Lebesgue测度关于平移不变性的两点应用

曾纪雄　　黄国勋

在〔1〕中有两道题目如下：

定理1　设f是直线上Lebesgue可测函数．又设有常数a、b，使对一切不为零的整数l、n，有$la+nb\neq 0$，且

$$f(x)\overset{\cdot}{\underset{m}{=}}f(x+a),\quad f(x)\overset{\cdot}{\underset{m}{=}}(x+b),$$

则　$f(x)\overset{\cdot}{\underset{m}{=}}c$（常数）．

定理2　设f是直线上Lebesgue可测函数，且对一切t_1，$t_2\in R$，有

$$f(t_1+t_2)=f(t_1)+f(t_2),$$

则必有常数α，使$f(t)=\alpha t$．

这两个定理的证明难度较大，一般书上也未见有证明．据介绍，应用积分理论和全密点概念，可证明定理1；应用凸函数理论，可证明定理2，但亦未见到具体的证明．本文应用Lebesgue测度的平移不变性证明这两条定理．我们还应用Lebesgue测度的平移、反射不变性给出定理1及定理2的另一种证明．

一、定理1的证明

本文采用〔1〕中的术语和记号．N_0、Z、R依次代表非负整数全体、整数全体、实数全体组成的集合．记

$$E=\bigcap_{l=-\infty}^{\infty}\bigcap_{n=-\infty}^{\infty}R[f(x)=f(x+la+nb)],$$

则

$$E^c=\bigcup_{l=-\infty}^{\infty}\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}[f(x)\neq f(x+la+nb)].$$

又记

$$U=\{la+nb \mid l、n\in Z\}.$$

不难证明

1°　U稠于R；

2°　$m(E^c)=0$．

关于2°，证明如下：设l、$n\in N_0$，因

$R[f(x)\neq f(x+la+nb)]$

$$\subset\left[\bigcup_{i=0}^{l-1} R[f(x+ia)\neq f(x+(i+1)a)]\right]\cup\left[\bigcup_{j=0}^{n-1} R[f(x+la+jb)\neq f(x+la+(j+1)b)]\right]\cdot$$

而

$$\tau_{ia}R[f(x+ia)\neq f(x+(i+1)a)]=R[f(x)\neq f(x+a)],$$

$$\tau_{la+jb}R[f(x+la+jb)\neq f(x+la+(j+1)b)]=R[f(x)\neq f(x+b)],$$

由L－测度关于平移不变性，有

$$m(R[f(x)\neq f(x+la+nb)])=0.$$

对l、n不全是非负整数的情况，同理可证上式仍成立。

下面分四步：

第一步，证明：设$\langle a, b\rangle$为任一区间，则$\forall M\in \mathbf{B}$，$m(f^{-1}(M)\cap E\cap\langle a, b\rangle)=m(f^{-1}(M)\cap E\cap\langle 0, b-a\rangle)$.

上式中，$\langle a, b\rangle$为区间，$b>a$，可以是开区间、闭区间、左开右闭区间或左闭右开区间。首先，不难依次证明

(i) 若$x\in E$，$t\in U$，则$x+t\in E$，$f(x+t)=f(x)$；

(ii) 若$M\subset R$，$t\in U$，则$\tau_t(f^{-1}(M)\cap E)=f^{-1}(M)\cap E$；

(iii) 若$M\subset R$，$F\subset R$，$t\in U$，则

$$\tau_t(f^{-1}(M)\cap E\cap F)=f^{-1}(M)\cap E\cap\tau_t F.$$

然后，应用L－测度的平移不变性证得

(iv) 若$M\in\mathbf{B}$，$F\in\mathbf{L}$，$t\in U$，则

$$m(f^{-1}(M)\cap E\cap F)=m(f^{-1}(M)\cap E\cap\tau_t F).$$

最后，因U稠于R，故存在$\{t_n\}\subset U$，$\{t_n\}$单调下降收敛于数a。由测度的连续性及(iv)，我们有

$$\begin{aligned}m(f^{-1}(M)\cap E\cap\langle a, b\rangle)&=\lim_n m(f^{-1}(M)\cap E\cap\langle t_n, b\rangle)\\&=\lim_n m(f^{-1}(M)\cap E\cap\tau_{-t_n}\langle t_n, b\rangle)\\&=\lim_n m(f^{-1}(M)\cap E\cap\langle 0, b-t_n\rangle)\\&=m(f^{-1}(M)\cap E\cap\langle 0, b-a\rangle).\end{aligned}$$

第二步，证明：设$M\in\mathbf{B}$，若$m(f^{-1}(M)\cap E)>0$，则对任一区间$\langle a, b\rangle$，有

$$m(f^{-1}(M)\cap E\cap\langle a, b\rangle)=(b-a)m(f^{-1}(M)\cap E\cap\langle 0, 1\rangle).$$

由$m(f^{-1}(M)\cap E)>0$及测度的可加性，并应用第一步的结果，易知对任一区间$\langle a,b\rangle$，都有

$$m(f^{-1}(M)\cap E\cap\langle a, b\rangle)>0.$$

因U稠于R，故存在单调下降的零数列$\{t_k\}\subset U$及单调上升的自然数子列$\{n_k\}$与$\{m_k\}$，满足

$$n_k t_k\leqslant b-a<(n_k+1)t_k,\quad m_k t_k\leqslant 1<(m_k+1)t_k,$$

从而$\lim_k n_k t_k=b-a$，$\lim_k m_k t_k=1$。因为

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{n_k}(f^{-1}(M)\cap E\cap\langle(i-1)t_k, it_k\rangle)\right)\leqslant m(f^{-1}(M)\cap E\cap\langle 0, b-a\rangle)$$

$$\leqslant m\left(\bigcup_{i=1}^{n_k+1}(f^{-1}(M)\cap E\cap\langle(i-1)t_k, it_k\rangle)\right),$$

故由第一步所证，对任意的k都有

$$n_k m(f^{-1}(M)\cap E\cap\langle 0,t_k\rangle)\leqslant m(f^{-1}(M)\cap E\cap\langle 0,b-a\rangle)$$

$$\leqslant(n_k+1)m(f^{-1}(M)\cap E\cap\langle 0,t_k\rangle).$$

同理，有

$$m_k m(f^{-1}(M)\cap E\cap\langle 0,\ t_k\rangle)\leqslant m(f^{-1}(M)\cap E\cap\langle 0,\ 1\rangle)$$

$$\leqslant(m_k+1)m(f^{-1}(M)\cap E\cap\langle 0,\ t_k\rangle),$$

故此

$$\frac{n_k t_k}{(m_k+1)t_k}\leqslant\frac{m(f^{-1}(M)\cap E\cap\langle 0,b-a\rangle)}{m(f^{-1}(M)\cap E\cap\langle 0,1\rangle)}\leqslant\frac{(n_k+1)t_k}{m_k t_k}.$$

令$k\to\infty$，即得$m(f^{-1}(M)\cap E\cap\langle 0,b-a\rangle)=(b-a)m(f^{-1}(M)\cap E\langle 0,1\rangle)$，

再应用第一步的结果，即得欲证。

第三步，证明：设$M\in\mathcal{B}$，若$m(f^{-1}(M)\cap E)>0$，则对任一区间$\langle a,\ b\rangle$，有

$$m(f^{-1}(M)\cap E\cap\langle a,\ b\rangle)=b-a.$$

记$\delta=m(f^{-1}(M)\cap E\cap\langle 0,\ 1\rangle)$，$F=f^{-1}(M)\cap E\cap(a,\ b)$。对任意$\varepsilon>0$，有开集$G$，$F\subset G\subset(a,\ b)$，满足$m(F)>m(G)-\varepsilon$。把$G$用其构成区间表示，$G=\bigcup_j(a_j,b_j)$。

于是

$$F=F\cap G=\bigcup_j[f^{-1}(M)\cap E\cap(a_j,\ b_j)]$$

由第二步所证，有

$$m(F)=\sum_j m(f^{-1}(M)\cap E\cap(a_j,\ b_j))$$

$$=\sum_j(b_j-a_j)\delta=\delta\sum_j(b_j-a_j)=\delta m(G).$$

另一方面，由第二步所证，有

$$m(F)=m(f^{-1}(M)\cap E\cap(a,b))=\delta(b-a),$$

所以$\delta m(G)=\delta(b-a)$。因$\delta>0$，故$m(G)=b-a$。于是$m(F)>b-a-\varepsilon$。再由ε的任意性，有$m(F)\geqslant b-a$。但$F\subset(a,\ b)$，故$m(F)=b-a$，由此即得欲证。

第四步，证明：存在实数c，使$f(x)\overset{\cdot}{\underset{m}{=}}c$。

设$M\in\mathcal{B}$，如果$m(f^{-1}(M)\cap E)>0$，则由第三步所证，有

$$m(f^{-1}(R-M)\cap E)\leqslant m(R-f^{-1}(M)\cap E)$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}m[\langle k,\ k+1\rangle-(f^{-1}(M)\cap E\cap\langle k,\ k+1\rangle)]=0$$

即$(f^{-1}(R-M)\cap E)=0$。

按E的定义，有$m(f^{-1}(R)\cap E)=m(E)=\infty$。于是存在闭区间$[\alpha_1,\ \beta_1]$，使

$$m(f^{-1}([\alpha_1,\ \beta_1])\cap E)>0.$$

用归纳法，可构造一个闭区间套

$$[\alpha_1, \beta_1] \supset [\alpha_2, \beta_2] \supset \cdots \supset [\alpha_n, \beta_n] \supset \cdots\cdots$$

满足$\lim_n(\beta_n - \alpha_n) = 0$，而且

$$m(f^{-1}([\alpha_n, \beta_n]) \cap E) > 0, \quad n = 1, 2, 3\cdots\cdots$$

同时，由上面所证，有

$$m(f^{-1}(R - [\alpha_n, \beta_n]) \cap E) = 0, \quad n = 1, 2, 3\cdots\cdots$$

应用区间套定理，知存在唯一的点c，使

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [\alpha_n, \beta_n] = \{c\}.$$

而另一方面，又有

$$m(f^{-1}(R - \{c\}) \cap E) = m(f^{-1}(R - \bigcap_{n=1}^{\infty} [\alpha_n, \beta_n]) \cap E)$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m(f^{-1}(R - [\alpha_n, \beta_n]) \cap E) = 0$$

即$m(f^{-1}(R - \{c\}) \cap E) = 0$。又因$m(E^c) = 0$，所以得证$f \overset{\cdot}{\underset{m}{=}} c$。

二、定理2的证明

以Q记有理数全体。由条件易知，若$r \in Q$，则

$$f(rt) = rf(t)$$

对任意实数t成立，记$f(1) = \alpha$，则对任意$r \in Q$，$f(r) = \alpha r$。

下面证明上式对任一实数r都成立。因Q稠于R，而上式在Q上成立，故只需证明$f(t)$在R上连续。

第一步，证明：$f(t)$在$t = 0$处连续。

由定理的条件易知，仅需证$f(t)$在$t = 0$处右连续。若$f(t)$在$t = 0$处不是右连续，则存在$\varepsilon > 0$，存在$\{t_n\} \downarrow 0$，但对任意的n，$|f(t_n)| > \varepsilon$。不妨设$t_n < 2^{-n}$，$f(t_n) > \varepsilon$。作集合

$$A_i = R[i\varepsilon \leqslant f(x) < (i+1)\varepsilon], \quad i \in Z.$$

因$R = \bigcup_{i \in Z} A_i$，故存在$i_0 \in Z$，使$m(A_{i_0}) > 0$。进而可证存在$k_0 \in Z$，使

$$m(A_{i_0} \cap [k_0, k_0+1]) > 0.$$

记$B = A_{i_0} \cap [k_0, k_0+1]$，$s_k = \sum_{n=1}^{k} t_n$。又作集合

$$B_k = \tau_{s_k} B = \{t \mid t = x + s_k, x \in B\}.$$

下证$\{B_k \mid k \in N\}$两两不交。设$t' \in B_{k_1}$，$t'' \in B_{k_2}$，$k_1 < k_2$，则

$$i_0\varepsilon + \sum_{n=1}^{k_1} f(t_n) \leqslant f(t') < (i_0+1)\varepsilon + \sum_{n=1}^{k_1} f(t_n),$$

$$i_0\varepsilon+\sum_{n=1}^{k_2} f(t_n')\leqslant f(t'')<(i_0+1)\varepsilon+\sum_{n=1}^{k_2} f(t_n).$$

因为$f(t_n)>\varepsilon$，故有$f(t'')>f(t')$，于是$t'\neq t''$，即$B_{k_1}\cap B_{k_2}=\varnothing$。

依L－测度平移不变性，对任意的k，有$m(B_k)=m(\tau_{S_k}B)=m(B)$。又因$m(B)>0$，从而

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right)=\infty.$$

但是，另一方面，因$B\subset[k_0, k_0+1)$且对任意的k，有 $s_k<\sum_{n=1}^{k} 2^{-n}<1$，所以

$$B_k=\tau_{S_k}B\subset[k_0-1, k_0+2)$$

从而有$\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\subset[k_0-1, k_0+2]$。于是又有

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right)\leqslant 3,$$

这与前面的$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right)=\infty$矛盾。

至此，证得f在$t=0$处连续。

第二步，证明：f在R上连续。

设$t\in R$。若$\lim_n t_n=t$，则由第一步，有$\lim_n f(t_n-t)=f(0)=0$。因此

$$\lim_n f(t_n)=\lim_n f(t+(t_n-t))=f(t)+\lim_n f(t_n-t)=f(t).$$

即f在t处连续。

参　考　文　献

〔1〕夏道行等，《实变函数论与泛函分析（上册）》，人民教育出版社，1978年。