1.2.3 Der Doppelspaltversuch von JÖNSSON

1960 Claus JÖNSSON (GER, * 1930):

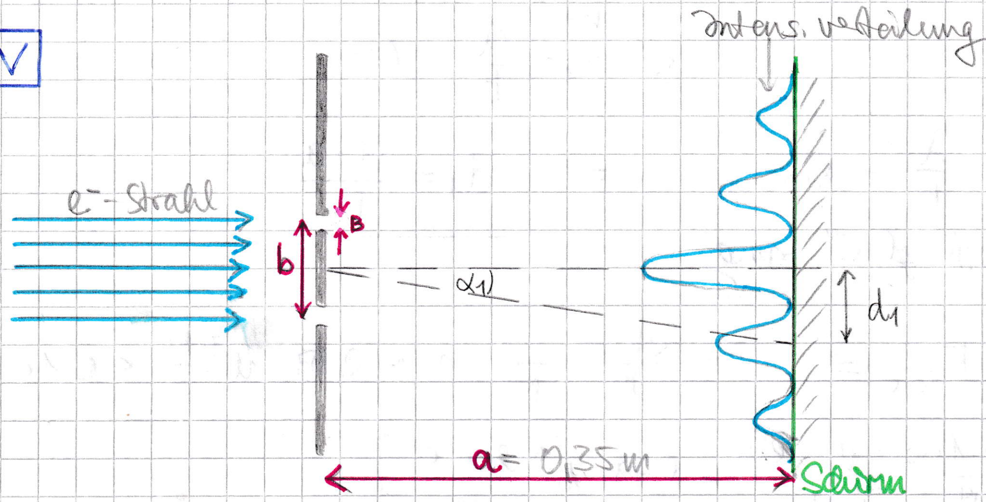
Bestätigung von de Broglie durch

Elektroneninterferenzen an einem Doppelspalt:

$E_{Länge} = 50\ keV \Longrightarrow \lambda = 5{,}4\ pm$

↑ relativist. Rechnung (vgl. Kopie)

$\boxed{V}$



Beugungsbild: (vgl. Buch S. 22):
Muster von parallelen hellen Streifen mit gleichem Abstand

technische Schwierigkeiten:

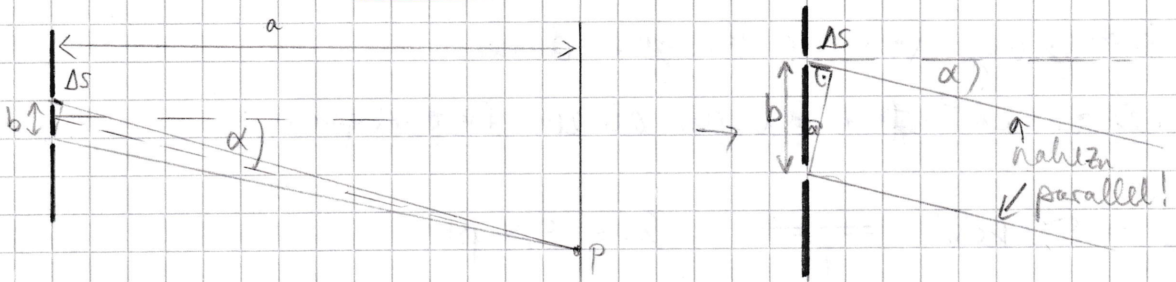
- Herstellung eines geeigneten Doppelspalts mit $b \approx 2{,}0\ \mu m$!
  ($B \approx 0{,}5\ \mu m$ als Spaltbreite)
- Die Interferenzfigur muss ca 1000-fach nachvergrößert werden

Anwendung: Elektronenmikroskop → vgl. Buch S. 21
(Ernst RUSKA; GER; 1906 – 1988, NP 1986)

klassisch erwartet: breites Gesamtmaximum in der Mitte hinter dem Doppelspalt ohne weitere Struktur

Beispielrechnung (näherungsweise nichtrelativistisch) mit

$b = 2{,}0 \cdot 10^{-6}\,m$, $U = 2{,}5\,kV \Rightarrow E_{kin} = 2{,}5\,keV$, $a = 0{,}35\,m$



$$\frac{\Delta s}{b} = \sin\alpha \Rightarrow b \cdot \sin\alpha = k \cdot \lambda \overset{!}{\underset{k=1}{=}} 1 \cdot \lambda$$

$a \gg b$

$$\Rightarrow \sin\alpha_1 = \frac{\lambda}{b} \quad (1)$$

$$\tan\alpha_1 = \frac{d_1}{a} \approx \frac{\lambda}{b} = \sin\alpha_1 \Rightarrow \underline{d_1 = \frac{\lambda \cdot a}{b}}$$

Kleinwinkelnäherung

$$E_{kin} = 2{,}5\,keV \overset{!}{=} \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow v^2 = \frac{2 \cdot E_{kin}}{m} \underset{NR}{\rightarrow} v \approx 2{,}97 \cdot 10^7 \frac{m}{s} < 0{,}1c!$$

$$\left[\overset{NR}{v^2} = \frac{2 \cdot 2{,}5 \cdot 10^3 \cdot 1{,}6022 \cdot 10^{-19}\,VAs}{9{,}1094 \cdot 10^{-31}\,kg} = 8{,}794 \cdot 10^{14} \frac{kg\,m^2 s^{-2}}{kg} \right]$$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m \cdot v} = \frac{6{,}6261 \cdot 10^{-34}\,Js}{9{,}1094 \cdot 10^{-31}\,kg \cdot 2{,}97 \cdot 10^7\,ms^{-1}} = 2{,}449 \cdot 10^{-11} \frac{J}{N} \approx 24\,pm$$

$$\Rightarrow d_1 = \lambda \cdot \frac{a}{b} = 2{,}449 \cdot 10^{-11}\,m \cdot \frac{0{,}35\,m}{2{,}0 \cdot 10^{-6}\,m} \approx 4{,}286 \cdot 10^{-6}\,m \approx \underline{\underline{4{,}3\,\mu m}}$$

Bem: mit steigender E_{kin} steigt v (und auch m ein bisschen)

$\Downarrow$

sinkt λ

sinkt d_1

Bei $E_{kin} = 50\,keV$ ist $v \approx 12{,}37 \cdot 10^7 \frac{m}{s}$

$\lambda \approx 5{,}355 \cdot 10^{-12}\,m$

$\Rightarrow$ d_1 wäre hier $d_1 \approx 9{,}37 \cdot 10^{-7}\,m$

(enger beisammen aber deutlich sichtbar!)

Geg: Elektronen werden mit 50 keV beschleunigt

Ges: De-Broglie-Wellenlänge λ der e^- (relativist. Rechnung!)

Lös: $E_{kin,e} \overset{!}{=} \underbrace{eU}_{= E_{pot,el}}$, $E_{kin,e} = E_{ges,e} - E_0 = mc^2 - m_0c^2 = \frac{m_0 \cdot c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - m_0c^2$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right) \cdot m_{0,e}c^2 \overset{!}{=} eU$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \overset{!}{=} \frac{eU}{m_{0,e}c^2} + 1 = \frac{eU + E_{0,e}}{E_{0,e}}$$

$$\Rightarrow 1 - \beta^2 = \left(\frac{E_{0,e}}{eU + E_{0,e}}\right)^2$$

$$\beta = \sqrt{1 - \left(\frac{E_{0,e}}{eU + E_{0,e}}\right)^2}$$

$$\beta = \sqrt{1 - \left(\frac{511\,keV}{50\,keV + 511\,keV}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{511}{561}\right)^2}$$

$$\beta = 0{,}412685807 \overset{!}{=} \frac{v}{c} \qquad \Rightarrow \underline{v = 1{,}23719 \cdot 10^8 \frac{m}{s}}$$

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h\sqrt{1-\beta^2}}{m_{0,e} \cdot v} = \frac{h \cdot \frac{1}{v} \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{m_{0,e}} = \frac{h}{m_{0,e}} \sqrt{\frac{1}{v^2} - \frac{1}{c^2}}$$

$$\lambda = \frac{6{,}6261 \cdot 10^{-34} Js}{9{,}1094 \cdot 10^{-31} kg} \cdot \sqrt{\frac{1}{(1{,}23719 \cdot 10^8\, ms^{-1})^2} - \frac{1}{(2{,}9979 \cdot 10^8\, ms^{-1})^2}}$$

$$= 5{,}355375 \cdot 10^{-12} m \approx \underline{\underline{5{,}4\, pm}}$$

$$[\lambda] = \frac{kg\, m^2 s^{-2} \cdot s}{kg} \cdot \sqrt{\frac{s^2}{m^2}} = \frac{m^2}{s} \cdot \frac{s}{m} = m$$

Bestimmung des Impulses mit Hilfe der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung:

$E_{kin} = 50\,keV$

$\Rightarrow E = 561\,keV$ $\quad E^2 = E_0^2 + p^2 \cdot c^2 \;\Rightarrow\; p = \frac{\sqrt{E^2 - E_0^2}}{c}$

$$p = \frac{\sqrt{\left[561 \cdot 10^3 \cdot 1{,}60 \cdot 10^{-19}\right]^2 - \left[511 \cdot 10^3 \cdot 1{,}60 \cdot 10^{-19}\right]^2}}{3{,}00 \cdot 10^8} Ns \approx 1{,}23 \cdot 10^{-22} Ns$$

Bestimmung der de-Broglie-Wellenlänge:

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{p} \Rightarrow \lambda_{dB} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}}{1{,}23 \cdot 10^{-22}} m \approx 5{,}4 \cdot 10^{-12} m$$