MA150 Algebra

homework 8

Problem 1 *Page 88-12*

Solution: U_5 是一个5阶循环群，令$U_5 = \langle u \rangle$。

假设$\phi(x) = u^{x'}$, 则$\phi(x+y) = \phi(x)\phi(y) = u^{x'} \cdot u^{y'}$。

令$\psi(x) = x'$, 则$\psi(x+y) = \psi(x) + \psi(y) (\mod 5)$,

即$\psi(xy) = x\psi(y) = y\psi(x) \Rightarrow \psi(5x) = 0$。

同时$\psi(y) = y\psi(1) (\mod 5) \Rightarrow \psi(y) = \psi(1)(y \mod 5)$。

而$\psi(1)$不能为0, 否则ϕ不是满同态。所以 $\phi(\overline{x}) = 1$ 当且仅当 $\psi(x) = 0 \Rightarrow x \mod 5 = 0$。

所以$Ker(\phi) = \{\overline{0}, \overline{5}, \overline{10}, \overline{15}, \overline{20}, \overline{25}\}$。

Problem 2 *Page 89-20*

Solution: 构造$\mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_k : \phi(\overline{x}) = \overline{x}$。

$\forall \overline{x} \in \mathbb{Z}_k$, $\exists \overline{x} \in \mathbb{Z}_m$, 所以$\phi$是满同态。

易发现

$$\begin{aligned} Ker\phi &= \{\overline{x} | \phi(\overline{x}) = \overline{0}\} \\ &= \{\overline{x} | x = ak, a \in \mathbb{Z}_+\} \\ &= \langle \overline{k} \rangle \end{aligned}$$

根据群同态定理

$$\mathbb{Z}_m / \langle \overline{k} \rangle \cong \mathbb{Z}_k$$

Author(s): 于峥

Problem 3 *Page 104-1*

Solution: *(1)*

$$S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = S_6 = \{(1), (78)\}$$
$$S_7 = S_8 = \{(1), (123)(456), (132)(465)\}$$

$$O_1 = O_2 = O_3 = \{1, 2, 3\}$$
$$O_4 = O_5 = O_6 = \{4, 5, 6\}$$
$$O_7 = O_8 = \{7, 8\}$$

(2)

$$F_{(1)} = X$$
$$F_{(123)(456)} = F_{(132)(465)} = \{7, 8\}$$
$$F_{(78)} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$F_{(123)(456)(78)} = F_{(132)(465)(78)} = \emptyset$$

Problem 4 *Page 104-3*

Solution: 由于G在X上作用是传递的，所以$\forall x, y \in X$, $\exists g \in G, gx = y$。考虑 O_x,O_y,构造映射$O_x \to O_y : \phi(hx) = ghg^{-1}y$。

(1) 因为N是正规子群，$h \in N$, $ghg^{-1} \in N$,所以显然ϕ是O_x到O_y的映射。

(2) $\forall h_1, h_2 \in N, h_1x = h_2x,$

$$\begin{aligned} \phi(h_1x) &= gh_1g^{-1}y \\ &= gh_1x \\ &= gh_2x \end{aligned}$$

所以ϕ是单射。

(3) $\forall h_1, h_2 \in N,$

$$gh_1g^{-1}y = gh_2g^{-1}y \Rightarrow h_1x = h_2x$$

所以ϕ是满射。

综上$|O_x| = |O_y|$，由于x，y的任意性，X在N作用下的的每个轨道有同样的元素。

Problem 5 *Page 104-4*

Solution:

$$S_x = \{g \in G | g(x) = x\}$$

(1) $\forall h \in S_x$,

$$\begin{aligned} ghg^{-1}y &= gh(g^{-1}g)x \\ &= g(hx) \\ &= gx \\ &= y \end{aligned}$$

, 所以$ghg^{-1} \in S_y \Rightarrow S_y \subseteq gS_xg^{-1}$。

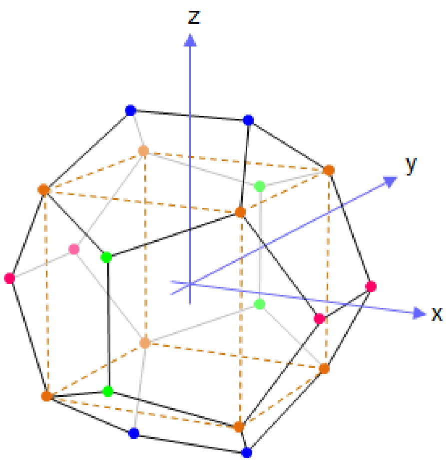
(2) $\forall h \in S_y$,

$$\begin{aligned} g^{-1}hgx &= g^{-1}hy \\ &= g^{-1}y \\ &= x \end{aligned}$$

所以$g^{-1}hg \in S_x \Rightarrow gS_xg^{-1} \subseteq S_y$。

综上, $S_y = gS_xg^{-1}$。

Problem 6 *Page 104-6*



Solution: 我们先观察正十二面体，易发现旋转可以将一个面可以变到任意一个面，将十二个面的集合表示为

$$X = \{1, 2, 3, \cdots, 12\}$$

则$|O_1| = 12$，现在考虑S_1的大小，是这个面不动的置换包括以垂直于这个面中心的轴旋转的置换，有5个。所以$|G| = |O_1||S_1| = 60$。