιχούν στις πλευρές του ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Αν το τρίγωνο είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$, τότε τα ύψη ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) Αν τα ύψη ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα, τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$. (Μονάδες 13)

Λύση



α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΕΓ και ΒΔΓ έχουν:

1) την πλευρά ΒΓ κοινή και

2) $B = \Gamma$ γιατί το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση τη ΒΓ, αφού έχει $AB = A\Gamma$

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε έχουν και $B\Delta = \Gamma E$.

β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΕΓ και ΒΔΓ έχουν:

1) την πλευρά ΒΓ κοινή και

2) $B\Delta = \Gamma E$

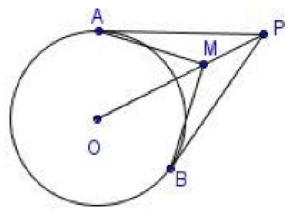
Δηλαδή τα τρίγωνα έχουν τις υποτείνουσες τους ίσες και μια κάθετη πλευρά του ενός είναι ίση με μια κάθετη πλευρά του άλλου, άρα είναι ίσα, οπότε έχουν και $B = \Gamma$.

Το τρίγωνο ΑΒΓ έχει δύο γωνίες του ίσες, οπότε είναι ισοσκελές και έχει $AB = A\Gamma$.

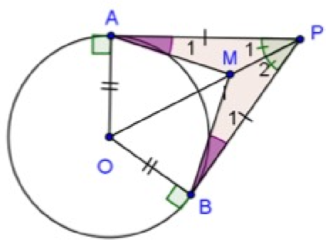
1617. Από εξωτερικό σημείο Ρ ενός κύκλου (Ο, ρ) φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Αν Μ είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο του ευθυγράμμου τμήματος ΟΡ, να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ΡΑΜ και ΡΜΒ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) $MAO = MBO$. (Μονάδες 13)



Λύση



α) Τα τρίγωνα ΡΑΜ και ΡΜΒ έχουν:

1) τη πλευρά ΡΜ κοινή

2) $PA = PB$ γιατί είναι τα εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από το Ρ προς τον κύκλο

3) $P_1 = P_2$ γιατί η διακεντρική ευθεία ΡΟ διχοτομεί την γωνία των εφαπτομένων

Με βάση το κριτήριο Π-Γ-Π τα τρίγωνα είναι ίσα.

β) Επειδή τα τρίγωνα ΡΑΜ και ΡΜΒ είναι ίσα, έχουν και

$A_1 = B_1$. Όμως $OAM = OBM = 90$ γιατί οι ακτίνες που καταλήγουν στα σημεία επαφής είναι κάθετες στις εφαπτομένες, άρα $MAO = 90 - A_1 = 90 - B_1 = MBO$.