Άλγεβρα Β' Λυκείου

5.2 Λογάριθμοι

Ορισμός

Λογάριθμοι

Λογάριθμος ενός **θετικού** αριθμού θ με βάση το a, όπου $0 < a \neq 1$, ονομάζεται ο πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει $a^x = \theta$

$$a^x = \theta \Leftrightarrow \log_a \theta = x$$

Ουσιαστικά είναι το αντίστροφο της εκθετικής συνάρτησης, ας δούμε μερικά παραδείγματα:

$\log_{10} 100 = 2$ αφού $10^2 = 100$

$\log_{10} 1000 = 3$ αφού $10^3 = 1000$

$\log_{10} 10000 = 5$ αφού $10^5 = 10000$

$\log_2 8 = 3$ αφού $2^3 = 8$

$\log_3 9 = 2$ αφού $3^2 = 9$

$\log_5 125 = 3$ αφού $5^3 = 125$

Λογάριθμοι

Να λύσετε τις εξισώσεις:

$\log_3 x = 2 \Leftrightarrow 3^2 = x \Leftrightarrow x = 9$

$\log_5 x = 3 \Leftrightarrow 5^3 = x \Leftrightarrow x = 125$

$\log_4 x = 2 \Leftrightarrow 4^2 = x \Leftrightarrow x = 16$

$\log_5 x = 2 \Leftrightarrow 5^2 = x \Leftrightarrow x = 25$

$\log_x 16 = 4 \Leftrightarrow x^4 = 16 \Leftrightarrow x = 2$

$\log_x 9 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3$

$\log_x 8 = 3 \Leftrightarrow x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 2$

$\log_x 32 = 5 \Leftrightarrow x^5 = 32 \Leftrightarrow x = 2$

$\log_3 27 = x \Leftrightarrow 3^x = 27 \Leftrightarrow 3^x = 3^3 \Leftrightarrow x = 3$

$\log_3 81 = x \Leftrightarrow 3^x = 81 \Leftrightarrow 3^x = 3^4 \Leftrightarrow x = 4$

$\log_3 1 = x \Leftrightarrow 3^x = 1 \Leftrightarrow 3^x = 3^0 \Leftrightarrow x = 0$

$\log_x 4 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$ είναι και το $x = -2$ λύση αλλά απορρίπτεται γιατί η βάση του λογαρίθμου πρέπει πάντα να είναι θετική!

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να υπολογισθούν, χωρίς τη χρήση υπολογιστή τσέπης, οι λογάριθμοι:

i) $\log_{10} 0{,}001$ **ii)** $\log_{\frac{1}{10}} \sqrt{10}$ **iii)** $\log_{\frac{1}{2}} 32$

iv) $\log_9 \frac{\sqrt{27}}{3}$ **v)** $\log_{\sqrt{2}} 16$ **vi)** $\log_{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{8}{27}}$

i) $\log_{10} 0{,}001 = x \Leftrightarrow 10^x = 10^{-3} \Leftrightarrow x = -3$

ii) $\log_{\frac{1}{10}} \sqrt{10} = x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{10}\right)^x = \sqrt{10} \Leftrightarrow 10^{-x} = 10^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

iii) $\log_{\frac{1}{2}} 32 = x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = 32 \Leftrightarrow 2^{-x} = 2^5 \Leftrightarrow x = -5$

iv) $\log_9 \frac{\sqrt{27}}{3} = x \Leftrightarrow 9^x = \frac{\cancel{3}\sqrt{3}}{\cancel{3}} \Leftrightarrow 3^{2x} = 3^{1/2} \Leftrightarrow 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να υπολογισθούν, χωρίς τη χρήση υπολογιστή τσέπης, οι λογάριθμοι:

i) $\log_{10} 0,001$ **ii)** $\log_{\frac{1}{10}} \sqrt{10}$ **iii)** $\log_{\frac{1}{2}} 32$

iv) $\log_9 \frac{\sqrt{27}}{3}$ **v)** $\log_{\sqrt{2}} 16$ **vi)** $\log_{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{8}{27}}$

vi) $\log_{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{8}{27}} = x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \sqrt{\frac{8}{27}} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \sqrt{\frac{2\cdot 4}{3\cdot 9}} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$

$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{1+\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^{-3/2}$

$\Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$.

2. Για ποια τιμή του x ισχύει:

i) $\log_{10} x = 3$ **ii)** $\log_4 x = -\frac{1}{2}$ **iii)** $\log_{\sqrt{2}} x = \frac{2}{3}$

i) $\log_{10} x = 3 \Leftrightarrow 10^3 = x \Leftrightarrow x = 1000$

ii) $\log_4 x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 4^{-\frac{1}{2}} = x \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{4}} = x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

iii) $\log_{\sqrt{2}} x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \sqrt{2}^{2/3} = x \Leftrightarrow 2^{\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{3}} = x \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2}$

3. Για ποια τιμή του α ισχύει:

i) $\log_\alpha 16 = 4$ **ii)** $\log_\alpha 8 = \dfrac{3}{2}$ **iii)** $\log_\alpha 0,1 = -3$

i) $\log_\alpha 16 = 4 \Leftrightarrow \alpha^4 = 16 \Leftrightarrow \alpha = \sqrt[4]{16} = 2$

ii) $\log_\alpha 8 = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \alpha^{3/2} = 8 \Leftrightarrow \alpha^{\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}} = 8^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \alpha = (2^3)^{\frac{2}{3}} = 2^2 = 4$

iii) $\log_\alpha 0,1 = -3 \Leftrightarrow \alpha^{-3} = 0,1 \Leftrightarrow \alpha^{-3} = 10^{-1} \Leftrightarrow (\alpha^{-3})^{-\frac{1}{3}} = (10^{-1})^{-\frac{1}{3}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha = 10^{1/3} \Leftrightarrow \alpha = \sqrt[3]{10}$.

Ασκήσεις:

1. Να συμπληρώσετε τα κενά στις ισότητες που ακολουθούν:

i) $\log_5 ... = 2$ **ii)** $\log_5 25...$ **iii)** $\log_2 ...=3$ **iv)** $\log_{0,5} ... = -3$ **v)** $\log_\alpha(\alpha^\rho) = ...$

vi) $\log_5\sqrt{5} = ...$ **vii)** $\log_6\frac{1}{6} = ...$ **viii)** $\log_6 ...=2$ **ix)** $\ln...=2$ **x)** $\ln...=-1$.

2. Να συμπληρώσετε τα κενά στις ισότητες που ακολουθούν:

i) $\log_\alpha 1=...$ **ii)** $\log_\alpha \alpha=...$ **iii)** $\log_\alpha\sqrt{\alpha} = ...$ **iv)** $\log_{...}\sqrt{k} = \frac{1}{2}$ **v)** $\log_\alpha ... = \frac{1}{3}$

vi) $\log_{...}\alpha^2=1$ **vii)** $\log_{...}\alpha=1$ **viii)** $\log_{...}\alpha^3=3$ **ix)** $\log_\alpha\frac{1}{\alpha}=....$ **x)** $\log_\alpha ...=0$.

3. Να βρείτε το x στις παρακάτω ισότητες: **i)** $\log_x 32=-5$ **ii)** $\log_x 64=\frac{3}{2}$ **iii)** $\log_4 x=3$

iv) $\log_x\frac{1}{9} = -\frac{2}{5}$ **v)** $\log_x 25=2$ **vi)** $\log_4|x-1|=2$.

4. Να βρείτε το x ώστε να έχουν νόημα οι λογάριθμοι: **i)** $\log(1-|x|)$ **ii)** $\log_x(3-2x)$

Ιδιότητες Λογαρίθμων

Ιδιότητες Λογαρίθμων

Ας μην ξεχνάμε τις βασικές προϋποθέσεις, ότι δηλαδή $a > 0,\ a \neq 1$ και ότι $\theta > 0$

$$\log_a a^x = x$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

$$a^{\log_a \theta} = \theta$$

Ιδιότητες Λογαρίθμων

$$\log_a \theta_1\theta_2 = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2$$

$$\log_a \frac{\theta_1}{\theta_2} = \log_a \theta_1 - \log_a \theta_2$$

$$\log_a \theta^k = k \log_a \theta$$

4. Να αποδείξετε ότι:

i) $\log_2 3 + 2\log_2 4 - \log_2 12 = 2$ **ii)** $3\log_{10} 2 + \log_{10} 5 - \log_{10} 4 = 1$

iii) $\frac{1}{2}\log_{10} 25 + \frac{1}{3}\log_{10} 8 - \frac{1}{5}\log_{10} 32 = 1 - \log_{10} 2$ **iv)** $2^{\log_2 6 - 2\log_2 \sqrt{3}} = 2$

v) $2\log_2(2+\sqrt{2}) + \log_2(6-4\sqrt{2}) = 2$

i) $\log_2 3 + 2\log_2 4 - \log_2 12 = 2 \Leftrightarrow \log_2 3 + \log_2 4^2 - \log_2 12 = 2$

$\Leftrightarrow \log_2 3\cdot 4^2 - \log_2 12 = 2$

$\Leftrightarrow \log_2 \frac{3\cdot 4^2}{12} = 2$

$\Leftrightarrow \log_2 4 = 2$ που ισχύει...

ii) $3\log_{10} 2 + \log_{10} 5 - \log_{10} 4 = \log_{10} 2^3 + \log_{10} 5 - \log_{10} 4 =$

$= \log_{10} \frac{2^3\cdot 5}{4} = \log_{10} \frac{40}{4} = \log_{10} 10 = 1$

4. Να αποδείξετε ότι:

i) $\log_2 3 + 2\log_2 4 - \log_2 12 = 2$ **ii)** $3\log_{10} 2 + \log_{10} 5 - \log_{10} 4 = 1$

iii) $\frac{1}{2}\log_{10} 25 + \frac{1}{3}\log_{10} 8 - \frac{1}{5}\log_{10} 32 = 1 - \log_{10} 2$ **iv)** $2^{\log_2 6 - 2\log_2 \sqrt{3}} = 2$

v) $2\log_2(2+\sqrt{2}) + \log_2(6-4\sqrt{2}) = 2$

iii) $\frac{1}{2}\log_{10} 25 + \frac{1}{3}\log_{10} 8 - \frac{1}{5}\log_{10} 32 = \log_{10} 25^{1/2} + \log_{10} 8^{1/3} - \log_{10} 32^{1/5}$

$$= \log_{10} \frac{\sqrt{25}\cdot\sqrt[3]{8}}{\sqrt[5]{32}} = \log_{10} \frac{5\cdot\cancel{2}}{\cancel{2}}$$

iv)

$$2^{\log_2 6 - 2\log_2\sqrt{3}} = 2^{\log_2 6 - \log_2 \sqrt{3}^2} = 2^{\log_2 \frac{6}{3}} = 2^{\log_2 2} = 2$$

4. Να αποδείξετε ότι:

i) $\log_2 3 + 2\log_2 4 - \log_2 12 = 2$ **ii)** $3\log_{10} 2 + \log_{10} 5 - \log_{10} 4 = 1$

iii) $\frac{1}{2}\log_{10} 25 + \frac{1}{3}\log_{10} 8 - \frac{1}{5}\log_{10} 32 = 1 - \log_{10} 2$ **iv)** $2^{\log_2 6 - 2\log_2 \sqrt{3}} = 2$

v) $2\log_2(2+\sqrt{2}) + \log_2(6-4\sqrt{2}) = 2$

v) $2\log_2(2+\sqrt{2}) + \log_2(6-4\sqrt{2}) = \log_2(2+\sqrt{2})^2 + \log_2(6-4\sqrt{2}) =$

$= \log_2(2+\sqrt{2})^2\cdot(6-4\sqrt{2}) = \log_2(4+4\sqrt{2}+\sqrt{2}^2)(6-4\sqrt{2}) =$

$= \log_2(24-16\sqrt{2}+24\sqrt{2}-16\sqrt{2}^2+6\sqrt{2}^2-4\sqrt{2}^2\cdot\sqrt{2}) =$

$= \log_2(24-\cancel{16\sqrt{2}}+\cancel{24\sqrt{2}}-32+12-\cancel{8\sqrt{2}}) =$

$= \log_2 4 = 2.$

Δεκαδικοί και φυσικοί Λογάριθμοι

Οι λογάριθμοι που έχουν βάση τον αριθμό 10 λέγονται **δεκαδικοί λογάριθμοι** και δε σημειώνουμε καθόλου τη βάση τους.

π.χ. $\log 10 = 1 \qquad \log 1000 = 3$

Οι λογάριθμοι που έχουν βάση τον αριθμό e λέγονται **φυσικοί λογάριθμοι** και συμβολίζονται με $\ln x$

π.χ. $\ln e = 1$

Ασκήσεις:

1. Αν logα=0,5, logβ=0,3 και logγ=3 να υπολογίσετε την παράσταση x=log $\frac{\alpha^2\cdot\beta}{\sqrt[3]{\gamma}}$

2. Αν logα=5, logβ=3 και logγ=4, να υπολογίσετε τις παραστάσεις $\log(\alpha^2\gamma^3)$ και $\log(\alpha^3\sqrt{\beta})$.

3. Αν log2=α και log3=β, να υπολογίσετε συναρτήσει των α και β τους αριθμούς: log5, log6, log8, log50, log72.

4. Να τοποθετηθούν με αύξουσα σειρά: log0, 5, 1, log2, $\log\sqrt{3}$, 0.

5. Να δείξετε ότι : **i**) 3log2+log5–log4=1 **ii**) $\frac{1}{2}\log 25+\frac{1}{3}\log 8+\frac{1}{5}\log 32-\log 2=1$

iii) $\frac{\log\sqrt{125}+\log\sqrt{27}-\log\sqrt{8}}{\log 15-\log 2}=\frac{3}{2}$.

Ασκήσεις Τράπεζας
Θέμα 2

15687. **Δίνεται η παράσταση $A = \log_4 3 + \log_4 \alpha - \log_4 \beta$ όπου α, β θετικοί αριθμοί.**

α) Να αποδείξετε ότι $A = \log_4 \frac{3\alpha}{\beta}$. **(Μονάδες 13)**

β) Αν για τους αριθμούς α, β ισχύει $3\alpha = 16\beta$, να βρείτε την τιμή της παράστασης Α. **(Μονάδες 12)**

α) $A = \log_4 3 + \log_4 a - \log_4 \beta = \log_4(3a) - \log_4 \beta = \log_4 \frac{3a}{\beta}$

β) $A = \log_4 \frac{3a}{\beta} = \log_4 \frac{16\beta}{\beta} = \log_4 16 = 2$

15816. Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \ln 2$, $\beta = \ln 4$, $\gamma = \ln 8$.

α) Να αποδείξετε ότι $2\beta = \alpha + \gamma$. **(Μονάδες 12)**

β) Να αποδείξετε ότι $\beta + \gamma = 5\alpha$. **(Μονάδες 13)**

α) $2\beta = 2 \cdot \ln 4 = \ln 4^2 = \ln 16 = \ln(2 \cdot 8)\ln 2 + \ln 8 = \alpha + \gamma$

β) $\beta + \gamma = \ln 4 + \ln 8 = \ln 4 \cdot 8 = \ln 32 = \ln 2^5 = 5 \ln 2 = 5\alpha$

15817. **Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \ln 2$ και $\beta = \ln 3$.**
α) Να αιτιολογήσετε γιατί $0 < \alpha < \beta$. **(Μονάδες 12)**
β) Να αποδείξετε ότι $\beta - \alpha < 1$. **(Μονάδες 13)**
Δίνεται $e \simeq 2.71$.

α) Ισχύει ότι $1 < 2 < 3$, οπότε $\ln 1 < \ln 2 < \ln 3$ άρα και $0 < \ln 2 < \ln 3$ ή $0 < \alpha < \beta$

β) $\beta - \alpha = \ln 3 - \ln 2 = \ln \frac{3}{2} < \ln 2{,}71 \Leftrightarrow \beta - \alpha < \ln e \Leftrightarrow \beta - \alpha < 1$

20663. **Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=(\log_2 8)\cdot x^3+\left(4\log_2\sqrt{2}\right)\cdot x^2-(4\log_2 1)\cdot x+1990$.**

α) Να αποδείξετε ότι $\log_2 8+2\log_2\sqrt{2}-\log_2 1=4$. **(Μονάδες 15)**

β) Να υπολογίσετε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-2)$. **(Μονάδες 10)**

α) Ισχύει ότι $\log_2 8=3$, $2\log_2\sqrt{2}=\log_2\sqrt{2}^2=\log_2 2=1$, $\log_2 1=0$ άρα

$\log_2 8+2\log_2\sqrt{2}-\log_2 1=3=1-0=4$

β) Ας δούμε πρώτα πώς γίνεται το $P(x)$. Έχουμε

$\log_2 8=3$, $4\log_2\sqrt{2}=\log_2\sqrt{2}^4=\log_2 4=2$ και $4\log_2 1=0$ οπότε

$P(x)=3x^3+2x^2+1990$. Κάνουμε Horner με $\rho=2$:

3	2	0	1990	ρ=2
	6	16	32	
3	8	16	2022	

Οπότε, το υπόλοιπο φαίνεται και στο σχήμα Horner ότι είναι το 2022

20710. Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \log 20$ και $\beta = \log 50$. Να αποδείξετε ότι

α) $\beta + \alpha = 3$. **(Μονάδες 7)**

β) $\ln(\beta + \alpha) > 1$. **(Μονάδες 6)**

γ) $10^{\beta} - 10^{\alpha} = 10 \cdot (\beta + \alpha)$. **(Μονάδες 12)**

Δίνεται ότι $e \simeq 2,71$.

(α) $\beta + \alpha = \log 50 + \log 30 = \log 20 \cdot 50 = \log 1000 = 3$

(β) Ισχύει ότι $e < 3$ αφού $e \simeq 2,71$ άρα

$\ln e < \ln 3 \Leftrightarrow 1 < \ln 3 \Leftrightarrow 1 < \ln(\beta + \alpha)$

(γ) $10^{\beta} - 10^{\alpha} = 10^{\log 50} - 10^{\log 20} = 50 - 20 = 30 = 3 \cdot 10 = (\beta + \alpha) \cdot 10$

20711. Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \log 3$ και $\beta = \log 4$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί $0 < \alpha < \beta$. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι : i. $\beta + \alpha > 1$. (Μονάδες 6) ii. $\ln\frac{\alpha}{\beta} < 0$. (Μονάδες 7)

(α) Ισχύει ότι $1 < 3 < 4 \Leftrightarrow \log 1 < \log 3 < \log 4 \Leftrightarrow 0 < \alpha < \beta$

(β)

(i) $\beta + \alpha = \log 3 + \log 4 = \log 3 \cdot 4 = \log 12 > \log 10 = 1$ άρα

$\beta + \alpha > 1$

(ii) Ισχύει ότι $0 < \alpha < \beta \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} < 1 \Leftrightarrow \ln\frac{\alpha}{\beta} < \ln 1$

$\Leftrightarrow \ln\frac{\alpha}{\beta} < 0$

21676. Αν είναι γνωστό ότι $\ln 4 = 1,386$ και $\ln 5 = 1,609$ τότε:

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \ln\frac{e}{5} - \ln\frac{4}{e}$. (Μονάδες 12)

β) Με τη βοήθεια της ισότητας $80 = 5\cdot 4^2$ να αποδείξετε ότι $\ln 80 = 4,381$. (Μονάδες 13)

(α) $A = \ln\frac{e}{5} - \ln\frac{4}{e} = \ln e - \ln 5 - \ln 4 + \ln e = 1 - 1,609 - 1,386 + 1$

$= -0,995$

(β) $\ln 80 = \ln 5\cdot 4^2 = \ln 5 + \ln 4^2 = \ln 5 + 2\ln 4 = 1,609 + 2\cdot 1,386$

$= 4,381$

21858. Δίνεται η παράσταση $A = 2\log 5 + 2\log 2$.

α) Να αποδείξετε ότι $A = 2$. (Μονάδες 12)

β) Να βρεθεί η τιμή του λ για την οποία ισχύει ότι $e^{\lambda} = A$. (Μονάδες 6)

γ) Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα β), να αποδείξετε ότι $\ln\lambda < 0$. (Μονάδες 7)

(α) $A = 2\log 5 + 2\log 2 = \log 5^2 + \log 2^2 = \log 25 + \log 4$

$= \log 25 \cdot 4 = \log 100 = 2$

(β) $e^{\lambda} = A \Leftrightarrow e^{\lambda} = 2 \Leftrightarrow \ln e^{\lambda} = \ln 2 \Leftrightarrow \lambda \ln e = \ln 2$

$\Leftrightarrow \boxed{\lambda = \ln 2}$

(γ) Ισχύει ότι $e > 2 \Leftrightarrow \ln e > \ln 2 \Leftrightarrow 1 > \ln 2 \Leftrightarrow 1 > \lambda$

$\Leftrightarrow \ln 1 > \ln\lambda \Leftrightarrow \boxed{0 > \ln\lambda}$

Ασκήσεις Τράπεζας
Θέμα 4

15251. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3-9x^2+(\alpha-2)x-6$ το οποίο έχει παράγοντα το $x-1$.

α) Να βρείτε τον αριθμό α. (Μονάδες 6)

β) Για $\alpha=15$

i. να κάνετε τη διαίρεση $P(x):(x^2-3x+2)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης. (Μονάδες 6)

ii. αν $P(x)=(x^2-3x+2)(2x-3)$ να λύσετε την ανίσωση $P(x)<0$. (Μονάδες 7)

iii. να αποδείξετε ότι $P(\ln 2)<0$. (Μονάδες 6)

α) Αφού έχει παράγοντα το $(x-1)$ θα ισχύει $P(1)=0$. Οπότε

$$P(1)=2\cdot1^3-9\cdot1^2+(\alpha-2)\cdot1-6=0 \Leftrightarrow \cancel{2}-9+\alpha\cancel{-2}-6=0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha=15}$$

(β) (i)

$$\begin{array}{l|l} \cancel{2x^3}-9x^2+13x-6 & x^2-3x+2 \\ \hline \cancel{-2x^3}+6x^2-4x & 2x-3 \\ \hline \quad -\cancel{3x^2}+\cancel{9x}\cancel{-6} & \\ \quad +\cancel{3x^2}-\cancel{9x}\cancel{+6} & \\ \hline \quad\quad 0 & \end{array}$$

$$2x^3-9x^2+13x-6=(x^2-3x+2)(2x-3)$$

15251. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3-9x^2+(\alpha-2)x-6$ το οποίο έχει παράγοντα το $x-1$.

α) Να βρείτε τον αριθμό α. (Μονάδες 6)

β) Για $\alpha=15$

i. να κάνετε τη διαίρεση $P(x):(x^2-3x+2)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης. (Μονάδες 6)

ii. αν $P(x)=(x^2-3x+2)(2x-3)$ να λύσετε την ανίσωση $P(x)<0$. (Μονάδες 7)

iii. να αποδείξετε ότι $P(\ln 2)<0$. (Μονάδες 6)

(ii) Βρίσκω πρώτα τις ρίζες του P(x).

$x^2-3x+2=0$, $\Delta=9-8=1$ $x_{1,2}=\dfrac{3\pm1}{2}$ $\to 2$, $\to 1$

$2x-3=0 \Leftrightarrow 2x=3 \Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$

και φτιάχνω πίνακα προσήμων:

x	$-\infty$ 1	1 $\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$ 2	2 $+\infty$
x^2-3x+2	+	−	−	+
$2x-3$	−	−	+	+
Γ	−	+	−	+

θέλω $P(x)<0$

$x\in(-\infty,1)\cup\left(\frac{3}{2},2\right)$

15251. **Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3-9x^2+(\alpha-2)x-6$ το οποίο έχει παράγοντα το $x-1$.**

α) Να βρείτε τον αριθμό α . **(Μονάδες 6)**

β) Για α =15

i. να κάνετε τη διαίρεση $P(x):(x^2-3x+2)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

(Μονάδες 6)

ii. αν $P(x)=(x^2-3x+2)(2x-3)$ να λύσετε την ανίσωση $P(x)<0$. **(Μονάδες 7)**

iii. να αποδείξετε ότι $P(\ln 2)<0$. **(Μονάδες 6)**

(iii) Ισχύει ότι $\ln 2<1$ άρα $P(\ln 2)<0$.