CS477 Combinatorics: Homework 14

于峥

2020 年 6 月 21 日

Due date: Sunday morning 11:11, Jun. 21, 2020.

Problem 1. 存在一个常数 C，使得平面上任意 n 个点组成的集合 P 满足：当 $2 \le k \le \sqrt{n}$ 时，平面上至少经过 P 中 k 个点的直线最多有 Cn^2/k^3 条。

Solution. 考虑只保留那些至少经过了 k 个点的直线，假设有 L 条，那么平面上最多有 $\binom{L}{2}$ 个交点。如果两个点位于同一条保留下的直线上且相邻的话，就连一条边。可见至少有 $(k-1)L$ 条边。根据 Crossing Lemma, 当 $(k-1)L \ge 4n$ 时

$$\binom{L}{2} \ge \frac{(k-1)^3L^3}{64n^2}$$

所以

$$L \le \frac{32n^2}{(k-1)^3} \le \frac{256n^2}{k^3}$$

否则由于 $2 \le k \le \sqrt{n}$, $L < \frac{4n}{k-1} \le \frac{8n}{k} \le \frac{256n^2}{k^3}$。 □

Problem 2. 证明：[12] 有 120 个不同的 5 元子集，使得每两个的交集大小至少为 2。

Solution. 考虑所有集合包含 $\{1,2\}$ 的五元集合, 由于 $\binom{10}{3} = 120$, 因此满足题目要求。 □

Problem 3. 证明：[11] 有 31 个不同的 5 元子集，使得每两个的交集大小至少为 3。

Solution.

$$\mathcal{F} = \{F \in \binom{[11]}{5} : |F \cap [5]| \geq 4\}$$

根据抽屉原理，任意两个集合的交集至少为 3, 并且，

$$|\mathcal{F}| = \binom{5}{4}\binom{6}{1} + 1 = 31$$

□

Problem 4. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 是 n 个（可重复的）模长至少为 1 的复数，对任意下标集 $M \subseteq [n]$，记 $\sum_M = \sum_{i \in M} x_i$。证明：在这 2^n 个 $\sum_M$ 中，至多可以取出 $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ 个，使得他们两两差的模长都小于 1。

Solution. 假设对于 n 个复数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的所能找到的最优解是 $\mathcal{F}$, 考虑 $-x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的解，

$$\mathcal{F}' = \{F \triangle \{1\} : F \in \mathcal{F}\}$$

不难发现 $\mathcal{F}'$ 是满足题目条件的，所以可以得到把其中某些复数符号取反不会影响最优解。因此我们可以让所有数都位于第一二象限。考虑 $A, B \in \mathcal{F}$, 如果 $B \subset A$, 那么 A/B 中不可能只包含某一个象限的点，因为同一象限的复数相加模长只会增大，不可能小于 1。
不难发现这个模型和第七题相同，所以最多可以取 $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ 个。

□

Problem 5. 如果 $\mathcal{F}$ 是 $[n]$ 上的一个子集族，并且对任意 $A \in \mathcal{F}$ 和 $A \subseteq B$, 有 $B \in \mathcal{F}$，那么 $\mathcal{F}$ 中集合的平均大小至少为 $n/2$。

Solution.

$$\frac{1}{|\mathcal{F}|} \sum_{F \in \mathcal{F}} |F| = \sum_{i \in [n]} \Pr_{F \in \mathcal{F}}[i \in F]$$

对于任意一个元素 i, 如果 $\mathcal{F}$ 存在一个不包含 i 的集合 F, 那么 $F \cup \{i\}$ 也在 $\mathcal{F}$ 中，因此 $\Pr_{F \in \mathcal{F}}[i \in F] \geq \frac{1}{2}$, 因此平均大小至少 $\frac{n}{2}$. □

Problem 6. r，s 是两个整数，$A_1, A_2, \ldots, A_m$ 是 m 个大小为 r 的集合，$B_1, B_2, \ldots, B_m$ 是 m 个大小为 s 的集合，使得对所有的 $i \in [m]$，$A_i \cap B_i = \emptyset$；对所有的 $i \neq j \in [m]$，$A_i \cap B_j \neq \emptyset$。证明：$m \leq \binom{r+s}{r}$。

Solution. 考虑每一对 $A_i, B_i \subseteq [n]$，让

$$F_i = \{\pi : \forall x \in A_i, y \in B_i, \pi^{-1}(x) < \pi^{-1}(y)\}$$

即 A_i 所有元素都在 B_i 的元素前的排列，$|F_i| = \binom{n}{r+s} r!s!(n-r-s)!$。
且 $F_i \cap F_j = \emptyset$，因为 $A_i \cap B_j, A_j \cap B_j$ 均不为空集，所以 $\forall \pi \in F_i$，$\exists x \in A_j, y \in B_j$，$\pi^{-1}(x) > \pi^{-1}(y)$。
所以

$$\sum |F_i| \leq n! \Rightarrow m \leq \binom{r+s}{r}$$

□

Problem 7. 某个学校有 n 个学生，n_1 个男生和 $n_2 = n - n_1$ 个女生。现在要组成尽可能多的学生俱乐部，唯一的限制是如果俱乐部 A 包含另一个俱乐部 B 的所有人，那么在 A 中但不在 B 中的学生必须有男生也有女生。求俱乐部数的最大值。

Solution. 最大值为 $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ 希望老师发一下这题的证明。

□