

Trabajo Práctico 3

Métodos Numéricos

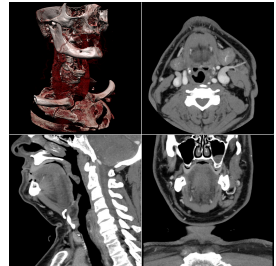
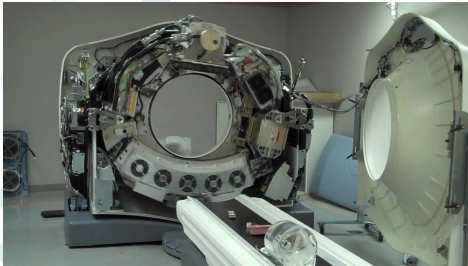
Departamento de Computación, FCEyN, Universidad de Buenos Aires

8 de junio de 2018



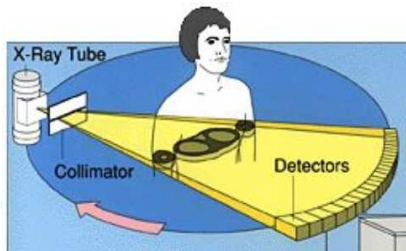
Modelemos un problema usando CML

- ▶ La **tomografía computada (TC)** es una tecnología que utiliza rayos X para producir una imagen de un corte o sección del objeto de estudio.
- ▶ Nos permite “ver” lo que hay adentro.



¿Cómo funciona?

El aparato de TC emite múltiples haces de rayos X que inciden sobre el objeto a estudiar. Distintos tejidos absorben los rayos de distintas maneras: vamos a medir cuánto tarda en llegar cada rayo al otro lado ¹.



¹Esto es una simplificación. En realidad se mide la intensidad de los rayos.

¿Cómo lo modelamos con CML?

Vamos a simular lo anterior tratando de reconstruir una TC de un corte de cráneo. Se emiten m rayos desde distintos ángulos.

Para reconstruir la TC discretizamos el espacio con una grilla de $n \times n$ y nuestro objetivo va a ser averiguar cuánto tiempo le toma a un rayo atravesar cada posición.

Definimos algunos nombres:

- ▶ t_k al tiempo total que toma al rayo k atravesar al sujeto.
- ▶ d_{ij}^k es la distancia que recorre el k -ésimo rayo (que va a ser 0 si la celda i, j no es atravezada)
- ▶ v_{ij} al tiempo que toma atravesar la posición i, j (nuestras incógnitas).

Relacionamos las variables:

$$t_k = \sum_{i,j} d_{ij}^k v_{ij}^{-1}$$

Nuestro modelo

Usando las variables definidas anteriormente, nuestro sistema a resolver queda definido de la siguiente manera:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} d_{11}^1 & d_{12}^1 & \cdots & d_{21}^1 & \cdots & d_{nn}^1 \\ d_{11}^2 & d_{12}^2 & \cdots & d_{21}^2 & \cdots & d_{nn}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{11}^m & d_{12}^m & \cdots & d_{21}^m & \cdots & d_{nn}^m \end{bmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} v'_{11} \\ \vdots \\ v'_{nn} \end{bmatrix}}_x \approx \underbrace{\begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_m \end{bmatrix}}_b$$

Una vez que sepamos los valores v'_{ij} podemos reconstruir nuestra imagen. Notar que v'_{ij} es la inversa de los valores que estaremos encontrando.

Experimentando con el tomógrafo...

Algunas posibles preguntas para experimentar:

- ▶ ¿Qué tamaño debe tener una buena discretización?
- ▶ ¿Cuántos rayos necesito emitir para que la aproximación sea buena?