1. 若按距离收敛，则对任意的 $\varepsilon>0$，存在一个 N，使当 $n>N$ 时，

有 $\rho(f, f_n) < \varepsilon$

则
$$\frac{1}{2^\nu}\max_{t\in[a,b]}\frac{|f^{(\nu)}(t)-f_n^{(\nu)}(t)|}{1+|f^{(\nu)}(t)-f_n^{(\nu)}(t)|}\leq\rho(f,f_n)<\varepsilon$$

即有
$$\frac{\max\limits_{t\in[a,b]}|f^{(\nu)}(t)-f_n^{(\nu)}(t)|}{1+\max\limits_{t\in[a,b]}|f^{(\nu)}(t)-f_n^{(\nu)}(t)|}<\varepsilon\cdot 2^\nu$$

即有
$$\max_{t\in[a,b]}|f^{(\nu)}(t)-f_n^{(\nu)}(t)|<\frac{\varepsilon\cdot 2^\nu}{1-\varepsilon\cdot 2^\nu}$$

故 $f_n^{(\nu)}$ 一致收敛于 $f^{(\nu)}$

由 ν 的任意性可知，

f_n 的各阶导函数一致收敛

若 f_n 的各阶导函数一致收敛，

由于 $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{2^\nu}$ 收敛，故存在一个 m，使 $\sum\limits_{\nu=m}^{\infty}\frac{1}{2^\nu}<\varepsilon$

由于 f_n 的小于 m 阶导函数一致收敛，

则存在一个 N，使当 $n>N$ 时，有 $\max\limits_{t\in[a,b]}|f_n^{(\nu)}(t)-f^{(\nu)}(t)|<\varepsilon\ (\nu<m)$

于是
$$\rho(f_n,f)=\sum_{\nu=m}^{\infty}\frac{1}{2^\nu}\max_{t\in[a,b]}\frac{|f_n^{(\nu)}(t)-f^{(\nu)}(t)|}{1+|f_n^{(\nu)}(t)-f^{(\nu)}(t)|}+\sum_{\nu=0}^{m-1}\frac{1}{2^\nu}\max_{t\in[a,b]}\frac{|f_n^{(\nu)}(t)-f^{(\nu)}(t)|}{1+|f_n^{(\nu)}(t)-f^{(\nu)}(t)|}$$
$$\leq\sum_{\nu=m}^{\infty}\frac{1}{2^\nu}+\sum_{\nu=0}^{m-1}\frac{1}{2^\nu}\max_{t\in[a,b]}|f_n^{(\nu)}(t)-f^{(\nu)}(t)|$$

即 $\rho(f_n, f) < \varepsilon + \cancel{\frac{1}{2}}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{2^i}\cdot\varepsilon \;\cancel{\#} < \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{3}{2}\varepsilon$

于是 f_n 按距离收敛于 f

2. ① 不妨令球面 S 的方程为 $x^2+y^2+z^2=1$，

则对于点 $x=(1,0,0)$ 与点 $y=(-1,0,0)$，

$d(x,y)=\pi$，$\rho(x,y)=2$

于是如果 $d(x,y)$ 是距离，则 $d(x,y)\neq\rho(x,y)$

② 下证 $d(x,y)$ 是距离，

首先易知 $d(x,y)\geq 0$ 且 $d(x,y)=0 \Longleftrightarrow x=y$

而 $d(x,y)$ 是大圆上以 x,y 为端点的劣弧弧长，故~~以~~

由~~两~~三角形两边长大于第三边知

$d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$

即 $d(x,y)$ 是距离

③ 由于 $\rho(x,y)$ 表示 x,y 之间的直线距离，由两点之间直线最短可知，

$\rho(x,y)\leq d(x,y)$

以 x,y 的中点为圆心，$\rho(x,y)$ 为直径做圆，可知

圆的周长为 $\pi\rho(x,y)$，而 $d(x,y)$ 是这个圆的劣弧弧长，故 $d(x,y)$

应小于周长的一半，即

$d(x,y)\leq\frac{\pi}{2}\rho(x,y)$

3. 在定理4.1.2中取 $x_n \equiv x_0$ 即可

4. $\tilde{\rho}(x,y)=0 \Longleftrightarrow \rho(x,y)=0 \Longleftrightarrow x=y$

满足条件1°

$$\tilde{\rho}(x,y)=\frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)} \le \frac{\rho(x,z)+\rho(z,y)}{1+\rho(x,z)+\rho(z,y)}=\frac{\rho(x,z)}{1+\rho(x,z)+\rho(z,y)}+\frac{\rho(z,y)}{1+\rho(x,z)+\rho(z,y)}$$

$$\le \frac{\rho(x,z)}{1+\rho(x,z)}+\frac{\rho(z,y)}{1+\rho(z,y)}=\tilde{\rho}(x,z)+\tilde{\rho}(z,y)$$

满足条件2°

故 $\rho(x,y)$ 为距离

当 $\rho(x_n,x)<\varepsilon$ 时,

$$\tilde{\rho}(x_n,x)=\frac{\rho(x_n,x)}{1+\rho(x_n,x)}<\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$$

由于当 ε 任意小时, $\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$ 也可以任意小,

故当 $\rho(x_n,x)$ 收敛时, $\tilde{\rho}(x_n,x)$ 也收敛。

当 $\tilde{\rho}(x_n,x)<\varepsilon$ 时

解 $\frac{\rho(x,y_n)}{1+\rho(x,y_n)}<\varepsilon$ 得

$$\rho(x,y_n)<\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$$

由于当 ε 任意小时, $\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$ 也可以任意小

故当 $\tilde{\rho}(x_n,x)$ 收敛时, $\rho(x_n,x)$ 也收敛

5. 按习题4.1的第一题的思路即可证。

6. 由于 $\rho_i(x,y)=\lambda_i|x_i-y_i|$ 是拟距离, 故它们的和也是拟距离,

并且按距离的和收敛等价于分别按每个拟距离收敛。

7. 由于 $\rho(x,y)$ 非负，所以 $\tilde{\rho}(\tilde{x},\tilde{y})$ 也非负

当 $\tilde{\rho}(\tilde{x},\tilde{y})=0$ 时，说明存在一个 $x\sim\tilde{x}$，$y\sim\tilde{y}$，使 $\rho(x,y)=0$

即 $x\sim y$，由等价关系的传递性知 $\tilde{x}\sim x\sim y\sim\tilde{y}$，即 $\tilde{x}=\tilde{y}$

当 $\tilde{x}=\tilde{y}$ 时，易知也有 $\tilde{\rho}(\tilde{x},\tilde{y})=0$

$$\tilde{\rho}(\tilde{x},\tilde{y})=\rho(x,y)\leq\rho(x,z)+\rho(z,y)=\tilde{\rho}(\tilde{x},\tilde{z})+\tilde{\rho}(\tilde{z},\tilde{y})$$

于是 ρ 是 D 上的距离。

8. 1° (R,ρ_1) 是 $C(-\infty,+\infty)$ 上的子度量空间

(R,ρ_2) 是多个拟距离的和

2° 已知 (R,ρ_1) 是 $C(-\infty,+\infty)$ 上的子度量空间即得。

3° 当按 ρ_2 收敛时，可以推出每个 $|a_i|$ 都收敛于 0，由于 i 有限，

故对任意的 i，任意的 $\varepsilon>0$，存在一个 N，使 $n>N$ 时，有 $|a_i|<\varepsilon$，

于是也有按 ρ_1 收敛。

令 $P_n=x^{n+1}-x^n$，则易知 $\max\limits_{t\in[0,1]}(x^{n+1}-x^n)=0$

故 $\rho_1(P_n,0)\to 0$，但 $\rho_2(P_n,0)=2\not\to 0$

4° 当 $P=Q$ 时，必有 $a_0=0$，于是 $\rho_3(P,Q)=\rho_3(P,P)=0$

设 $P=\sum\limits_{i=0}^{m}a_ix^i$，$Q=\sum\limits_{j=0}^{n}b_jx^j$，$J=\sum\limits_{k=0}^{s}c_kx^k$

则 $\rho_3(P,Q)=|a_0-b_0|\leq|a_0-c_0|+|c_0-b_0|=\rho_3(P,J)+\rho_3(J,Q)$

故 ρ_3 是拟距离。由于 $\tilde{P}$ 表示0次项系数相等的多项式，故易知 $(D,\tilde{\rho})$ 与 E^1 等距同构。