计算物理作业 7

刘畅, PB09203226

2012 年 10 月 25 日

[作业 7]: 用 Monte Carlo 方法计算如下定积分, 并讨论有效数字位数.

$$\int_0^1 \sqrt{x+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

$$\int_{(x,y,z,u,v)\in[0,\frac{7}{10}]\times[0,\frac{4}{5}]\times[0,\frac{9}{10}]\times[0,1]\times[0,\frac{11}{10}]}(6-x^2-y^2-z^2-u^2-v^2)$$

1 算法

按照书上 Monte Carlo 积分的算法, 首先要在所要求的积分区域内生成均匀分布的随机点. 由于这一题中的两个积分都是在矩形区域上做的, 因此, 只要对每个积分变量产生 (一维的) 均匀分布就达到要求了. 假设产生了 N 个矩形上的均匀分布 $(\xi_{i_1},\dots,\xi_{i_k})$, Monte Carlo 积分的算法是

$$\int f \approx \frac{1}{N}\left[\prod_{i=1}^{k}(b_i-a_i)\right]\sum_{i=1}^{N} f(\xi_{i_1},\dots,\xi_{i_k})$$

2 程序

按照前面的算法, 首先要编写产生 $[0,a]$ 上均匀分布的例程: (`main.c`)

```
/* uniform distribution over [0,a] */
double rand_uni(double a)
{
    return a * (double) rand() / (double) RAND_MAX;
}
```

要用 Monte Carlo 方法计算 $\int_0^1 \sqrt{x+\sqrt{x}}$, 按照算法 (1), 代码是非常直接的: (见 `main.c`)

```
double integral_1(int nsteps)
{
    sum = 0.0;
    for (i = 0; i < nsteps; i++) {
        rand_nr = rand_uni(1.0);
        sum += sqrt(rand_nr + sqrt(rand_nr));
    }
    return sum / (double) nsteps;
}
```

`nsteps` 是式子 (1) 中的 N. 这个代码就是 (1) 翻译成 C 语言, 所要没有什么好解释的.

第二个积分就是比第一个积分多用了 4 个变量, 其余的代码是完全一样的. 见 `main.c:integral_2()`.

```
double integral_2(int nsteps)
{
    sum = 0.0;
    for (i = 0; i < nsteps; i++) {
        x = rand_uni(0.7);
        y = rand_uni(0.8);
        z = rand_uni(0.9);
        u = rand_uni(1.0);
        v = rand_uni(1.1);
        sum += 6.0 - x*x - y*y - z*z - u*u - v*v;
    }
    return sum * 0.7 * 0.8 * 0.9 * 1.1 / (double) nsteps;
}
```

3 结果

在程序里我把 `nsteps` 设成 `1<<22`, 也就是 $2^{22} = 4194304$. 运行结果为, 对第一个积分

$$\int f_1 \approx 1.045316461327$$

第二个积分

$$\int f_2 \approx 2.559506613359$$

这些积分都是可以求出精确值的, 第一个积分用 Mathematica 积出的准确值为

$$\frac{7}{6\sqrt{2}} + \frac{1}{8}\log\left(3 + 2\sqrt{2}\right) \approx 1.045301308139$$

可以看到, 小数点后 4 位数和我们 Monte Carlo 积分的结果是一致的.

第二个积分的准确值为

$$\frac{63987}{25000} \approx 2.55948$$

同样, 小数点后 4 位数和我们 Monte Carlo 积分的结果是一致的.

理论上可以证明, Monte Carlo 积分的有效数字正比于 $\frac{1}{\sqrt{N}}$. 这里 $\sqrt{N} = 2^{11} = 2048$, 因此我们预计小数点后 4 位数应该都是有效的. 这与前面实验的结果一致.