CS477 Combinatorics: Homework 7

于峥 518030910437

2020 年 4 月 21 日

在下面的这些游戏中，n 个人中每个人随机独立地被戴上红蓝两色帽子之一，概率各 1/2。每个人可以看到所有别人的颜色，但是看不到自己的颜色。他们需要同时猜各自帽子的颜色。

Problem 1. A *strategy* can be formalized as a sequence of functions

$$(f_1, f_2, \ldots, f_n),$$

where each f_i is a function $\{0,1\}^{n-1} \to \{0,1\}$.
How many strategies are there in total?

Solution. f_i 有 $2^{2^{n-1}}$ 种选择，因此共有 $2^{n2^{n-1}}$ 策略。 □

Problem 2. Consider the following strategy: For each person, if she sees that the colours of the other hats are all the same, she guesses 0 for herself, otherwise she guesses 1.
For $n = 3$, draw the strategy on the hypercube, by labeling the vertices and giving directions to each edge.

Solution. □

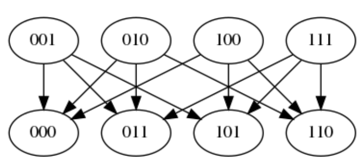

图 1: Hypercube

Problem 3. In this problem, their goal is: either every player guesses correctly, or every player gives a wrong guess.
How many different strategies do they have to achieve the goal? Prove your answer.

Solution. 由于我们希望所有人都正确或错误，所以如果两个人看到相同的 01 串，必然作出相同的选择。这意味着代表策略的超立方体上每个点要么只有入度，要么只有出度。注意到一个只有入度的点的邻点必然只有出度。所以我们可以把超立方体黑白染色，让黑点只有入度。白点只有出度。假设立方体上一个点已经确定了颜色，那么和这个点最短距离为奇数的点异色，偶数为同色。而超立方体可以二染色。所以染色方法只有两种。 □

Problem 4. In this problem, their goal is: make sure m players guesses her colour correctly.
What is the maximum m in terms of n? Prove your answer.

Solution. 如果我们希望任何情况下都至少有 m 人正确，那么意味着策略超立方体中每个点的入度至少为 m。而整个图的出入度和为 $n2^n$, 因此 $m \leq \frac{n}{2}$。并且 $m = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ 是可以取到的。我们先将图黑白染色，然后对于图中的两点 u, v。如果 u, v 不同的那一位为奇数且 x 为黑色或者不同的那一位为偶数且 x 为白色那么有 $u \to v$，否则反向。这样构造是一定满足要求的。
我们考虑如果立方体 G 中我们只留下那些二进制位之间只有一位不同，并且这一位在偶数上。那么这个图 H 和 G/H 每个点的度数至少为 $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$。我们让 H 中黑点连的边全为入边，G/H 黑色连的边全为出边，白色点相反。那么把这两个图合并起来后每个点的入度将为 $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$。

□