CS477 Combinatorics: Homework 3

于峥 518030910437

2020 年 3 月 24 日

Problem 1. 对任意的 n，定义 $D_k = \binom{n}{k+1} - \binom{n}{k}$。求 k^* 使得 D_{k^*} 在所有的 D_k 中取值最大。

Solution.

$$\begin{aligned} r(k) = \frac{D_k}{D_{k-1}} &= \frac{\binom{n}{k+1} - \binom{n}{k}}{\binom{n}{k} - \binom{n}{k-1}} \\ &= \frac{\frac{n-2k-1}{k+1}\binom{n}{k}}{\frac{n-2k+1}{k}\binom{n}{k-1}} \\ &= \frac{(n-2k-1)(n-k+1)}{(n-2k+1)(k+1)} \end{aligned}$$

为了 $D_k > 0$, 我们只关心 $0 < k \leq \frac{n}{2}$ 的情况。
在这个范围内，$\frac{n-2k-1}{n-2k+1}$ 和 $\frac{n-k+1}{k+1}$ 都是递减的所以在 k 在此范围内比值是递减的。
因此比值为 1 的时候，D_k 最大,$k = \frac{1}{2}(n - \sqrt{n+2})$，因此
特别的当 $n = 1$ 时，$k^* = 0$。
当 $n + 2$ 是完全平方数的时候，$k^* = \frac{n-\sqrt{n+2}}{2}, \frac{n-\sqrt{n+2}}{2} - 1$
否则

$$k^* = \left\lfloor \frac{n - \sqrt{n+2}}{2} \right\rfloor$$

时取到最大值。 □

Problem 2. 集合 $A_0=\{0\}$，$A_1=\{1\}$，$A_{n+2}=(A_1+A_{n+1})\Delta A_n$。证明有无穷多个 n 使得 $|A_n|=1$。

Solution. 我们可以证明当 n 为 2^k-1 的形式的时候，$|A_n|=1$。
从另一个角度进行观察，我们将集合看成多项式，将集合操作转化成多项式操作，让 $B_0(x)=1, B_1(x)=x$, $B_{n+2}(x)=xB_{n+1}(x)+B_n(x)$。其中 $B_i(x)$ 是定义在 $GF(2)$ 上的多项式。
可以归纳证明 $B_i(x)=\sum_{u\in A_i}x^u$，首先 $n=0,1$ 时容易验证满足，并且若小于等于 $n+1$ 时满足，A_1+A_{n+1} 相当于将 A_{n+1} 中所有元素加一，而 $xB_n(x)$ 就是将每一项的幂次加一。而集合的对称差操作，多项式相加后由于是定义在 $GF(2)$ 上，共有的项会被消去。因此 $n+2$ 时满足。
进而由于 A_n 必然包含 n, 所以当 $|A_n|=1$ 时, $B_n(x)=x^n$, 进而证明 $B_i(x)$ 有如下性质, 令 $C_i(x)=B_{i-1}(x)$

$$\begin{aligned}C_{2n}(x)&=xC_n(x)^2\\C_{2n+1}(x)&=(C_n(x)+C_{n+1}(x))^2\end{aligned}$$

同样进行归纳证明法，$n=1,2,3,4$ 可以验证是满足的，若 $1\sim 2n$ 都满足，那么

$$\begin{aligned}C_{2n+1}(x)&=xC_{2n}(x)+C_{2n-1}(x)\\&=x^2C_n(x)+(C_{n-1}(x)+C_n(x))^2\\&=C_n(x)^2+(x^2C_n(x)+C_{n-1}(x))^2\\&=C_n(x)^2+C_{n+1}(x)^2\\&=(C_n(x)+C_{n+1}(x))^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C_{2n+2}(x)&=xC_{2n+1}(x)+C_{2n}(x)\\&=x(C_n(x)+C_{n+1}(x))^2+xC_n(x)^2\\&=xC_{n+1}(x)^2\end{aligned}$$

因此 $2n+1, 2n+2$ 也满足这一性质。不难发现 $C_2n(x)$ 的项数永远和 $C_n(x)$ 相同，而 $C_1(x)$ 只有一项，所以 $C_{2^k}(x)$ 项数为一, 进而 $B_{2^k-1}(x)$ 项数为 1, 所以当 n 为 2^k-1 的形式的时候，$|A_n|=1$。

$\square$

Problem 3. 给定正整数 n, r, s，有多少个 $[2n]$ 的子集恰好包含 r 个奇数和 s 个偶数，且没有任何两个相邻的元素?

Solution.

Lemma 1. 将 r 个元素放到 n 个位置中，每个位置可以放任意个，方案数为:

$$\binom{n+r-1}{n-1}$$

pf. 假设将元素放置好后，在每个位置再额外放一个元素。这就相当于将 $n+r$ 个元素放到 n 个位置中，每个位置至少放一个的方案。我们可以考虑将这些元素排成一列，在其中插入 $n-1$ 个板，分成 n 份的方案为 $\binom{n+r-1}{n-1}$。

我们可以这样构造集合，首先可以将问题看成将 r 个 10，s 个 01，$n-r-s$ 个 00 拼成长度为 $2n$ 的 01 串。我们首先只考虑 10 和 00，有 $\binom{n-s}{r}$ 种方法，将他们拼起来。然后将 01 插入到其中，由于每个 10 的前面不能放 01，这相当于有 s 个元素，放到 $n-s-r+1$ 个位置中，每个位置可以放任意个，根据 **Lemma 1**, 这有 $\binom{n-r}{n-s-r}$ 种方法。得到答案:

$$\binom{n-r}{s}\binom{n-s}{r}$$

$\square$

Problem 4. 证明：平面上存在 $13^3 = 2197$ 个不同的点，使得它们之间有至少 12345 对的距离为 13。

Solution. 这个问题可以转化成考虑找到一个平面上 n 个点,m 条边的图，使得每条边的长度都相同。本题要求 $n \leq 2197$，$m \geq 12345$。

我们可以考虑 Hypercube graph 是可能满足要求的，因为 Hypercube graph 有 2^n 个点，$2^{n-1}n$ 条边，边的密度比较高。并且在平面上画出 Hypercube graph，并且让每条边的长度相同是容易 (我们让边的长度是单位长度)。因

为首先 Q_1 容易画出，而要画出 Q_n 只需将 Q_{n-1} 平移单位距离再将对应的点连上即可。
然而 Hypercube 依然难以满足要求，我们可以对 Hypercube 进行一些修改。
令 G_1 为一个边长为单位长度的等边三角形，G_{n+1} 由 G_n 通过以下步骤构造出来:
a) 将 G_n 向两个方向移动单位距离，并且两个方向的夹角为 60 度。
b) 把生成的三个图的对应点连起来，可以发现对应点构成一个等边三角形。
还需要说明的细节是，一定存在这样的方向让平移后的点与之前的不重合。
这是因为方向的选择有无限种，然而平面上的点是有限的。
因此 G_n 的所有边长度相同，而 G_n 的点数 $V_n = 3^n$, 边数满足 $E_n = 3E_{n-1} + V_n = n3^n$。注意到边和点的比值为 n, 比 Hypercube 更强。算出当 $n = 7$ 时，有 2187 个点，15309 条边，满足题目要求。
这种构造的本质就是将等边三角形的图作笛卡尔积，事实上我们也可以通过对不同的图形作笛卡尔积来达到同样的目的。
关于”The maximum number of occurrences of the same distance among n points in the plane” 似乎是个未解问题，我查到的上界是 $cn^{4/3}$。用这题笛卡尔积的思路能做到的最好情况应该都是 kn 的。其中 k 是初始图形的点和边的比例。

□

Problem 5. 如果人和人之间的朋友关系是相互的。证明：在任意 100 个人中，有两个人使得他们的共同的朋友有偶数个。

Solution. 我们证明任意偶数个人中存在两个人的公共朋友数为偶数。
1) 若存在一个人 P 有奇数个朋友 $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, 设 PQ_i 为 P 与 Q_i 的公共朋友数。如 Q_i 之间没有朋友关系，那么所有 PQ_i 为 0 是偶数。
Q_i 之间每增加一对朋友关系，那么 $PQ_i(i = 1, 2, \ldots, n)$ 就有两个数的奇偶性改变。然而想要让 PQ_i 全部为奇数必须只能进行奇数次奇偶性改变。因此最后必然存在一个 Q_i 与 P 的公共朋友为偶数。
2) 若所有人的朋友都是偶数个，假设 P 的朋友集合为 A, 其他人的集合为 B, 则 $|A|$ 是偶数，$|B|$ 是奇数。
$\forall Q \in B$, 如果 Q 在 A 中有偶数个朋友，那么 PQ 有偶数个公共朋友。
否则 Q 在 A 中有奇数个朋友，那么 Q 在 B 中也有奇数个朋友，由于 Q 是

任选的，那么把 B 看成一个奇数个点的子图，每个点的度数都是奇数，那么度数和也是奇数，然而无向图的度数和必然为偶数，产生矛盾。 $\square$

Problem 6. (*) 在一个 $n\times n$ 的方格表的每个格子里填上一个正整数，使得每个数可以整除它上面的数 (如果有的话)，也可以整除它右边的数 (如果有的话)，并且整个表右上角格子里填的数是 T。当 $T=2$、$T=4$、$T=30$、$T=1000$ 时，这样的填法各有多少种?

Solution. 我们可以这样考虑，设 $f_n(T)$ 为该问题答案。将 T 进行质因数分解，例如 $T=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\dots p_n^{k_n}$。可以发现不同质因子之间没有影响，即 $f_n(T)=f_n(p_1^{k_1})f_n(p_2^{k_2})\dots f_n(p_n^{k_n})$。
进而我们只需要考虑 p^k 形式的 T, 由于当 k 相同时得到的答案相同，所以我们将问题转化成在方格中填 0 到 k 让每行每列都递减，为了去掉右上角必须填 k 的限制，记 $h_n(k)=f_n(p^k)$, 可以考虑计算 $g_n(k)=\sum_{i=0}^{k}h_n(i)$, 即计算前缀和。
对于这 k 条路径，我们考虑将第 i 条向上和向右都平移 $i-1$ 格，那么这 k 条路径将严格不相交。题目转化成了从 $(0,0),(-1,1)\dots(1-k,k-1)$ 走到 $(n,n),(n-1,n+1),(n-2,n+2)\dots(n-k+1,n+k-1)$ 有多少种走法让路径不相交。使用 LGV 引理。

Lemma 2. 对于有向无环图，$e(u,v)$ 表示从 u 走到 v 所有路径的边权和。
$\omega(P)$ 表示 P 这条路径上所有边的边权之积。
起点集合 A，是有向无环图点集的一个子集，大小为 n。
终点集合 B，也是有向无环图点集的一个子集，大小也为 n。
一组 $A\to B$ 的不相交路径 S: S_i 是一条从 A_i 到 $B_{\sigma(S)_i}$ 的路径 ($\sigma(S)$ 是一个排列)，对于任何 $i\neq j$，S_i 和 S_j 没有公共顶点。
$N(\sigma)$ 表示排列 σ 的逆序对个数。

$$M=\begin{pmatrix} e(A_1,B_1) & e(A_1,B_2) & \dots & e(A_n,B_n) \\ e(A_2,B_1) & e(A_2,B_2) & \dots & e(A_2,B_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e(A_n,B_1) & e(A_n,B_2) & \dots & e(A_n,B_n) \end{pmatrix}$$

$$\det(M) = \sum_{S:A\to B} (-1)^{N(\sigma(S))} \prod_{i=1}^{n} \omega(S_i)$$

将边权设为 1, 由于对应关系是 $i \to i$，所以答案就是 $g_n(k) = \det(M)$,
当 $k = 0$ 时,

$$g_n(0) = h_n(0) = 1$$

。
当 $k = 1$ 时,

$$g_n(1) = \binom{2n}{n}$$

$$h_n(1) = \binom{2n}{n} - 1$$

因为对于任意一条从左下到右上的路径的上方放 1, 下方放 0, 这对应了一种放置方法。而每种放置方法的边界也可以看成一条路径。
当 $k = 2$ 时,

$$M = \begin{bmatrix} \binom{2n}{n} & \binom{2n}{n-1} \\ \binom{2n}{n-1} & \binom{2n}{n} \end{bmatrix}$$

$$g_n(2) = \binom{2n}{n}^2 - \binom{2n}{n-1}^2$$

$$h_n(2) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}\binom{2n}{n-1}$$

当 $k = 3$ 时,

$$M = \begin{bmatrix} \binom{2n}{n} & \binom{2n}{n-1} & \binom{2n}{n-2} \\ \binom{2n}{n-1} & \binom{2n}{n} & \binom{2n}{n-1} \\ \binom{2n}{n-2} & \binom{2n}{n-1} & \binom{2n}{n} \end{bmatrix}$$

$$g_n(3) = \frac{2}{(n+1)^2(n+2)}\binom{2n}{n}\binom{2n+1}{n}\binom{2n+2}{n}$$

$$h_n(3) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}\binom{2n+1}{n}\left[\frac{2}{(n+1)(n+2)}\binom{2n+2}{n} - 1\right]$$

对于任意的 k, 有

$$g_n(k) = \prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{n} \frac{n+i+j-1}{i+j-1}$$

因此 $T=2$ 时，答案为

$$h_n(1)=\binom{2n}{n}-1$$

$T=4$ 时，答案为

$$h_n(2)=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}\binom{2n}{n-1}$$

$T=30=2\times 3\times 5$ 时，答案为

$$h_n(1)^3=\left(\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}\binom{2n}{n-1}\right)^3$$

$T=1000=2^3\times 5^3$ 时，答案为

$$h_n(3)^2=\left(\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}\binom{2n+1}{n}\left[\frac{2}{(n+1)(n+2)}\binom{2n+2}{n}-1\right]\right)^2$$

$\square$