

Μαθηματικά Β' Γυμνασίου

3.1 - Η έννοια της συνάρτησης

Κατά καιρούς ακούμε στην τηλεόραση για τις αυξήσεις στους μισθούς των εργαζομένων. Αυτή τη χρονιά ανακοινώθηκε αύξηση 3%.

- α) Δύο εργαζόμενοι έχουν μισθούς 800 € και 1100 € τον μήνα.
Πόση είναι η αύξηση που θα πάρει ο καθένας;
- β) Ένας εργαζόμενος έχει μισθό x €. Ποια είναι η αύξηση y που θα πάρει εφέτος;

Λύση

- α) Η αύξηση θα είναι:

$$\text{για τον πρώτο εργαζόμενο: } \frac{3}{100} \cdot 800 = 3 \cdot 8 = 24 \text{ €,}$$

$$\text{για τον δεύτερο εργαζόμενο: } \frac{3}{100} \cdot 1100 = 3 \cdot 11 = 33 \text{ €.}$$

β) Η αύξηση θα είναι: $\frac{3}{100} \cdot x = 0,03x$ δηλαδή $y = 0,03x$.

Με τη σχέση αυτή κάθε τιμή της μεταβλητής x (παλιός μισθός), αντιστοιχίζεται σε μία μόνο τιμή της μεταβλητής y (αύξηση). Μια τέτοια σχέση στα Μαθηματικά λέγεται **συνάρτηση**.

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι «η μεταβλητή y εκφράζεται ως συνάρτηση της μεταβλητής x ». Έτσι, μπορούμε να λέμε απλά ότι έχουμε ορίσει τη συνάρτηση $y = 0,03x$.

Πίνακας Τιμών

Η αντιστοιχία μεταξύ των τιμών των μεταβλητών x και y φαίνεται καλύτερα με τη βοήθεια του πίνακα τιμών. Έτσι, για τη συνάρτηση $y = 0,03x$ έχουμε:

$$\text{Για } x = 700, \quad y = 0,03 \cdot 700 = 21.$$

$$\text{Για } x = 800, \quad y = 0,03 \cdot 800 = 24.$$

$$\text{Για } x = 900, \quad y = 0,03 \cdot 900 = 27.$$

$$\text{Για } x = 1000, \quad y = 0,03 \cdot 1000 = 30.$$

$$\text{Για } x = 1100, \quad y = 0,03 \cdot 1100 = 33.$$

Τα ζεύγη των τιμών αυτών παρουσιάζονται στον διπλανό πίνακα, ο οποίος λέγεται **πίνακας τιμών** της συνάρτησης $y = 0,03x$.

x	700	800	900	1000	1100
y	21	24	27	30	33

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

Δίνεται η συνάρτηση $y = 2x + 3$. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	-2	-1	0	1	2
y					

Λύση: Για $x = -2$: $y = 2 \cdot (-2) + 3 = -4 + 3 = -1$.

Για $x = -1$: $y = 2 \cdot (-1) + 3 = -2 + 3 = 1$.

Για $x = 0$: $y = 2 \cdot 0 + 3 = 3$.

Για $x = 1$: $y = 2 \cdot 1 + 3 = 2 + 3 = 5$.

Για $x = 2$: $y = 2 \cdot 2 + 3 = 4 + 3 = 7$.

Άρα, ο πίνακας τιμών είναι:

x	-2	-1	0	1	2
y	-1	1	3	5	7

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

5.

Να αντιστοιχίσετε τις συναρτήσεις της στήλης Α του διπλανού πίνακα με τον πίνακα τιμών της στήλης Β.

(Στη στήλη Β ένας πίνακας τιμών περισσεύει.)

ΣΤΗΛΗ Α					
(α) $y = 2x + 1$					
(β) $y = x^2 + 1$					
(γ) $y = 1 - x$					

ΣΤΗΛΗ Β					
x	-3	-1	0	1	2
y	10	2	1	2	5
i)					
x	-3	-1	0	1	2
y	-5	-1	1	3	5
ii)					
x	-3	-1	0	1	2
y	4	2	1	0	-1
iii)					
x	-3	-1	0	1	2
y	4	2	1	0	2
iv)					

1

Να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\alpha) \quad y = 3x - 2$$

x	-3	-2	-1	0	2
y	-11	-8	-5	-2	4

x	-1	0	2	4	5
y	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2

$$\beta) \quad y = \frac{x-1}{2}$$

x	-1	0	2	4	5
y	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2

x	-1	0	2	4	5
y	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2

$$\alpha) \quad y = 3 \cdot (-3) - 2 = -9 - 2 = -11$$

$$y = 3 \cdot (-2) - 2 = -6 - 2 = -8$$

$$y = 3 \cdot (-1) - 2 = -3 - 2 = -5$$

$$y = 3 \cdot 0 - 2 = -2$$

$$y = 3 \cdot 2 - 2 = 6 - 2 = 4$$

$$(\beta) \quad y = \frac{-1-1}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$y = \frac{0-1}{2} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$y = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{4-1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$y = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

2

Να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\alpha) y = x^2 + 1$$

x	-3	-1	0	2	5
y					

$$\beta) y = x^2 + 3x - 2$$

x	-3	-2	0	1	3
y					

$$\alpha) \quad y = (-3)^2 + 1 = 9 + 1 = 10$$

$$y = (-1)^2 + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$y = (0)^2 + 1 = 1$$

$$y = (2)^2 + 1 = 4 + 1 = 5$$

$$y = (5)^2 + 1 = 25 + 1 = 26$$

$$\beta) \quad y = (-3)^2 + 3(-3) - 2 = 9 - 9 - 2 = -2$$

$$y = (-2)^2 + 3(-2) - 2 = 4 - 6 - 2 = -4$$

$$y = 0^2 + 3 \cdot 0 - 2 = -2$$

$$y = 1^2 + 3 \cdot 1 - 2 = 1 + 3 - 2 = 2$$

$$y = 3^2 + 3 \cdot 3 - 2 = 9 + 9 - 2 = 16$$

7

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης $y = 3x - 5$:

x	2	4	-3	1
y	1	7	-14	-2

$$\cdot \quad y = 3 \cdot 2 - 5 = 6 - 5 = 1$$

$$\cdot \quad 7 = 3x - 5 \quad \text{οπότε} \quad -3x = -5 - 7 \quad \text{αριθμητικά}$$

$$-3x = -12 \quad \frac{-3x}{-3} = \frac{-12}{-3} \quad x = 4$$

$$\cdot \quad y = 3 \cdot (-3) - 5 = -9 - 5 = -14$$

$$\cdot \quad -2 = 3 \cdot x - 5 \quad \text{οπότε} \quad -3x = 2 - 5 \quad \text{αριθμητικά} \quad -3x = -3$$

$$\frac{-3x}{-3} = \frac{-3}{-3}, \quad x = 1$$

Ασκήσεις:

1) Στις παρακάτω συναρτήσεις να συμπληρώσετε τον αντίστοιχο πίνακα τιμών:

α) $y=|x|$

x	-2	-1	0	1	2
y					

β) $y=2^x$

x	-2	-1	0	1	2
y					

γ) $y=\sqrt{x}$

x	0	1	2	4	9
y					

δ) $y=\frac{12}{x}$

x	-2	-1	0	1	2	3	4	6	12
y									

ε) $y=x^2-5x+6$

x	0	1	2	3	4
y					

2) Δίνεται η σχέση $y^2=4x$. Να συμπληρώσετε τον πίνακα:
Είναι συνάρτηση;

x	0	1	4
y			

3) Δίνεται η συνάρτηση $y=3x-3$. Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

x	0		2	
y		-1		7

4) Οι βαθμοί Κελσίου συνδέονται με τους βαθμούς Φαρενάιτ με την σχέση $F=1,8C+32$. Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

C	0	10	20	100
F				

Πώς κατασκευάζουμε μία συνάρτηση

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Ένας ελαιοπαραγωγός έχει υπολογίσει ότι από κάθε κιλό ελιάς που πηγαίνει στο ελαιοτρίβειο, παίρνει 0,2 κιλά λάδι.

- α) Πόσα κιλά λάδι θα πάρει από παραγωγή 500 κιλών ελιών;
- β) Να εκφράσετε την ποσότητα γ σε κιλά του λαδιού, που θα πάρει, ως συνάρτηση της ποσότητας x των ελιών που παράγει.
- γ) Πόσα κιλά ελιές πρέπει να παράγει, ώστε να πάρει 250 κιλά λάδι;



- Λύση:**
- α) Αφού από 1 κιλό ελιές παίρνει 0,2 κιλά λάδι, από 500 κιλά ελιές θα πάρει $0,2 \cdot 500 = 100$ κιλά λάδι.
 - β) Από x κιλά ελιές θα πάρει $0,2x$ κιλά λάδι. Δηλαδή $y = 0,2x$.
 - γ) Από τη συνάρτηση $y = 0,2x$, για $y = 250$ κιλά λάδι έχουμε: $250 = 0,2x$
 $\therefore x = \frac{250}{0,2} = 1250$. Άρα, θα πρέπει να παράγει 1250 κιλά ελιές.



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Οι μισθοί των υπαλλήλων μιας εταιρείας αυξάνονται κατά 20 € ο καθένας. Η σχέση που εκφράζει τον νέο μισθό για ως συνάρτηση του παλιού μισθού x , είναι:
- a) $y = 20x$ β) $y = x + 20$ γ) $y = \frac{x}{20}$ δ) $y = 0,2x$
2. Οι μισθοί των υπαλλήλων μιας εταιρείας αυξάνονται κατά 15%. Η σχέση που εκφράζει τον νέο μισθό για ως συνάρτηση του παλιού μισθού x , είναι:
- a) $y = x + \frac{15}{100}$ β) $y = x + 15$ γ) $y = 1,15x$ δ) $y = 0,15x$
3. Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με πλευρές x και y είναι 100 cm^2 . Η σχέση που εκφράζει το μήκος του για ως συνάρτηση του x , είναι:
- a) $y = 100x$ β) $y = 100 + x$ γ) $y = \frac{100}{x}$ δ) $y = 100 - x$

4.

Δίνεται τετράγωνο πλευράς x . Η σχέση που εκφράζει το εμβαδόν E του τετραγώνου ως συνάρτηση του x είναι:

a) $E = 2x$

β) $E = x^2$

γ) $E = \sqrt{2x^2}$

δ) $E = 4x$

3

Οι τιμές ενός καταστήματος ηλεκτρονικών επιβαρύνονται με φόρο 8%. Να εκφράσετε τις τιμές για με φόρο, ως συνάρτηση των τιμών χωρίς φόρο.

Όλες οι τιμές επιβαρύνονται με 8% φόρο. Άρα ων ένα

προϊόν κόστη x πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε την

το φόρο που έχει $\frac{8}{100}x$. Όποτε η τελική τιμή

του προϊόντος έχει η αρχική τιμή συν το φόρο

$$\text{Άρα } y = x + \frac{8}{100}x = x \left(1 + \frac{8}{100} \right) = x \left(\frac{100+8}{100} \right) = x \cdot \frac{108}{100} = 1,08 \cdot x$$


Επιμεριστική
διότηλα

4

Ένας πωλητής παίρνει μισθό 600 € τον μήνα και ποσοστό 7% επί του ποσού των πωλήσεων που πραγματοποιεί. Να εκφράσετε το συνολικό ποσό y , που κερδίζει τον μήνα, ως συνάρτηση του ποσού x των πωλήσεων που πραγματοποιεί.

Στις x το απόστρων πωλήσεων που πραγματοποιεί. Το 7% του x το πληρώνεται επιπλέον του μισθού του που έιναι 600€. Άρα το συνολικό ποσό για που κερδίζει το μήνα έιναι

$$\text{έιναι } y = 600 + \frac{7}{100}x \quad \text{ή}$$

$$y = 600 + 0,07x$$

5

Ένα ορθογώνιο έχει πλευρές με μήκη x και y (σε cm).

- a) Αν η περίμετρος του ορθογωνίου είναι 60 cm, να εκφράσετε την πλευρά y ως συνάρτηση της πλευράς x .
- b) Αν το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι 100 cm², να εκφράσετε την πλευρά y ως συνάρτηση της πλευράς x .

 x y

a) Η περίμετρος του ορθογωνίου έναι $2x+2y$ και είναι ίση με 60 cm. Άρα

Ισχύει ότι $2x+2y = 60$ ή $x+y = 30$ οπότε $y = 30-x$

διαιρούμε διά 2
και τα δύο μέδια.

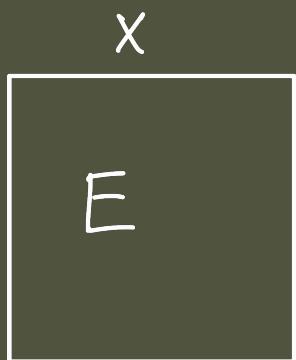
b) Το εμβαδό του ορθογωνίου είναι $x \cdot y$ και είναι ίσο με 100 cm². Άρα

Ισχύει ότι $x \cdot y = 100$ ή $y = \frac{100}{x}$

6

Ένα τετράγωνο έχει πλευρά με μήκος x (σε cm). Να εκφράσετε το εμβαδόν E και την περίμετρο Π του τετραγώνου ως συναρτήσεις του x . Στη συνέχεια, να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών:

x	1	2	2,5	5	0,3
E	1	2	25/4		
Π	4				



$$E = x^2 \quad \text{ή} \quad E(x) = x^2$$

$$\Pi = 4x \quad \text{ή} \quad \Pi(x) = 4x$$