Μαθηματικά Β' Γυμνασίου

Μάθημα 2: Δυνάμεις

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

Συμβολισμοί

- Το γινόμενο $\overbrace{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\ \dots\ \cdot\alpha}^{\nu \text{ παράγοντες}}$ *(είτε ο α είναι θετικός είτε αρνητικός ρητός)*, συμβολίζεται με το α^ν και λέγεται **δύναμη** με **βάση** το **α** και **εκθέτη** το φυσικό **ν>1**.

εκθέτης

$$\alpha^\nu = \underbrace{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\ \dots\ \cdot\alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}}$$

βάση

- Για **ν = 1**, γράφουμε $\alpha^1 = \alpha$.
- Η **δύναμη α^ν** διαβάζεται και **νιοστή δύναμη του α**.
- Η **δύναμη α^2** λέγεται και **τετράγωνο του α** ή **α στο τετράγωνο.**
- Η **δύναμη α^3** λέγεται **κύβος του α** ή **α στον κύβο**.

Πρόσημο δύναμης

Παρατηρούμε ότι:

$(+2)^5 = (+2)(+2)(+2)(+2)(+2) = +32 > 0$

$(-2)^4 = \underbrace{(-2)(-2)(-2)(-2)}_{\text{άρτιο πλήθος}} = +16 > 0$

$(-2)^5 = \underbrace{(-2)(-2)(-2)(-2)(-2)}_{\text{περιττό πλήθος}} = -32 < 0$

Γενικά ισχύει ότι:

- Δύναμη με βάση θετικό αριθμό είναι θετικός αριθμός.

  Αν $\boldsymbol{\alpha} > \mathbf{0}$, τότε $\boldsymbol{\alpha}^{\nu} > 0$

- Δύναμη με βάση αρνητικό αριθμό και εκθέτη άρτιο είναι θετικός αριθμός.

  Αν $\boldsymbol{\alpha} < 0$ και **ν άρτιος**, τότε $\boldsymbol{\alpha}^{\nu} > 0$

- Δύναμη με βάση αρνητικό αριθμό και εκθέτη περιττό είναι αρνητικός αριθμός.

  Αν $\boldsymbol{\alpha} < 0$ και **ν περιττός**, τότε $\boldsymbol{\alpha}^{\nu} < 0$

Ιδιότητες δυνάμεων ρητών με εκθέτη φυσικό

Παρατηρούμε ότι:

$$(-3)^3(-3)^5 = \underbrace{\overbrace{(-3)(-3)(-3)}^{3\text{ παράγοντες}}\overbrace{(-3)(-3)(-3)(-3)(-3)}^{5\text{ παράγοντες}}}_{8\text{ παράγοντες}} =$$

$$= (-3)^8 = (-3)^{3+5}$$

$$7^8 : 7^3 = \frac{7^8}{7^3} = \frac{7\cdot7\cdot7\cdot7\cdot7\cdot7\cdot7\cdot7}{7\cdot7\cdot7} =$$

$$= 7\cdot7\cdot7\cdot7\cdot7 = 7^5 = 7^{8-3}$$

Γενικά ισχύει ότι:

- Για να πολλαπλασιάσουμε δυνάμεις με την ίδια βάση, αφήνουμε την ίδια βάση και βάζουμε εκθέτη το άθροισμα των εκθετών.

$$\boxed{\alpha^{\mu}\cdot\alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu}}$$

- Για να διαιρέσουμε δυνάμεις με την ίδια βάση, αφήνουμε την ίδια βάση και βάζουμε εκθέτη τη διαφορά του εκθέτη του διαιρέτη από τον εκθέτη του διαιρετέου.

$$\boxed{\alpha^{\mu} : \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu-\nu}}$$

Να υπολογίσετε τα παρακάτω:

i) $(-1)^3$ ii) $(-1)^4$ iii) $(-1)^{10}$ iv) $(-2)^4$ v) 2^3 vi) $(-4)^2$ vii) $(-5)^3$

ΛΥΣΗ:

i) Επειδή έχω αρνητική βάση και περιττό εκθέτη, θα γράψω το αποτέλεσμα με πλην

οπότε $(-1)^3 = -1^3 = -1$

ii) Επειδή έχω αρνητική βάση και άρτιο εκθέτη, θα γράψω το αποτέλεσμα με συν

οπότε $(-1)^4 = 1^4 = 1$

iii) $(-1)^{10} = 1^{10} = 1$

iv) $(-2)^4 = 2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

v) $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

vi) $(-4)^2 = 4^2 = 16$

vii) $(-5)^3 = -5^3 = -5 \cdot 5 \cdot 5 = -125$

Να γράψετε το αποτέλεσμα σαν μια δύναμη χωρίς να την υπολογίσετε :

i) $2^5 \cdot 2^{10}$ ii) $3^3 \cdot 3^5$ iii) $5 \cdot 5^4$ iv) $6^7 \cdot 6^2$ v) $(-2)^3 \cdot (-2)^8$

vi) $(-1)^5 \cdot (-1)^6$ vii) $4^2 \cdot 4^3$

ΛΥΣΗ :

i) Θα εφαρμόσω την ιδιότητα $\alpha^\mu \cdot \alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}$ που λέει ότι αν πολλαπλασιάσω δυνάμεις με την ίδια βάση, τότε θα αφήσω ίδια βάση και θα προσθέσω τους εκθέτες. Οπότε $2^5 \cdot 2^{10} = 2^{5+10} = 2^{15}$

ii) $3^3 \cdot 3^5 = 3^{3+5} = 3^8$

iii) $5 \cdot 5^4 = 5^{1+4} = 5^5$ Όταν δεν έχω εκθέτη, υπονοείται ότι είναι 1.

iv) $6^7 \cdot 6^2 = 6^{7+2} = 6^9$

v) $(-2)^3 \cdot (-2)^8 = (-2)^{3+8} = (-2)^{11} = -2^{11}$

vi) $(-1)^5 \cdot (-1)^6 = (-1)^{5+6} = (-1)^{11} = -1^{11} = -1$

vii) $4^2 \cdot 4^3 = 4^{2+3} = 4^5$

Ομοίως :

i) $\dfrac{2^5}{2^3}$ ii) $\dfrac{3^4}{3}$ iii) $\dfrac{5^7}{5^2}$ iv) $\dfrac{6^4}{6}$ v) $\dfrac{(-1)^5}{(-1)^4}$ vi) $\dfrac{(-2)^5}{(-2)^3}$

ΛΥΣΗ

i) Στην άσκηση αυτή θα εφαρμόσω την ιδιότητα $\dfrac{\alpha^\mu}{\alpha^\nu} = \alpha^{\mu-\nu}$ που λέει ότι αν διαιρέσω δυνάμεις με ίδια βάση, τότε αφήνω την ίδια βάση και αφαιρώ τον "πάνω" εκθέτη μείον τον "κάτω" εκθέτη. Οπότε : $\dfrac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2$

ii) $\dfrac{3^4}{3} = 3^{4-1} = 3^3$

iii) $\dfrac{5^7}{5^2} = 5^{7-2} = 5^5$

iv) $\dfrac{6^4}{6} = 6^{4-1} = 6^3$

v) $\dfrac{(-1)^5}{(-1)^4} = (-1)^{5-4} = (-1)^1 = -1$

vi) $\dfrac{(-2)^5}{(-2)^3} = (-2)^{5-3} = (-2)^2 = 2^2$