# Dicas para a prova 1 de Controle e Servomecanismos

## 1 Método de Heaviside

Tendo a função transferência, calcula-se os polos. Três casos são possíveis:

- **1° caso - Polos reais e distintos:** Neste caso, reescreve-se $\hat{d}(s)$ como: $\hat{d}(s) = (s - p_1)(s - p_2)\cdots(s - p_n)$; Calcule os resíduos utilizando a fórmula:

$$\Big[(s - p_k)\hat{f}(s)\Big]_{s=p_k}$$

  Em seguida:

$$L^{-1}\Big[\hat{f}(s)\Big] = \sum_{i=1}^{n} r_i e^{p_i t}$$

- **2° caso - Polos complexos e distintos:** Os polos são um par conjugado da forma $p_{1,2} = \alpha \pm j\omega$. Ou seja:

$$s^2 + bs + c = (s - \alpha + j\omega)(s - \alpha - j\omega) = (s - \alpha)^2 + \omega^2$$

  Dessa maneira, chega-se a:

$$\hat{f}(s) = \frac{ds + f}{s^2 + bs + c} = k_1 \frac{\omega}{(s - \alpha)^2 + \omega^2} + k_2 \frac{s - \alpha}{(s - \alpha)^2 + \omega^2}$$

  Aplicando a TIL:

$$L^{-1}\Big[\hat{f}(s)\Big] = k_1 e^{\alpha t} \sin \omega t + k_2 e^{\alpha t} \cos \omega t$$

- **3° caso - Polos reais múltiplos:** Assume-se o denominador sob a forma: $\hat{d}(s) = (s - p)^n$. Calcule os resíduos começando **do último para o primeiro**, com a seguinte fórmula:

$$r_i = \frac{1}{(n - i)!} \frac{\mathrm{d}^{n-i}}{\mathrm{d}s^{n-i}} [(s - p)^n \hat{f}(s)]_{s=p}$$

  Calcule a TIL usando:

$$L^{-1}\left[\frac{r_i}{(s - p)^i}\right] = \frac{r_i}{(i - 1)!} t^{i-1} e^{pt}$$

## 2 Espaço de Estados

Para a escolha de variaveis de estado, tem-se duas abordagens convenientes. Uma quando há derivada na entrada $u$ e quando não há.

Para o caso de **não haver derivada** na entrada $u$, dizemos que o $x_1 = y$. Ou seja, a variavel de estado $x_1$ é igual a saída $y$.

Exemplo:

$$\ddot{y} + \frac{b}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = \frac{1}{m}u$$

Escolhemos como variavel de estado $x_1 = y$ e $x_2 = \dot{x_1} = \dot{y}$, portando, como $x_2 = \dot{y}$, $\dot{x_2} = \ddot{y}$. Observe que a variavel de estado $\dot{x_2} = \ddot{y}$, então isolamos $\ddot{y}$ e já fazemos a devida substituição, assim $\ddot{y} = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \frac{1}{m}u$. E como $\dot{x_1} = x_2$, temos agora:

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= 0x_1 + 1x_2 + 0u \\ \dot{x_2} &= -\tfrac{k}{m}x_1 - \tfrac{b}{m}x_2 + \tfrac{1}{m}u \end{aligned}$$

Para saída, neste exemplo, temos $Du$ nula[1]. Desta forma, como dissemos no inicio que $x_1 = y$, ficamos com:

$$y = 1x_1 + 0x_2 + 0u$$

Agora, quando **há derivada** na entrada $u$, partimos de outra maneira

Exemplo:

$$\ddot{y} + \frac{b}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = \frac{b}{m}\dot{u} + \frac{k}{m}u$$

Chamo de $\dot{x_1}$ toda a expressão (organizada em derivadas do lado esquerdo e sem do esquerdo):

$$\ddot{y} + \frac{b}{m}\dot{y} - \frac{b}{m}\dot{u} = -\frac{k}{m}y + \frac{k}{m}u = \dot{x_1} \tag{*}$$

Integrando:

$$\dot{y} + \frac{b}{m}y - \frac{b}{m}u = x_1$$

Isolando $\dot{y}$ e o chamando de $\dot{x_2}$:

$$\dot{y} = -\frac{b}{m}y + \frac{b}{m}u + x_1 = \dot{x_2} \tag{**}$$

Integrando:

$$y = x_2 \tag{***}$$

Combinando $(*)$ e $(***)$:

$$\dot{x_1} = -\frac{k}{m}y + \frac{k}{m}u = 0x_1 - \frac{k}{m}x_2 + \frac{k}{m}u$$

Para $(**)$ e $(***)$:

$$\dot{x_2} = x_1 - \frac{b}{m}y + \frac{b}{m}u = 1x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \frac{b}{m}u$$

[1] Matriz de transmissão direta é nula, passando por dentro da equação diferencial. E Du não será nula, se, e somente se, $n = m$ (n = maior ordem da saída, m = maior ordem da entrada).

## 2.1 Circuitos elétricos

Passos a seguir:

- **Muita atenção com os sinais!**
- **1° passo:** Troque os indutores por fontes de corrente e os capacitores por fontes de tensão.
- **2° passo:** Faça a análise por superposição; Indutores viram circuitos abertos e capacitores viram um curto-circuito. **OBS:** A **corrente convencional** (valor positivo) vai do terminal + para o −.
- **3° passo:** Obtenha as tensões nos indutores e as correntes nos capacitores.
- Calcule primeiro as correntes nos capacitores e depois as tensões nos indutores.
- Se o elemento ativo for uma fonte de tensão, calcule as tensões nos indutores utilizando a técnica do divisor de tensão (ou $v = R \cdot i$) e as correntes nos capacitores a partir da **lei de Ohm**. $i = \frac{v}{R}$
- Se o elemento ativo for uma fonte de corrente, calcule as tensões nos indutores com a **lei de Ohm -** $v = R \cdot i$ e as correntes usando a técnica de divisor de corrente.
- Se atente aos denominadores das equações calculadas; Eles tendem a ser os mesmos. Um sinal de que a conta está errada pode ser o denominador estar diferente. Apesar disso, é possível que um ou outro resultado realmente tenha um denominador diferente!
- **Último passo:** Sendo $n$ o número de variáveis de estado:

$$L_i \dot{x}_i = v_{L_i,x_i} + v_{L_i,x_{i+1}} + v_{L_i,x_{i+2}} + \cdots + v_{L_i,x_n} + v_{L_i,u}$$

$$C \dot{x}_i = i_{C,x_i} + i_{C,x_{i+1}} + i_{C,x_{i+2}} + \cdots + i_{C,x_n} + i_{C,u}$$

$$y = y_{x_i} + y_{x_{i+1}} + y_{x_{i+2}} + \cdots + y_{x_n} + y_u$$

## 2.2 Tanques comunicantes

Trabalhamos com **escoamento laminar**. Logo, duas equações são muito úteis:

$$h = RQ \tag{1}$$

$$Q = C\dot{h} \tag{2}$$

Geralmente, no **1° passo**, utilizamos a equação **(1)** em $R_1$ e $R_2$. Em seguida, utilizamos a equação **(2)** nos tanques 1 e 2.

As equações de estado devem conter apenas a entrada ($u$), as variáveis de estado ($x_i$) e suas derivadas ($\dot{x}_i$). Logo, deve-se manipular as equações obtidas no último passo de forma a obter as matrizes **A** e **B**. Para obter a matriz **C**, basta identificar nas equações obtidas no **1° passo** onde aparece a saída desejada. Por exemplo, se a saída desejada for $h_1 - h_2$, deve-se olhar nas equações onde aparece a saída. Tal equação irá envolver uma ou mais variáveis de estado.

## 2.3 Sistemas térmicos

É similar aos sistemas de nível. Troque nível ($h$) por temperatura ($\theta$) e vazão ($q$) por fluxo de calor ($h$). Para modelar sistemas térmicos:

$$\theta = Rh$$
$$h = C\dot{\theta}$$

# 3 Realimentação unitária

Calcula-se a FTMF, geralmente considerando a saída e a referência. Porém, pode ser que seja necessário calcular para algum exercicio uma função racional em $s$ que leve em conta a entrada da planta ($u(s)$) e a referência ($r(s)$). Independentemente da função, calculando-se os polos do polinômio do denominador, deve-se verificar se há **polos dominantes**. Um polo é dominante quando sua parte real for ao menos 5 vezes menor que a dos outros. Diante disso, há um comportamento próximo ao de um sistema de 1° ordem. Se isso acontecer, não há ***overshoot*** e o valor máximo ocorre somente em $t \to \infty$. Aplica-se o **Teorema do Valor Final** (Geralmente, a referência é um degrau unitário.)

**LEMBRE-SE:** O TVF pode ser aplicado somente quando todos os polos estiverem no S.P.E e houver, no máximo, 1 polo na origem.

## 3.1 Determinando tempo de acomodação

Com a FTMF calculada, obtemos as raízes do polinômio do denominador. O tempo de acomodação pode ser calculado olhando para a parte real do polo dominante, se ele existir.

$$t_s = \frac{c}{|Re(s)|} \tag{3}$$

A constante $c$ depende do critério de erro desejado.

**SINÔNIMO:** **"Valor da saída em regime permanente"**: Calcular $f(\infty)$ com o TVF.

## 3.2 Definição de erro

Lembre-se que **Erro** = **Referência - Saída**. Às vezes, é melhor calcular a saída no $\infty$ do que o erro no $\infty$. De $y(\infty)$, obtemos $\varepsilon(\infty)$.

## 3.3 Estudo do erro estático

Encontre uma forma de relacionar o erro, a planta e a referência. Se a realimentação for unitária:

$$\hat{\varepsilon}(s) = \frac{1}{1 + \hat{g}(s)}\hat{r}(s) \tag{4}$$

Se a referência não estiver em Laplace, deve-se transformar primeiro. Calcula-se $\varepsilon(\infty)$.

- A entrada degrau ($\hat{r}(s) = \frac{1}{s}$) origina o **erro estático de posição** ($\varepsilon_p$). Para anular esse erro, o sistema deve ser ao menos de tipo 1.
- A entrada rampa ($\hat{r}(s) = \frac{1}{s^2}$) origina o **erro estático de velocidade** ($\varepsilon_v$). Para anular esse erro, o sistema deve ser ao menos de tipo 2.
- A entrada quadrática ($\hat{r}(s) = \frac{1}{s^3}$) origina o **erro estático de aceleração** ($\varepsilon_a$). Para anular esse erro, o sistema deve ser ao menos de tipo 3.

## 3.4 Valor máximo da saída

Haverá *overshoot* quando os polos dominantes forem complexos. Nesse caso, o valor máximo da saída será:

$$y_{max} = 1 + M_p$$

Deve-se calcular o *overshoot*. Se tiver **zeros**, vai ter um $\gamma$. Esse último deve ser calculado.

Por seguinte, calcule o $\zeta$. Para isso, basta colocar a FTMF na forma padrão de sistemas de 2° ordem com zero e encontrar o $\sigma = \zeta\omega_n$.

Veja o gráfico que relaciona $M_p$ e $\zeta$ para sistemas de 2° ordem com zero. Encontre o $M_p$ e obtenha o valor máximo da saída.

## 4 Lugar das raízes

- **1° passo:** Calcule os polos e zeros.
- **2° passo:** LR no eixo real.
- **3° passo:** Retas assíntotas. **OBS:** Se um ângulo ficar maior que 180, subtraia 360 dele.
- **4° passo:** Calcule os pontos de ramificação com a equação $\hat{n}'(s)\hat{d}(s) = \hat{n}(s)\hat{d}'(s)$. Obtenha as raízes do polinômio resultante e calcule os ganhos que produzem as raízes com $K(s_b) = \left|\frac{\hat{d}(s_b)}{\hat{n}(s_b)}\right|$.
- **5° passo:** Calcule a FTMF (**OBS:** Já considerando o ganho $K$ multiplicando $\hat{g}(s)$) e faça o critério de Routh para $\hat{d}(s)$ (Se $\hat{d}(s)$ tiver grau maior que 2). Veja se em algum lugar há algum ganho $K$ que anula a linha. Se isso não for possível, o LR não vai ao S.P.D. Se houver algum ganho capaz de anular a linha, calcule-o. Com tal ganho, obtenha o polinômio auxiliar (Que está na linha acima da linha nula) e calcule a raiz com tal ganho. Com esse ganho é essa raiz, o LR irá cruzar o eixo imaginário.
- **6° passo:** Se não houver polos ou zeros complexos, esse passo não é necessário. Se houver polos complexos, reescreva a FTMA $\hat{c}\hat{g}\hat{h}$ no formato ZPK. Calcule arg $\left[\hat{g}(s_T)\hat{h}(s_T)\right] = 180$. Pegue o valor dos polos (ou zeros) complexos e substitua em $s_T$; Algum deles irá zerar. No que zerar, substitua por $\varphi_p$ (ou $\varphi_c$). Caso encontre $\varphi$ negativo, some 360 até obter um ângulo positivo.
- **Por fim, esboçe o gráfico do lugar das raízes!**

**OBS:** Se no **4° passo** as raízes encontradas forem complexas, não há pontos de ramificação.

**OBS:** No **5° passo**, pode ser demorado calcular a FTMF. Por isso, caso a realimentação seja unitária, a FTMF será da forma:

$$FTMF = \frac{K \cdot n_g(s)}{d_g(s) + K * n_g(s)}$$

**OBS:** No **6° passo**, lembre-se de inverter o sinal dos polos e zeros na hora de escrever a FTMA no formato ZPK. Para **polos complexos**, o ângulo é de **partida ($\varphi_p$)**. Para **zeros complexos**, o ângulo é de **chegada ($\varphi_c$)**.

## 5 Projeto de compensadores via LR

- Veja como eliminar o erro estático; Está OK adicionar um integrador? Se a resposta for **sim**, siga para o **1° passo.** Se a resposta for for **não**, siga para o **2° passo.**
- **1° passo:** Calcule a FTMF, já considerando o polo adicionado na origem. Se o polinômio do denominador for de grau 2, compare com a forma padrão:

  $$\frac{\hat{y}(s)}{\hat{r}(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2}$$

  Se o polinômio tiver grau maior que 2, obtenha o polo dominante. Sua parte real será o $\sigma$.

  **1.1 -** Veja qual é o $\sigma$ e calcule o tempo de acomodação. Se o tempo de acomodação for maior que o desejado, é necessário projetar um compensador **avanço**. Caso o tempo de acomodação esteja OK, siga os passos a seguir:

  Obtenha a raíz desejada para o *overshoot* desejado.

  $$s_d = -\sigma \pm j\sigma \cdot \tan\beta$$

  Em seguida, calcule o ganho que produz a raiz $s_d$ utilizando:

  $$K(s_d) = \left|\frac{\hat{d}(s_d)}{\hat{n}(s_d)}\right|$$

## 5.1 Compensador Avanço

Passos resumidos:

1. Calcule o $\sigma_{max}$ utilizando:

$$\sigma_{max} > -\frac{\ln(\varepsilon)}{t_{\varepsilon max}}$$

2. Escolha um valor maior para $\sigma$. Em seguida, escolha um $\zeta$, um $\beta$ e um $\gamma$ para atender às restrições de *overshoot* desejadas.

3. Calcule a raíz desejada:

$$s_d = -\sigma \pm j\sigma \cdot \tan\beta$$

4. Calcule a deficiência angular utilizando:

$$\arg\left(\frac{\hat{n}(s_d)}{\hat{d}(s_d)}\right) = \alpha$$

**Isso já considerando o polo na origem!**

5. Veja quanto falta para completar 180. O quanto faltar, vai ser compensado pelo compensador.

$$\theta = 180 - \alpha$$

6. Escolha um zero com base no $\sigma$ e $\gamma$ escolhidos. **Muito cuidado com os sinais!** Calcule:

$$\hat{c}(s) = k_c \frac{s-z}{s-p} \quad \rightarrow \quad \arg(\hat{c}(s_d)) = \arg(k_c) + \arg(s_d - z) + \arg(s_d - p) = \theta$$

7. Calcule o ganho utilizando:

$$K(s_d) = \left|\frac{\hat{d}(s_d)}{\hat{n}(s_d)}\right| = k_c$$

## 5.2 Compensador Atraso

O sistema apresenta resposta transitória com características desejadas; Porém, as características de regime permanente são insatisfatórias. O lugar das raízes nas proximidades dos polos dominantes de malha fechada não pode ser modificado significativamente.
**Devemos colocar um polo e um zero próximos um ao outro e próximos da origem.** Isso causará apenas uma ligeira alteração nas características da resposta transitória.
Os passos a se seguir no projeto do **Compensador Atraso** são:

1. Calcule o erro atual; Lembre-se que:

$$\varepsilon_v = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s\hat{g}(s)}$$

2. Veja em quanto $s\hat{g}(s)$ deve aumentar para encontrar $\alpha$.

3. Estabeleça as raízes dominantes ($s_d$).

4. Escolha um polo e um zero próximos entre si e da origem:

$$z = \frac{1}{T} \qquad p = \frac{1}{\alpha T}$$

5. Determine o ganho $k_c$.

### 5.3 Compensador Avanço e Atraso

Utilize quando o sistema apresenta uma resposta transitória e permanente indesejada. A fim de atender às especificações, pode ser interesssanete posicionar as raízes desejadas "mais para dentro"da região $\Omega$. Faça a etapa avanço, calcule o $k_c$ e em seguida faça a etapa atraso desconsiderando o $k_c$ calculado.

## 6 Projeto de compensadores via Equação diofantina

Com o sistema em realimentação unitária, reescreva a planta e o controlador como:

$$\hat{g}(s) = \frac{\hat{n}_g(s)}{\hat{d}_g(s)} = \frac{\sum_{j=0}^{m_g} \beta_j s^j}{\sum_{i=0}^{n_g} \alpha_i s^i} \qquad \hat{c}(s) = \frac{\hat{n}_c(s)}{\hat{d}_c(s)} = \frac{\sum_{j=0}^{m_c} b_j s^j}{\sum_{i=0}^{n_c} a_i s^i}$$

Deseja-se solucionar:

$$\hat{n}_c(s)\hat{n}_g(s) + \hat{d}_c(s)\hat{d}_g(s) = \hat{q}(s)$$

A planta é conhecida. Queremos descobrir o compensador adequado para alocar os polos desejados. Ou seja, $\hat{n}_c(s)$ e $\hat{d}_c(s)$ são incógnitas. Note que:

$$\hat{n}_c(s)\hat{n}_g(s) = b_0\beta_0 + (b_1\beta_0 + b_0\beta_1)s + (b_2\beta_0 + b_1\beta_1 + b_0\beta_2)s^2 + \cdots + \left(\sum_{i=0}^{m_c+m_g} b_i\beta_{m_c+m_g-i}\right) s^{m_c+m_g}$$

$$\hat{d}_c(s)\hat{d}_g(s) = a_0\alpha_0 + (a_1\alpha_0 + a_0\alpha_1)s + (a_2\alpha_0 + a_1\alpha_1 + a_0\alpha_2)s^2 + \cdots + \left(\sum_{i=0}^{n_c+n_g} a_i\alpha_{n_c+n_g-i}\right) s^{n_c+n_g}$$

Como $\alpha_i, \beta_j$ são dados e $a_i, b_j$ são incógnitas, a **Equação Diofantina** é um problema linear!

- Para os termos de grau zero:

$$\alpha_0 a_0 + \beta_0 b_0 = q_0$$

- Para os termos de grau 1:

$$\alpha_1 a_0 + \alpha_0 a_1 + \beta_1 b_0 + \beta_0 b_1 = q_1$$

- Para o termo de grau i:

$$\sum_{k=0}^{i} (\alpha_{i-k} a_k + \beta_{i-k} b_k) = q_i$$

Defina o bloco de Sylvester de $\hat{d}_g$: (**OBS:** Veja que o número de linhas dessa matriz é igual ao grau do polinômio do denominador de $\hat{c}(s)$ + grau do polinômio do denominador de $\hat{g}(s) + 1$ **OBS:** O número de colunas é igual ao grau do polinômio do denominador de $\hat{c}(s) + 1$)

$$\mathbf{S}_D = \begin{bmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n_g} & \alpha_{n_g-1} & \alpha_{n_g-2} & \cdots & \alpha_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_{n_g} & \alpha_{n_g-1} & \cdots & \alpha_1 & \alpha_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \alpha_{n_g} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n_c+n_g+1)\times(n_c+1)}$$

O bloco do numerador é feito similarmente e com dimensão $\mathbf{S}_N \in \mathbb{R}^{(n_c+n_g+1)\times(m_c+1)}$.
Escrevamos:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n_c} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{b} &= \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_{m_c} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{q} &= \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & \dots & q_{n_c+n_g} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{S} &= \begin{bmatrix} S_D & S_N \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A solução vem de:

$$\mathbf{S} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \mathbf{q}$$

Para que haja solução única: $m_c = n_g - 1$ e $n_c \geq m_c$. Logo, o grau do numerador do compensador deve ter um grau menor em uma unidade em relação ao grau do denominador da planta. Além disso, no compensador, o grau do denominador deve ser maior ou igual ao grau do numerador.
É comum termos que projear um controlador de tipo mínimo. Para isso, segue-se o procedimento:

1. Troque $\hat{g}$ por $\hat{\bar{g}} = \frac{\hat{g}}{s^k}$, onde $k$ leva ao tipo desejado;
2. Solucione a Equação Diofantina, obtendo $\hat{\bar{c}}$;
3. A solução verdadeira será $\frac{\hat{\bar{c}}}{s^k}$.

# 7 Estabilidade Relativa

Deseja-se que o transitório seja rápido. Sendo assim, queremos que:

$$\mathrm{Re}(p_i) < \sigma_{min} \quad , \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

Isso equivale a fazer uma troca de variável:

$$s = \hat{s} + \sigma$$

Em seguida, faça o arranjo de Routh.