1. 由于F全连续，故对任意有限的互不相交的开区间族$\{(a_v, b_v)\}_{v=1}^{n}$，如果$\sum_{v=1}^{n}(b_v - a_v) < \delta$时，总有$\sum_{v}|F(b_v) - F(a_v)| < \varepsilon$

现取一列互不相交的开区间族$\{(c_v, d_v)\}_{v=1}^{\infty}$，使$\sum_{v=1}^{\infty}(d_v - c_v) < \delta$

由于对任意$k > 0$，均有$\sum_{v=1}^{k}(d_v - c_v) < \delta$，故有$\sum_{v=1}^{k}|F(d_v) - F(c_v)| < \varepsilon$

令$k \to +\infty$，则有$\sum_{v=1}^{+\infty}|F(d_v) - F(c_v)| < \delta$

2.

题干是错误的，反例如下：

取$F(x) = \begin{cases} x^3 \cos^3\left(\frac{\pi}{x}\right), & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

由于$F'(x) = \begin{cases} 3x^2 \cos^3\left(\frac{\pi}{x}\right) + 3x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \cos^2\left(\frac{\pi}{x}\right), & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

即$|F'(x)| \leq 6$

故$F(x)$ lipschitz 连续

故$F(x)$绝对连续

取$G(x) = x^{\frac{1}{3}}, \quad -1 \leq x \leq 1$

易知$G(x)$也绝对连续（$G(x) = \int_{-1}^{x} G'(t)\,dt$）

但$G(F(x)) = \begin{cases} x \cos\frac{\pi}{x}, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 不是有界变差的

①如果令$F(x)$为单调函数，则命题成立。

由于 $F(x)$单调，故对任意互不相交开区间族$\{(a_v, b_v)\}$，

$\{(F(a_v), F(b_v))\}_v$ 也互不相交

对任意的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使$\sum_v |F(b_v)-F(a_v)|<\delta$时，

$$\sum_v |G(F(b_v))-G(F(a_v))|<\varepsilon$$

而对δ，存在$\eta>0$，使$\sum_v (b_v-a_v)<\eta$时，有

$$\sum_v |F(b_v)-F(a_v)|<\delta,$$

即$G(F(x))$为全连续函数

② 若令$G(x)$为Lipschitz连续，则命题成立，

由§3.6习题13可得。

3.

必要性：

若当$E\in \mathcal{L}$，且$m(E)=0$时，对任意$\varepsilon>0$

有一开集$O_\varepsilon=\bigcup_{v=1}^{+\infty}(a_{v,\varepsilon}, b_{v,\varepsilon})$，且$O\supset E$，

（下方将$O_\varepsilon=\bigcup_{v=1}^{+\infty}(a_{v,\varepsilon}, b_{v,\varepsilon})$简写为$O=\bigcup_{v=1}^{+\infty}(a_v, b_v)$）

使$m(O-E)<\varepsilon$，故$m(O)=\sum_{v=1}^{+\infty}(b_v-a_v)<\varepsilon$

由于F全连续

又对任意$\tau>0$，存在一个$\delta>0$，当$\sum_{v=1}^{+\infty}(d_v-c_v)<\delta$时，

必有$\sum_{v=1}^{+\infty}|F(d_v)-F(c_v)|<\tau$

令$\varepsilon=\delta$，则有$\sum_{v=1}^{+\infty}|F(b_v)-F(a_v)|<\tau$

将$\{(a_v,b_v)\}$中插入所有$F(x)$中的极值点，由于极值点至多只有可数个，所以这是可行的。

将所有极值点~~整~~插入，可得$\sum_{v=1}^{+\infty}m(F((a_v,b_v)))<\tau$

记$K=\bigcup_{v=1}^{+\infty}F((a_v,b_v))$，则有$K\supset F(E)$

故$m^*(K-F(E))\leq m^*(K)\leq\sum_{v=1}^{+\infty}m(F((a_v,b_v)))<\tau$

由τ的任意性知，只有$m^*(F(E))=m(F(E))=0$

又由于Borel集是Lesbegues集，命题得证

充分性：

假设F不是全连续的，

则存在$\varepsilon_0>0$，使~~当~~对任意$\delta>0$时，~~均有~~存在一个O_δ，满足$m(O_\delta)=\sum_{v=1}^{+\infty}(b_v-a_v)<\delta$，

~~取一列~~且$\sum_{v=1}^{+\infty}|F(b_v)-F(a_v)|>\varepsilon_0$

取一列集族$\{O_{\frac{1}{n}}\}$，

再作$E_k=\bigcup_{n=k}^{+\infty}O_{\frac{1}{n}}$

易知对任意一个 $E_k=\bigcup_{\nu=1}^{+\infty}(e_\nu,f_\nu)$，

均有 $\sum_{\nu=1}^{+\infty}|F(e_\nu)-F(f_\nu)|>\varepsilon_0$ 且 $E_{k+1}\subset E_k$

由于F单调，故 $m(F(E_k))=\sum_{\nu=1}^{+\infty}|F(e_\nu)-F(f_\nu)|>\varepsilon_0$

且 $F(E_k)$ 为开集

记 $E=\lim_{k\to\infty}E_k=\lim_{n\to\infty}O_{\frac{1}{n}}$

则 $m(E)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

则应有 $m(F(E))=0$

但 $m(F(E))=m(F(\lim_{k\to\infty}E_k))=\cancel{m(\lim_{k\to\infty}}\lim_{k\to\infty}F(E_k))>\varepsilon_0>0$

矛盾，故F必为全连续函数

4. 由§3.6习题14与§3.7习题3可知，F为全连续函数

5. 必要性：

若 $F(x)=\int_0^x G(t)dt$，则 $F'(x)\doteq G(x)$

现证明对于$F(x)$的任意一点x，在x处的导出数$DF(x)$也不能为∞：

$DF(x)=\infty$

~~不妨令其为$+\infty$~~ 继用反证法：假设存在一点x，~~$DF(x)=+\infty$~~

则存在一点列$\{a_n\}$，使得对任意的$k>0$，都存在一个$N>0$，当$n>N$时，有：

$$\left|\frac{F(x+a_n)-F(x)}{a_n}\right|>k$$

即 $|F(x+a_n)-F(x)|>ka_n$

而 $|F(x+a_n)-F(x)|=\left|\int_x^{x+a_n}G(t)dt\right|$

由于$G(t)$有界，即$G(t)\leq M$，故有

$$Ma_n=\left|M\int_x^{x+a_n}dt\right|\geq\left|\int_x^{x+a_n}G(t)dt\right|>ka_n$$

即$M>k$，由k的任意性知，$M=+\infty$矛盾。

故$F(x)$满足

① 对几乎处处的$^{\#}x$，有 $DF\cap[-M,+M]\neq\varnothing$

② 对所有x，有 $DF\subset\mathbb{R}$，即 $DF\neq\infty$

由《论Lipschitz~~条件~~连续性在各种可微定义下的充要条件》的定理2知，$F(x)$ Lipschitz连续

充分性：若 F 满足 Lipschitz 连续，由 §3.6 习题5 可知，

对所有 $x\in[a,b]$，$|DF|\leq M$，其中 $M>0$

又由于 F 全连续，则有

$$F(x)-F(a)=\int_a^x F'(t)\,dt$$

令 $G(t)=\begin{cases}0, & \text{使}F'(t)\text{不存在的}t\\ F'(t), & \text{使}F'(t)\text{存在的}t\end{cases}$

故易知 $G(t)$ 有界 且 $|G(t)|\leq M$

6.

① 对任意 x，~~任取一列点列 $\{y_n\}$ 使 $\lim y_n=x$~~

令 $x_2=x$，$x_1=y$，$x_3=b$

则有 $f(x)-f(y)<(x-y)\dfrac{f(b)-f(x)}{b-x}$

令 $x_2=x$，$x_1=a$，$x_3=y$

则有 $f(y)-f(x)<(y-x)\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

即 $|f(x)-f(y)|<|x-y|\cdot\max\left\{\left|\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\right|,\left|\dfrac{f(b)-f(x)}{b-x}\right|\right\}$

令 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{\max\left\{\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right|,\left|\frac{f(b)-f(x)}{b-x}\right|\right\}}$ 可知，$f(x)$ 在 x 处连续

~~现证明 $\frac{f(a_1)-f(b_1)}{a_1-b_1}$ 与 $\frac{f(b_v)-f(a_v)}{a_v-b_v}$ 必都~~

由 x 的任意性知，$f(x)$ 是 (a,b) 上的连续函数

② ~~对于~~由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续，

故~~对~~对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使 $|x'-x''|\leq\delta$ 时，必有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$$

不妨取 $x'=a,\ x''=a+\delta$ 与 $x'=b-\delta,\ x''=b$

则有 $|f(a)-f(a+\delta)|<\varepsilon,\quad |f(b)-f(b-\delta)|<\varepsilon$

对 $\forall x_1,x_2\in[a+\delta,\ b-\delta]$，有

$$f(x_1)-f(x_2)\leq(x_1-x_2)\frac{f(b-\delta)-x_2}{b-\delta-x_2}\leq(x_1-x_2)\frac{f(b)-f(b-\delta)}{b-(b-\delta)}$$

同理有

$$f(x_1)-f(x_2)\geq(x_1-x_2)\frac{f(a+\delta)-f(a)}{a+\delta-a}$$

取 $M=\left|\max\left\{\frac{f(a+\delta)-f(a)}{a+\delta-a},\ \frac{f(b)-f(b-\delta)}{b-(b-\delta)}\right\}\right|$

则 $f(x)$ 在 $[a+\delta,\ b-\delta]$ 上 Lipschitz 连续

故 $f(x)$ 在 $[a+\delta,\ b-\delta]$ 上全连续

故对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta'>0$，使当 $\sum(b_v-a_v)<\delta'$ 时，且 (a_v,b_v) 为 $[a+\delta,b-\delta]$ 的子集

必有 $\sum_v|f(b_v)-f(a_v)|<\varepsilon$

则取 $\delta''=\min\{\delta,\delta'\}$,

~~有对~~ 若令 $\{(a_v,b_v)\}$ 为 $[a,b]$ 上互不相交的子集族且满足

$\sum_v (b_v-a_v)<\delta$ 时，有

由于 $f(x)$ 在 $[a,a+\delta]$ 以上单调，故 ~~一列子集~~
对于一列 $\{(a_v,b_v)\}\subset[a,a+\delta]$, 有 $\sum_v |f(b_v)-f(a_v)|$ $\leq \cancel{\sum} |f(a+\delta)-f(a)| < \varepsilon$

$$\sum_v |f(b_v)-f(a_v)| \leq \sum_{(b_v,a_v)\in[a,a+\delta]\cup[b-\delta,b]} |f(b_v)-f(a_v)|$$

$$+\sum_{(b_v,a_v)\in[a+\delta,b-\delta]} |f(b_v)-f(a_v)|$$

$$< 2\varepsilon+\varepsilon=3\varepsilon$$

故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上全连续

③ 固定任意一点 $x_0\in[a,b]$, 当 $y_1<y_2$ ~~$x_1<x_2$~~ 时，有

$$\frac{f(y_1)-f(x_0)}{y_1-x_0}\leq\frac{f(y_2)-f(x_0)}{y_2-x_0}$$

令 $\frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0}=g(y)$, 则 $g(y)$ 单调递增

由 $g(y)$ 在 x_0 处的右极限存在，即 $f_+'(x_0)$ 存在,

由 ~~y~~ x_0 的任意性知，$f'_+(x)$ 在 $[a,b)$ 上存在

假设 $f'_+(x)$ 不单调递增，则存在两点 ~~$x_0 < y_0$~~ x_0, y_0，满足 $x_0 < y_0$，

使得 $f'_+(x_0) > f'_+(y_0)$

故存在一个有理数 r，使 $f'_+(x_0) > r > f'_+(y_0)$

故存在一个点 x_2 充分接近 x_1，使其满足 $f'_+(x_0) > \dfrac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0} > r$

不妨令 $x_0 < x_2 < y_0$

且存在一点 y_2，使其满足 $f'_+(y_0) > \dfrac{f(y_2)-f(y_0)}{y_2-y_0}$

不妨令 $y_0 < y_2$

于是有 $\dfrac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0} > r > \dfrac{f(y_2)-f(y_0)}{y_2-y_0}$

由于 $y_0 > x_0$，则由凸函数定义知 ~~是~~

$$\frac{f(y_0)-f(x_2)}{y_0-x_2} \geq \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}$$

即有 $x_2 < y_0 < y_2$ 且

$$\frac{f(y_2)-f(y_0)}{y_2-y_0} < \frac{f(x_2)-f(y_0)}{x_2-y_0}$$

与凸函数定义矛盾，故 $f'_+(x)$ 单调递增

7. 见《实变函数习题精选》徐森林

第7章 积分理论总习题[296]第337页

8. 对任意$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，

使对$[a,b]$上任何一族互不相交的开区间$\{(a_v,b_v)\}$，

当 $\sum_{v=1}^{+\infty}(b_v-a_v)<\delta$ 时，必有 $\sum_{v=1}^{+\infty}|f(b_v)-f(a_v)|<\varepsilon$

~~对于~~ 从中取一个开区间(a_{v_0},b_{v_0})，在这上面，

~~可证~~ ~~证明~~ $\left|\bigvee_a^{b_{v_0}}f-\bigvee_a^{a_{v_0}}f\right|=\bigvee_{a_{v_0}}^{b_{v_0}}f$

对(a_{v_0},b_{v_0})上的任一组分点 $a_{v_0}=x_0<x_1<\cdots<x_n=b_{v_0}$

由于 $\sum_{k=1}^{n}(x_n-x_{n-1})=b_{v_0}-a_{v_0}$，所以有

$$\sum_{v=1}^{+\infty}\left|\bigvee_a^{b_v}f-\bigvee_a^{a_v}f\right|=\sum_{v=1}^{+\infty}\bigvee_{a_v}^{b_v}f=\sum_{v=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n_v}|f(x_k)-f(x_{k-1})|<\varepsilon$$

即 $\bigvee_a^x f$ 为全连续函数

由f的正规分解可知

$p(x)$与$n(x)$均为全连续函数

9、由于 f 为全连续函数，则

$$f(x)=\int_0^x f'(t)dt+f(a)$$

$\sup\limits_{\{x_n\}}$ 表示对所有分匹点对应的值的上极限

则 $$\bigvee_a^x f=\bigvee_a^x\left(\int_0^x f'(t)dt\right)$$

$$=\sup_{\{x_n\}}\sum_{k=1}^{n}\left|\int_0^{x_k}f'(t)dt-\int_0^{x_{k-1}}f'(t)dt\right|$$

$$=\sup_{\{x_n\}}\sum_{k=1}^{n}\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k}f'(t)dt\right|$$

将 $\{x_n\}$ 中插入所有极值点使 (x_{k-1},x_k) 必为 $f'(t)$ 的单调区间，则

$$\bigvee_a^x f=\sup_{\{x_n\}}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{x_{k-1}}^{x_k}|f'(t)|dt$$

$$=\sup_{\{x_n\}}\int_a^x|f'(t)|dt$$

$$=\int_a^x|f'(t)|dt$$