CS477 Combinatorics: Homework 1

于峥 518030910437

Mar. 4, 2020

Problem 1. 令 $A = [5]$, $B = [3]$, $C = [3]$。
(a) 列举一个 $(A^B)^C$ 的元素。
(b) 列举一个 $A^{B\times C}$ 的元素。

Solution.
(a) $f : C \to A^B, \forall x \in C, f(x) = g$, 其中 $g : B \to A, \forall x \in B, g(x) = 1$。
写成有序组的形式 $((1, 1, 1), (1, 1, 1), (1, 1, 1))$。
(b) $f : B \times C \to A, \forall x \in B \times C,\ f(x) = 1$,
写成矩阵的形式

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

□

Problem 2. 在空间中有 n 个不同的蓝点和 m 个不同的红点，在每个蓝点和每个红点的中点画上一个紫色的点。（紫色的点有可能和某个红点或者蓝点重合。）
(a) 求紫色点的数量的最小值。
(b) 给出并证明上述取到最小值时的蓝点和红点分布的充要条件。

Solution. (a) 蓝色点集合为 A, 红色点集合为 B, 由于中点公式容易发现紫色点数量 $= |A + B|$。注意到如果把红点或蓝点整体平移，紫点的数量不会改变。所以我们通过平移让这些点两两不同。
我们可以给过每个点做一条直线使得这些直线互相平行，由于点是有限的，能够找到某个斜率，让每条直线只经过一个点，我们作这些直线的垂线为 x

轴，随意选定方向和原点。我们把每个点映射到点所在的 x 坐标，那么所有点对应的 x 坐标互不相同。

将红蓝点映射到 x 坐标形成的集合记为 A', B', 下证 $|A'+B'| \geq m+n-1$。我们知道实数集合加法满足 $|A+B| \geq |A'+B'| \geq m+n-1$，因此至少有 $m+n-1$ 个紫点。

$$A' = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$$
$$B' = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_m\}$$
$$a_1 < a_2 < \cdots < a_n$$
$$b_1 < b_2 < \cdots < b_m$$

那么有 $a_1+b_1 < a_2+b_1 < \cdots < a_n+b_1 < a_n+b_2 < \cdots < a_n+b_m$. 这里已经有 $n+m-1$ 个数, 所以集合的和大于 $n+m-1$。

(b) 红点和蓝点分别位于两条平行直线上，在直线上等距分布，并且相邻蓝点的距离与相邻红点相同。或者至少有一种颜色的点只有一个。

必要性: 代入验证发现可取到最小值。

充分性: 只考虑 $n>1, m>1$ 的情况，思考上一题证明中等号取到的条件, 对于 $a_{n-1}+b_2$ 必与 $a_1+b_1, a_2+b_1, \dots, a_n+b_1, a_n+b_2, \dots, a_n+b_m$ 中某个数相同，我们将这些数写成矩阵形式，

$$\begin{bmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_1 & \dots & a_n+b_1 \\ a_1+b_2 & a_2+b_2 & \dots & a_n+b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1+b_m & a_2+b_m & \dots & a_n+b_m \end{bmatrix}$$

显然 $a_{n-1}+b_2$ 必须要与所在位置右上的数相同，因为这个矩阵行列都是单调递增的。进而一次考虑其他的数可以发现每个反斜线上的数都是相等的。进而可以得出这样的结论，若将 a_i，b_i 看成数列，那么这两个数列都是等差数列，且差相同。注意到 a_i，b_i 分别为红蓝点的横坐标，对于横坐标加和相同的红蓝点对，纵坐标加和也必须满足，否则点数必将大于 $m+n-1$。因此我们可以得到点的分布。

$\square$

Problem 3. 证明：对任意的自然数 n，

$$\sum_{r=0}^{n} r\binom{n}{r} = n2^{n-1}.$$

Solution. 这个公式右边的组合意义为从 n 个人中选一个队长, 然后从剩下的 $n-1$ 个人中选择队员。而左边的式子则是先枚举队伍中有几个人，选择了队伍中的人后再选择队长。
归纳法：$n=0,1$ 时容易验证等式成立，$n>1$ 时

$$\begin{aligned}\sum_{r=0}^{n} r\binom{n}{r} &= n+\sum_{r=1}^{n-1} r\binom{n-1}{r}+r\binom{n-1}{r-1}\\ &= n+(n-1)2^{n-2}+\sum_{r=0}^{n-2}(r+1)\binom{n-1}{r}\\ &= (n-1)2^{n-2}+\sum_{r=0}^{n-1}(r+1)\binom{n-1}{r}\\ &= (n-1)2^{n-2}+(n-1)2^{n-2}+2^{n-1}\\ &= n2^{n-1}\end{aligned}$$

□

Problem 4. 考虑所有的有序组 $\alpha=(A_1,A_2,\ldots,A_k)$，其中 $A_i \subseteq [n]$，定义 $S(\alpha)=|A_1\cup A_2\cdots\cup A_k|$。所有这样的有序组构成的集合为 $\mathcal{U}$。
(a) 计算 $|\mathcal{U}|$。
(b) 计算

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{U}} S(\alpha).$$

Solution. (a) A_i 有 2^n 种选择, 那么 α 有 2^{nk} 种选择。$|\mathcal{U}|=2^{nk}$。
(b) 考虑有多少个 α 满足 $S(\alpha)=i$, 首先 $A_1\cup A_2\cdots\cup A_k$ 有 $\binom{n}{i}$ 种可能, 对于其中的每一个元素，在 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 中至少出现一次，所以有 2^k-1 中可能，则存在 $(2^k-1)^i\binom{n}{i}$ 个 α 满足 $S(\alpha)=i$。
我们还可以从另一种角度来思考这个问题，我们考虑 $[n]$ 中的每个元素被计入了答案几次，首先指定一个元素，只要它在 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 中至少出现一次, 那么它就有 1 的贡献，而其他元素的出现与否不影响它对答案的贡献, 所以每个 $[n]$ 中的元素都有 $(2^k-1)2^{k(n-1)}$ 的贡献, 则得出

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{U}} S(\alpha)=\sum_{i=0}^{n} i(2^k-1)^i\binom{n}{i}=(2^k-1)n2^{k(n-1)}$$

$\square$

Problem 5. 在

$$\binom{2020}{0}, \binom{2020}{1}, \dots, \binom{2020}{2020}$$

中有多少个奇数?

Solution. $\binom{n}{0}$ $\binom{n}{1}, \cdots, \binom{n}{n}$ 中奇数的数量取决于 n 的二进制位上 1 的个数，证明这一点可以使用 Lucas 定理,p 为素数, 则有

$$\begin{aligned}\binom{n}{m} &= \prod_{i=0}^{k} \binom{m_i}{n_i} \pmod{p} \\ m &= m_k p^k + m_{k-1} p^{k-1} + \cdots + m_1 p + m_0 \\ n &= n_k p^k + n_{k-1} p^{k-1} + \cdots + n_1 p + n_0\end{aligned}$$

可以取 p 为 2, 则 m_i 为 0 时，n_i 必须为 0 才能为奇数，那么只有 n & $m = m$ 时 $\binom{n}{m}$ 为奇数。
$2020 = 11111100100_2$, 有 2^7 个奇数。 $\square$

Problem 6. (*) 接课上的定义
(a) 证明平面上至多可以画可数个 8。
(b) 证明平面上至多可以画可数个 Y。

Solution.
(a) 对于平面上的每个 8, 我们可以从 8 的两个 o 中各任取一个有理点 A, B, 组成集合 (无序点对)$\{A, B\}$, 来表示这个 8，由于 8 不能相交，所以不可能有点对能同时表示两个 8。由于有理点的可数性，这样的无序点对也可数，进而 8 也可数。
(b) 值得注意的是，曲线上不一定存在有理点，所以无法用上题的方法。
我们把 Y 的中心点记为 O, 三条线段的终点为 a, b, c, 三点绕 O 点方向为逆时针。我们找到三个不相交有理圆 (圆心为有理点，半径为有理数)，圆心分别为 A, B, C。并且这三个圆分别不与 Y 的另外两条线相交。
假设有两个 Y(Y_1, Y_2) 共用三个相同的有理圆，我们修改两个 Y 伸出的三条线，这三条线碰到圆之后直接连向圆心，那么 AY_1BY_2 构成闭环，由于

$a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ 都必须是逆时针，可以观察到 c_1. c_2 不可能都在 AY_1BY_2 这个闭环内，这意味这圆 C 必然与这个闭环相交，则产生矛盾。
所以不会有两个 Y 共用三个相同的有理圆。而有理圆是可数的，所以 Y 是可数的。
我们可以容易的用第二问的结论证明第一问, 首先容易用相同方法证明平面上只能放可数个 +, 可以把 8 的两个圈各剪开一个缝，那么 8 的放置就是 + 的放置的特殊情况，因此 8 是可数的。

$\square$