1. ~~由~~ Young 式不等式取等条件为 $b=\varphi(a)$

于是 $A^{\frac{1}{p}}B^{\frac{1}{q}} \le \frac{A}{p}+\frac{B}{q}$ 的取等条件为 $B^{\frac{1}{q}}=(A^{\frac{1}{p}})^{p-1}$

即 $B=A$

于是 Hölder 不等式的取等条件为

$|\psi(x)|^q = |\varphi(x)|^p$

即 $\left(\left|\frac{g(x)}{\|g\|_q}\right|\right)^q = \left(\left|\frac{f(x)}{\|f\|_p}\right|\right)^p$

即 $\|f\|_p^p\,|g(x)|^q = \|g\|_q^q\,|f(x)|^p$

~~由于证明过程中这一步~~

$\cancel{\int_E |\varphi(x)\psi(x)|\,d\mu \le \int_E \frac{|\varphi(x)|^p}{p}\,d\mu + \int_E \frac{|\psi(x)|^q}{q}}$

~~又~~ 令 $C_1=\|f\|_p^p$，$C_2=\|g\|_q^q$，再考虑 L^p 空间中的等价类，

得到 Hölder 不等式的取等条件为 $C_1|g(x)|^q \doteq C_2|f(x)|^p$

且有 $\frac{C_1}{C_2}=\frac{\|f\|_p^p}{\|g\|_q^q}$

对 Minkowski 不等式 ~~按同样的方法~~ 处理，可得取等条件为

$C_1 f(x) \doteq C_2 g(x)$

2. 当 $\|x\|=0$ 时，由于 $\|x_n\|\ge 0\ (n\in N^+)$，故只有 $\|x_n\|=0$

即 x 为 R 中的零元

对 $\forall \lambda\in\mathbb{R}$，有 $\|\lambda x\|=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|\lambda x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}}=(|\lambda|^p)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}}=|\lambda|\cdot\|x\|$

在 Minkowski 不等式中，取测度 μ 为集合中含有正整数的个数，则

$$\|x+y\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n+y_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{n=1}^{\infty}(\|x_n\|+\|y_n\|)^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^{+\infty}(\|x_n\|+\|y_n\|)^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le \left(\int_0^{+\infty}\|x_n\|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^{+\infty}\|y_n\|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|+\|y\|$$

故$\|\cdot\|$是R中的范数

由上面关于$\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$的证明，~~易得~~ 且由Minkowski不等式的取等条件易知，R是严格赋范的充要条件是对于每个R_n都是严格赋范的。

3. 易知 $\|x\|_p = 0 \Longleftrightarrow x=(0,0,\dots)$

与 $\|x+y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p$ 都成立

而有 $\|-x\|_p = \sum_{i=1}^{\infty}|-x_i|^p = \sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p = \|x\|_p$

$$\lim_{\alpha_n\to 0}\|\alpha_n x\|_p = \cancel{\lim_{\alpha_n\to 0}\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i\|^p |x_i|^p} \lim_{\alpha_n\to 0}|\alpha_n|^p\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p = 0$$

$$\lim_{\|x_n\|_p\to 0}\|\alpha x_n\|_p = \lim_{\|x_n\|_p\to 0}|\alpha|^p\|x_n\|_p = 0$$

故$\|\cdot\|_p$是l^p上的准范数

4. 当$f\in L^{p'}(\Omega,B,\mu)$时，有$\int_\Omega |f|^{p'}d\mu < +\infty$

而 $\int_\Omega |f|^p d\mu = \int_\Omega |f|^{p'}\cdot|f|^{p-p'}d\mu = \int_{\Omega(|f|>k)}|f|^{p'}\cdot|f|^{p-p'}d\mu$

$$+\int_{\Omega(|f|\le k)}|f|^{p'}\cdot|f|^{p-p'}d\mu \le \int_{\Omega(|f|>k)}|f|^{p'}\cdot k^{p-p'}d\mu$$

$$+\int_{\Omega(|f|\le k)}|f|^p d\mu \quad \le k^{p-p'}\int_\Omega|f|^{p'}d\mu + k^p\mu(\Omega) < +\infty$$

故 $f\in L^p(\Omega,B,\mu)$，即有 $L^{p'}(\Omega,B,\mu)\subset L^p(\Omega,B,\mu)$

取 $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ 为实直线 $\mathbb{R}$ 上装备了Borel集 $\mathcal{B}$ 的测度 μ 的测度空间,

其中 ~~μ表示~~ $\mu(A)=A$中正整数的个数, 则

若令 $f(x)=\frac{1}{x}$,

则 $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^2}\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$

但是 $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x}\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

于是 $L^2(\Omega, \mathcal{B}, \mu) \not\subset L^1(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$