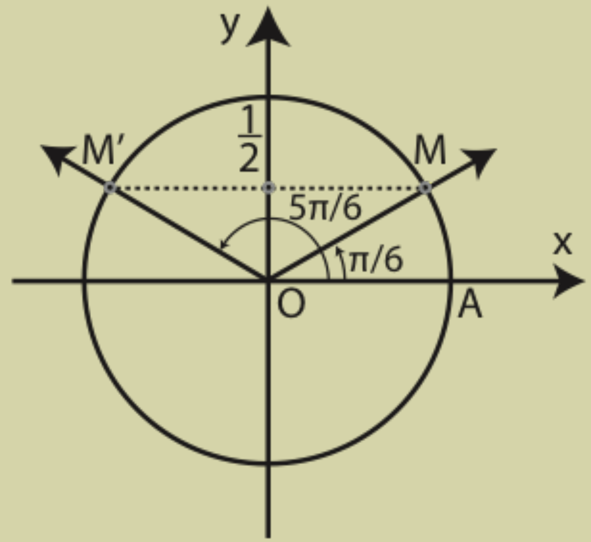
Άλγεβρα Β’ Λυκείου

Τριγωνομετρικές Εξισώσεις Ι

Η εξίσωση ημx=α



Έστω ότι θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση $\eta\mu x = \frac{1}{2}$.

Με τη βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου βρίσκουμε ότι οι λύσεις της εξίσωσης $\eta\mu x = \frac{1}{2}$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$, είναι οι $\frac{\pi}{6}$ και $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$, γιατί

$$\eta\mu\frac{\pi}{6} = \eta\mu\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

Επομένως το σύνολο των λύσεων της εξίσωσης $\eta\mu x = \frac{1}{2}$ δίνεται από τους τύπους

$$\begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \\ \quad\text{ή} \\ x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

Γενικότερα, αν θ είναι μία λύση της εξίσωσης $\eta\mu x = \alpha$, αν δηλαδή ισχύει $\eta\mu\theta = \alpha$, τότε οι λύσεις της εξίσωσης δίνονται από τους τύπους:

$$\begin{matrix} x = 2\kappa\pi + \theta \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi + (\pi - \theta) \end{matrix}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

Μεθοδολογία:

Για να λύσουμε εξισώσεις της μορφής ημ$x = a$

i. Βρίσκουμε ποιας γωνίας το ημίτονο είναι a

ii. Γράφουμε τη σχέση ημ$x =$ ημθ όπου θ είναι η γωνία που βρήκαμε πριν.

iii. Αντικαθιστούμε σύμφωνα με τους τύπους:

$$x = 2k\pi + \theta$$

ή $\qquad k \in \mathbb{Z}$

$$x = 2k\pi + (\pi - \theta)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1ο Να λυθεί η εξίσωση $\eta\mu x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

ΛΥΣΗ

Επειδή $\eta\mu\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ισχύει $\eta\mu\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Επομένως η εξίσωση γράφεται

$\eta\mu x = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{3}\right)$, οπότε οι λύσεις της δίνονται από τους τύπους:

$$\begin{cases} x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{3} \\ \quad ή \\ x = 2\kappa\pi + \pi + \frac{\pi}{3} \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

2^{o} Να λυθεί η εξίσωση $\eta\mu\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$

ΛΥΣΗ

Επειδή $\eta\mu\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$, έχουμε $\eta\mu\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\eta\mu\frac{\pi}{6}$, οπότε
$$\begin{cases} 2x+\frac{\pi}{4}=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6} \\ \text{ή} \\ 2x+\frac{\pi}{4}=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{6} \end{cases}, \quad \kappa\in\mathbb{Z}$$

Ισχύει όμως

$$2x+\frac{\pi}{4}=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow 2x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow x=\kappa\pi-\frac{\pi}{24}$$

και

$$2x+\frac{\pi}{4}=2\kappa\pi+\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow 2x=2\kappa\pi+\pi-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow x=\kappa\pi+\frac{7\pi}{24}$$

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης δίνονται από τους τύπους
$$\begin{cases} x=\kappa\pi-\frac{\pi}{24} \\ \text{ή} \\ x=\kappa\pi+\frac{7\pi}{24} \end{cases}, \quad \kappa\in\mathbb{Z}$$

Να λύσετε τις παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις:

i) $ημx = 0$

ii) $ημx = 1$

iii) $ημx = -1$

iv) $ημx = \frac{1}{2}$

v) $ημx = \frac{\sqrt{3}}{2}$

vi) $ημx = \frac{\sqrt{2}}{2}$

vii) $ημx = -\frac{1}{2}$

viii) $ημx = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

ix) $ημx = -\frac{\sqrt{3}}{2}$