1. ~~由于B是闭集，故X−B是开集，于是存在一列集族$\{A_i\}$，A_i是以x_i为中心，δ为半径的开球，使 $X-B=\bigcup_{i\in I}A_i$~~

令 $O_n=\{y\mid \rho(y,B)<\frac{1}{n}\}=\bigcup_{x\in B}O(x,\frac{1}{n})$

故O_n为开集

于是有 $\bigcap_{n=1}^{\infty}O_n=\lim_{n\to\infty}O_n=\overline{B}=B$

2. $O(F,a)=\bigcup_{y\in F}O(y,a)$ 由于$O(y,a)$为开集，故 $O(F,a)$也为开集

记 $K=\{x\mid \rho(x,F)\leq a\}$

取一列$\{x_n\}\in K$，且使$\lim_{n\to\infty}x_n=x'\in K'$

由于$\rho(x_n,F)\leq a$，令$n\to\infty$，则$\rho(x',F)\leq a$

故 $K'\subset K$，则K为闭集

3. ①记 $K=\{x\mid 当t\in B时,\ x(t)=0\}$

取一列$\{x_n\}\in K$，且使$\lim_{n\to\infty}x_n=x'\in K'$

故于当$t\in B$时，对任意的n，有 $x_n(t)=0$

于是由$\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,x')=\lim_{n\to\infty}\max_{t\in[a,b]}|x_n-x'|=0$，可推出

$\lim_{n\to\infty}\max_{t\in B}|x_n-x'|=\lim_{n\to\infty}\max_{t\in B}|x'|=0$，即当$t\in B$时，有$x'(t)=0$

于是 $x'\in K'\subset K$，即K为闭集

② 充分性：

当 B 为闭集时，可知 $|x(t)|$ 在 B 上可以取到最大值，不妨记为 M，

则取一点 $x \in \{x \mid 当 t\in B 时, |x(t)| < a\}$，有 $M < a$，任取一值 $0<\varepsilon<a-M$

易知 $O(x,\varepsilon) \subset \{x \mid 当 t\in B 时, |x(t)| < a\}$，即集合为开集。

必要性：~~假设B为~~ 由于 $\{x \mid 当 t\in B 时, |x(t)| < a\}$ 为开集，

那么 $K = \{x \mid 存在 t_0\in B, 使 |x(t_0)| \geq a\}$ 为闭集

对 B 中任意一列点 $\{t_n\}$，如果 $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t'$ 收敛，则

令 $x_n(t) = \begin{cases} a+\frac{1}{n}, & t=t_n \\ 0, & t=a 或 t=b \\ 线性, & 其它 \end{cases}$

则易知 $x_n(t) \in K$

由于 K 为闭集，故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) = x'(t) \in K$

于是存在 $t_0\in B$，使 $|x'(t_0)| \geq a$

易知 $\lim\limits_{n\to\infty} x'(t_n) = a$，即 $x'(t') = a$，且对 $\forall t\neq t'$，$|x'(t)| < a$

故必有 $t'\in B$，即 $B' \subset B$，故 B 为闭集

4\. ① 任取一列 $\{x_n\} \in \bigcap\limits_{\alpha\in A} A_\alpha$，使 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x'$ 存在

于是对 $\forall \alpha\in A$，$\{x_n\} \in A_\alpha$，那么 $x' \in A_\alpha'$

故 $x' \in \left(\bigcap\limits_{\alpha\in A} A_\alpha\right)' \subset \bigcap\limits_{\alpha\in A} A_\alpha'$

② 任取一列 $\{x_n\} \in \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$，由于 $\{A_i\}$ 个数有限，故存在一个子列 $\{x_{n_k}\} \in A_{i_0}$

那么 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in A_{i_0}'$，故 $\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right)' = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i'$

任取一列 $\{x_n\} \in A_{i_0}$，使 $\lim_{n\to\infty} x_n = x' \in A_{i_0}'$

有 $\{x_n\} \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$，故 $\lim_{n\to\infty} x_n = x' \in \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)'$

即 $\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)' \supset \bigcup_{i=1}^{n} A_i'$

故 $\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)' = \bigcup_{i=1}^{n} A_i'$

5. 当 A 为闭集时，有 $A' \subset A$，那么 $\overline{A} = A' \cup A \subset A$，即 $\overline{A} = A$

当 $\overline{A} = A$ 时，由 $\overline{A} = A' \cup A$，故 $A' \subset A$，则 A 为闭集

6.

$$\overline{A} = \{z \mid |z| \le 2\}$$

$K(A) = \varnothing$

$\Gamma(A) = \overline{A} - K(A) = \overline{A}$

$\{A\text{的外点}\} = E^2 - \Gamma(A) - K(A) = \{z \mid |z| > 2\}$

7. 只需证明开核的补集为补集的闭包，即 $R - K(A) = \overline{R-A}$

由于 $K(A)$ 为开集，$R-K(A)$ 为闭集，$\overline{R-A}$ 为包含 $R-A$ 的最小闭集，

故 $R - K(A) \supset \overline{R-A}$

由于 $\overline{R-A}$ 为闭集，$R - \overline{R-A}$ 为开集，$K(A)$ 是包含于 A 的最大开集，

故 $R - K(A) \subset \overline{R-A}$

即有 $R - K(A) = \overline{R-A}$

8. 记 $\rho(E, F) = a$

则取 $\{x \mid \rho(x, E) < \frac{a}{3}\}$，$\{x \mid \rho(x, F) < \frac{a}{3}\}$ 即可

9. ① 当 $f(x)$ 是 E 上的上半连续函数，

~~记 $E(f(x)\geq a)=K$，~~

~~任取一列 $\{x_n\}\in K$，使 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x'$ 存在~~

~~则有 $\lim\limits_{r\to0}\sup\limits_{x\in O(x_0,r)\cap E}$ $f(x)\leq f(x_n)$ 且 $f(x_n)\geq a$~~

记 $E(f(x)<a)=K$

则对 $\forall x_0\in K$，有 $\lim\limits_{r\to0}\sup\limits_{x\in O(x_0,r)\cap E} f(x)\leq f(x_0)$，

则对 $\forall\delta>0$，存在 $\gamma>0$，使当 $x\in O(x_0,\gamma)\cap E$ 时，

记 $f(x_0)=b$，~~则对 $\forall\delta>0$，存在 $\gamma>0$，使 $x\in O(x_0,\gamma)\cap E$ 时，有~~ 有 $f(x)\leq f(x_0)+\delta$

取 ~~$\varepsilon=\min\{\frac{a-b}{2},$~~ $\delta=\frac{a-b}{2}$， ~~$\varepsilon=\min\{\frac{a-b}{2},\gamma\}$~~ $\varepsilon=\gamma$

则对 $\forall y\in O(x_0,\varepsilon)\cap E$

有 $f(y)\leqslant f(x_0)+\delta=b+\frac{a-b}{2}=\frac{a+b}{2}<a$

故 $O(x_0,\varepsilon)\cap E\subset K$

那么 K 为开集，于是 $R-K$ 为闭集。

② 当 K 为开集时，

对 $\forall x_0\in K$，都有一个 $\varepsilon>0$，使 ~~$O(x_0,\varepsilon)\subset K$~~ $O(x_0,\varepsilon)\cap E\subset K$

记 $\sup\limits_{x\in O(x_0,\varepsilon)\cap E} f(x)=b_\varepsilon$

则有 $b_\varepsilon<a$

由于 $x_0\in O(x_0,\varepsilon)\cap E$，故 $f(x_0)\leqslant b_\varepsilon$

令 $\varepsilon\to0$，有 $f(x_0)=\lim\limits_{\varepsilon\to0}\sup\limits_{x\in O(x_0,\varepsilon)\cap E} f(x)$

即 $f(x)$ 在 x_0 处上半连续，由 x_0 的任意性知，$f(x)$ 上半连续

注：由于 $x_0\in O(x_0,r)\cap E$，故始终有 $\lim\limits_{r\to0}\sup\limits_{x\in O(x_0,r)\cap E} f(x)\geq f(x_0)$

10. ① ~~将~~记 X 为全空间，B 为~~对~~子空间 A 的联络集

为 $B=(A\cap X_1)\sqcup(A\cap X_2)$，其中 $\sqcup$ 表示无交并，

~~即 $B=(A\cap X_1)\cup(A\cap X_2)$ 且 $(A\cap X_1)\cap(A\cap X_2)\neq\emptyset$~~

即 $X=X_1\sqcup X_2 \iff X=X_1\cup X_2$ 且 $X_1\cap X_2=\emptyset$

于是 $X=X_1\sqcup X_2$，即 X 也联络

② 反之也成立

11. 假设 A 不联络，那么存在两个既开又闭且非空集 A_1、A_2，使

$A=A_1\sqcup A_2$

取 A_1 中一点 x_1，A_2 中一点 x_2

则对任何包含 x_1、x_2 的子集 B，均有 $B=(B\cap A_1)\sqcup(B\cap A_2)$

即 B 不联络，这与题干矛盾，故 A 联络

12. ~~$p(x$~~ 首先 $p(\tilde{x})=\inf\limits_{y\in\tilde{x}}\|y\|\geq 0$

~~$p(\tilde{x}+\tilde{y})=\inf\limits_{z\in\tilde{x}+\tilde{y}}\|z\|$~~

由 $p(\tilde{x})=\inf\limits_{y\in\tilde{x}}\|y\|$ 知

对 $\forall\varepsilon>0$，存在一个 y，使 $p(\tilde{x})\leq\|y\|\leq p(\tilde{x})+\varepsilon$

则 $p(\tilde{x}+\tilde{y})=\inf\limits_{z\in\tilde{x}+\tilde{y}}\|z\|\leq\|z\|=\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|\leq p(\tilde{x})+p(\tilde{y})+2\varepsilon$

令 $\varepsilon\to 0$，则得三角不等式

于是 $p(\tilde{x})$ 为一个 R/E 上的半范数

~~$\{p(\tilde{x})=0\}$~~ $\{y\mid p(\tilde{y})=0\}=\{y\mid y\in\tilde{0}\}=E$

(仿第7小节即可证明)

13. 不行，只有完备的度量空间才行

取 $\{0\}\cup(1,2)$ 为 R^1 的子空间，

则 $\rho(0,(1,2))=1$ 但 $\forall x\in(1,2)$，有 $\rho(0,x)=x>1$

14. 设 x 有两个最佳逼近 $x_0=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i g_i$，$y_0=\sum_{i=1}^{n}\tau_i g_i$

则 $\|x_0+y_0\|=\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i g_i+\sum_{i=1}^{n}\tau_i g_i\|\le\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i g_i\|+\|\sum_{i=1}^{n}\tau_i g_i\|$

而 $\|x_0+y_0\|=\|\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i+\tau_i)g_i\|=\cancel{a}\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i+\tau_i)\|g_i\|=\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i g_i\|+\|\sum_{i=1}^{n}\tau_i g_i\|$

由于 R 严格赋范，则存两个常数 C_1、C_2，使

$C_1\lambda_i=C_2\tau_i$

~~再~~由于 $\|x-\cancel{x}y_0\|=\inf_{\mu_1,\dots,\mu_n}\|x-\sum_{i=1}^{n}\tau_i g_i\|=\inf_{\mu_1,\dots,\mu_n}\|x-\sum_{i=1}^{n}\frac{C_1}{C_2}\lambda_i g_i\|=\|x-\frac{C_1}{C_2}x_0\|$

于是只能 $\frac{C_1}{C_2}=1$，即 $\lambda_i=\tau_i$，故 $x_0=y_0$

15. 准赋范数的非负性正定性与三角不等式证明过程与第七小节证明过程一样

而 $\lim_{\alpha_n\to0}\rho(\alpha_n\tilde{x})=\lim_{\alpha_n\to0}\inf_{y\in\tilde{x}}\rho(\alpha_n y)=\underline{\inf_{y\in\tilde{x}}\lim_{\alpha_n\to0}\rho(\alpha_n y)}=\inf_{y\in\tilde{x}}0=0$

由准赋范数诱导的距离的连续性可知，inf 与 lim 可交换

存在一列 $y_k\in\tilde{x}$，使 $\inf_{y\in\tilde{x}}\rho(\alpha_n y)=\lim_{k\to\infty}\rho(\alpha_n y_k)$

则 $\lim_{\alpha_n\to0}\rho(\alpha_n\tilde{x})=\lim_{\alpha_n\to0}\lim_{k\to\infty}\rho(\alpha_n y_k)=\lim_{\alpha_n\to0}\rho(\alpha_n\cdot\lim_{k\to\infty}y_k)=\rho(\lim_{\alpha_n\to0}\alpha_n\cdot\lim_{k\to\infty}y_k)$

$=\lim_{k\to\infty}\rho(\lim_{\alpha_n\to0}\alpha_n\cdot y_k)=\lim_{k\to\infty}\lim_{\alpha_n\to0}\rho(\alpha_n\cdot y_k)=\lim_{k\to\infty}0=0$

$$\lim_{\rho(\tilde{x}_n)\to 0} \rho(\alpha \tilde{x}_n) = \lim_{\rho(\tilde{x}_n)\to 0} \inf_{y_n\in\tilde{x}_n} \rho(\alpha\cdot y_n) = \inf_{y_n\in\tilde{x}_n} \lim_{\substack{\cancel{\rho(\tilde{x}_n)\to 0} \\ \rho(y_n)\to 0}} \rho(\alpha\cdot y_n) = 0$$

故 R/E 是赋>准范线性空间。

16. (1) $\gamma = C \cap \{x \mid$ x为开圆环中的一点，其中开圆环中的两个圆弧的半径分别为 $\frac{1}{2}$、2，圆弧的开始端在 $y=\alpha x$ 处，尾端在 $y=\beta x$ 处。$\}$

则 γ 为 C 中的开集

(2) 做 f: $C \longrightarrow [0, 2\pi]$, $\gamma \longrightarrow (\alpha, \beta)$，则 f 为两空间的保距映射，

由 $[0, 2\pi]$ 中的性质即可得结论。

17. 做类似上面的映射，这是保距映射，

由 $[0, 2\pi] \times \dots \times [0, 2\pi]^{n} = [0, 2\pi]^{n-1}$ 中的空间性质知，

$\mathcal{S}(\{开集\}) = \mathcal{B}^{n-1} \cap [0, 2\pi]^{n-1}$

故有 $\mathcal{S}(\{开弧\}) = \mathcal{S}(G) = \mathcal{B}^{2} \cap C$

18. 易知 T 为上面 f 的一个具体表示，故结论成立

注：上面的 16、17、18 用了 §4.5 中的度量空间的拓扑性质。