1. ~~当对 $\forall x\in R^2$~~ 对 $\forall x=(x_1,x_2)\in R^2$，$\|x\|=\max\{|x_1|,|x_2|\}\geq 0$

当 $\|x\|=0$ 时，有 $|x_1|=0$ 且 $|x_2|=0$，即 $x=(x_1,x_2)=(0,0)$

~~而当 $x=$~~

对 $\forall\lambda\in R$，$\|\lambda x\|=\max\{|\lambda x_1|,|\lambda x_2|\}=|\lambda|\max\{|x_1|,|x_2|\}=|\lambda|\|x\|$

对 $\forall x=(x_1,x_2)\in R^2$，$\forall y=(y_1,y_2)\in R^2$，有

$$\|x+y\|=\max\{|x_1+y_1|,|x_2+y_2|\}\leq\max\{|x_1|+|y_1|,|x_2|+|y_2|\}\leq\max\{|x_1|,|x_2|\}+\max\{|y_1|,|y_2|\}$$

$$=\|x\|+\|y\|$$

故 $\|\cdot\|$ 为一个范数

(i) K是一个正方形面

(ii) $\rho(0,e_1)=\|e_1\|=1$，$\rho(0,e_2)=\|e_2\|=1$，

$\rho(e_1,e_2)=\|e_1-e_2\|=\max\{1,1\}=1$

故 $\triangle_{oe_1e_2}$ 是等边的三角形

2. 当 $p=1$ 时，不等式显然成立。 ⟵ 证麻烦了

当 $p>1$ 时，记 $q=\frac{p}{p-1}$

$|ta||ta+(1-t)b|^{p-1}=(|ta|^p)^{\frac{1}{p}}\cdot(|ta+(1-t)b|^p)^{\frac{1}{q}}$

$|(1-t)b||ta+(1-t)b|^{p-1}=(|(1-t)b|^p)^{\frac{1}{p}}\cdot(|ta+(1-t)b|^p)^{\frac{1}{q}}$

则 $|ta+(1-t)b|^p=|ta+(1-t)b|\cdot|ta+(1-t)b|^{p-1}\leq|ta||ta+(1-t)b|^{p-1}+|(1-t)b||ta+(1-t)b|^{p-1}$

$=(|ta+(1-t)b|^p)^{\frac{1}{q}}\left((|ta|^p)^{\frac{1}{p}}+(|(1-t)b|^p)^{\frac{1}{p}}\right)$

两侧同除 $(|ta+(1-t)b|^p)^{\frac{1}{q}}$，即得

$$\left(|ta+(1-t)b|^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(|ta|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(|(1-t)b|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$ ⟵ 这个不等式太显然了

即 $|ta+(1-t)b|^p \le \left((|ta|^p)^{\frac{1}{p}} + (|(1-t)b|^p)^{\frac{1}{p}}\right)^p$

于是只需证 $\left(x^{\frac{1}{p}}+y^{\frac{1}{p}}\right)^p \le x+y$，其中 $x,y>0$

即 $x^k+y^k \le (x+y)^k$，其中 $x,y>0$，$0<k=\frac{1}{p}<1$

利用 $f(x)=|x|^p$ 的凸性（下凸函数）

得 $f(ta+(1-t)b) \le tf(a)+(1-t)f(b)$

3、(i) 首先易知，对 $\forall x(t)\in C[0,1]$，都有 $\|x\|\ge 0$

当 $\|x\|=0$ 时，有 $\sup\limits_{0\le t\le 1}|x(t)|=0$ 即 $x(t)\equiv 0$.

而且 $\forall \lambda\in R$，有 $\|\lambda x\| = \sup\limits_{0\le t\le 1}|\lambda x(t)| = |\lambda|\sup\limits_{0\le t\le 1}|x(t)| = |\lambda|\|x\|$

$\|x+y\| = \sup\limits_{t\in[0,1]}|x(t)+y(t)| \le \sup\limits_{t\in[0,1]}|x(t)| + \sup\limits_{t\in[0,1]}|y(t)| = \|x\|+\|y\|$

于是 $\|\cdot\|$ 为一个范数

(ii) 当 x_n 按范数收敛于 x_0 时，有 $\lim\|x_n-x_0\|=0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{t\in[0,1]}|x_n(t)-x_0(t)|=0$

于是 x_n 一致收敛于 x，反之同理。

4. 将 $C[0,1]$ 的一个子空间为 A，$A=\{f(x)\mid f(x)$ 以数列 $\{f(\frac{1}{n})\}$ 为不可导点，且两点之间用直线连接$\}$

于是 $\varphi: l^\infty \to A$ 是等距同构的。

$\{x_n\}$ 使 $f(\frac{1}{n})=\{x_n\}$ 的函数

注意：由于对 $C(0,1]$ 中任意一个元素 $f(x)$，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ 无法保证存在，故 $C(0,1]$ 与 $C[0,1]$ 不等距同构。

5. 在 E^2 中，$x=(x_1,x_2),\ y=(y_1,y_2)$

$\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$ 等价于 $\sqrt{(x_1+y_1)^2+(x_2+y_2)^2} \leq \sqrt{x_1^2+x_2^2}+\sqrt{y_1^2+y_2^2}$

两侧平方得

$$(x_1+y_1)^2+(x_2+y_2)^2 \leq x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2+2\sqrt{x_1^2+x_2^2}\cdot\sqrt{y_1^2+y_2^2}$$

即 $2x_1y_1+2x_2y_2 \leq 2\sqrt{x_1^2+x_2^2}\cdot\sqrt{y_1^2+y_2^2}$

两侧同时除以2并再次平方得

$$x_1^2y_1^2+x_2^2y_2^2+2x_1x_2y_1y_2 \leq x_1^2y_1^2+x_1^2y_2^2+x_2^2y_2^2+x_2^2y_1^2$$

即 $x_1x_2y_1y_2 \leq x_1^2y_2^2+x_2^2y_1^2$

易知这个不等式取等号成立的条件只有 $x=(x_1,x_2)=(0,0)$ 或 $y=kx\ (k\geq 0)$

在 $C[a,b]$ 中，不妨设在 $C[0,1]$ 中

$$\|x^2+\sin\tfrac{\pi}{2}x\| = 2 = 1+1 = \|x^2\|+\|\sin\tfrac{\pi}{2}x\|$$

于是 $C[a,b]$ 不是严格赋范的

在 $L[a,b]$ 中，不妨设在 $L[0,1]$ 中

$$\|x+\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{\pi}{2}x\| = 1 = \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2} = \|x\|+\|\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{\pi}{2}x\|$$

于是 $L[a,b]$ 不是严格赋范的

6. 首先易知 (i) 与 (ii) 成立，接下来只需验证 (iii) 也成立即可

$$p(-f) = \int_E \frac{|-f(x)|}{1+|-f(x)|}\,d\mu = \int_E \frac{|f(x)|}{1+|f(x)|}\,d\mu = p(f)$$

$$\lim_{\alpha_n\to 0} \rho(\alpha_n f) = \lim_{\alpha_n\to 0}\int_E \frac{|\alpha_n f(x)|}{1+|\alpha_n f(x)|}d\mu = \lim_{\alpha_n\to 0}\int_E \frac{|\alpha_n||f(x)|}{1+|\alpha_n f(x)|}$$

$$\leq \lim_{\alpha_n\to 0}\int_E |\alpha_n||f(x)|\,d\mu = 0$$

$$\cancel{\lim_{\rho(f_n)\to 0}\rho(\alpha f_n) = \lim_{\substack{\alpha_n\to 0\\ \rho(f_n)\to 0}}\int_E \frac{|\alpha||f_n(x)|}{1+|\alpha||f_n(x)|}d\mu}$$

$\rho(f_n)\to 0$ 等价于 f_n 依测度 μ 收敛于0，故 αf_n 也依测度 μ 收敛于0，也即 $\rho(\alpha f_n)\to 0$

综上 S 为赋准范空间

7. ~~容易看出 $\|\mu\| = |\mu|(X)$，这里是由于X可以表示成~~

容易看出 $\|\mu\| = |\mu|^*(X)$，即 X 关于外测度 $|\mu|^*$ 的值

当 $\|\mu\|=0$ 时，有 $|\mu|^*(X)$ 为0，即 $|\mu|(X)=0$；由于 $\mu \ll |\mu|$，若 $\mu(X)=0$

于是对 $\forall E\in\mathcal{B}$，都有 $\mu(B)=0$，故 μ 为恒零测度。

对 $\forall\lambda\in\mathbb{R}$，有 $\|\lambda\mu\| = |\lambda\mu|^*(X) = |\lambda|\,|\mu|^*(X) = |\lambda|\|\mu\|$

又有 $\|\mu+\nu\| = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n}|(\mu+\nu)(E_i)| \;\middle|\; E_i\in\mathcal{B},\ E_i\cap E_j=\phi\ (i\neq j),\ \bigcup_{i=1}^{n}E_i = X\right\}$

$$\leq \sup\left\{\sum_{i=1}^{n}|\mu(E_i)| \;\middle|\; E_i\in B,\ E_i\cap E_j=\phi\ (i\neq j),\ \bigcup_{i=1}^{n}E_i = X\right\}$$

使用sup与绝对值的不等式

$$+\sup\left\{\sum_{i=1}^{n}|\nu(E_i)| \;\middle|\; E_i\in B,\ E_i\cap E_j=\phi\ (i\neq j),\ \bigcup_{i=1}^{n}E_i = X\right\}$$

$$=\|\mu\|+\|\nu\|$$

于是 $\|\cdot\|$ 是 $V(X,B)$ 上的范数

8. 由于 ~~$\|P-Q\|$ 是距~~ $\rho(P,Q)=\sum_{i=0}^{n}|a_i-b_i|$ 是距离，又易知 $\rho(P,Q)=\rho(P-Q,0)$

$\rho(\lambda P,0)=\lambda\rho(P,0)$，故 $\|P\|=\rho(P,0)$ 是范数

令 $P=x$，$Q=1$

则 $\|P+Q\|=2=\|P\|+\|Q\|$

但 $P\neq kQ$，$k\in\mathbb{R}$

故 $\|\cdot\|$ 不是严格赋范的

9. ① 任取一族凸集 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in I}$，

记 $K=\bigcap\limits_{\lambda\in I}A_\lambda$

任取一点 $z\in K$，

有 $z\in A_\lambda$，$\lambda\in I$

由于 A_λ 是凸集，则存在两点 x,y 与 ~~$\lambda\in\mathbb{R}$~~ $\mu\in[0,1]$，有

~~$z=\lambda x+(1-\lambda)y$~~ $z=\mu x+(1-\mu)y$

由于 ~~是~~ $x、y\in A_\lambda$ $(\lambda\in I)$

则有 $x,y\in\bigcap\limits_{\lambda\in I}A_\lambda=K$

故 $\bigcap\limits_{\lambda\in I}A_\lambda=K$ 为凸集

② 任取一点 $x\in A+x_0$

记 $y=x-x_0$，则 $y\in A$

由于 A 是凸集，

则存在两点 $y_1、y_2\in A$ 与 $\mu\in[0,1]$，有

$$y=\mu y_1+(1-\mu)y_2$$

即 $x=y+x_0=\mu y_1+(1-\mu)y_2+\mu x_0+(1-\mu)x_0=\mu(y_1+x_0)+(1-\mu)(y_2+x_0)$

由于 $y_1+x_0、y_2+x_0\in A+x_0$

故 $A+x_0$ 为凸集