# CS477 Combinatorics: Homework 11

May. 13, 2020

**Problem 1.** 证明：对任意的 $k$，都存在一个 $N$，使得对平面上任何 $N$ 个没有三点共线的点，都能找到 $k$ 个构成一个凸 $k$ 边形。

**Problem 2.** 证明：

$$r(k,4) \in \Omega(k^{1.49258367}).$$

*Solution.* 考虑对 $K_n$ 随机染色，以 $p$ 的概率染上黄色，$q = 1-p$ 的概率染上蓝色，那么假设黄色 $K_k$ 的数量为 $X$, 存在蓝色 $K_4$ 的数量为 $Y$。那么

$$E(X) = \binom{n}{k} p^{\binom{k}{2}} \quad E(Y) = \binom{n}{4} q^{\binom{4}{2}}$$

我们让 $q = 4n^{-\frac{2}{3}}$, 那么

$$E(Y) \leq \frac{n^4}{24} q^6 \leq \frac{1}{2}$$

同时

$$\begin{aligned} E(X) &\leq \frac{n^k}{k!}(1-4n^{-\frac{2}{3}})^{\frac{k(k-1)}{2}} \\ &\leq \frac{n^k}{k!} e^{-n^{\frac{2}{3}}k^2} \end{aligned}$$

□

**Problem 3.** 证明：对任意的 $k, l$，都存在图 $G$ 使得 $\chi(G) > k, g(G) > l$。

*Solution.* 由于一个图的色数为 $k$ 意味着将它分为了 $k$ 个不相交的独立集，因此不难得到

$$\alpha(G) < \frac{|G|}{k} \Rightarrow \chi(G) > k$$

假设图 $G$ 上每条边以 $p$ 的概率出现，我们记事件 $\{\alpha(G) \geq \frac{|G|}{k}\}$ 为 $X$, 事件 $\{g(X) \leq l\}$ 为 $Y$。那么我们只需使 $P(X) + P(Y) < 1$ 即可。
首先考虑 $P(X)$, 图 $G$ 上每条边以 $p$ 的概率出现，记 $r = \frac{n}{k}$, 那么

$$P(X) \leq \binom{n}{r}(1-p)^{\binom{r}{2}} \leq 2^n e^{-p\binom{r}{2}}$$

我们只要让 $p \geq \frac{n}{\binom{r}{2}} = \frac{2k^2}{n-k}$ 即可。容易看到只要 $n$ 足够大，我们就能让 $P(X)$ 小于任何正常数。
再考虑 $P(Y)$, 当 $n > l$ 时，$P(Y)$ 不可能为 1, 此时无论 $P(Y)$ 为何值，我们都能取足够大的 $n$，使得 $P(X) + P(Y) < 1$, 因此命题成立。 □

**Problem 4.** 证明：对任意图 $G = (V, E)$，都存在 $V$ 的两个不相交的子集 $A$ 和 $B$，使得 $A$ 和 $B$ 之间的边至少有 $|E|/2$ 条。

*Solution.*

**算法** 按某种顺序对点黑白染色，每次染一个点时如果该点和黑点连边比和白点连边多，那么染成白色，否则染成黑色。

**概率方法** 随机对点二染色后，异色点之间的边期望有 $|E|/2$，因此存在这样的划分。 □

**Problem 5.** 如果没有孤立点，将上面的 $|E|/2$ 改成 $|E|/2 + |V|/6$。

*Solution.*

□

**Problem 6.** 当 $G$ 是连通图时，将上面的 $|E|/2$ 改成 $|E|/2 + |V|/4 - 1$。