CS477 Combinatorics: Homework 2

于峥 518030910437

2020 年 3 月 15 日

Problem 1. n 个硬币扔在地上，每个随机地正面向上或者反面向上，在所有可能的情况中，正反硬币差的绝对值的平均数是多少?

Solution. 枚举正面硬币的个数然后直接进行计算，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{n}|n-2i|\binom{n}{i} &= \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{i=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}(n-2i)\binom{n}{i} \\ &= \frac{n}{2^{n-1}}(1+\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{i}-2\binom{n-1}{i-1}) \\ &= \frac{n}{2^{n-1}}(1+\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n-1}{i}-\binom{n-1}{i-1}) \\ &= \frac{n}{2^{n-1}}\binom{n-1}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\end{aligned}$$

特别的，$n=0$ 时平均数为 0, 否则为 $\frac{n}{2^{n-1}}\binom{n-1}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}$。 □

Problem 2. 证明：对任意自然数 n 和 m，

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{m}=\binom{n}{m}2^{n-m}.$$

Solution. **组合证明**: 左边式子可以认为是从 n 个人中选若干个人开会，并且要从这几个人中选出 m 个代表。而右边的式子则是先选出 m 个代表，然后在剩下的 $n-m$ 个人中选择要开会的非代表人员。

生成函数: 用左式构造关于 m 的生成函数

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=m}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{m}x^m\\
=&\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{k}\binom{n}{k}\binom{k}{m}x^m\\
=&\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}\sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m}x^m\\
=&\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}(1+x)^k\\
=&(2+x)^n
\end{aligned}$$

其中 x^m 的系数正是 $\binom{n}{m}2^{n-m}$。 □

Problem 3. 证明：对任意正整数 n, a, b,

$$\sum_k\binom{k}{a}\binom{n-k}{b}=\binom{n+1}{a+b+1}.$$

Solution. **组合证明**: 左边的式子可以看作从一路 $n+1$ 个人的队伍中先选出第 $k+1$ 个人，然后从前面 k 个人中选 a 个人，从后面 $n-k$ 个人中选 b 个人。而右边就是直接从这 $n+1$ 个人中选 $a+b+1$ 个人。

右侧的每一个选择，可以找到被选出某个人所在队伍位置 k 前有 a 个人被选出，由于这样的位置唯一, 所以这对应了左边的唯一种选择，且不会有右侧的两种选择对应到左侧的同一选择。

□

Problem 4. 证明：对任意正整数 n,

$$\sum_k\binom{n}{2k}\binom{2k}{k}2^{n-2k}=\binom{2n}{n}.$$

Solution. **组合证明**: 右侧式子可认为是两个长为 n 的二进制串上的 1 的个数共有 n 个的方案数。将第一个二进制串第 i 位与另一个二进制串的第 i

位进行配对，假设这些配对中 $(0,0)$ 有 x 对，$(1,1)$ 有 y 对, $(0,1)$ 和 $(1,0)$ 共 z 对。那么有

$$\begin{cases} x+y+z=n \\ z+2x=n \end{cases}$$

可以得到 $x=y$, 所以任意一种选择都有这样的性质，记 x 为 k, 这意味着我们可以构造二进制串达到同样的效果:

1. 首先选出 $2k$ 个位置, 表示这两个串中对应位置的数相同的个数，然后再选 k 个位置放 1, 其他位置放 0，这一步放了 $2k$ 个 1。
2. 第一个串剩下 $n-2k$ 个位置随意填 0 和 1, 但是第二个串对应位置放相反的数，这一步放了 $n-2k$ 个 1。

而这个过程就是左边式子的选择方式。 □

Problem 5. 证明：对任何正整数 n, m,

$$\sum_r \binom{2n}{2r-1}\binom{r-1}{m-1} = \binom{2n-m}{m-1} 2^{2n-2m+1}.$$

Solution.

$$\begin{aligned}
&\sum_r \binom{2n}{2r-1}\binom{r-1}{m-1} \\
=&\sum_r \sum_k \binom{2n-k-1}{r-1}\binom{k}{r-1}\binom{r-1}{m-1} \\
=&\sum_r \sum_k \binom{2n-k-1}{r-1}\binom{k-m+1}{r-m}\binom{k}{m-1} \\
=&\sum_k \binom{k}{m-1} \sum_r \binom{2n-k-1}{r-1}\binom{k-m+1}{r-m} \\
=&\sum_k \binom{k}{m-1}\binom{2n-m}{k} \\
=&\binom{2n-m}{m-1} 2^{2n-2m+1}
\end{aligned}$$

□

Problem 6. Euler 函数 $\phi : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ 定义是：$\phi(n)$ 是 $[n]$ 中和 n 互质的数的个数。定义

$$f(n) = \sum_{i=1}^{n} \phi(n).$$

(a) 找到一个正的常数 k，使得 $f \in \Theta(n^k)$；
(b)(*) 找到一个正常数 C，使得 $f \sim Cn^k$。

Solution. (a)

Lemma 1. $n = \sum_{d|n} \phi(d)$

pf. 考虑将 $1 \sim n$ 按进行分类, 定义等价类

$$\hat{m}_d = \{0 < m \leq n : (m, n) = d\}$$

显然 $\hat{m}_d$ 两两不交，且如果 $d|n$ 则 $|\hat{m}_d| = \phi(\frac{n}{d})$。所以

$$n = \sum_{d|n} |\hat{m}_d| = \sum_{d|n} \phi(\frac{n}{d}) = \sum_{d|n} \phi(d)$$

Lemma 2. $[n = 1] = \sum_{d|n} \mu(d)$

pf. $n = 1$ 时等式显然成立。考虑 n 的质因子集合 S，奇数大小的集合与偶数大小的集合数量相同。

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{T \in S} (-1)^{|T|} = 0$$

Lemma 3. $\phi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d}$

pf.

$$\begin{aligned}
\sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d} &= \sum_{d|n} \mu(d) \sum_{pd|n} \phi(p) \\
&= \sum_{p|n} \phi(p) \sum_{pd|n} \mu(d) \\
&= \phi(p)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(n) &= \sum_{i=1}^{n} \phi(i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{d|n} \mu(d) \frac{i}{d} \\
&= \sum_{d=1}^{n} \mu(d) \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} k \\
&= \sum_{d=1}^{n} \mu(d) \left(\frac{1}{2} (\frac{n}{d})^2 + O(\frac{n}{d}) \right) \\
&= \frac{n^2}{2} \sum_{d=1}^{n} \frac{\mu(d)}{d^2} + O(n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d}) \\
&= \frac{n^2}{2} \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} + O(n^2 \sum_{d>n} \frac{1}{d^2}) + O(n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d})
\end{aligned}$$

得到 $k = 2$, $f \in \Theta(n^2)$。

(b) 接上题

$$C = \frac{1}{2}\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d^2}$$

我们运用 **Lemma 2**,

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{d|n}\mu(d) \\ &= \sum_{d=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mu(d)}{(dm)^2} \\ &= \sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2} \end{aligned}$$

所以

$$C = \frac{1}{2}\Big(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\Big)^{-1} = \frac{3}{\pi^2}$$

□