CS477 Combinatorics: Homework 4

于峥 518030910437

2020 年 4 月 1 日

Problem 1. 千万别用计算器。十进制数 $\binom{2020}{640}$ 的最后一位是多少?

Solution. $2020 = 11111100100_2, 640 = 1010000000_2$

$$\binom{2020}{640} = 1 \pmod 2$$

$2020 = 31040_5, 640 = 10030_2$

$$\binom{2020}{640} = 2 \pmod 5$$

由中国剩余定理

$$\binom{2020}{640} = 5 + 2 * 2 * 3 = 7 \pmod{10}$$

$\square$

Problem 2. 证明：一个图 $G = (V, E)$ 是不连通的，当且仅当可以把 V 划分成两个非空子集 A 和 B，使得 A 到 B 之间没有边。

Solution.
$\Rightarrow$ 一个图 $G = (V, E)$ 是不连通的，即 $\exists u, v \in V$，图上不存在一条 trail $T = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$，使得 $v_1 = u$,$v_n = v$。
让 A 为满足这样的点的集合，如果存在 trail$T = (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n)$，使得 $v_1 = u$，那么 $v_n \in A$。
让 B' 为满足这样的点的集合，如果存在 trail$T = (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n)$，使得 $v_1 = v$，那么 $v_n \in B'$。

若 $A\cap B'\neq\emptyset$, $p\in A\cap B'$, 根据定义，必然存在 u 到 p 和 v 到 p 的 trail, 因此存在 u 到 v 的 trail，矛盾。
同理如果 $p_1\in A, p_2\in B'$ 并且 $p_1\notin A, p_2\notin B', \{p_1,p_2\}\in E$ 由于存在 u 到 p_1 的 trail, 那么必存在 u 到 p_2 的 trail, 矛盾。因此 A, B' 之间没有边。
显然 A,B' 都是非空的，因为至少都包括点 u 或 v。进而 $\forall u\in V/(A\cup B')$, u 与 A 和 B' 之间都没有边。所以让 $B=V/(A\cup B')\cup B'=V/A$。所以 A 和 B 非空，并且之间没有边。
$\Leftarrow$ 对于任意 $u\in A, v\in B$, 如果存在 u 到 v 的 trail $T=(v_1,v_2,v_3,\dots,v_n)$, 那么如果对于 T 种相邻的点之间有边，而 T 中即存在 A 中的点，又存在 B 中的点。所以必然存在一对来自不同集合的点在 T 中相邻，即有边。产生矛盾。所以存在 u,v 之间没有 trail, 即图不连通。

□

Problem 3. 什么样的图 $G=(V,E)$ 满足条件：存在某个 k，使得对任意的 $|V|-2$ 个点，它们之间的边数都为 k?

Solution. 根据题目意思，我们讨论 $|V|>1$ 的情况，
注意到如果任意删去两个点后，剩下的边数量一定。这意味着减少的边也是定值。不难发现如果 u,v 被删去，那么将会减少 $\deg(u)+\deg(v)-[\{u,v\}\in E]$ 条边。
假设图中所有点的度数都是相同的，那么 $\{u,v\}\in E$ 必须总是满足或总是不满足的。即完全图或空图，这是是满足题目要求的。
否则所有点的度数不都是相同的，假设存在度数为 $d_1,d_2(d_1<d_2)$ 的点 u,v。如果这两个点之间有边相连，那么所有与 u 相连的点的度数都为 d_2, 所有与 u 不相连的点度数都为 d_2+1。然而度数 d_2 的点和度数 d_2+1 的点之间无论有无边都将不满足 $\deg(u)+\deg(v)-[\{u,v\}\in E]$ 恒等的条件。因此所有点都和 u 有边相连。因此我们得到这样的图有 d_1+1 个点。所以 $d_2<d_1+1$，然而 $d_1<d_2$, 所以产生矛盾。
如果这两个点之间没有边相连，那么所有与 v 相连的点的度数都为 d_1+1, 所有与 v 不相连的点度数都为 d_1。由于 $d_1+(d_1+1)\le d_2+d_1$。所以要么所有点都和 v 不相连，然而这样 $d_2=0$，与 $d_1<d_2$ 矛盾。
要么 $d_2=d_1+1$, 这说明所有与 v 相连的点度数为 d_2, 由于 v 的任意性，这说明所有度数为 d_2 的点都和 u 不连边。那么如果 d_1 不为 0，那

么必然需要存在某个点的度数不是 d_1 和 d_1+1 中的。不难发现这样会让 $\deg(u)+\deg(v)-[\{u,v\}\in E]$ 不为固定的数。因此 $d_1=0$,$d_2=1$。那么这个图的大小为 3。
综上，图 $G=(V,E)$ 需要满足的条件是图为完全图或空图，或者 $|V|=3$。 □

Problem 4. 对任意的自然数 k，找到所有的 n 使得存在一个 n 个顶点的 k 正则图。

Solution. 对于 n 个点的图，每个点度数最大为 $n-1$, 因此必有 $n\geq k+1$。又 nk 为正则图的度数和，由握手定理可知 nk 必须为偶数。所以 n 和 k 不能同时为奇数。

Claim. 若 $k,n\in\mathbb{N}$, $n\geq k+1$, 若 k 和 n 不都为奇数，那么存在一个 n 个点的 k 正则图。
Proof. 我们对 k 进行归纳证明:
1) 当 $k=0$ 时，对于 $n>0$, $G=([n],\emptyset)$, 则 G 是 n 个点的 0 正则图。
2) 当 $k=1$ 时，对于 $n>1$ 的偶数, 我们构造点集是 $[n]$, 边集是 $\{\{2i-1,2i\}|i=1,2\ldots,n/2\}$ 的图 G，图中有 $n/2$ 个点对。因此这是 n 个点的 1 正则图。
3) 当 $0,1\cdots k-1$ 均满足, 当 k 是偶数时, 存在 n 个顶点的 k 正则图对于所有 $n\geq k+1$。当 k 是奇数时, 存在 n 个顶点的 k 正则图对于所有 $n\geq k+1$ 的偶数时，我们归纳证明 k 也满足该性质。
首先 $n=k+1$ 是一定满足，因为完全图 K_n 是这样的 k 正则图。进而我们对 n 进行归纳:
a) 当 $k+2\leq n\leq 2k$ 时。如果 k 是奇数, 那么 n 是偶数, 注意到 $n-1-k\leq k-1$, 根据归纳，必然存在 n 个点的 $n-k-1$ 则图。那么该图的补图每个点的度数都为 k, 满足题目要求。
如果 $k=2m$ 是偶数，那么我们让点集是 $[n]$, 边集为 $\{\{i,j\}:i-j\in\{-m,\ldots,m\}\}$ 因为 $n-1\geq 2m$, 所以每个点都连出去了 k 条边。该图满足要求。
Tips: 这个地方没有用归纳法，因为我没有想到怎么归纳，但是直接构造却比较简单，也没有违背归纳的原则，所以就写成这样了。

b) 当 $n > 2k$ 时。如果 k 是偶数，那么由归纳，必然存在 $\lfloor n/2 \rfloor$ 个点的 k 正则图和 $\lceil n/2 \rceil$ 个点的 k 正则图。这两个图的不交并就是 n 个点的 k 正则图。

如果 k 是奇数, 那么 n 是偶数，那么由归纳 $n/2$ 个点的 $k-1$ 正则图 G' 是存在的, 那么我们可以这样构造 n 个点的 k 正则图。我们将 G' 复制一份并将两个图并在一起，同时将 G' 中的点与复制的图中的点进行一一对应，并把对应的点连一条边。那么这样图中的每个点都连有 k 条边。

$\square$

Problem 5. 对什么样的 n，存在一个 n 点的图 G 使得 $G \cong \overline{G}$?

Solution. 首先要满足同构必然有两个图的边数是相同的, 所以 $|E| = \frac{n(n-1)}{4}$, 因此所有拥有 $4k$ 和 $4k+1$ 个点的图均有可能满足要求。

首先 $n = 1$ 是一定满足要求的。

$n = 4$ 时，$G = \{[4\{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\}\}\}$ 是满足要求的。可以验证 $\overline{G} = \{[4\{\{3,1\},\{1,4\},\{4,2\}\}\}$, 那么我们可以这样定义点的映射函数 φ, 将 $1,2,3,4$ 分别映射到 $3,1,4,2$。可以验证发现两个图是同构的。

假如一个 n 个点的图 $G_n = \{V, E\}$ 通过 $\varphi : V \to V$ 满足 $G_n \cong \overline{G_n}$, 我们可以基于 G_n 构造 $n+4$ 个点的图 $G_{n+4} = \{V', E'\}$ 满足 $G_{n+4} \cong \overline{G_{n+4}}$, 其中

$$V' = V \cup \{a,b,c,d\}$$
$$E' = E \cup \{\{a,b\},\{b,c\},\{c,d\}\} \cup \{\{a,u\} : u \in V\} \cup \{\{d,u\} : u \in V\}$$

接下来证明 $G_{n+4} \cong \overline{G_{n+4}}$，定义 $\varphi' : V' \to V'$

$$\varphi'(u) = \begin{cases} \varphi(u) & u \in V \\ c & u = a \\ a & u = b \\ d & u = c \\ b & u = d \end{cases}$$

首先 $\varphi' : V' \to V'$ 显然是个双射，下面我们验证 $G_{n+4} \cong \overline{G_{n+4}}$ 可以由 φ' 建立。

记 $\overline{E'}$ 为 $\overline{G'}$ 的边集，$\overline{E}$ 是 $\overline{G}$ 的边集。对于 $\{u,v\} \in V'$,

1) 若 $u, v \in V$。那么 $\{\varphi'(u), \varphi'(v)\} \in \overline{E}$.
2) 若 $u, v \in \{a, b, c, d\}$, 那么 $\{\varphi'(u), \varphi'(v)\} \in \{\{c, a\}, \{a, d\}, \{d, b\}\}$.
3) 若 $u = a$, $v \in V$, 那么 $\{\varphi'(u), \varphi'(v)\} \in \{\{c, v\} : v \in V\}$.
4) 若 $u = d$, $v \in V$, 那么 $\{\varphi'(u), \varphi'(v)\} \in \{\{b, v\} : v \in V\}$.
令

$$S = \overline{E} \cup \{\{c, a\}, \{a, d\}, \{d, b\} \cup \{\{c, v\} : v \in V\} \cup \{\{b, v\} : v \in V\}$$

因此 $\varphi'(E) = S$。
接下来只需说明 $S = \overline{E'}$, 容易得到 $|E'| = |S| = \frac{1}{4}n(n-1) + 3 + 2n = \frac{1}{4}(n+4)(n+3)$。然后可以验证 $S \cap E' = \emptyset$。所以 S 和 E' 是互补的, $G_{n+4} \cong \overline{G_{n+4}}$。
进而我们可以得到任何 $n = 4k, 4k+1$ 都存在 n 点的图 G 使得 $G \cong \overline{G}$。

□

Problem 6. 对任意图 G, $Aut(G)$ 是 G 的所有自同构组成的集合。给出下列 $Aut(G)$ 的大小的答案和证明。(a) $G = K_n$; (b) $G = C_n$; (c) G 为 Petersen graph。

Solution. 令 $G = (V, E)$。
(a) $G = K_n$, 不难发现, 对于 $\forall \varphi : [n] \to [n]$, φ 是一个双射。因为 $\forall u, v (u \neq v) \in V$, $\{u, v\} \in E$, 因此 $\{\varphi(u), \varphi(v)\} \in E$。所以 φ 是一个自同构。这样的 φ 有 $Aut(K_n) = n!$ 个。
(b) C_n 自同构包括 n 个旋转和 n 个对称, 首先 C_n 被定义为 $G = (V, E)$,$V = \mathbb{Z}_n$, $E = \{\{a, a+1\} | a \in \mathbb{Z}_n\}$。
并定义自同构双射函数 $\varphi : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$。该函数需要满足对于所有的 $\forall a \in \mathbb{Z}_n$, $\{\varphi(a), \varphi(a+1)\} \in E$。
假设 $\varphi(0) = i$, 由于 E 中只有两条边 $\{i, i-1\}, \{i, i+1\}$ 与 i 有关。因为 $\{\varphi(0), \varphi(1)\} \in E$, 所以 $\varphi(1)$ 为 $i-1$ 或 $i+1$。一旦 $\varphi(0)$ 和 $\varphi(1)$ 被确定。$\varphi(2)$ 选择将是唯一的, 因为 $\varphi(2) \neq \varphi(0)$ 而 $\varphi(2) = \varphi(1) \pm 1(\{\varphi(2), \varphi(1)\} \in E)$。同理 $\varphi(3)$ 到 $\varphi(n)$ 都是被唯一确定的。因此 $Aut(C_n) = 2n$。
(c) $G = (V, E), V = \binom{[5]}{2}, E = \{\{u, v\} : u, v \in V, u \cap v = \emptyset\}$。

令 g 是一个自同构，则他满足如下性质 $\forall u, v \in V$:

$$u \cap v \neq \emptyset \rightarrow g(u) \cap g(v) \neq \emptyset$$
$$u \cap v = \emptyset \rightarrow g(u) \cap g(v) = \emptyset$$

假设

$$g(\{1,2\}) = \{a, b\}$$
$$g(\{3,4\}) = \{c, d\}$$
$$g(\{5,1\}) = \{e, x\}$$
$$g(\{5,2\}) = \{y, z\}$$

为满足性质，我们可以得到 a, b, c, d 互不相同。并且 $\{e, x\}$ 必有 $\{y, z\}$ 交集。不妨设交集为 e, $y = e$。在此基础上 $\{a, b\}$ 和 $\{e, x\}$ 与 $\{e, z\}$ 都有交集。而 x 不能等于 z 否则 g 不是一个双射。不妨设 $a = x$，$y = z$。那么有

$$g(\{1,2\}) = \{a, b\}$$
$$g(\{3,4\}) = \{c, d\}$$
$$g(\{5,1\}) = \{e, a\}$$
$$g(\{5,2\}) = \{e, b\}$$

同理我们可以据此得到所有点的映射，只要确定 a, b, c, d, e。因此 $Aut(G) = 5! = 120$。

□

Problem 7. 一个图的最长路径是一个 path P 使得图中没有别的 path 比 P 有更多的点。
(a) 证明：如果 P_1 和 P_2 是一个图中两个最长路径，则 P_1 和 P_2 至少有一个公共点。(b) 把上面的 2 改成 22 会怎样？是不是对任意 22 条最长路径，都有一个点同时在所有这 22 条上出现？

Solution. (a) 假设 $P_1 = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ 和 $P_2 = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ 没有公共点。由于图的连通性，必然存在 v_1 到 u_n 的 path $P = \{a_1, a_2 \ldots, a_m\}$。我们对序列 $a_1, a_2, \ldots a_m$ 作如下调整:

1) 找到最大的 x, 使 a_x 出现在 P_1 中, 这样的 i 一定存在，因为 $a_1 = v_1$。并且因为 P_1, P_2 无交点和 $a_m = u_n$ 所以 $i \neq m$。
2) 然后找到最小的 y, 使 a_y 出现在 P_2 中并且 $y > x$。
3) 假设 $a_x = v_i, a_y = u_j$，令

$$P_{11} = (v_1, v_2, \dots v_i, a_{x+1}, \dots, a_{y-1}, u_j, u_{j-1}, \dots, u_1)$$
$$P_{nn} = (v_n, v_{n-1}, \dots v_i, a_{x+1}, \dots, a_{y-1}, u_j, u_{j+1}, \dots, u_n)$$

根据刚才的构造，因为 v_i 和 a_{x+1} 相连，a_{y-1} 和 u_j 相连，这四条路径依然是合法的 path, 并且 $a_{x+1}, \dots, a_{y-1}$ 不出现在 P_1, P_2 中。
记这 $|P|$ 为 path$P$ 的长度。那么有

$$|P_{11}| \geq i + j - 1$$
$$|P_{nn}| \geq 2n - i - j + 1$$

由于 $2 \leq i + j \leq 2n$, 若 $i + j > n$ 那么 $|P_{11}| > n - 1$。若 $i + j \leq n$, 那么 $|P_{nn}| \geq n + 1$。因此存在 path 长度大于 $n - 1$, 产生矛盾。因此 P_1 和 P_2 有交点。

(b) 不是。图 1 是反例，最长路为 14。以下是 22 条最长路。

$$(6,7,10,9,8,5,2,3,4,15,13,12,11,14,16,18)$$
$$(18,16,14,2,5,6,7,10,9,8,11,12,13,15,17,19)$$
$$(3,2,14,11,12,13,10,9,8,5,6,7,4,15,17,19)$$
$$(18,16,14,2,3,4,7,6,5,8,11,12,13,15,17,19)$$
$$(18,16,14,2,1,4,7,6,5,8,9,10,13,15,17,19)$$
$$(6,5,8,9,10,7,4,3,2,14,11,12,13,15,17,19)$$
$$(18,16,14,2,3,4,7,10,9,8,11,12,13,15,17,19)$$
$$(1,2,3,4,7,6,5,8,9,10,13,12,11,14,16,18)$$
$$(18,16,14,11,12,13,10,7,6,5,2,1,4,15,17,19)$$
$$(9,8,5,6,7,10,13,12,11,14,2,1,4,15,17,19)$$
$$(12,11,14,2,3,4,7,6,5,8,9,10,13,15,17,19)$$
$$(18,16,14,11,12,13,10,9,8,5,6,7,4,15,17,19)$$
$$(18,16,14,11,8,9,10,7,6,5,2,3,4,15,17,19)$$
$$(8,9,10,7,6,5,2,3,4,15,13,12,11,14,16,18)$$
$$(18,16,14,11,12,13,10,9,8,5,2,3,4,15,17,19)$$
$$(9,10,7,6,5,8,11,12,13,15,4,1,2,14,16,18)$$
$$(10,9,8,5,6,7,4,3,2,14,11,12,13,15,17,19)$$
$$(18,16,14,11,8,9,10,7,6,5,2,1,4,15,17,19)$$
$$(3,4,1,2,5,6,7,10,9,8,11,12,13,15,17,19)$$
$$(18,16,14,2,1,4,7,10,9,8,11,12,13,15,17,19)$$
$$(1,2,14,11,12,13,10,9,8,5,6,7,4,15,17,19)$$
$$(18,16,14,2,3,4,7,6,5,8,9,10,13,15,17,19)$$

图 2 是简洁一点反例，最长路为 9。以下是 22 条最长路。

$$(7,8,5,3,10,9,4,6,11,12)$$
$$(4,2,3,5,6,11,10,9,8,7)$$
$$(1,2,4,9,8,5,3,10,11,6)$$
$$(1,2,3,5,6,11,10,9,8,7)$$
$$(7,8,5,6,11,10,3,2,4,9)$$
$$(10,3,2,4,9,8,5,6,11,12)$$
$$(9,8,5,6,4,2,3,10,11,12)$$
$$(1,2,3,10,11,6,4,9,8,5)$$
$$(1,2,4,9,8,5,3,10,11,12)$$
$$(1,2,4,6,5,8,9,10,11,12)$$
$$(10,9,8,5,3,2,4,6,11,12)$$
$$(5,8,9,10,3,2,4,6,11,12)$$
$$(1,2,3,5,8,9,4,6,11,12)$$
$$(1,2,4,6,5,3,10,9,8,7)$$
$$(5,6,11,10,3,2,4,9,8,7)$$
$$(3,2,4,9,10,11,6,5,8,7)$$
$$(1,2,4,9,8,5,6,11,10,3)$$
$$(1,2,3,10,11,6,4,9,8,7)$$
$$(1,2,4,6,11,10,3,5,8,7)$$
$$(1,2,4,9,10,3,5,6,11,12)$$
$$(1,2,3,10,9,4,6,5,8,7)$$
$$(7,8,9,4,6,5,3,10,11,12)$$

$\square$

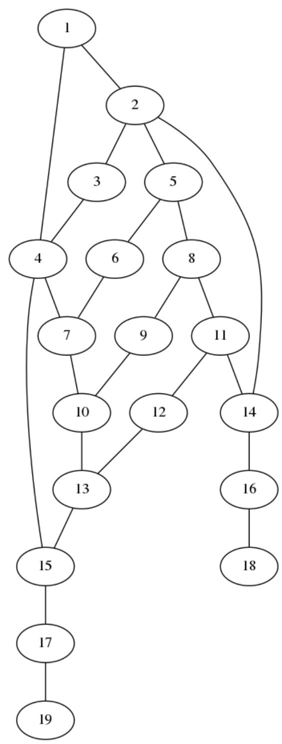

图 1: 反例

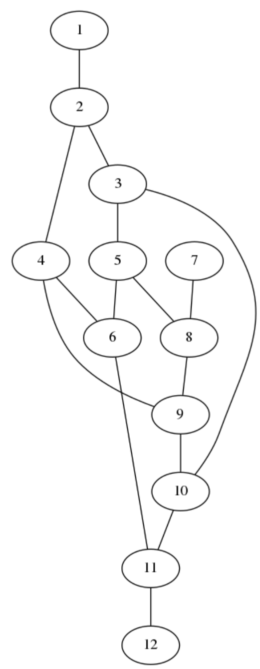

图 2: 简单一些的反例