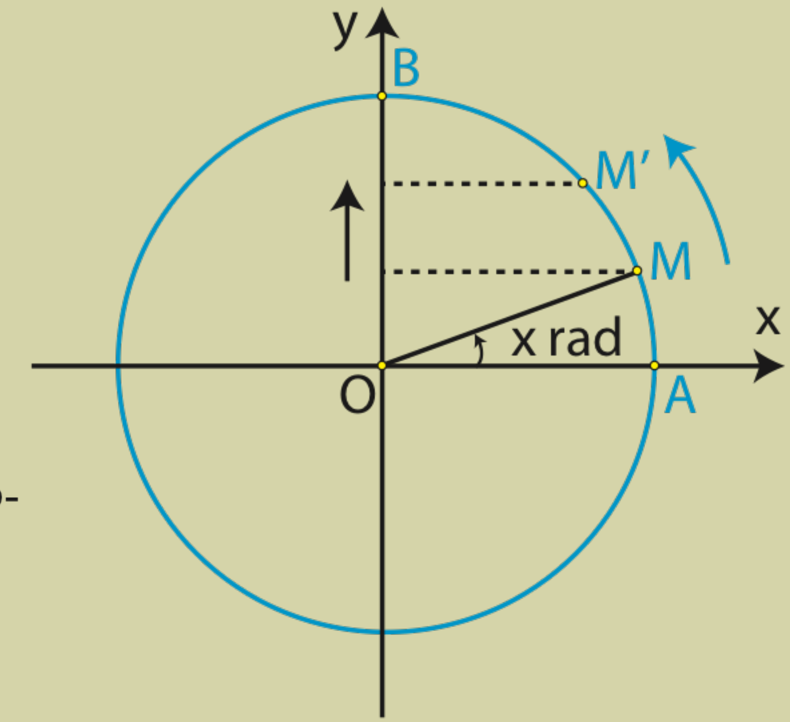
Άλγεβρα Β’ Λυκείου

Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

Μελέτη της συνάρτησης f(x) = συνx

Επειδή η συνάρτηση f(x) = συνx είναι περιοδική με περίοδο 2π, αρκεί να τη μελετήσουμε σε ένα διάστημα πλάτους 2π, π.χ. το [0, 2π].
Από τη μελέτη αυτή προκύπτουν τα συμπεράσματα του επόμενου πίνακα:



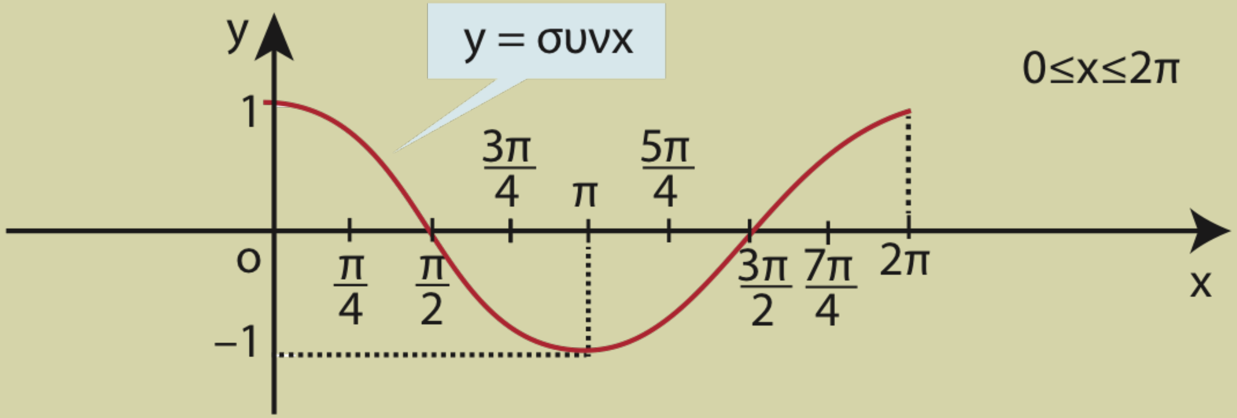
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
συνx	1 μέγ. ↘	0 ↘	−1 ελάχ. ↗	0 ↗	1 μέγ.

Συντάσσουμε τώρα κατά τα γνωστά και τον ακόλουθο πίνακα τιμών της συνάρτησης συνημίτονο:

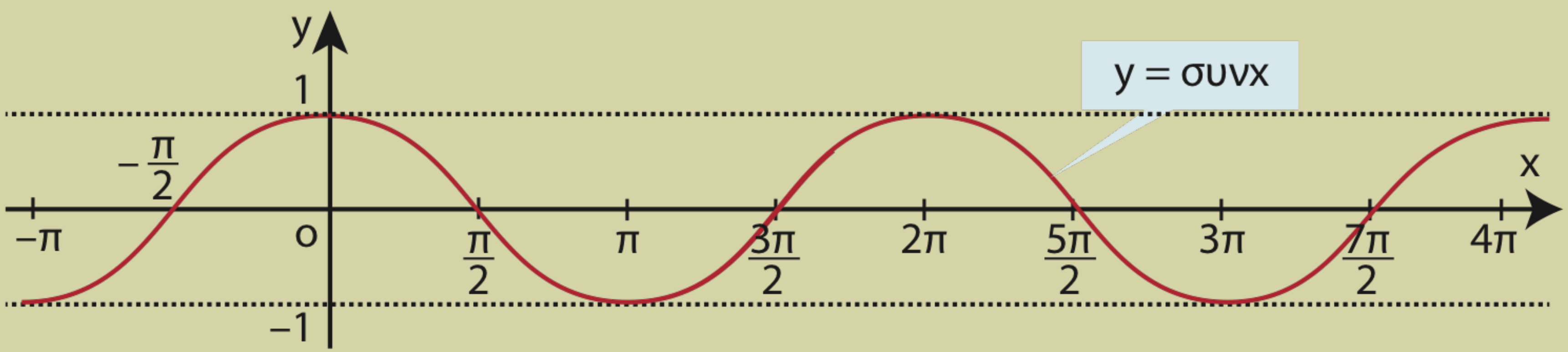
x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
συνx	1	0,71	0	– 0,71	–1	– 0,71	0	0,71	1

Έτσι μπορούμε να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της y = συνx για

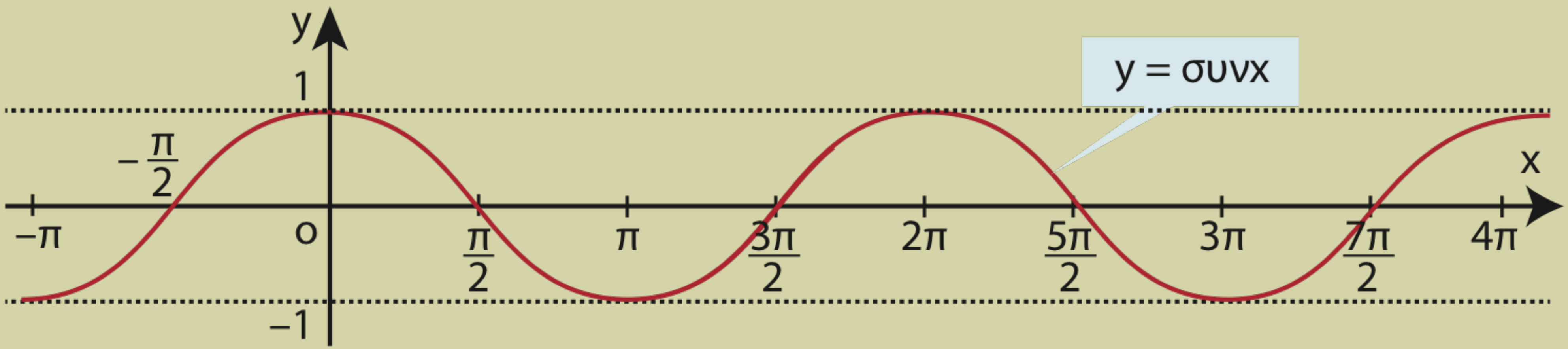
$0 \le x \le 2\pi$.



Επειδή η συνάρτηση f(x) = συνx είναι περιοδική με περίοδο 2π, η γραφική της παράσταση στο $\mathbb{R}$ είναι η ακόλουθη:



Τέλος γνωρίζουμε ότι οι αντίθετες γωνίες έχουν ίδιο συνημίτονο. Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\sigma\upsilon\nu(-x) = \sigma\upsilon\nu x$. Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ είναι άρτια και επομένως η γραφική της παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y'y.



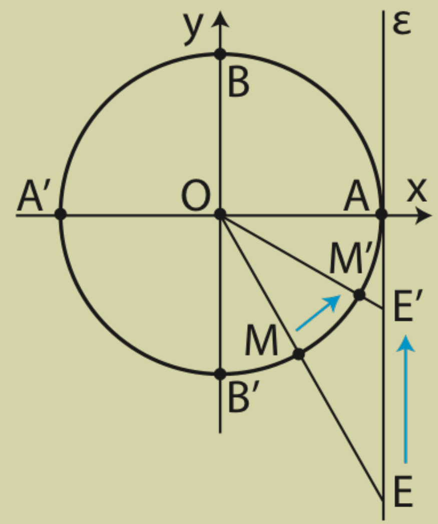
Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = εφx$

Επειδή η συνάρτηση $f(x) = εφx$ είναι περιοδική με περίοδο π, αρκεί να τη μελετήσουμε σε ένα διάστημα πλάτους π, π.χ. το $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.
(Το διάστημα είναι ανοικτό, αφού η συνάρτηση εφ δεν ορίζεται στα $-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}$).

Ας υποθέσουμε ότι η τελική πλευρά της γωνίας x rad τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο Μ και την ευθεία των εφαπτομένων στο σημείο Ε.

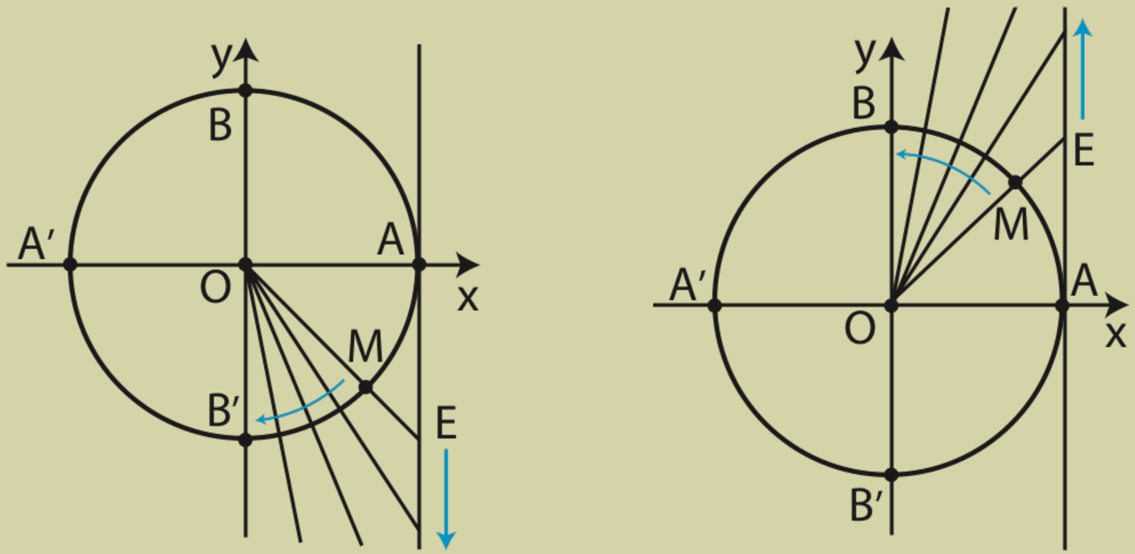
Όπως έχουμε αναφέρει η εφx ισούται με την τεταγμένη του σημείου Ε.
Επομένως:

• Όταν ο x παίρνει τιμές από $-\frac{\pi}{2}$ προς το $\frac{\pi}{2}$ το Μ κινείται στον τριγωνομετρικό κύκλο κατά τη θετική φορά από το Β' προς το Β, οπότε η τεταγμένη του σημείου Ε αυξάνει. Αυτό σημαίνει ότι η $f(x) = εφx$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.



• Όταν ο x «τείνει» στο $-\frac{\pi}{2}$ από μεγαλύτερες τιμές η εφx «τείνει» στο $-\infty$.

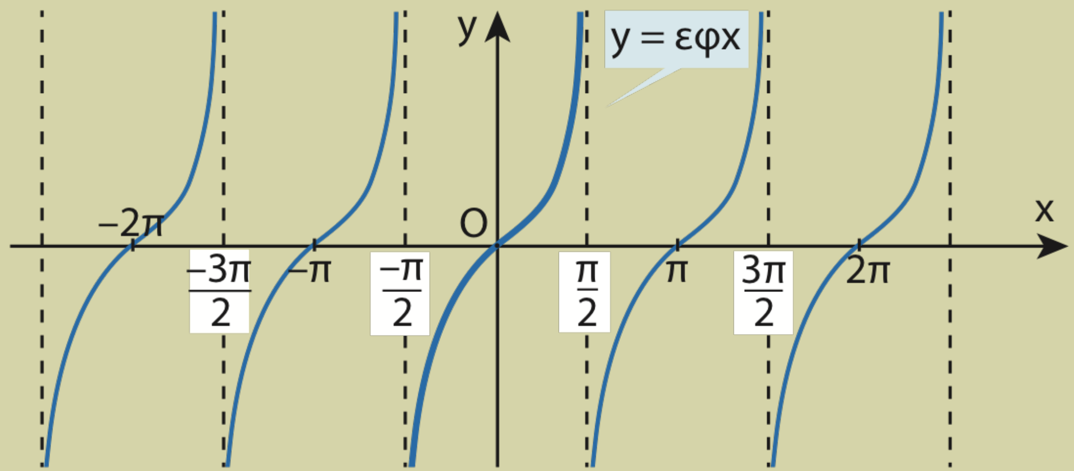
Γι΄ αυτό λέμε ότι η ευθεία $x=-\frac{\pi}{2}$ είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f. Επίσης όταν ο x «τείνει» στο $\frac{\pi}{2}$ από μικρότερες τιμές η εφx τείνει στο $+\infty$. Γι΄ αυτό λέμε ότι και η ευθεία $x=\frac{\pi}{2}$ είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης της f.



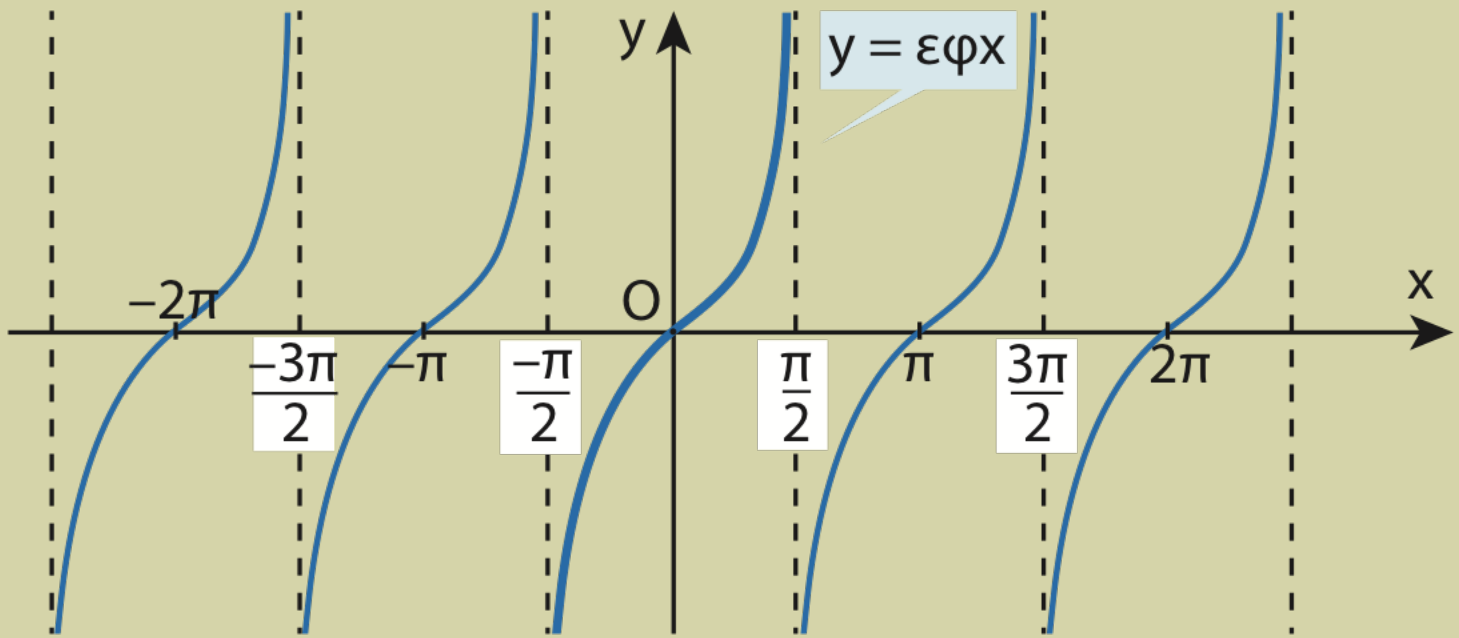
Για να κάνουμε τη γραφική παράσταση της f(x)=εφx συντάσσουμε, με τη βοήθεια των τριγωνομετρικών πινάκων ή με επιστημονικό κομπιουτεράκι, έναν πίνακα τιμών της:

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
εφx	Δεν ορίζεται	$-\sqrt{3}\simeq -1,7$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}\simeq -0,6$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}\simeq 0,6$	1	$\sqrt{3}\simeq 1,7$	Δεν ορίζεται

Στη συνέχεια παριστάνουμε με σημεία του επιπέδου τα ζεύγη αυτά των αντίστοιχων τιμών και τα ενώνουμε με μια συνεχή γραμμή. Η γραφική παράσταση της f(x)=εφx φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Είναι φανερό ότι η γραφική παράσταση της f(x)=εφx έχει κέντρο συμμετρίας το Ο, αφού (§ 3.3: εφ(–x) = –εφx είναι περιττή συνάρτηση).



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1ο Να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση f(x)=3ημx.

ΛΥΣΗ

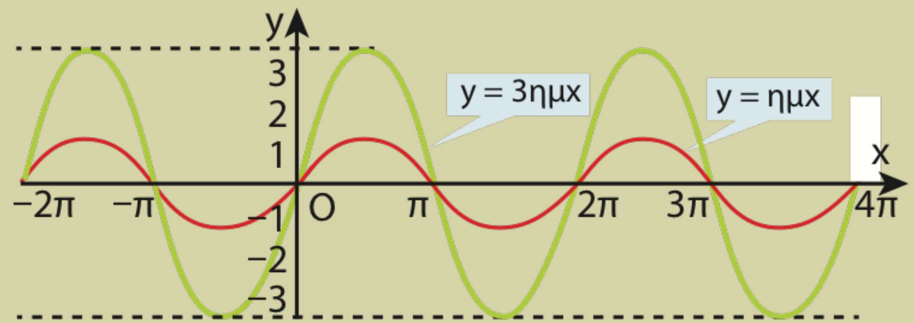
Οι τιμές της συνάρτησης f(x)=3ημx είναι προφανώς τριπλάσιες από τις αντίστοιχες τιμές της συνάρτησης φ(x)=ημx. Εξάλλου και η συνάρτηση αυτή είναι περιοδική με περίοδο 2π, αφού ισχύει:

$$f(x+2\pi)=3\cdot \eta\mu(x+2\pi)=3\cdot \eta\mu x=f(x)\text{ , για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

$$\text{και } f(x-2\pi)=3\cdot \eta\mu(x-2\pi)=3\cdot \eta\mu x=f(x),\text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Έχοντας υπόψη τα στοιχεία αυτά και με τη βοήθεια ενός πίνακα τιμών σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της f(x)=3ημx.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
ημx	0	1	0	–1	0
3ημx	0	3	0	–3	0



2ο Να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση f(x)=ημ2x.

ΛΥΣΗ

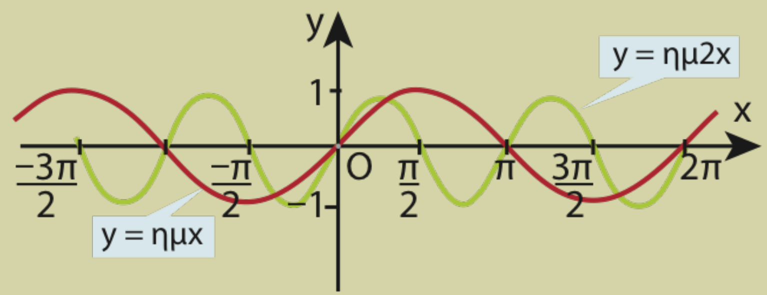
Κάθε τιμή της συνάρτησης f(x)=ημ2x επαναλαμβάνεται, όταν το 2x αυξηθεί κατά 2π, που σημαίνει ότι η τιμή αυτή επαναλαμβάνεται, όταν το x αυξηθεί κατά π. Επομένως, η συνάρτηση f(x)=ημ2x είναι περιοδική με περίοδο π. Πράγματι:

$$f(x+\pi)=\eta\mu 2(x+\pi)=\eta\mu(2x+2\pi)=\eta\mu 2x=f(x), \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \text{ και}$$

$$f(x-\pi)=\eta\mu 2(x-\pi)=\eta\mu(2x-2\pi)=\eta\mu 2x=f(x), \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Έχοντας υπόψη το στοιχείο αυτό και με τη βοήθεια ενός πίνακα τιμών, σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της f(x)=ημ2x.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
ημ2x	0	1	0	–1	0



3ο Να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση f(x)=3ημ2x.

ΛΥΣΗ

Σύμφωνα με τα προηγούμενα παραδείγματα η συνάρτηση αυτή έχει μέγιστο 3, ελάχιστο –3 και είναι περιοδική με περίοδο π.

Ένας πίνακας τιμών της συνάρτησης f(x)=3ημ2x είναι ο εξής:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
3ημ2x	0	3	0	–3	0

Με τη βοήθεια του πίνακα αυτού σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.