MA150 Algebra

homework 3

Problem 1 *Page 32-3*

Solution: **必要性**：如果 G 是交换群，

(a) 单射性质: $\forall x, y \in G$, 若$\phi(x) = \phi(y)$, 即 $x^{-1} = y^{-1}$。两边乘xy得:
$(xy)x^{-1} = (xy)y^{-1} \Rightarrow (yx)x^{-1} = y(xx^{-1}) = x(yy^{-1}) \Rightarrow y = x$

(b) 满射性质：$\forall x \in G^{'}$，根据定义$x^{-1} \in G$。

(c) 保持运算: $\forall x, y \in G$, $\phi(xy) = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = x^{-1}y^{-1} = \phi(x)\phi(y)$

充分性：因为 $\phi(x) = x^{-1}$是 $G \rightarrow G^{'}$的同构映射：
$\forall x, y \in G$, 有$\phi(xy) = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$, 又$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y) = x^{-1}y^{-1}$。
所以$xy = yx$, G是交换群。

Problem 2 *Page 32-4*

Solution: 分三步证明证明

(a) 单射性质: $\forall x, y \in G$, 若$\phi(x) = \phi(y)$, 即 $axa^{-1} = aya^{-1}$。两边左乘a^{-1},右乘a得$x = y$。

(b) 满射性质：$\forall axa^{-1} \in G$，因为$a \in G$, 所以$x \in G$。

(c) 保持运算: $\forall x, y \in G$, $\phi(xy) = axya^{-1} = axa^{-1}aya^{-1} = \phi(x)\phi(y)$。

Author(s): 于峥

Problem 3 *Page 33-6*

Solution: $G = (\mathbb{R}, +)$，$H = (4\mathbb{R}, +)$

Problem 4 *Page 41-1*

Solution: Z_n中，$\mathrm{ord}(m) = \dfrac{n}{(n,m)}$

(1)

n	0	1	2	3	4	5	6
ord(n)	1	7	7	7	7	7	7

(2)

n	0	1	2	3	4	5	6	7
ord(n)	1	8	4	8	2	8	4	8

(3)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ord(n)	1	10	5	10	5	2	5	10	5	10

(4)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
ord(n)	1	14	7	14	7	14	7	2	7	14	7	14	7	14

(5)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
ord(n)	1	15	15	5	15	3	5	15	15	5	3	15	5	15	15

(6)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
ord(n)	1	18	9	6	9	18	3	18	9	2	9	18	3	18	9	6	9	18

Problem 5 *Page 42-5*

Solution: 得到答案需要两步：

- 判断$U(n)$是否有生成元：

  形如 $2, 4, p^n, 2p^n$的数有生成元，其中p是奇素数。

- 寻找所有的生成元没有什么好方法，只能暴力枚举。

9	10	13	14
2, 5	3, 7	2, 6, 7, 11	3, 5

Problem 6 *Page 42-12*

Solution: 不妨设$\mathrm{ord}(a) = r$，即$a^r = e$。

(1) $(gag^{-1})^r = ga^r g^{-1} = gg^{-1} = e$。

(2) 假设存在$s < r$,$(gag^{-1})^s = ga^s g^{-1} = e$。

则 $ga^s = g \Rightarrow a^s = e$, 与前提矛盾。

所以gag^{-1}的阶与a相同。