MA150 Algebra

homework 9

Problem 1 *Page 110-1*

Solution: **必要性**:若*Sylow* p子群P是G的正规子群，即$\forall g \in G$,$gPg^{-1} = P$。假设存在另一个*Sylow* p 子群$P^{'} \neq P$。由于任意两个*Sylow* p子群互相共轭，所以$\exists g \in G, P^{'} = gPg^{-1} = P$，则$G$有唯一的*Sylow* p子群。

充分性:若G有唯一的*Sylow* p子群, 则显然$\forall g \in G, gPg^{-1}$是*Sylow* p子群。因为首先$\forall a, b \in P, a \neq b, gag^{-1}gbg^{-1} = gabg^{-1} \in gPg^{-1}$,所以$gPg^{-1}$是$G$的子群。其次$gag^{-1} \not= gbg^{-1}$, 所以$|gPg^{-1}| = |P|$。所以$gPg^{-1} = P$, 所以$P$是$G$的正规子群。

Problem 2 *Page 110-2*

Solution:

$$N(P) = \{g \in G | gPg^{-1} = P\}$$

根据习题*2-2(9)*,可知P是$N(P)$的正规子群，$N(P)$是G的子群，设$P = p^r$。

所以$N(P) = p^r \cdot m$，且$\gcd(m, p) = 1$，则P是$N(P)$唯一的*Sylow* p子群。

i) $\forall g \in N(P)$, $gN(P)g^{-1} = N(P)$,所以$N(P) \subseteq N(N(P))$。

ii) $\forall g \in N(N(P))$, $gN(P)g^{-1} = N(P)$。因为$P \in N(P)$，则$gPg^{-1} \subseteq gN(P)g^{-1} = N(P)$，所以$gPg^{-1}$是*N(P)*的*Sylow* p子群。根据上一题的结论,$gPg^{-1} = P$。所以$g \in N(P)$，$N(N(P)) \subseteq N(P)$。

综上,$N(P) = N(N(P))$。

Author(s): 于峥

Problem 3 *Page 110-3*

Solution: $|S_4| = 4! = 2^3 \cdot 3$。$n_2 = 2t + 1|3$, 直接枚举所有子群发现有三个*8*阶子群。

$$N_1 = \{(1), (1234), (13)(24), (1432), (13), (12)(34), (24), (14)(23)\}$$
$$N_2 = \{(1), (1324), (12)(34), (1423), (12), (13)(24), (34), (14)(32)\}$$
$$N_3 = \{(1), (1243), (14)(23), (1342), (14), (12)(43), (23), (13)(24)\}$$

Problem 4 *Page 110-4*

Solution: $|A_4| = |S_4|/2 = 12 = 2^2 \cdot 3$。$n_2 = 2t + 1|3$。枚举发现有*1*个

$$N = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$$

Problem 5 *Page 110-6*

Solution: $|S_5| = 5 \cdot 4!$。$n_5 = 5t + 1|24 \rightarrow n_5 = 1$或$n_5 = 6$。

不难想到大小为*5*的轮换所生成的群大小为5,这样的群有$\frac{4!}{4} = 6$个，所以$n_5 = 6$。

例如

$$N_1 = \{(1), (12345), (13524), (15432), (14253)\}$$
$$N_2 = \{(1), (12354), (13425), (14532), (15243)\}$$

Problem 6 *Show that a group with order 145 is a cyclic group.*

Solution: 令群$|G| = 145 = 5 \cdot 29$。则G有*Sylow 5*子群和*Sylow 7*子群。设为H, K。且H, K都是循环群,令$H = \langle a \rangle, K = \langle b\ rangle$。又

$$\begin{cases} n_5 = 5t + 1|29 \\ n_{29} = 29s + 1|5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} n_5 = 1 \\ n_{29} = 1 \end{cases}$$

所以H, K为正规子群，即$\forall h \in H, k \ni K,\ hk = kh$, 所以$ord(ab) = 145$，$G = \langle ab \rangle$为循环群。