计算物理作业 8

刘畅, PB09203226

2012 年 10 月 26 日

[作业 8]: 自设若干个随机分布 (它们有相同的 μ 和 σ^2), 通过 Monte Carlo 模拟, 验证中心极限定理对服从不同分布的独立变量 X 依然成立 $(N = 2, 3)$.

1 方案

我选择的第一个随机分布是指数分布, 为了后面的方便, 把分布函数向左平移 1 个单位, 使得 $\mu = 0$. 分布函数为

$$p(x) = \begin{cases} \exp(-x-1), & x \geq -1 \\ 0, & x < -1 \end{cases}$$

很容易计算它的 $\sigma^2 = 1$. 这个分布函数足够简单以至于可以用直接抽样, 为此, 要计算积累函数

$$\xi(x) = \int_{-1}^{x} p(x)\mathrm{d}x = 1 - \exp(-x-1)$$

其反函数为

$$x(\xi) = -\log(1-\xi) - 1$$

直接抽样法要求 ξ 从 $[0, 1]$ 上的均匀分布抽取, 由于 ξ 和 $1-\xi$ 等价, 上面的 (1) 可以简化为

$$x(\xi) = -\log(\xi) - 1$$

用这就可以对指数分布进行直接抽样.

我们的第二个分布选为 Gauss 分布, $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$, 这分布的分布函数为

$$p(x) = \frac{\exp(-x^2)}{\sqrt{2\pi}}$$

采用书上的变换抽样法, 首先生成两个独立的 $[0,1]$ 均匀分布 ξ 和 η, 这方法说按照

$$x(\xi,\eta)=\sqrt{-2\log\xi}\cos(2\pi\eta)$$

产生的 x 就服从归一化的 Gauss 分布 $N(0,1)$.

最后一个分布选为均匀分布, 使得分布函数关于 x 轴对称以便 $\mu=0$. 为了使得 $\sigma^2=1$, 选择区间长度 (即 $[-a,a]$ 中的 a) 使得

$$\int_{-a}^{a}x^2\mathrm{d}x=\frac{2a^3}{3}=1$$

这样, $a=\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$. 采用直接抽样法, 设 ξ 是 $[0,1]$ 上的均匀分布, 按照

$$x(\xi)=a(2\xi-1)=\sqrt[3]{\frac{3}{2}}(2\xi-1)$$

生成的 x 就服从 $[-a,a]$ 上的均匀分布.

在程序中, 我们要对随机变量 $Y=\frac{X_1+X_2}{2}$ 抽样, 其中 $X_1\sim\mathrm{Exp}$ 是我们前面的指数分布, $X_2\sim N(0,1)$. 对抽样结果做归一化直方图, 并且和中心极限定理给出的结果 $N(0,\sqrt{2})$ 进行比较.

同样, 还对 $Z=\frac{X_1+X_2+X_3}{3}$ 抽样, 其中 X_1, X_2 和前面一样, $X_3\sim\mathrm{Uniform}([-a,a])$, 同中心极限定理的结果 $N(0,\sqrt{3})$ 比较.

2 程序

首先要编写对前面给出的三个分布的抽样例程. 代码非常简单, 就是把前面的几个公式翻译成 C 语言.

```
double sample_exp(void)
{
    return -log(rand_norm())-1;
}

double sample_gauss(void)
{
    return sqrt(-2.0*log(rand_norm()))
             * cos(2.0*CONST_PI*rand_norm());
}
```

其中 `sample_exp()` 对指数分布抽样, `sample_gauss()` 对 Gauss 分布抽样. 由于均匀分布的抽样太简单, 所以没有单独写子程序.

然后, 要对 $Y = \frac{X_1+X_2}{2}$ 抽样, 代码

```
double sample_sum2(void)
{
    return (sample_exp() + sample_gauss()) / 2.0;
}
```

这个实在没有什么好解释的了.

同理, 对 $Z = \frac{X_1+X_2+X_3}{3}$ 抽样

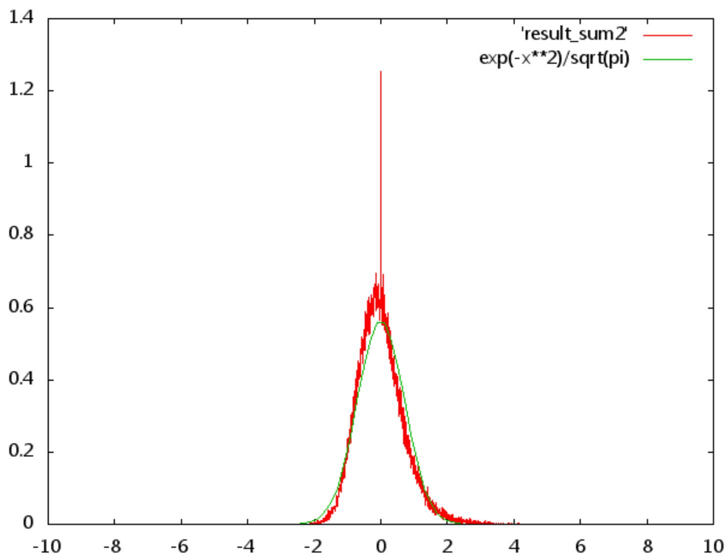
```
double sample_sum3(void)
{
    return ( sample_exp() + sample_gauss() +
             (2.0*rand_norm()-1.0) * pow(1.5,1.0/3.0)
            ) / 3.0;
}
```

以上的代码在 `main.c`.

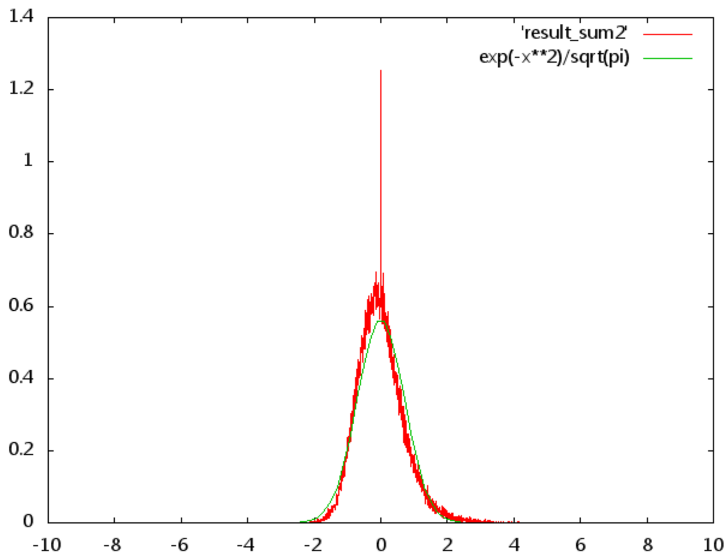
最后, 要为这几个抽样例程做直方图. 同样要用到前面第 5 次作业中写的 `count_freq()` 例程. 由于这个例程在前几次作业中已经解释过, 这里就不重复了. (代码在 `count_freq.c`)

3 结果

执行程序, 将中心极限定理的结果和程序的结果做在一张图上, 对 $Y = \frac{X_1+X_2}{2}$, 结果为:



对 $Z = \frac{X_1+X_2+X_3}{3}$, 结果为:



绿线是理论曲线, 可以看到, 和中心极限定理的结果是相当一致的.