

# 计算物理作业 3

刘畅, PB09203226

2012 年 10 月 6 日

[作业 3]: 在球坐标系  $(\rho, \theta, \phi)$  下产生球面上均匀分布的随机坐标点, 给出其直接抽样方法。

## 1 算法

球面上的均匀分布满足

$$\frac{1}{4\pi} d\Omega = \frac{1}{4\pi} \sin \theta d\theta d\phi$$

因此概率密度函数

$$p(\theta, \phi) = \frac{1}{4\pi} \sin \theta = \frac{\sin \theta}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} = p(\theta) \cdot p(\phi)$$

因此  $\theta$  和  $\phi$  是独立的两个随机变量. 积累函数

$$\xi(\theta) = \int_0^\theta \frac{\sin \theta}{2} d\theta = \frac{1 - \cos \theta}{2}$$

$$\xi(\phi) = \frac{\phi}{2\pi}$$

因此对于  $[0, 1]$  上满足均匀分布的点列  $\xi$ , 变换

$$\theta(\xi) = \arccos(1 - 2\xi)$$

$$\phi(\xi) = 2\pi\xi$$

就得到单位球面上的均匀分布.

## 2 程序

程序非常直接, 按照前面的算法编码, 首先需要  $[0, 1]$  上的均匀分布:

```
/* uniform distribution over [0,1] */
double rand_norm(void)
{
    return (double) rand() / (double) RAND_MAX;
}
```

然后需要前面的变换函数:

```
double theta(double xi)
{
    return acos(1 - 2*xi);
}
```

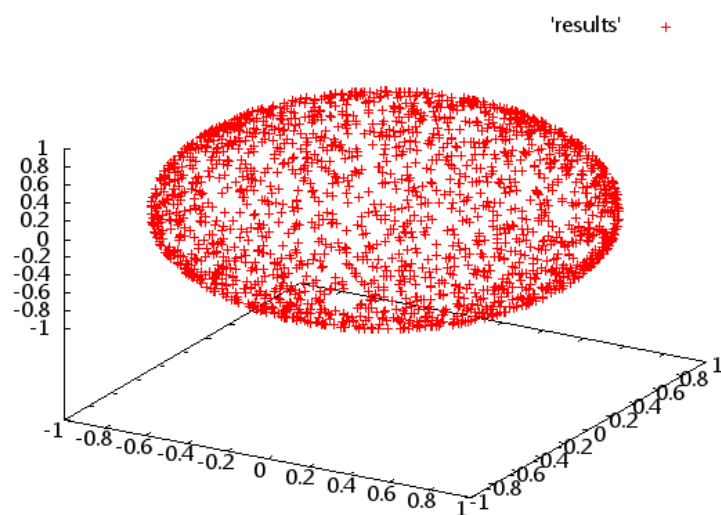
```
double phi(double xi)
{
    return 2 * CONST_PI * xi;
}
```

最后生成球面上的均匀分布数据点:

```
int main(void)
{
    srand(time(NULL));    /* init rand nr. gen. */
    for (i = 0; i < NSTEPS; i++) { /* generate dataset */
        t = theta(rand_norm());
        p = phi(rand_norm());
        printf("%.12f %.12f %.12f\n",
                sin(t)*cos(p), sin(t)*sin(p), cos(t));
    }
}
```

### 3 结果

运行这个程序, 将结果作图. 如下:



由于这是三维空间到二维平面的投影, 因此球面看起来像一个椭球面. 可以直观地看出这是一个均匀分布.