第 24 卷 第 4 期　湘潭师范学院学报(自然科学版)　Vol. 24 No.4
2002 年 12 月　Journal of Xiangtan Normal University(Natural Science Edition)　Dec.2002

全变差函数的性质*

李云霞
(湘潭师范学院 数学系,湖南 湘潭 411201)

摘　要:讨论了全变差函数的性质,得到若干定性和定量的结果。

关键词:有界变差函数;全变差函数;性质
中图分类号:O174.1　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1671-0231(2002)04-0001-04

假设 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的实值函数,设 T 是 $[a,b]$ 的任意分划:$a=t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n=b$,令

$$V_a^b(f,T)=\sum_{k=1}^{n}|f(t_k)-f(t_{k-1})|,$$

若 $V_a^b(f)=\sup\limits_{T}\{V_a^b(f,T)\}<+\infty$,则称 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的有界变差函数。我们规定:$V_a^a(f)=0$,并称

$$V(x)=V_a^x(f),x\in[a,b]$$

为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的全变差函数[1]。

对于有界变差函数 $f(x)$,一般说来,要想求出它的全变差函数 $V(x)=V_a^x(f)$,并不是一件易事。为能由有界变差函数本身推知其全变差函数的性态,我们须考察一下 $V(x)=V_a^x(f)$ 与 $f(x)$ 的关系。

定理 1　设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数,则 $V(x)=V_a^x(f)$ 也是 $[a,b]$ 上的有界变差函数,并且有

$$V_a^b(V)=V_a^b(f). \tag{1}$$

证明:显然,$V(x)=V_a^x(f)$ 是 $[a,b]$ 上的非负单调增函数,所以,$V(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数[2],并且其全变差为

$$V_a^b(V)=V(b)-V(a)=V_a^b(f)-V_a^a(f)=V_a^b(f),$$

(1) 式成立。证毕。

定理 2　设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数,则 $V(x)=V_a^x(f)$ 在 $x_0\in[a,b]$ 右连续,左连续,连续的充要条件是相应地有 $f(x)$ 在 x_0 右连续,左连续,连续。

证明:设 $V(x)$ 在 $x_0\in[a,b)$ 右连续,则对任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得当 $x_0\leqslant x<x_0+\delta$ 时,有

$$|V(x)-V(x_0)|=V(x)-V(x_0)=V_{x_0}^x(f)<\varepsilon.$$

现取 $x_1(x_0<x_1<x_0+\delta)$,则对任何 $t\in[x_0,x_1)$,取 $[x_0,x_1]$ 的分别 T:$x_0=t_0\leqslant t_1=t<$

* 收稿日期:2002-02-25
作者简介:李云霞(1947-),男,湖南湘乡人,副教授,研究方向:函数论.

$t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = x_1$，便有

$$|f(t) - f(x_0)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})| \leqslant V_{x_0}^{x_1}(f) < \varepsilon,$$

故 $f(x)$ 在 x_0 右连续。

反之，设 $f(x)$ 在 $x_0 \in [a,b)$ 右连续，则对任给 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta_1 > 0$，使得当 $x_0 \leqslant x < x_0 + \delta_1 \leqslant b$ 时，有

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon/2. \tag{2}$$

又因为 $V(x)$ 是 $[a,b]$ 上的单调增函数，所以，$\lim\limits_{x \to x_0^+} V(x)$ 存在，由函数极限的柯西准则[3]，对上述任给 $\varepsilon > 0$，存在正数 $\delta < \delta_1$，使得对任何 $x_1, x_2 \in (x_0, x_0 + \delta)$，$x_1 \leqslant x_2$，有

$$|V(x_2) - V(x_1)| = V_{x_1}^{x_2}(f) < \varepsilon/2. \tag{3}$$

于是，对任何 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$，设 T 是 $[x_0, x]$ 的任意一个分划：$x_0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = x$，由(2)，(3) 两式，得

$$|V(x) - V(x_0)| = V_{x_0}^{x}(f) = \sup_T \left\{ \sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})| \right\} \leqslant$$
$$\sup_T \left\{ f(t_1) - f(x_0) | + V_{t_1}^{x}(f) \right\} \leqslant \sup_T \{ \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \} = \varepsilon, \tag{4}$$

当 $x = x_0$ 时，(4) 式显然成立，所以 $V(x)$ 在 x_0 右连续。

同理可证 $V(x)$ 在 $x_0 \in (a,b]$ 左连续的充要条件是 $f(x)$ 在 x_0 左连续，则 $v(x)$ 在 $x_0 \in (a,b)$ 连续的充要条件是 $f(x)$ 在 x_0 连续。证毕。

定理 3 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上单调增(减) 函数，则 $V(x) = V_a^x(f)$ 在 $x_0 \in (a,b)$ 右可微，左可微的充要条件是相应地有 $f(x)$ 在 x_0 右可微，左可微，可微，并且成立

$$V_+{}'(x_0) = f_+{}'(x_0), V_-{}'(x_0) = f_-{}'(x_0), V'(x_0) = f'(x_0),$$
$$(V_+{}'(x_0) = f_+{}'(x_0), V_-{}'(x_0) = -f_-{}'(x_0), V'(x_0) = -f'(x_0)). \tag{5}$$

证明 因为 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的单调增(减) 函数，所以，有

$$V(x) = V_a^x(f) = f(x) - f(a), x \in [a,b],$$
$$(V(x) = V_a^x(f) = f(a) - f(x), x \in [a,b]), \tag{6}$$

由(6) 式即知结论成立。证毕。

定理 4 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数，则 $V(x) = V_a^x(f)$ 在 $[a,b]$ 上的 R 可积，并且 $F(x) = \int_a^x V(t)\,\mathrm{d}t$ 也是 $[a,b]$ 上的有界变差函数，同时成立

$$V_a^b(F) = \int_a^b V(x)\,\mathrm{d}x. \tag{7}$$

证明 因为 $V(x)$ 是 $[a,b]$ 上的非负单调增函数，所以，$V(x)$ 在 $[a,b]$ 上 R 可积，并由积分的性质可知，$F(x) = \int_a^b V(t)\,\mathrm{d}t$ 也是 $[a,b]$ 上的非负单调增函数，从而是 $[a,b]$ 上的有界变差函数，并且

$$V_a^b(F) = F(b) - F(a) = \int_a^b V(x)\,\mathrm{d}x.$$

(7) 式成立。证毕。

定理 5 设 $f(x)$ 是 $[-a,a]$ $(a > 0)$ 上有界变差的奇(偶) 函数，则 $V(x) = V_0^x(f)$（当 $x < 0$ 时，约定 $V_0^x(f) = V_x^0(f)$），是 $[-a,a]$ 上的偶函数，并且对任何 $b \in [-a,a]$，有

$$V_{-b}^b(V) = 2V_0^b(V). \tag{8}$$

证明 对任何 $x \in [-a,a]$，不妨设 $x > 0$，T 是 $[0,x]$ 的任意一个分划：

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = x,$$

记 $t'_k = -t_{n-k}(k = 0,1,2,\cdots,n)$，便相应地得到 $[-x,0]$ 的分划 T'：

$$-x = t'_0 < t'_1 < \cdots < t'_{n-1} < t'_n = 0.$$

由于 $f(x)$ 是 $[-a,a]$ 上的奇(偶) 函数，所以，有

$$V_0^x(f,T) = \sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} |f(t'_{n-k}) - f(-t'_{n-k+1})| =$$

$$\sum_{k=1}^{n} |f(t'_{n-k+1}) - f(t'_{n-k})| = V_{-x}^0(f,T'), \tag{9}$$

由(9) 式得

$$V(x) = V_0^x(f) = \sup_T \{V_0^x(f,T)\} = \sup_{T'} \{V_{-x}^0(f,T')\} \leqslant V_{-x}^0(f) = V(-x),$$

同理可证 $V(-x) \leqslant V(x)$，所以有

$$V(-x) = V_0^{-x}(f) = V_0^x(f) = V(x), \tag{10}$$

当 $x = 0$ 时，(10) 式显然成立。故 $V(x) = V_0^x(f)$ 是 $[-a,a]$ 上的偶函数。

对任何 $b \in [-a,a]$，由(10) 式，有

$$V_{-b}^b(f) = V_{-b}^0(f) + V_0^b(f) = 2V_0^b(f), \tag{11}$$

由(11) 式及定理 1 即知(8) 式成立。证毕。

定理 6 设 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 分别是 $[a,b]$ 与 $[\alpha,\beta]$ 上的有界变差函数，$V_1(x) = V_a^x(f_1)$，$V_2(x) = V_\alpha^x(f_2)$，$V_1([a,b]) \subset [\alpha,\beta]$，则复合函数 $V_2[V_1(x)]$ 也是 $[a,b]$ 上的有界变差函数。

证明：因为单调增函数 $V_1(x)$ 与 $V_2(x)$ 的复合函数 $V_2[V_1(x)]$ 必是定义域上的单调增函数，故定理结论成立。

注意，如果 $f_2[f_1(x)]$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数，未必成立等式：$V_2[V_1(x)] = V_a^x(f_2 \cdot f_1)(x \in [a,b])$。只要考察一下 $f_1(x) = (1-x)^2(0 \leqslant x \leqslant 1)$ 和 $f_2(x) = x^3(0 \leqslant x \leqslant 1)$ 便知这一事实。显然，$f_1(x)$，$f_2(x)$ 和 $f_2[f_1(x)] = (1-x)^6(0 \leqslant x \leqslant 1)$ 都是其定义域上的有界变差函数，并且

$$V_1(x) = V_0^x(f_1) = 1 - (1-x)^2, (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

$$V_2(x) = V_0^x(f_2) = x^3, (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

$$V_2[V_1(x)] = [1 - (1-x)^2]^3, (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

$$V_0^x[f_2 \cdot f_1] = 1 - (1-x)^6, (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

当 $0 < x < 1$ 时，$V_2[V_1(x)] \neq V_0^x(f_2 \cdot f_1)$.

定理 7 设 $f_n(x)(n = 1,2,\cdots)$ 是 $[a,b]$ 上的一列有界变差函数，若 $V_n(x) = V_a^x(f_n)(n = 1,2\cdots)$ 在 $[a,b]$ 上处处收敛，则其极限函数 $V(x)$ 也是 $[a,b]$ 上的有界变差函数，对任何 $c \in [a,b]$，有

$$\lim_{n\to\infty} V_a^c(V_n) = V_a^c(V). \tag{12}$$

证明：因为 $V_n(x)(n = 1,2,\cdots)$ 是 $[a,b]$ 上的单调增函数，所以，对任何 $x_1, x_2 \in [a,b]$，$x_1 < x_2$，有

$$V_n(x_1) \leqslant V_n(x_2), (n = 1,2,\cdots). \tag{13}$$

在(13) 式两端取极限即得

$$V(x_1) = \lim_{n\to\infty} V_n(x_1) \leqslant \lim_{n\to\infty} V_n(x_2) = V(x_2), \tag{14}$$

(14) 式表明，$V(x)$ 是 $[a,b]$ 上的单调增函数，从而是 $[a,b]$ 上的有界变差函数，且对任何 $c \in [a,b]$，有

$$\lim_{n\to\infty} V_a^c(V_n) = \lim_{n\to\infty} V_n(c) = V(c) = V_a^c(V).$$

(12) 式成立。证毕。

定理 8　设 $f_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 是 $[a,b]$ 上的一列有界变差函数，$V_n(x)=V_a^x(f_n)(n=1,2,\cdots)$，若 $\sum_{n=1}^{\infty}V_n(b)$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}V_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于一单调增函数 $V(x)$，并在 $[a,b]$ 上几乎处处成立

$$V'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}V_n'(x). \tag{15}$$

证明：因为 $V_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 是 $[a,b]$ 上的非负单调增函数，所以对一切 $x\in[a,b]$，有

$$|V_n(x)|=V_n(x)\leqslant V_n(b),(n=1,2,\cdots)$$

又 $\sum_{n=1}^{\infty}V_n(b)$ 收敛，由 Weierstrass 判别法[4]，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}V_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于一函数 $V(x)$。对任何 $x_1,x_2\in[a,b]$，$x_1<x_2$，由于 $0\leqslant V_n(x_1)\leqslant V_n(x_2)(n=1,2,\cdots)$，于是有

$$V(x_1)=\sum_{n=1}^{\infty}V_n(x_1)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}V_n(x_2)=V(x_2),$$

所以，$V(x)$ 是 $[a,b]$ 上的单调增函数。

显然，$\sum_{n=1}^{\infty}V_n(a)$ 收敛，由此及已知条件，根据 Fubini 逐项求导定理[1] 即得(15) 式。证毕。

应当注意，定理 6，定理 7 和定理 8 中，关于全变差函数的结论，对于一般的有界变差函数并非普遍成立，可参见文献[5] 的有关例子。

参考文献：

[1] 夏道行，严绍宗．实变函数与应用泛函分析基础[M]．上海：上海科学技术出版社，1987．

[2] 江泽坚，吴智泉．实变函数论[M]．北京：人民教育出版社，1961．

[3] 陈建功．实函数论[M]．北京：科学出版社，1958．

[4] Polya G，Szegö G．数学分析中的问题和定理[M]．张奠宙，宋国栋．上海：上海科学技术出版社，1981．

[5] 汪林．实分析中的反例[M]．北京：高等教育出版社，1989．

The property of function of total variation

LI Yun－xia

(Department of Mathematics，Xiangtan Normal University，Xiangtan 411201，China)

Abstract：This paper discusses properties of function of total variation，and obtains some qualitative and quantitative results．

Key words：function of bounded variation；function of total variation；property