第20卷 第2期
1996年6月
东北重型机械学院学报
Journal of Northeast Heavy Machinery Institute
Vol. 20 No. 2
Jun. 1996

论 Lipschitz 连续性在各种可微定义下的充要条件

陈子真
（北京电子科技学院）

摘　要　讨论在不同的可微性定义下（通常意义下的．导出值或Dini 意义下的和粘性意义下的）Lipschitz 连续的充要条件．

关键词　Lipschitz 连续　可微　导出数　Dini 导数　粘性上、下导数

分类号　O174.1

0　引言

由微分学的中值定理可以得到下列 Lipschitz 连续的充分条件:

如果f是定义在 $[a,b]$ 上的实连续函数，若存在一个常数 $M\geqslant 0$，使得对于任意的 $x\in(a,b)$，$|f'(x)|\leqslant M$，那么，对于任意的 $x,y\in[a,b]$，有

$$|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|$$

这个条件绝不可能是必要的．因而，本文试图通过其他类型的可微性来理解 Lipschitz 连续性．

在本文中，用 R 表示实直线，$[a,b]$ 和 (a,b) 分别代表 R 的闭、开区间，m 和 m^* 分别为 Lebesgue 测度和 Lebesgue 外测度，$[A]^+=\max(A,0)$.

1　导出数对 Lipschitz 连续性的刻划

定义 1　设f是定义在 $[a,b]$ 上的实函数．对于 $x\in[a,b]$，f 在 x 处的导出集定义为

$$Df(x)=\left\{\lambda\in R\cup\{\pm\infty\}:\lambda=\lim_{k\to\infty}\frac{f(x+h_k)-f(x)}{h_k}\right\}$$

这里，$h_k\neq 0$，满足 $x+h_k\in[a,b]$ 及 $h_k\to 0$. $Df(x)$ 的元素称为f在 x 处的导出数．

在导出集的定义下，有下面的 Lipschitz 连续的充要条件:

定理 1　设f是定义在 $[a,b]$ 上的实函数，$M\geqslant 0$ 是一个常数．则对于任意的 $x,y\in[a,b]$，有

$$|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y| \tag{1}$$

当且仅当对任意的 $x\in[a,b]$ 时

$$Df(x)\subset[-M,M] \tag{2}$$

证明　式(2)的必要性是显然的．下面证明其充分性．假设存在 $[a,b]$ 上的函数f满

1993年1月13日收到

足式(2)，但不满足式(1)，则存在任意正数 ε，存在 x_0，$y_0\in[a,b]$，满足 $|f(x_0)-f(y_0)|>(M+\varepsilon)|x_0-y_0|$．

令 $x_1=(x_0+y_0)/2$，则必有 $|f(x_0)-f(x_1)|>(M+\varepsilon)|x_0-x_1|$ 或 $|f(x_1)-f(y_0)|>(M+\varepsilon)|x_1-y_0|$．因此，存在 $[x_1,y_1]\subset[x_0,y_0]$，满足 $|y_1-x_1|=|x_0-y_0|/2$ 以及 $|f(x_1)-f(y_1)|>(M+\varepsilon)|x_1-y_1|$．类似地，可得到 $[x_2,y_2]\subset[x_1,y_1]$，满足 $|y_2-x_2|=|x_1-y_1|/2$ 以及 $|f(x_2)-f(y_2)|>(M+\varepsilon)|x_2-y_2|$．

如此下去，对于任意自然数 k，得到闭区间 $[x_k,y_k]\subset[x_{k-1},y_{k-1}]$，满足 $|y_k-x_k|=|x_{k-1}-y_{k-1}|/2$ 以及 $|f(x_k)-f(y_k)|>(M+\varepsilon)|x_k-y_k|$．由此可以得到一个闭区间套 $\{[x_k,y_k]\}$，因而，存在 $z\in[a,b]$ 使得 $\{z\}=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}[x_k-y_k]$，有

$$|f(x_k)-f(z)|>(M+\varepsilon)|x_k-z| \text{ 或 } |f(z)-f(y_k)|>(M+\varepsilon)|z-y_k|$$

成立．即存在 $h_k\neq0$，满足 $z+h_k\in[a,b]$，且 $h_k\to0$ $(h\to\infty)$，满足

$$|f(z+h_k)-f(z)|>(M+\varepsilon)|h_k|$$

这意味着存在 $\lambda\in\mathrm{D}f(z)$，且 $|\lambda|\geqslant M+\varepsilon$，这与条件(2)矛盾．证毕．

实际上，式(2)可以被减弱为下面的形式．不过证明将复杂得多．

定理 2 设 f 是定义在 $[a,b]$ 上的实函数，$M>0$ 是一个常数．则对于任意的 $x,y\in[a,b]$，有 $|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|$，当且仅当对于几乎所有的 $x\in(a,b)$，成立

$$\mathrm{D}f(x)\cap[-M,M]\neq\phi \tag{3}$$

及对于所有的 $x\in[a,b]$，成立

$$\mathrm{D}f(x)\subset R \tag{4}$$

条件(3)和(4)的必要性是显然的．实际上，存在无处可微的连续函数，使得 0 是在每一点的一个导出数，即条件(3)成立(参见文献[1])．很容易看出，条件(4)也不能单独地保证 Lipschitz 连续性．为了证明定理 2，先证明两个引理．

引理 1 设 f 是定义在 $[a,b]$ 上满足式(2)的一个实函数，则 $[a,b]$ 的任何零测集在 f 下的像也是零测集．

证明 任取 $[a,b]$ 的一个零测集 E，对于任何自然数 k，令

$$E_k=\{x\in E:\ \mathrm{D}f(x)\subset[-k,k]\}$$

则

$$E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$$

需证明对于每一个固定的 k，$mf(E_k)=0$．任取 $\varepsilon>0$ 和 (a,b) 的开子集 $G_k(\varepsilon)\supset E_k$，满足 $mG_k<\varepsilon$，则对于 $x\in E_h$，存在 $\delta=\delta(x)>0$，使得

$$\mathrm{d}(x,\delta(x))=[x-\delta(x),\ x+\delta(x)]\subset G_k(\varepsilon)$$

以及对于 $0<|h|\leqslant\delta(x)$，$x+h\in(a,b)$，

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|<k+1$$

成立．由此可得，对于 $0<\delta\leqslant\delta(x)$，有

$$f(\mathrm{d}(x,\delta))\subset \mathrm{D}(x,\delta)=[f(x)+(k+1)\delta,\ f(x)+(k+1)\delta] \tag{5}$$

记 $V=\{\mathrm{D}(x,\delta):x\in E_k,\ 0<\delta\leqslant\delta(x)\}$，显而易见，$V$ 是 $f(E_k)$ 的一个 Vitali 复盖．对 V 应用 Vitali 复盖定理，就得到一列两两不相交的 V 的闭区间 $\{D(x_j,\delta_j)\}$，使得

$$m\left(f(E_k)-\bigcup_{j=1}^{\infty}D(x_j,\delta_j)\right)=0$$

注意由式 (5) 可得 $\{\mathrm{d}(x_j,\delta_j)$ 是两两不相交的，因此得到

$$m^*f(E_k)\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}|D(x_j,\delta_j)|\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}(k+1)|\mathrm{d}(x_j,\delta_j)|\leqslant(k+1)mG_k(\varepsilon)\leqslant(k+1)\varepsilon$$

由此可得 $mf(E_k)=0$，所以 $mf(E)=0$．引理得证．

引理 2　设 f 是定义在 $[a,b]$ 上的一个几乎处处满足 $f'(x)>0$ 的连续函数，如果 f 在 (a,b) 上不是单调递增的，那么集合 $f(\{x:\mathrm{D}f(x)\cap[-\infty,\ 0]\neq\phi$ 包含一个开区间．

证明　由 f 在 $[a,b]$ 上不是单调递增的，存在 $c,d\in[a,b]$，满足 $c<d$ 及 $f(c)>f(d)$．由连续函数的介值定理，对于任何实数 $\mu\in(f(d)>f(c))$，集合 $f^{-1}(\mu)=\{x\in(c,d):f(x)=\mu\}\neq\phi$，令

$$x_0=\max\{x\in f^{-1}(\mu)\}$$

则：(ⅰ) $f(x_0)=\mu$；(ⅱ) $x_0\in(c,d)$；(ⅲ) 对于 $x\in(x_0,d)$，有 $f(x)<\mu$，所以 $Df(x_0)\cap[-\infty,0]\neq\phi$，引理得证．现在证明式 (3) 和 (4) 的充分性．任取 $\varepsilon>0$，对于 $x\in[a,b]$，设 $g(x)=f(x)+(M+\varepsilon)x$，则 g 满足式 (1)(对于几乎所有的 $x\in[a,b]$，$\mathrm{D}g(x)\cap[\varepsilon,2M+\varepsilon]\neq\phi$) 及式 (2)(对于所有的 $x\in[a,b]$，$\mathrm{D}g(x)\subset R$)．

由 Denjoy－Young－Saks 定理[2]，g 在 $[a,b]$ 上几乎处处可微，且 $g'(x)\geqslant\varepsilon>0$．$g$ 在 $[a,b]$ 上的连续性是显然的，所以，利用引理 1 和引理 2 就得到 g 在 $[a,b]$ 上是单调递增的．因而，对于满足 $x\leqslant y$ 的 $x,y\in[a,b]$，有 $f(x)-f(y)\geqslant-(M+\varepsilon)(x-y)$．类似地，考虑 $h(x)=-f(x)+(M+\varepsilon)x$，可得，对于满足 $x\leqslant y$ 的 $x,y\in[a,b]$，有

$$f(x)-f(y)\leqslant-(M+\varepsilon)(x-y)$$

这意味着，对于 $x,y\in[a,b]$，

$$|f(x)-f(y)|\leqslant(M+\varepsilon)|x-y|$$

成立．令 $\varepsilon\downarrow 0$，则定理 2 得证．

2　粘性导数对 Lipschitz 连续性的刻划

定义 2　设 f 是定义在 $[a,b]$ 上的实函数．对于 $x\in(a,b)$，f 在 x 处的上、下导集分别

定义为

$$J^{+}f(x)=\{p\in R: f(y)\leqslant f(x)+p(y-x)+o(|y-x|)\}$$
$$J^{-}f(x)=\{p\in R: f(y)\geqslant f(x)+p(y-x)+o(|y-x|)\}$$

$J^{+}f(x)$ 和 $J^{-}f(x)$ 的元素分别称为 f 在 x 处的上、下粘性导数．

为了帮助理解粘性上、下导数，先建立它们与 Dini 导数的关系．

定义 3　设 f 是定义在 $[a,b]$ 上的实函数．对于 $x\in[a,b]$，下列 4 个数

$$D_l^{+}f(x)=\limsup_{y\uparrow x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\qquad D_l^{-}f(x)=\liminf_{y\uparrow x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$
$$D_r^{+}f(x)=\limsup_{y\downarrow x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\qquad D_r^{-}f(x)=\liminf_{y\downarrow x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

分别定义为 f 在 x 处的左上、左下、右上、右下导数．

引理 3　设 f 是定义在 $[a,b]$ 上的实函数．对于 $x\in(a,b)$，则

(ⅰ) $J^{+}f(x)\neq\phi$，当且仅当 $D_l^{-}f(x)$ 和 $D_r^{+}f(x)$ 不同时等于 $+\infty$ 或 $-\infty$，且满足 $D_r^{+}f(x)\leqslant D_l^{+}f(x)$．事实上 $J^{+}f(x)=\{p\in R: D_r^{+}f(y)\leqslant p\leqslant D_l^{-}f(x)\}$；

(ⅱ) $J^{-}f(x)\neq\phi$，当且仅当 $D_r^{-}f(x)$ 和 $D_l^{+}f(x)$ 不同时等于 $+\infty$ 或 $-\infty$，且满足 $D_l^{+}f(x)\leqslant D_r^{+}f(x)$．事实上 $J^{-}f(x)=\{p\in R: D_l^{+}f(x)\leqslant p\leqslant D_r^{-}f(x)\}$；

证明　仅证明第一部分．第二部分的证明是类似的．

假设 $J^{+}f(x)\neq\phi$，任取 $p\in J^{+}f(x)$，则对于 $y\in(a,b)$

$$f(y)\leqslant f(x)+p(y-x)+o(|y-x|)$$

当 $y>x$ 时，上式给出 $[f(y)-f(x)]/(y-x)\leqslant p+o(1)$，也就是 $D_r^{-}f(x)\geqslant p$．同样地，考虑 $y<x$，可得 $p\geqslant D_l^{+}f(x)$．

设 $D_r^{+}f(x)\leqslant D_l^{-}f(x)$，任取 p 满足 $D_r^{+}f(x)\leqslant p\leqslant D_l^{-}f(x)$，则

$$\limsup_{y\uparrow x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\leqslant p\leqslant\liminf_{y\uparrow x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

即 $$\limsup_{y\uparrow x}\frac{f(y)-f(x)-p(y-x)}{y-x}\leqslant 0\leqslant\liminf_{y\uparrow x}\frac{f(y)-f(x)-p(y-x)}{y-x}$$

也就是 $$\limsup_{y\uparrow x}\frac{[f(y)-f(x)-p(y-x)]^{+}}{y-x}\leqslant 0\leqslant\liminf_{y\uparrow x}\frac{[f(y)-f(x)-p(y-x)]^{+}}{y-x}$$

由此得到 $\lim\limits_{y\to x}\dfrac{[f(y)-f(x)-p(y-x)]^{+}}{y-x}=0$．所以，$p\in J^{+}f(x)$．证毕．

事实上，对于几乎所有的 $x\in(a,b)$，$J^{\pm}f(x)$ 至多含有一个元素．进而，最多只有可数多个 $x\in(a,b)$，使得 $J^{+}f(x)$ 或 $J^{-}f(x)$ 有至多两个元素．这可由下面的命题得到．

命题 1　设 f 是定义在 $[a,b]$ 上的实函数，则只有可数多个 $x\in(a,b)$，使得

$$D_r^{+}f(x)\geqslant D_l^{-}f(x)\quad 和\quad D_l^{+}f(x)\geqslant D_r^{-}f(x)$$

中有一个不成立．

这个命题的证明很简单，在此不赘述．下面叙述关于粘性导数的 Lipschitz 连续的充要条件．下述证明是属于 H. Ishii[3] 的．

定理 3 （ⅰ）设 f 是定义在 (a,b) 上的半连续实数、$M>0$ 是一个常数．则对于任意的 $x,y\in(a,b)$，有 $|f(x)-f(y)|\leqslant M\ |x-y|$，当且仅当：对于任意的 $x\in(a,b)$，有

$$J^{+}f(x)\subset[-M,\ M] \tag{6}$$

（ⅱ）设 f 是定义在 (a,b) 上的下半连续实函数、$M>0$ 是一个常数、则对于任意的 $x,y\in(a,b)$，有 $|f(x)-f(y)|\leqslant M\ |x-y|$，当且仅当对于任意的 $x\in(a,b)$，有

$$J^{-}f(x)\subset[-M,\ M] \tag{7}$$

证明 仅证明第一部分，第二部分的证明是类似的．条件 (6) 的必要性是明显的，只要证明其充分性即可．任取两个不同的点 $x,x_0\in(a,b)$，需证 $f(x)-f(x_0)\leqslant M\ |x-x_0|$．

任取 $\varepsilon>0$ 及 $y\in(a,b)$，使得 x 在 y 和 x_0 之间．在 $[\min(y,x_0),\ \max(y,x_0)]$ 上定义连续可微函数 $\varphi(t)$，使其满足：(1) 当 t 在 x 和 x_0 之间时，$\varphi(t)=f(x_0)+(M+\varepsilon)\ |t-x_0|$；(2) $\varphi(y)>f(y)$；(3) 当 t 在 $(\min(y,x_0),\max(y,x_0))$ 内时，$|\varphi'(t)|\geqslant M+\varepsilon$．可以断言：对于 $t\in[\min(y,x_0),\ \max(y,x_0)]$，$\varphi(t)\geqslant f(y)$；否则，$f(t)-\varphi(t)$ 将在 $(\min(y,x_0),\ \max(y,x_0))$ 内取得其在 $[\min(y,x_0),\ \max(y,x_0)]$ 上的正最大值，即存在 $t_0\in(\min(y,x_0),\ \max(y,x_0))$，使得对于 $t\in[\min(y,x_0),\ \max(y,x_0)]$，

$$f(t)\leqslant f(t_0)+\varphi(t)-\varphi(t_0)=f(t_0)+\varphi'(t_0)(t-t_0)+o(|t-t_0|)$$

所以，$\varphi'(t_0)\in J^{+}f(t_0)$，但是 $|\varphi'(t_0)|\geqslant M+\varepsilon$，这与式 (6) 矛盾，因此

$$f(x)-f(x_0)\leqslant(M+\varepsilon)\ |x-x_0|$$

令 $\varepsilon\downarrow 0$，即得所要的结果．

参考文献

1 刘　文．关于局部循环函数．数学杂志，1982; (2): 142～144

2 陈建功．实变函数论．北京：科学出版社，1958

3 Ishii H. Perrons Method for Hamilton－Jacobi Equations. Duke Math. J, 1987; 55: 369～384

On The Necessary and Sufficient Conditions for Lipschitz Continuity under Various Types of Differentiability

Chen Zizhen

(Beijing Electronical Sciences and Technologies Institute)

Abstract It is stadied that the necessary and sufficient conditions for Lipschitz continuity under various types of differentiability ordinary type, derived value or Dini type and viscoisty type.

Key Words Lipschitz continuity; differentiable; derived value; Dini derivatires; viscosity super-and sub-derivative