1. ~~对~~ 假设存在一点 x_0，满足 $f(x_0)>0$，

那么由于 $f(x)$ 的连续性知，存在 x_0 的一个邻域 U，满足 $\forall x\in U$，$f(x)>0$

故 $\int_a^b f(x)dx > m(U)>0$

矛盾，

故 $f(x)\equiv 0$

若是 L-S 积分，

由于 $\mu((a,b))$ 可以为 0，故没有这种结论

2. $\sqrt{f^2+g^2} \leq \sqrt{(f+g)^2} = |f+g|$

由于 $|f+g|$ 可积，故 $\sqrt{f^2+g^2}$ 也可积

3. 由于连续函数可由多项式函数逼近，

即 $|\cancel{\varphi(x)}-p(x)|<\varepsilon$

故定理 3.3.13 成立

故令 $b-a\leq 2\pi$，则三角多项式也同样成立

对于 $(-\infty,+\infty)$ 的被积区间，

由于 $f(x)$ 可积，故 $\int_{(-\infty,n)\cup(n,+\infty)} f(x)dx<\varepsilon$，对于阶梯函数类可以成立，但是对于非恒 0 的多项式函数类与三角函数类，

$\int_{(-\infty,n)\cup(n,+\infty)} |p(x)|dx = \cancel{\text{根}}\infty$，故不可以使定理 3.3.13 成立

4. 首先证明当 $f(x)$ 为连续函数时，

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)|\sin nx|\,dx=\frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\,dx$$

由于 $\int_a^b f(x)|\sin nx|\,dx=\int_0^b f(x)|\sin nx|\,dx-\int_0^a f(x)|\sin nx|\,dx$

故只需证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^b f(x)|\sin nx|\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^b f(x)\,dx$

~~而对于任意 b，必有 k，使得 $(k-1)\pi\le b\le k\pi$。~~

先令 $b=k\pi$，其中 k 为整数

于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^b f(x)|\sin nx|\,dx=\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{k\pi} f(x)|\sin nx|\,dx=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{m=1}^{n}\int_{\frac{k\pi(m-1)}{n}}^{\frac{k\pi m}{n}} f(x)|\sin nx|\,dx$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}f(\xi_m)\int_{\frac{k\pi(m-1)}{n}}^{\frac{k\pi m}{n}}|\sin nx|\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}f(\xi_m)\frac{1}{n}\int_{k\pi(m-1)}^{k\pi m}|\sin x|\,dx$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}f(\xi_m)\frac{2k}{n}\cdot\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{n}{k\pi}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{n}f(\xi_m)\frac{k\pi}{n}\cancel{=\frac{2}{\pi}\int_0^{k\pi}f(x)\,dx}$$

$$\cancel{\le\frac{2}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}f(\xi_m)\frac{b+\pi}{n}}=\frac{2}{\pi}\int_0^b f(x)\,dx$$

若 $b\ne k\pi$，取 k 使得 $k\pi>b$

并令 $g(x)=\begin{cases}f(x), & x\in(0,b)\\ 0, & x\in(b,k\pi)\end{cases}$

此时有 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^b f(x)|\sin nx|\,dx=\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{k\pi}g(x)|\sin nx|\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{k\pi}g(x)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^b f(x)\,dx$

综上，当 $f(x)$ 为连续函数时

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)|\sin nx|\,dx=\frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\,dx$$

对于任意 Lebesgue 可积函数 $f(x)$，存在连续函数 $\varphi(x)$，使得 ~~$\lim_{n\to\infty}|f(x)-\varphi_n(x)|=0$~~ ~~$\int_a^b |f(x)-\varphi(x)|dx<\varepsilon$~~

~~则 $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)|\sin nx|dx = \lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b (f(x)-\varphi_n(x))|\sin nx|dx + \int_a^b \varphi_n(x)|\sin nx|dx\right)$~~

~~$= 0 + \frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)dx$~~

使得 $\int_a^b |f(x)-\varphi(x)| < \varepsilon$

故 $\left|\int_a^b f(x)|\sin nx|dx - \frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)dx\right| \le \left|\int_a^b |f(x)-\varphi(x)||\sin nx|dx\right| +$

$\left|\int_a^b \varphi(x)|\sin nx|dx - \frac{2}{\pi}\int_a^b \varphi(x)dx\right| + \frac{2}{\pi}\left|\int_a^b |f(x)-\varphi(x)|dx\right|$

$\le \varepsilon + \varepsilon + \frac{2}{\pi}\varepsilon < 3\varepsilon$

故 $\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2}\int_a^b f(x)|\sin nx|dx = \int_a^b f(x)dx$

同理可得 $\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2}\int_a^b f(x)|\cos nx|dx = \int_a^b f(x)dx$

5. (1) 当 $0<a<1$ 时

$$\int_0^1|f(x)|dx \leq \int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha}} = \frac{1}{-\alpha+1}$$

此时 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上 Lebesgue 可积

当 $a\geq 1$ 时

$$\int_0^1|f(x)|dx \geq \int_0^1 \frac{1}{x}\left|\sin\frac{1}{x}\right|dx$$

此时 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上 Lebesgue 不可积

(2) 当 $a\geq 1$ 时

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx = 2\int_0^{+\infty}|f(x)|dx \geq 2\int_0^1|f(x)|dx$$

$$\cancel{\leq \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{|x|^{\alpha}} = 2\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{|x|^{\alpha}}}$$

由(1)可知 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上不可积

当 $0<a<1$ 时

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx = 2\int_0^{+\infty}|f(x)|dx \geq 2\int_1^{+\infty}|f(x)|dx > 2\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\left|\sin\frac{1}{x}\right|dx$$

故 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上不可积

6. 对Lebesgue测度

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dm(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)dm(x+t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)dm(x)$$

但对于Lebegue-Stieltjes测度

$dg(x+t)$ 不一定等于 $dg(x)$

故 $f(x+t)$ 不一定在 (E^1, L^g, g) 上可积。

7. 对函数 $f(x)$，存在连续函数 $\varphi(x)$，

满足 $\int_a^b |f(x)-\varphi(x)|dx < \varepsilon$

于是 $\left|\int_a^b |f(x+h)-f(x)|dx\right| \leq \int_a^b |f(x+h)-\varphi(x+h)|dx$

$+\int_a^b |\varphi(x+h)-\varphi(x)|dx + \int_a^b |\varphi(x)-f(x)|dx < 3\varepsilon$

故 $\lim\limits_{h\to 0}\int_a^b |f(x+h)-f(x)|dx = 0$

对于L-S测度

已知 $\int_a^b |f(x)-\varphi(x)|dx < \varepsilon$

不一定能推出

$\int_a^b |f(x+h)-\varphi(x+h)|dx < \varepsilon$

所以目标等式不一定成立

现举一反例，

令 $\theta(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 1, & x\geq 0 \end{cases}$

在 (R^1, L^θ, θ) 中

令 $f(x)=\theta(x)$

则 $f(x+h)-f(x) = \begin{cases} 0, & 其他 \\ 1, & 0\leq x<h \end{cases}$

则 $\lim\limits_{h\to 0}\int_{-1}^{1} |f(x+h)-f(x)|dx$

$= \lim\limits_{h\to 0} 1$

$= 1 \neq 0$

8. (i) 由于 $\tilde{R}$ 中的元素都是~~R~~可测集，故 $\tilde{R}\subset R_1$，

只需再证明 $\tilde{R}$ 为 σ-环

取一列可测集 $\{E_i\}$，其中 $E_i\in R_2$

① 则 $\varphi^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)=\left\{x\in X_1 \mid \varphi(x)\in\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right\}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\{x\in X_1\mid \varphi(x)\in E_i\}$

$=\bigcup_{i=1}^{\infty}\varphi^{-1}(E_i)\in\tilde{R}$

~~可列可加性得证~~

② 取二可测集 E_1、E_2，其中 E_1、$E_2\in R_2$

则 $\varphi^{-1}(E_1-E_2)=\varphi^{-1}(E_1)-\varphi^{-1}(E_2)\in\tilde{R}$

③ $\phi=\varphi^{-1}(\phi)\in\tilde{R}$

综上 $\tilde{R}$ 为 σ-环

(ii) 根据定理3.3.14的证明即得

9. 由于 $\{M_n^{(1)}\}$ 趋向无限大，则必存在一子列 $\{M_{n_k}^{(1)}\}$ 单调递增且趋向无限大

且 $\lim_{k\to\infty}\int_{E_{n_k}}[|f|]_{M_{n_k}^{(1)}}dx=\lim_{n\to\infty}\int_{E_n}[|f|]_{M_n^{(1)}}dx=S$

对 $\{M_{n_k}^{(1)}\}$ 应用引理2可知，对于任何单调递增 $\{M_n\}$ 都满足

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_{n}}[|f|]_{M_n}dx=S$$

假设 $\lim_{n\to\infty}\int_{E_n}[|f|]_{M_n^{(2)}}dx$ 不收敛于S

则必存在一子列不收敛于S且单调，这与引理2矛盾

10

充分性:

$$\int_E |f|\,dx = \int_{\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n} |f|\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{E_n} |f|\,dx$$

$$\le \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\,\mu(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} n\,\mu(E_n) + \mu(E)$$

必要性

$$\int_E |f|\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{E_n} |f|\,dx \ge \sum_{n=0}^{\infty} n\,\mu(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} n\,\mu(E_n)$$

12. $$\int_E f\,d\mu_1 = \lim_{\delta(D)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\mu_1(a_i \le f < a_{i+1})$$

$$\le \lim_{\delta(D)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\mu_2(a_i \le f < a_{i+1})$$

$$= \int_E f\,d\mu_2 < +\infty$$

故 $\int_E f\,d\mu_1$ 与 $\int_E f\,d(\mu_1+\mu_2)$ 存在且有限