Άλγεβρα Β' Λυκείου

Μάθημα 8 - Μετατροπή rad σε μοίρες

Γνωστές γωνίες σε μοίρες και ακτίνια

Ας θυμηθούμε τί είναι ο αριθμός π

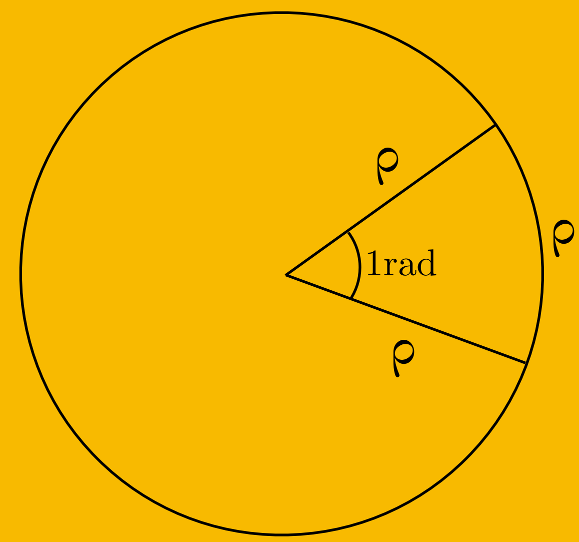
Παρατηρήθηκε ότι αν διαιρέσουμε την περιφέρεια ενός κύκλου με τη διάμετρό του, τότε αυτός ο λόγος είναι σταθερός (δηλαδή ισχύει σε οποιοδήποτε κύκλο) και ονομάστηκε π

$$\frac{\text{μήκος κύκλου}}{2\rho} = \pi$$

$$\text{μήκος κύκλου} = 2\pi\rho$$

Ακτίνιο:

Είναι μία μονάδα μέτρησης της γωνίας όπως και οι μοίρες. Αν σε ένα κύκλο πάρουμε ένα τόξο ίσο με την ακτίνα του, τότε σχηματίζεται γωνία ενός ακτινίου.



Ένας ολόκληρος κύκλος είναι 2π ακτίνια, άρα τα 2π ακτίνια αντιστοιχούν σε 360^o

άρα το 1 ακτίνιο αντιστοιχεί σε $\dfrac{360}{2\pi}$ μοίρες.

Οπότε τα α ακτίνια αντιστοιχούν σε $\dfrac{360}{2\pi}a$ μοίρες, δηλαδή

Τύπος αντιστοιχίας μοιρών - rad

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180}$$

Για να μη θυμάστε αυτόν τον τύπο, θα έχετε στο μυαλό σας ότι το π αντιστοιχεί σε 180 μοίρες

Γνωστές γωνίες σε μοίρες και ακτίνια

Κόλπο:

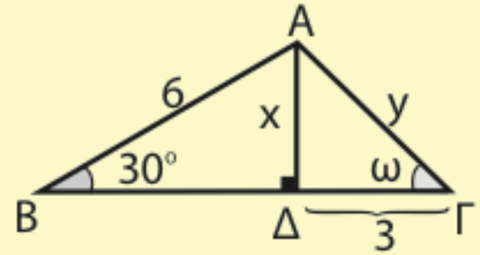
Αν στη θέση του αριθμού π βάλουμε το 180^o, τότε θα μπορέσουμε να μετατρέψουμε όλες τις γωνίες από μοίρες σε ακτίνια αλλά και ανάποδα.

Για παράδειγμα η γωνία 60^o είναι $\dfrac{\pi}{3}$ ακτίνια.

και ανάποδα, η γωνία $\dfrac{\pi}{9} = 20^o$

Γωνία ω		Τριγωνομετρικοί αριθμοί			
σε μοίρες	σε rad	ημω	συνω	εφω	σφω
0°	0	0	1	0	Δεν ορίζεται
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	Δεν ορίζεται	0

1. Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε τα μήκη x, y και τη γωνία ω .



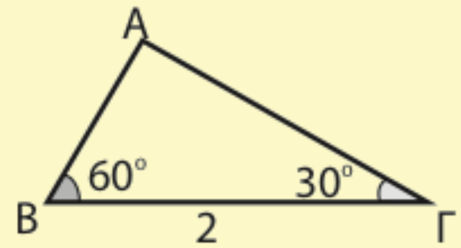
$$ημ30° = \frac{x}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{6} \Leftrightarrow x = 3$$

Αφού $x=3$ στο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε ότι :

$$y^2 = 3^2 + 3^2 = 18 \Leftrightarrow y = \sqrt{18}$$

$$εφω = \frac{x}{3} = \frac{3}{3} = 1 \quad \text{άρα} \quad ω = 45° \text{ ή } \frac{π}{4}$$

2. Να υπολογίσετε τις πλευρές του τριγώνου του διπλανού σχήματος.



Μιλάμε για ένα ορθογώνιο τρίγωνο αφού η γωνία $\hat{A} = 180^\circ - 60^\circ - 30^\circ$
$= 90^\circ$

Έχουμε $ημ30^\circ = \frac{AB}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{AB}{2} \Leftrightarrow AB = 1.$

επίσης $ημ60^\circ = \frac{AΓ}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AΓ}{2} \Leftrightarrow AΓ = \sqrt{3}$

4. Να εκφράσετε σε rad γωνία

i) 30° **ii)** 120° **iii)** 1260° **iv)** -1485°.

i) $30^\circ = 180^\circ \cdot \dfrac{\cancel{30^\circ}}{_6\cancel{180^\circ}} = \dfrac{180^\circ}{6}$ άρα σε rad είναι $\dfrac{\pi}{6}$ rad

ii) $120^\circ = 180^\circ \cdot \dfrac{\cancel{120^\circ}^{\,2}}{\cancel{180^\circ}_{3}} = 180^\circ \dfrac{2}{3}$ άρα σε rad είναι $\dfrac{2\pi}{3}$ rad.

iii)
$$\begin{array}{r|l} 1260^\circ & 360^\circ \\ \cline{2-2} -1080 & 3 \\ \cline{1-1} 180^\circ & \end{array}$$
$1260^\circ = 3 \cdot 360^\circ + 180^\circ$ άρα

σε ακτίνια είναι $3 \cdot 2\pi + \pi = 7\pi$ rad.

Όταν έχουμε μεγάλους αριθμούς, τότε τους διαιρούμε με 360 για να δούμε πόσους κύκλους κάνει αυτή η γωνία

iv)
$$\begin{array}{r|l} 1485^\circ & 360^\circ \\ \cline{2-2} -1440 & 4 \\ \cline{1-1} 45 & \end{array}$$
$1485^\circ = 4 \cdot 360^\circ + 45^\circ$ άρα

σε ακτίνια είναι $4 \cdot 2\pi + \dfrac{\pi}{4}$

$= 8\pi + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{33\pi}{4}$ επομένως η $-1485^\circ \to -\dfrac{33\pi}{4}$

5. Να μετατρέψετε σε μοίρες γωνία:

i) $\frac{\pi}{10}$ rad **ii)** $\frac{5\pi}{6}$ rad **iii)** $\frac{91\pi}{3}$ rad **iv)** 100rad

i) $\frac{\pi}{10} \longrightarrow \frac{180^\circ}{10} = 18^\circ$

ii) $\frac{5\pi}{6} \longrightarrow \frac{5 \cdot \cancel{180}^{30}}{\cancel{6}} = 150^\circ$

iii) $\frac{91\pi}{3} = \frac{90\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = 30\pi + \frac{\pi}{3} \longrightarrow 30 \cdot 180 + 60 = 5400 + 60 = 5460^\circ$

iv) $100 \text{ rad} = \frac{100\pi}{\pi} \longrightarrow \frac{18000^\circ}{\pi}$

6. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνίας

i) 1830° **ii)** 2940° **iii)** 1980° **iv)** 3600°.

i) $\begin{array}{r|l} 1830^\circ & 360^\circ \\ \hline 1800 & 5 \\ \hline 30 & \end{array}$

$1830^\circ = 5 \cdot 360^\circ + 30^\circ$ άρα οι τριγωνομετρικοί αριθμοί είναι ίδιοι με των 30°

$\eta\mu 1830^\circ = \eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$ $\quad \varepsilon\varphi 1830^\circ = \varepsilon\varphi 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\sigma\upsilon\nu 1830^\circ = \sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \sigma\varphi 1830^\circ = \sqrt{3}$

ii) $\begin{array}{r|l} 2940 & 360 \\ \hline 2880 & 8 \\ \hline 60 & \end{array}$

$2940^\circ = 8 \cdot 360^\circ + 60^\circ$

ίδιοι με των 60°

$\eta\mu 2940^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \sigma\upsilon\nu 2940^\circ = \frac{1}{2}$ $\quad \varepsilon\varphi 2940^\circ = \sqrt{3}$ $\quad \sigma\varphi 2940 = \frac{\sqrt{3}}{3}$

6. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνίας

i) 1830° **ii)** 2940° **iii)** 1980° **iv)** 3600°.

iii)

$$\begin{array}{r|l} 1980^\circ & 360^\circ \\ \cline{2-2} 1800 & 5 \\ \cline{1-1} 180 & \end{array}$$

$1980^\circ = 5 \cdot 360^\circ + 180^\circ$

$\eta\mu 180^\circ = 0 \quad \sigma\upsilon\nu 180^\circ = -1 \quad \varepsilon\varphi 180 = 0 \quad \sigma\varphi 180 =$ δεν ορίζεται.

iv) $3600^\circ = 10 \cdot 360^\circ + 0^\circ$

$\eta\mu 0^\circ = 0 \;,\; \sigma\upsilon\nu 0^\circ = 1 \;,\; \varepsilon\varphi 0^\circ = 0$

$\sigma\varphi 0^\circ =$ δεν ορίζεται

Ασκήσεις για το σπίτι

1) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών: 1125^o, 1860^o, $\frac{25\pi}{3}$, $\frac{61\pi}{6}$.

2) Να επαληθεύσετε τις ισότητες:

α) $συν60^o=συν^2 30^o - ημ^2 30^o$ β) $ημ60^o=2ημ30^o \cdot συν30^o$

3) Να δειχθεί ότι: $\frac{ημ45^o - ημ30^o}{συν45^o + συν60^o} = 3-2\sqrt{2}$.