# 中国矿业大学（北京）作业纸

姓名：　　　　学号：　　　　班级：　　　　课程：

1. 由于 $E(f=a)=E(f\geq a)-E(f>a)$

故 $E(f=a)$ 是可测集

2. 由于 $\{E_i\}$ 可以不是相互不交的，那么

记 $F_n=\bigcup_{i=1}^{n}E_i$

$G_{n+1}=E_{n+1}-F_n$

易知 $\{G_n\}$ 是相互不交的，且 $\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n=E$

充分性：

$E(f\geq c)=\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n(f\geq c)$

易知 $f$ 在 $G_n$ ~~集~~ 是可测 ~~集~~，

于是 $f$ 在 $E$ ~~集~~ 是可测 ~~集~~。

必要性，~~记~~

对任意 $n$，$E_n(f\geq c)=E(f\geq c)\cap E_n$

则 $f$ 在 $E_n$ 上也是可测函数。

3. 对任意实数 $C$，存在一个基本有理数列 $\{r_i\}_i$，满足

$r_{i+1} \geq r_i$ 且 $\lim\limits_{i\to\infty} r_i = C$

那么 $E(f \geq c) = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E(f \geq r_i)$

由于 $E(f \geq r_i)$ 为可测集，

那么 $E(f \geq c)$ 也为可测集.

4. ① 若 $f$ 有界，则按定理3.1.6的证明过程，

存在 $N$，使得 $|f(x)| < N$，即 $N$ 与 $x$ 无关，

那么 $f_n(x)$ 一致收敛于 $f$

② 由 $f_n$ 的构造可知

$|f_n(x)| \leq |f_n(x_0)| \leq \frac{j_n}{n}$，其中 $x_0 \in E_{j_n}^{(n)}$，$j_n \in \{0, 1, \ldots, n^2\}$

由于 $f(x)$ 有界，

故满足 $E(\frac{j_n}{n} \leq |f| < \frac{j_n+1}{n}) \neq \emptyset$ 且 $E(\frac{j_n+1}{n} \leq |f| < \frac{j_n+2}{n}) = \emptyset$

的 $j_n$ 所组成的数列 $\{\frac{j_n}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ 单调递增且有界，

易知此时 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{j_n}{n} = \sup\limits_{x\in E} |f(x)|$

故 $|f_n(x)| \leq \frac{j_n}{n} \leq \sup\limits_{x\in E} |f(x)|$

# 中国矿业大学（北京）作业纸

姓名：　　　　学号：　　　　班级：　　　　课程：

5.

(1) 对于任何开集$O$，存在一列开区间$\{O_i\}$，满足

$$O=\coprod_{i=1}^{\infty}O_i \quad ，其中\ O_i=(a_i,b_i)$$

而 $f^{-1}(O)=\{x\in E\mid f(x)\in O\}=\coprod_{i=1}^{\infty}\{x\in E\mid f(x)\in O_i\}$

$=\coprod_{i=1}^{\infty}E(a_i<f(x)<b_i)$

故 $f^{-1}(O)$ 为可测集

(2) $f^{-1}(F)=\{x\in E\mid f(x)\in F\}=\{x\in E\mid f(x)\in(-\infty,+\infty)\}-\{x\in E\mid f(x)\in F^c\}=f^{-1}((-\infty,+\infty))-f^{-1}(F^c)$

由于 $(-\infty,+\infty)$ 与 $F^c$ 均为开集，

则 $f^{-1}(F)$ 为可测集

(3) ~~对于~~ 当$M$为$G_\delta$型集时

$f^{-1}(M)=\{x\in E\mid f(x)\in M\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x\in E\mid f(x)\in M_i\}$

其中 $M_i$ 为开集，

故$M$为可测集

同理，当$M$为$F_\sigma$型集时，$f^{-1}(M)$也为可测集

# 中国矿业大学（北京）作业纸

姓名：　　　　学号：　　　　班级：　　　　课程：

5 (iv) 由于 Borel 集的全体可由欧式拓扑中开集的可数并与可数差组成的集类所张成的最小 $\sigma$-代数

故~~由(i)结论~~反复使用类似(iii)的过程可得，若 $M$ 为 Borel 集，则 $f^{-1}(M)$ 是可测集

6. 由于 $h$ 是 Borel 函数，故 $h^{-1}([c,+\infty))$ 为 Borel 集，

由5题(iv)得 $f^{-1}(h^{-1}([c,+\infty)))$ 为可测集

7. 由定理3.1.3′可知 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} f_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} f_n = f$ 可测

9. 不一定，

详见 zhuanlan.zhihu.com/p/118675593

11.

[1] 先证若 $E\in\mathcal{L}$，则 $\tau_a(E)\in\mathcal{L}$，其中 $\tau_a(E)=\{a\cdot x \mid x\in E\}$

因为 $E\in\mathcal{L}$，则对任何 $F\in E'$，成立

$$m^*(F)=m^*(F-E)+m^*(F\cap E)$$

由于 $\tau_a(E\cap F)=\tau_a(E)\cap\tau_a(F)$

$$\tau_a(E-F)=\tau_a(E)-\tau_a(F)$$

因此 $m^*(\tau_a F)=m^*(\tau_a(E)\cap\tau_a(F))+m^*(\tau_a(F)-\tau_a(E))$

即上述命题成立

[1] 因为对任何一列 $E_i \in \mathbf{R}_0$，$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$，同时有 $\tau_a(E_i) \in \mathbf{R}_0$，

以及 $\tau_a E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \tau_a E_i$

由于 $am(E_i) = m(\tau_a(E_i))$

则 $m^*(E) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} m(E_i) \,\middle|\, E_i \in \mathbf{R}_0, E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right\}$

$\geq \frac{1}{a} \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} m(\tau_a(E_i)) \,\middle|\, \tau_a(E_i) \in \mathbf{R}_0, \tau_a(E) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \tau_a(E_i)\right\}$

$= \frac{1}{a} m^*(\tau_a(E_i))$

即 $a m^*(E) \geq m^*(\tau_a(E_i))$

由于 $\tau_{\frac{1}{a}}(\tau_a(E)) = E$

故 $m^*(\tau_{\frac{1}{a}}(\tau_a(E))) = m^*(E) \leq \frac{1}{a} m^*(\tau_a(E))$

即 $am^*(E) = m^*(\tau_a(E))$

---

由于 $f^{-1}([c, +\infty))$ 是 $\mathbf{L}$ 可测集

故 $\tau_{\frac{1}{a}}(f^{-1}([c, +\infty)))$ 也是 $\mathbf{L}$ 可测集，

故 $f(ax)$ 为 Lebesgue 可测函数

12. 先证：~~若~~ f可测的充分必要条件是对于任意开集 $G$，$f^{-1}(G)$ 可测。

证明：

必要性：由习题(5)的 i 给出

充分性：由于 $(a,+\infty)$ 也是开集，

故 $f^{-1}((a,+\infty)) = E(f>a)$

故 $f$ 可测

令 $g(x) = x^2$ 或 $x^3$ 或 $\frac{1}{x}$，易知 $\forall E\,(m(E)=0) \Rightarrow m(g^{-1}(E)) = 0$

故对任意开集 $G$

$$(f\circ g)^{-1}(G) = g^{-1}(f^{-1}(G))$$

由于 $G$ 是 Borel 集，~~来~~故 $f^{-1}(G)$ 为 lebesgue 可测集，

故 $f^{-1}(G) = B - E$，其中 $B$ 为某 Borel 集，$E$ 为零测集

故 $g^{-1}(f^{-1}(G)) = g^{-1}(B-E) = g^{-1}(B) - g^{-1}(E)$ 为可测集

13. (i) 对于连续函数$f$，

$E(f\geq a)$ 必为至多可列个不相交区间的并，

故$f$为可测函数

对于单调函数$f$，

$E(f\geq a)$ 必为一区间

故$f$为可测函数

对于阶梯函数$f$

$E(f\geq a)$ 必为至多可列个不相交区间的并，

故$f$为可测函数

(ii) 由于 $\frac{d}{dx}f(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

故 $\frac{d}{dx}f(x)$ 可测

14. 充分性：

~~由于对一切$r\in Q$，$X(r<f_\lambda)$可测，故$f_\lambda$可测，由$\lambda$的任意性，~~

结论成立

必要性

由习题7可得