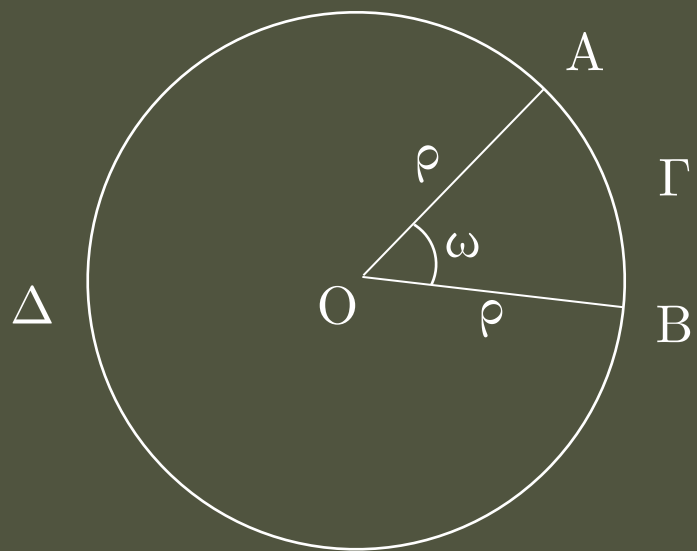
Μαθηματικά Β' Γυμνασίου

3.1 - Εγγεγραμμένες Γωνίες

Επίκεντρες γωνίες

Ας θυμηθούμε λίγο από την πρώτη γυμνασίου τις επίκεντρες γωνίες...



Η γωνία της οποίας η κορυφή συμπίπτει με το κέντρο του κύκλου λέγεται **επίκεντρη.**

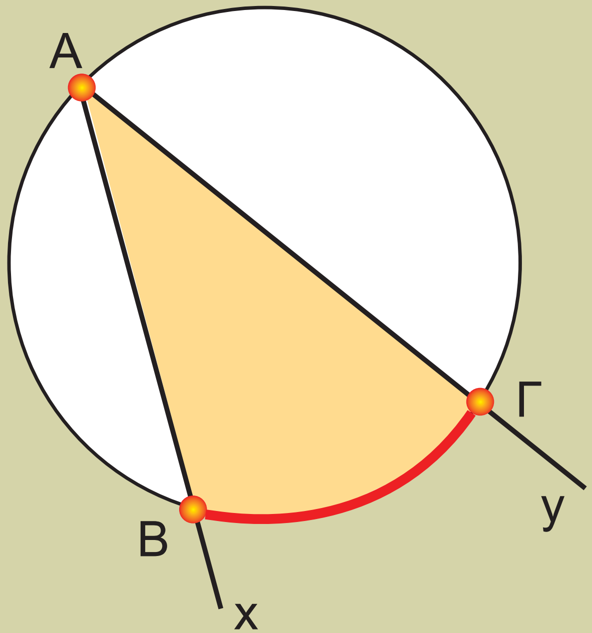
Εδώ η γωνία ω είναι επίκεντρη και **βαίνει** στο τόξο ΑΒ του κύκλου.

Το τόξο ΑΓΒ που βρίσκεται στο εσωτερικό της κυρτής γωνίας ω λέγεται **αντίστοιχο τόξο της επίκεντρης γωνίας ω.**

Το τόξο ΑΔΒ που βρίσκεται στο εσωτερικό μή κυρτής γωνίας ω λέγεται **αντίστοιχο μή κυρτής επίκεντρης γωνίας ω.**

Όταν λέμε **μέτρο ενός τόξου** θα εννοούμε το μέτρο της αντίστοιχης επίνετρης γωνίας. Δηλαδή πάντα τα τόξα θα τα μετράμε σε μοίρες.

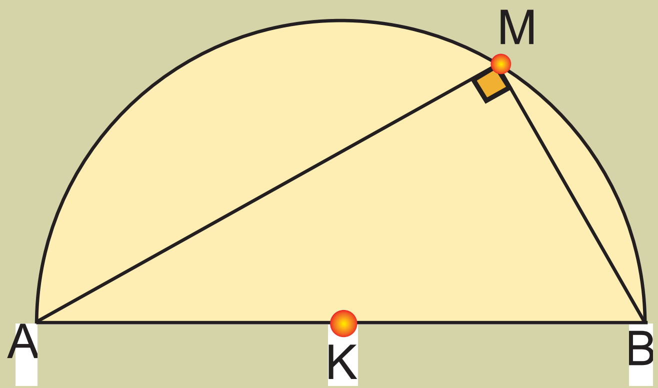
Εγγεγραμμένες γωνίες



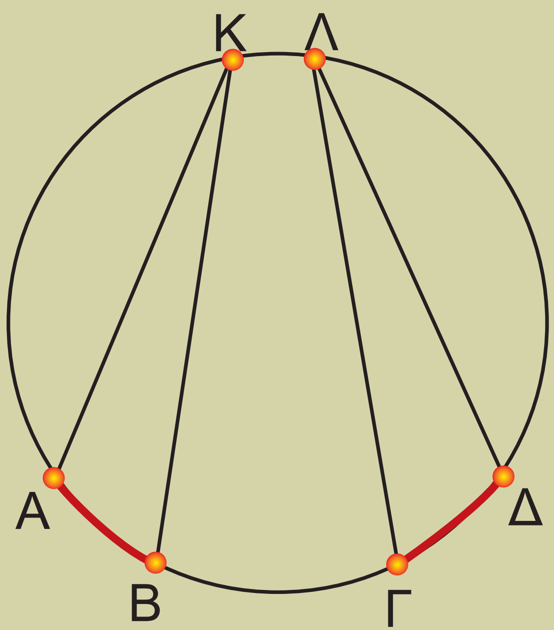
Μια γωνία **$x\hat{A}y$** που η κορυφή της **Α** ανήκει στον κύκλο (Ο, ρ) και οι πλευρές της Αx, Αy τέμνουν τον κύκλο, λέγεται **εγγεγραμμένη γωνία** στον κύκλο (Ο, ρ).

Το τόξο $\overset{\frown}{ΒΓ}$ του κύκλου (Ο, ρ) που περιέχεται στην εγγεγραμμένη γωνία λέγεται **αντίστοιχο τόξο** της.

Επίσης, λέμε ότι η εγγεγραμμένη γωνία $Β\hat{Α}Γ$ **βαίνει στο τόξο** $\overset{\frown}{ΒΓ}$.



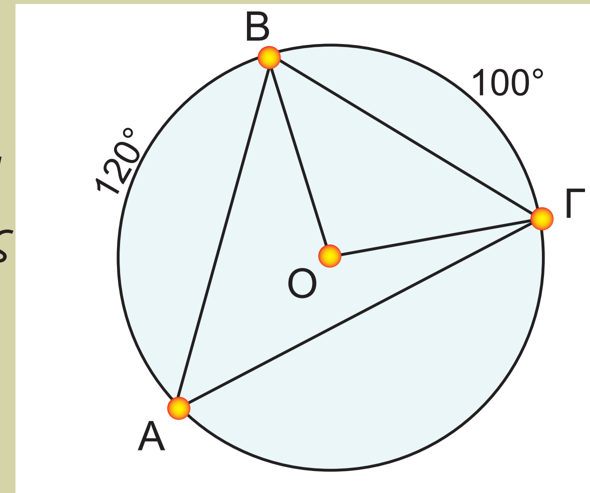
Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.



- Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της επίκεντρης που έχει ίσο αντίστοιχο τόξο.
- Οι εγγεγραμμένες γωνίες ενός κύκλου που βαίνουν στο ίδιο τόξο ή σε ίσα τόξα είναι μεταξύ τους ίσες.
- Κάθε εγγεγραμμένη γωνία έχει μέτρο ίσο με το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου της.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Σε ένα κύκλο (Ο, ρ) θεωρούμε τρία σημεία Α, Β, Γ, έτσι ώστε $\overset{\frown}{AB} = 120°$ και $\overset{\frown}{B\Gamma} = 100°$. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.



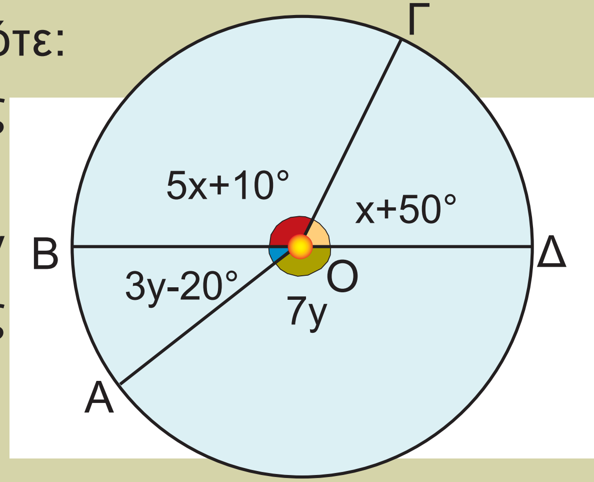
Λύση: Αφού $\overset{\frown}{B\Gamma} = 100°$, τότε η αντίστοιχη επίκεντρη γωνία $B\hat{O}\Gamma$ θα είναι και αυτή ίση με 100°. Επομένως, η γωνία $B\hat{A}\Gamma$ που είναι εγγεγραμμένη και βαίνει στο ίδιο τόξο $\overset{\frown}{B\Gamma}$ με την επίκεντρη $B\hat{O}\Gamma$ θα είναι: $B\hat{A}\Gamma = \dfrac{B\hat{O}\Gamma}{2} = 50°$. Ομοίως προκύπτει ότι: $B\hat{\Gamma}A = 60°$.

Επειδή το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ είναι 180°, θα ισχύει ότι:

$A\hat{B}\Gamma = 180° - 50° - 60° = 70°$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Στο παρακάτω σχήμα η ΒΔ είναι διάμετρος του κύκλου. Να υπολογίσετε τα διαδοχικά τόξα $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{B\Gamma}$, $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$, $\overset{\frown}{\Delta A}$.



Λύση: Τα διαδοχικά τόξα $\overset{\frown}{B\Gamma}$ και $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ σχηματίζουν ημικύκλιο, οπότε: $5x + 10° + x + 50° = 180°$ ή $6x = 120°$, επομένως $x = 20°$.

Ομοίως, τα διαδοχικά τόξα $\overset{\frown}{BA}$ και $\overset{\frown}{A\Delta}$ σχηματίζουν ημικύκλιο, οπότε: $3y - 20° + 7y = 180°$, επομένως $10y = 200°$ ή $y = 20°$.

Έχουμε ότι: $\overset{\frown}{AB} = 3y - 20° = 60° - 20° = 40°$,

$\overset{\frown}{B\Gamma} = 5 \cdot 20° + 10° = 110°$, $\overset{\frown}{\Gamma\Delta} = 20° + 50° = 70°$, $\overset{\frown}{\Delta A} = 7 \cdot 20° = 140°$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

Στο παρακάτω σχήμα η ΑΒ είναι διάμετρος του κύκλου και οι ΟΔ, ΟΕ είναι διχοτόμοι των γωνιών $B\hat{O}\Gamma$, $A\hat{O}\Gamma$ αντίστοιχα. Να υπολογιστεί το τόξο $\overset{\frown}{E\Delta}$.

Λύση: Αφού οι ΟΔ, ΟΕ είναι διχοτόμοι των γωνιών $B\hat{O}\Gamma$ και $A\hat{O}\Gamma$ αντίστοιχα, θεωρούμε ότι $B\hat{O}\Delta = \Delta\hat{O}\Gamma = \varphi$ και

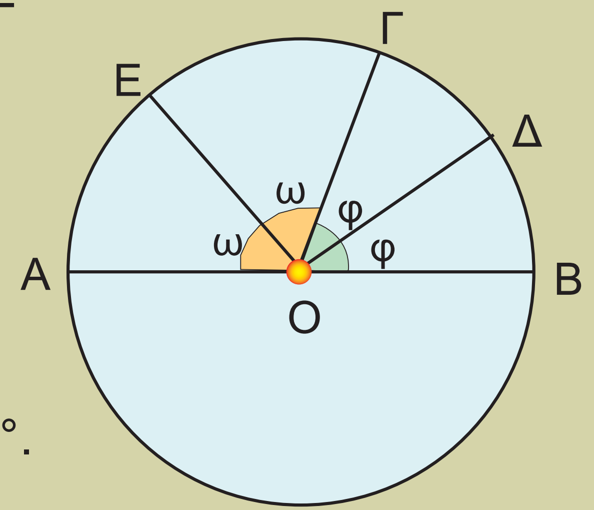
$A\hat{O}E = E\hat{O}\Gamma = \omega$.

Όμως, $\Delta\hat{O}E = \Delta\hat{O}\Gamma + E\hat{O}\Gamma = \varphi + \omega$.

Έχουμε $B\hat{O}\Gamma + \Gamma\hat{O}A = 180°$, δηλαδή $2\varphi + 2\omega = 180°$,

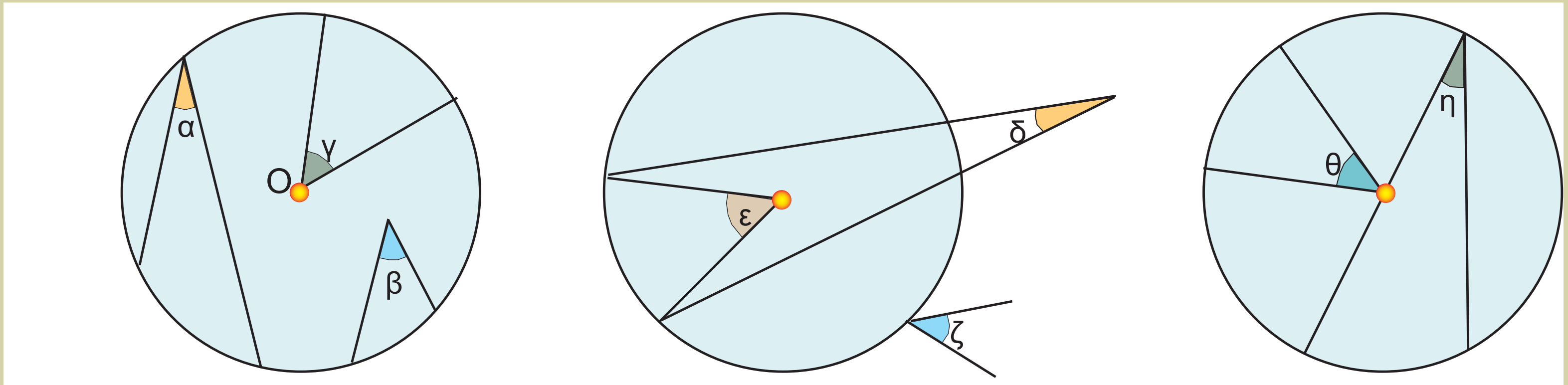
οπότε $\varphi + \omega = 90°$.

Άρα $\Delta\hat{O}E = 90°$ και το αντίστοιχο τόξο $\overset{\frown}{E\Delta}$ είναι ίσο με 90°.

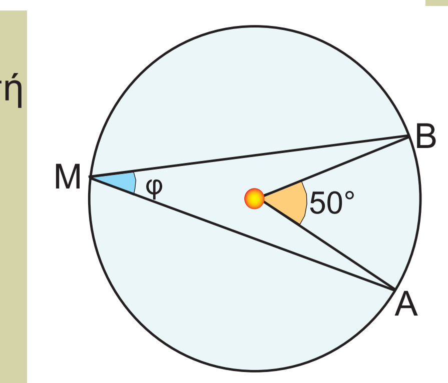


ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Στα παρακάτω σχήματα ποιες από τις γωνίες είναι εγγεγραμμένες και ποιες επίκεντρες;



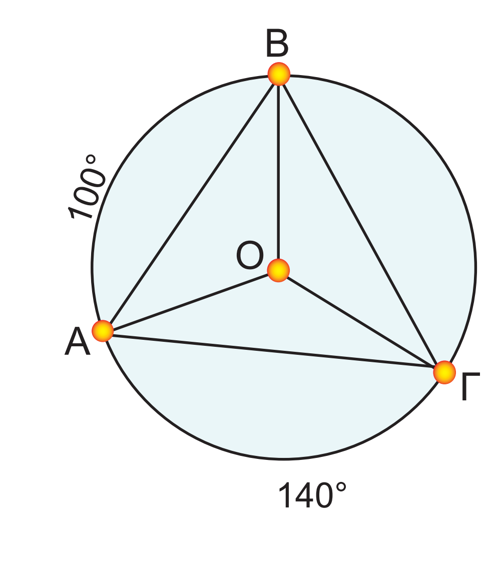
2. Στον παρακάτω πίνακα να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση.



		Α	Β	Γ
α)	Το μέτρο της γωνίας φ είναι:	50°	25°	100°
β)	Το μέτρο του τόξου $\overset{\frown}{AB}$ είναι:	50°	25°	100°

3. Στον παρακάτω πίνακα να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση.

		A	B	Γ
α)	Το μέτρο της γωνίας $B\widehat{A}\Gamma$ είναι:	60°	70°	50°
β)	Το μέτρο της γωνίας $A\widehat{O}\Gamma$ είναι:	120°	140°	100°
γ)	Το μέτρο της γωνίας $A\widehat{B}\Gamma$ είναι:	60°	70°	50°
δ)	Το μέτρο της γωνίας $A\widehat{\Gamma}B$ είναι:	60°	70°	50°



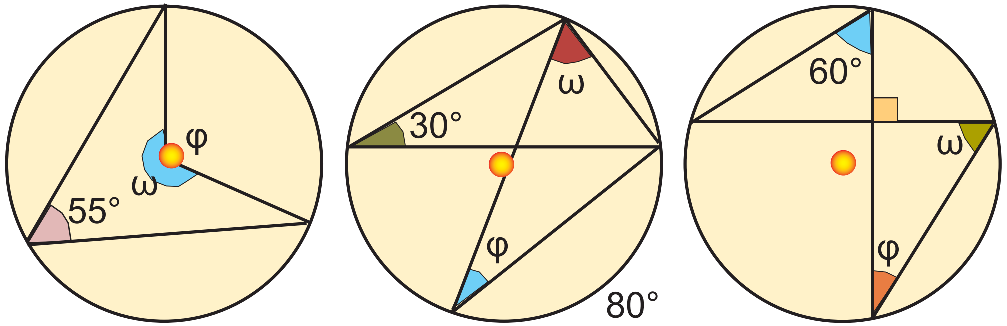
4. Αν σε κύκλο φέρουμε δύο κάθετες διαμέτρους, τότε τα τέσσερα ίσα τόξα είναι:
Α: 80° Β: 180° Γ: 90° Δ: 45°.
Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση.

5. Στον παρακάτω πίνακα να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση.

		Α	**Β**	**Γ**
α)	Το μέτρο μιας εγγεγραμμένης γωνίας που βαίνει σε ημικύκλιο είναι:	180°	60°	90°
β)	Αν σ' έναν κύκλο μια επίκεντρη γωνία είναι ίση με μια εγγεγραμμένη, τότε για τα αντίστοιχα τόξα ισχύει:	είναι ίσα	Το τόξο της επίκεντρης είναι διπλάσιο από το τόξο της εγγεγραμμένης	Το τόξο της επίκεντρης είναι ίσο με το μισό του τόξου της εγγεγραμμένης
γ)	Η άκρη του ωροδείκτη ενός ρολογιού σε 3 ώρες διαγράφει τόξο:	60°	90°	30°
δ)	Η άκρη του λεπτοδείκτη ενός ρολογιού σε 45 λεπτά διαγράφει τόξο:	45°	90°	270°

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να υπολογίσετε τις γωνίες φ και ω που υπάρχουν στα παρακάτω σχήματα.



- <u>Στον 1ο κύκλο:</u> Ισχύει ότι $\varphi = 2 \cdot 55^\circ = 110^\circ$ άρα $\omega = 360^\circ - \varphi$

$$\omega = 360^\circ - 110^\circ = 250^\circ$$

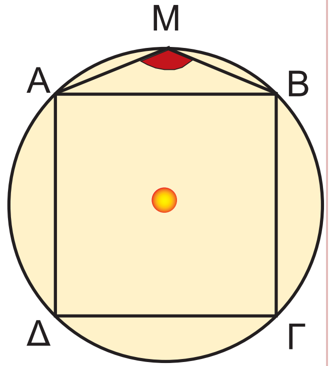
- <u>Στον 2ο κύκλο:</u> $\varphi = 30^\circ$ (εγγεγραμμένη που βαίνει στο ίδιο τόξο)

$\omega = 40^\circ$ (εγγεγραμμένη = μισή του τόξου στο οποίο βαίνει.)

- <u>Στον 3ο κύκλο:</u> $\omega = 60^\circ$ (εγγεγραμμένη που βαίνει στο ίδιο τόξο)

Ισχύει $\omega + \varphi = 90^\circ$ άρα $\varphi = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

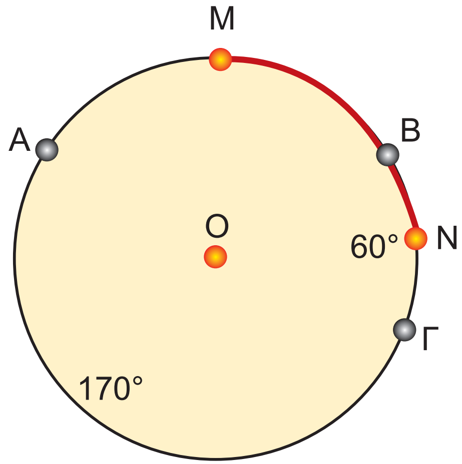
2 Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο και το Μ ένα σημείο του τόξου $\overset{\frown}{AB}$. Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{AMB}$.



Οι κορυφές του τετραγώνου χωρίζουν τον κύκλο σε 4 ίσα τόξα, τα οποία είναι 90° το καθένα (360° σύνολο). Άρα η $\widehat{AOB} = 90^\circ$. Οπότε η γωνία $\widehat{AMB}$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε τόξο 270°. Άρα είναι

$$\widehat{AMB} = 135^\circ$$

3 Έστω Μ και Ν τα μέσα των τόξων $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{B\Gamma}$ αντίστοιχα, ενός κύκλου κέντρου Ο και ακτίνας ρ. Αν $\overset{\frown}{B\Gamma} = 60°$ και $\overset{\frown}{A\Gamma} = 170°$, να βρείτε το μέτρο του τόξου $\overset{\frown}{MN}$.



Ισχύει ότι $\overset{\frown}{B\Gamma} + \overset{\frown}{A\Gamma} + \overset{\frown}{AB} = 360°$

$60° + 170° + \overset{\frown}{AB} = 360°$

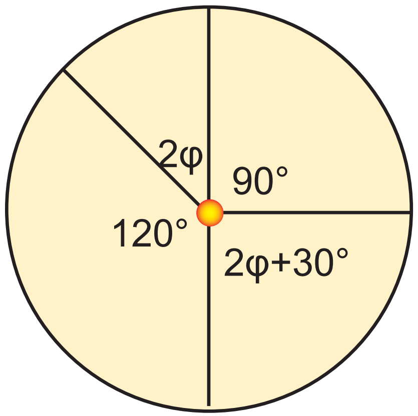
Άρα $\overset{\frown}{AB} = 130°$ Άρα

$\overset{\frown}{MB} = 65°$ ενώ $\overset{\frown}{BN} = 30°$

οπότε $\overset{\frown}{MN} = \overset{\frown}{MB} + \overset{\frown}{BN} = 95°$

άρα το μέσον του $\overset{\frown}{MN}$ είναι ένα σημείο του κύκλου που απέχει απο το Μ $47,5°$

4 Να υπολογίσετε τη γωνία φ στο παρακάτω σχήμα.



Όλος ο κύκλος είναι 360° άρα προσθέτουμε τα τόξα:

$$2\varphi + 90^\circ + 2\varphi + 30^\circ + 120^\circ = 360^\circ$$

χωρίζουμε γνωστούς - αγνώστους

$$2\varphi + 2\varphi = 360^\circ - 120^\circ - 30^\circ - 90^\circ$$

αναγωγή ομοίων όρων

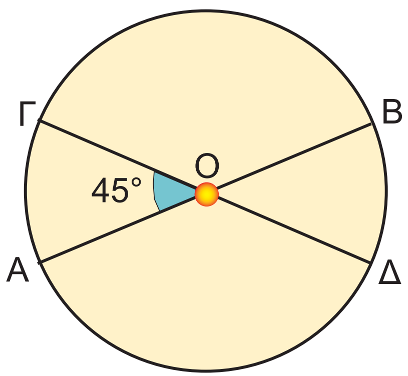
$$4\varphi = 120$$

διαιρώ με το συντελεστή του αγνώστου

$$\frac{\cancel{4}\varphi}{\cancel{4}} = \frac{120}{4}$$

οπότε $\varphi = 30^\circ$

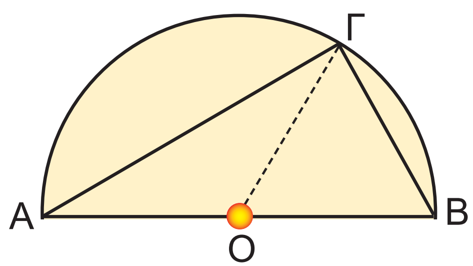
5 Στον κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας ρ του παρακάτω σχήματος να υπολογίσετε τα τόξα $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{\Delta B}$, $\overset{\frown}{B\Gamma}$, $\overset{\frown}{\Gamma A}$, αν γνωρίζουμε ότι $A\hat{O}\Gamma = 45°$ και ότι οι ΑΒ, ΓΔ είναι διάμετροι του κύκλου.



Οι γωνίες $A\hat{O}\Gamma$ και $B\hat{O}\Delta$ είναι ίσες γιατί είναι κατακορυφήν. Άρα $\overset{\frown}{B\Delta} = 45°$.

Όμως $\overset{\frown}{B\Gamma} = 180° - 45° = 135°$

6 Σε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ = 6 cm δίνεται σημείο του Γ, έτσι ώστε $\overset{\frown}{ΑΓ} = 2\overset{\frown}{ΒΓ}$. Να υπολογίσετε τις πλευρές και τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.



Η γωνία $\hat{Γ} = 90^\circ$ (βαίνει σε ημικύκλιο)

$Γ\hat{O}B + Γ\hat{O}A = 180^\circ$ και επειδή $\overset{\frown}{AΓ} = 2\overset{\frown}{BΓ}$

$Γ\hat{O}A = 2Γ\hat{O}B$ άρα $3Γ\hat{O}B = 180^\circ$, $Γ\hat{O}B = 60^\circ$

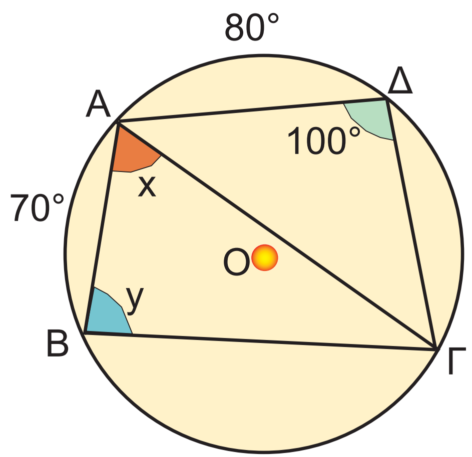
άρα $\overset{\frown}{AΓ} = 120^\circ$ οπότε $\hat{B} = 60^\circ$ άρα $\overset{\triangle}{OΓB}$

ισοσκελές άρα $BΓ = OB = \frac{AB}{2} = 3\,cm$.

$AB^2 = AΓ^2 + BΓ^2$, $6^2 = AΓ^2 + 3^2$, $36 = AΓ^2 + 9$ $AΓ^2 = 27$

άρα $AΓ = \sqrt{27} = \sqrt{3 \cdot 9} = 3\sqrt{3}$.

7 Να υπολογίσετε τις γωνίες x, y στο παρακάτω σχήμα.



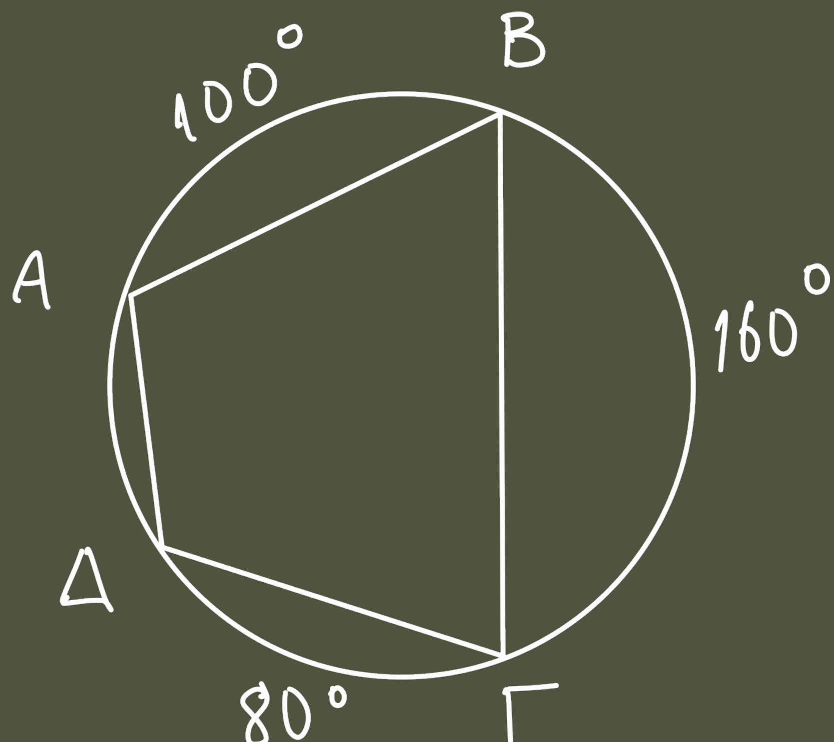
$\hat{\Delta} = 100^\circ$ άρα $\overset{\frown}{ΑΓ} = 200^\circ$ οπότε $\overset{\frown}{ΒΓ} = 130^\circ$.

οπότε $\hat{x} = \dfrac{130^\circ}{2} = 65^\circ$.

$\overset{\frown}{ΓΔ} = 360^\circ - 80^\circ - 70^\circ - 130^\circ = 80^\circ$ άρα $\hat{y} = \dfrac{80^\circ + 80^\circ}{2}$

$y = 80^\circ$

8 Σ' έναν κύκλο θεωρούμε τρία διαδοχικά τόξα $\overset{\frown}{AB} = 100°$, $\overset{\frown}{B\Gamma} = 160°$ και $\overset{\frown}{\Gamma\Delta} = 80°$. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετράπλευρου ΑΒΓΔ.



$\overset{\frown}{A\Delta} = 360° - 100° - 160° - 80° = 20°$

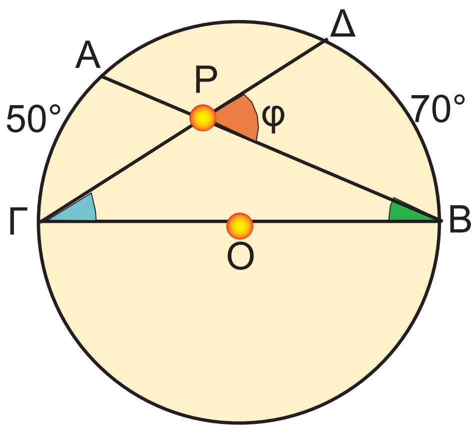
$\overset{\frown}{\Delta\Gamma B} = 80° + 160° = 240°$ άρα $\hat{A} = 120°$

$\overset{\frown}{A\Delta\Gamma} = 80° + 20° = 100°$ άρα $\hat{B} = 50°$

$\overset{\frown}{\Delta AB} = 20° + 100° = 120°$ άρα $\hat{\Gamma} = 60°$

$\overset{\frown}{AB\Gamma} = 100° + 160° = 260°$ άρα $\hat{\Delta} = 130°$

9 Στον κύκλο κέντρου Ο οι χορδές ΑΒ και ΓΔ τέμνονται στο Ρ. Αν $\overset{\frown}{\text{ΑΓ}} = 50°$ και $\overset{\frown}{\text{ΒΔ}} = 70°$, να υπολογίσετε τη γωνία φ.



$\hat{\Gamma} = \dfrac{70^\circ}{2} = 35^\circ$, $\hat{B} = \dfrac{50^\circ}{2} = 25^\circ$

άρα η $\widehat{\Gamma P B} = 180^\circ - \hat{\Gamma} - \hat{B}$

$= 180^\circ - 35^\circ - 25^\circ$

$= 120^\circ$

άρα $\boxed{\hat{\varphi} = 60^\circ}$