

# 计算物理作业 12

刘畅, PB09203226

2012 年 11 月 5 日

[作业 12]: 以  $x_{n+1} = \lambda \sin \pi x_n$  为迭代方程, (1) 画出系统状态随参数  $\lambda$  的变化图; (2) 画出相应的 Lyapunov 指数随参数  $\lambda$  的变化图.

## 1 算法和程序

为了得到系统在  $n \rightarrow \infty$  时的状态, 我们做足够多次的迭代, 然后输出迭代序列的接下来一些项. 如果是稳定解的情况, 那么输出的迭代序列基本都是一样的. 如果是倍周期的情况, 输出的序列在两个值直接振荡. 如果是混沌的情况, 输出在某个区间内随机振荡. 要实现这个算法, 程序非常简单: (main.c:print\_iter\_seq())

```
#define INIT_X    (0.789)

void print_iter_seq(FILE *fout, double lambda,
                    int nskip, int nsteps)
{
    double x = INIT_X;
    int i;

    /* skip first nskip values in the sequence */
    for (i = 0; i < nskip; i++)
        x = iter_fcn(lambda, x);

    /* print next nsteps values of the iteration sequence */
    for (i = 0; i < nsteps; i++) {
        x = iter_fcn(lambda, x);
```

```

        fprintf(fout, "%.12f %.12f\n", lambda, x);
    }
}

```

上面的代码就是把前面的算法翻译成程序, 首先跳过迭代序列的前面几项, 然后输出序列的接下来几项. 为了通用起见, 前面的代码中将迭代函数设成了 `iter_fcn()`:

```

#define CONST_PI    (4.0*atan(1.0))
double iter_fcn(double lambda, double x)
{
    return lambda * sin(CONST_PI * x);
}

```

按照定义

$$\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{dx_n}{dx_0}}{n}$$

为了计算 Lyapunov 指数, 只要从  $x_0$  和  $x_0 + dx_0$  开始迭代计算至第  $n$  项即可. 代码如下: (`main.c:get_lyapunov()`)

```

double get_lyapunov(double lambda, double x, double delta, int nsteps)
{
    int i;
    double y = x + delta;

    assert(delta > 0);
    for (i = 0; i < nsteps; i++) {
        x = iter_fcn(lambda, x);
        y = iter_fcn(lambda, y);
    }
    return (log(fabs(y-x) / delta)) / nsteps;
}

```

如果 `log` 的参数过小, 那么函数返回的结果是 `-inf`, 在下面的作图中不能显示出点来. 其他部分没有什么好解释的, 就是把上面的算法翻译成 C 语言.

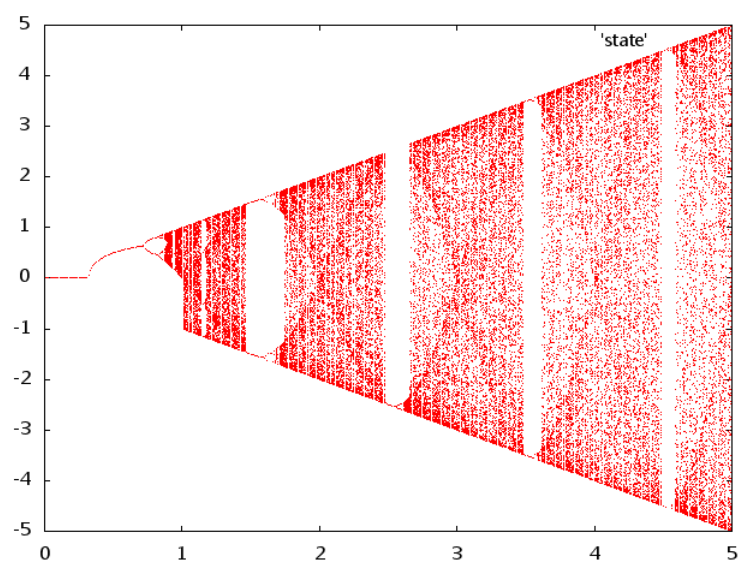
为了便于比较, 也由于代码组织的方式使得这样做很容易, 我们可以对 Logistic 映射  $y = \lambda x(1 - x)$  做同样的事情: (`logistic.c:iter_fcn()`)

```
double iter_fcn(double lambda, double x)
{
    return lambda * x * (1-x);
}
```

其余的代码完全一样, 在 `logistic.c`. 前面的代码在 `main.c`.

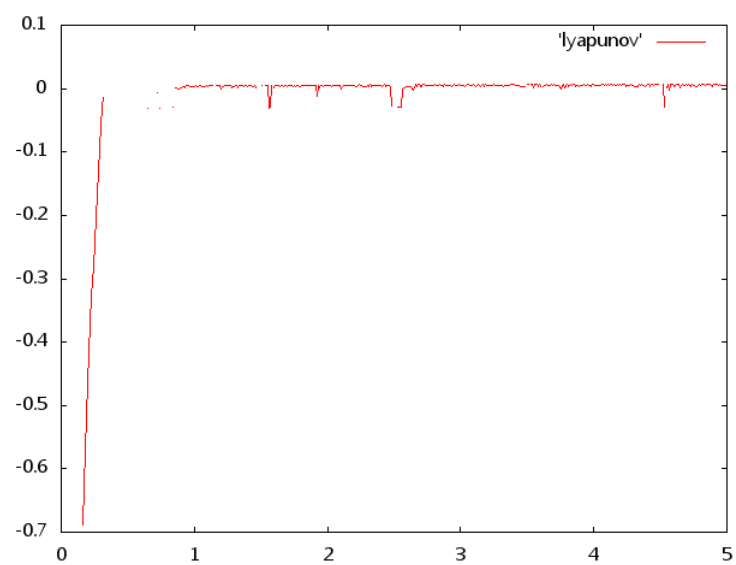
## 2 结果

用 `gnuplot` 作图 (作图代码见 `Makefile`), 对原问题, 状态随  $\lambda$  的图:



可以看到从一个  $\lambda_0 < 1$  开始系统有倍周期分叉的现象.  $\lambda = 1$  开始系统就进入了混沌状态.

然后是 Lyapunov 指数随  $\lambda$  的关系. 图上空的点对应的指数是  $-\infty$ . 可以看到和上面的状态图是一致的.



下面是 Logistic 映射对应的两个图. 可以看到和书上是一致的. 这表明我们的代码是正确的.

