计算物理作业 4

刘畅　PB09203226

2012 年 10 月 8 日

[作业 4]: 对于球面上均匀分布的随机坐标点, 给出它们在 xy 平面上投影的几率分布函数。并由此验证 Marsaglia 抽样方法 $x = 2u\sqrt{1-r^2}$, $y = 2v\sqrt{1-r^2}$, $z = 1-2r^2$ 确为球面上均匀分布的随机抽样.

1　算法

球面上的均匀分布满足

$$\frac{1}{4\pi}\mathrm{d}\Omega = \frac{\sin\theta}{4\pi}\mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\phi$$

将这个 2-形式拖回到 xy 平面上. 为此需要 (x, y) 和 (θ, ϕ) 的变换关系

$$\begin{aligned}\theta &= \arccos(\sqrt{1-x^2-y^2}) \\ \phi &= \arctan\left(\frac{x}{y}\right)\end{aligned}$$

这样

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\theta &= \frac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}1-x^2-y^2} \\ \mathrm{d}\phi &= \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}\end{aligned}$$

这样

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\phi &= \frac{(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y) \wedge (y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y)}{(x^2+y^2)^{3/2}\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ &= -\frac{\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\end{aligned}$$

由于一个 (x,y) 对应两个 (θ,ϕ), 因此最终的概率密度应该是现在算出来的两倍, 为:

$$p(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

转换到 xy 平面上的极坐标 (r,φ),

$$p(r,\varphi) = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \cdot \frac{1}{2\pi} = p(r) \cdot p(\varphi)$$

和前一次作业一样:

$$\xi(r) = \int_0^r p(r) = 1 - \sqrt{1-r^2}$$
$$\xi(\varphi) = \frac{\varphi}{2\pi}$$

这样, 对 $[0,1]$ 上的随机分布 ξ, 计算反变换就得到满足条件的 (r,φ) 分布:

$$r = \sqrt{2\xi - \xi^2}$$
$$\varphi = 2\pi\xi$$

2 程序

按照算法编码, 程序是非常直接的, 首先需要 ξ, 即 `rand_norm()`

```
/* rand() normalized to [0,1] */
double rand_norm(void)
{
    return (double) rand() / (double) RAND_MAX;
}
```

然后需要 $r(\xi)$ 和 $\varphi(\xi)$

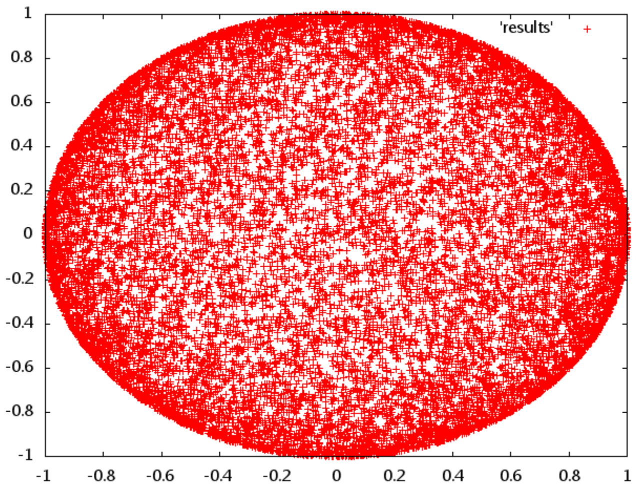
```
double radius(double xi)
{
    return sqrt(xi * (2-xi));
}
double varphi(double xi)
{
    return 2 * CONST_PI * xi;
}
```

最后生成数据点:

```
srand(time(NULL));
for (i = 0; i < NSTEPS; i++) {
    r = radius(rand_norm());
    p = varphi(rand_norm());
    printf("%.12f %.12f\n", r*cos(p), r*sin(p));
}
```

3 结果

将生成的数据点作图, 得到



可以发现, 直观上看确实是球面上均匀分布的投影.

4 验证 Marsaglia 抽样方法

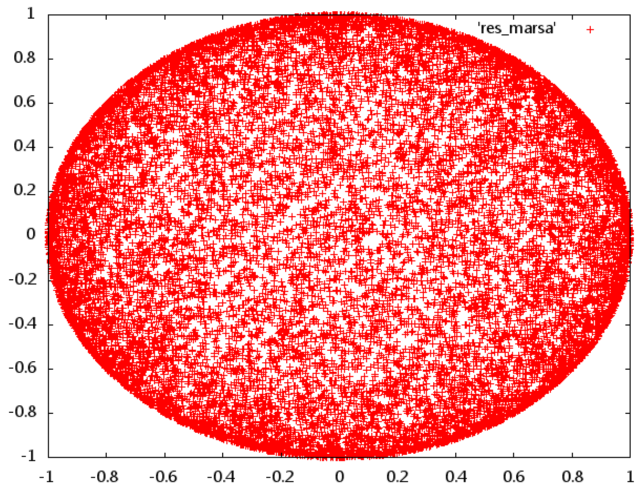
按照题目中给的算法编码, 主要代码为:

```
/* implements the marsaglia algorithm for sampling an uniform
   distribution over a sphere */
void rand_marsaglia(double *x, double *y)
{
```

```
    double u, v, r_squared;

start_all_over:
    u = rand_norm();
    v = rand_norm();
    r_squared = u*u + v*v;
    if (r_squared > 1)
        goto start_all_over;
    *x = 2*u * sqrt(1-r_squared);
    *y = 2*v * sqrt(1-r_squared);
}
```

同上面一样生成数据点, 作出图形:



发现和前面的结果几乎完全一样, 这样就验证了 Marsaglia 方法确实是有效的从球面上均匀分布抽样的方法.