Mathematical Logic

homework 1

Problem 1 *Let M be a non-empty set.*

Then the following are equivalent.

(a) M is at most countable.

(b) There is a surjective function $f: N \to M$.

(c) There is an injective function $f: M \to N$.

Solution: *(1)* $(a) \to (b)$ 根据可数的定义

$$M = \{\alpha(n) | n \in \mathbb{N}\} = \{\alpha(0), \alpha(1), \alpha(2), \dots\}.$$

则其中的α就是自然数到M的满射。

(2) $(b) \to (c)$

由于存在 $N \to M$ 的满射 f，$\forall x \in M, \exists y \in \mathbb{N}, f(y) = x$，于是构造函数$g$：

$\forall x \in M$, 任选一个$y \in N, f(y) = x$，让$g(x) = y$, 则g为$M \to N$的单射。

(3) $(c) \to (a)$

由于存在$M \to N$的单射f，所以我们按照以下步骤构造函数g:

从f的像集中选择最小的值y_0, y_0在f中的原像为x_0,让$g(0) = x_0$。

从f的像集中选择第二小的值y_1, y_1在f中的原像为x_1。令$g(1) = x_1$。

依次类推

那么 M 可以表示为 $\{g(n) | n \in (N)\}$,

Author(s): 于峥

Problem 2 *Let A be an alphabet which is at most countable. Then A^* is countable*

Solution: *(1)* 若 A 大小是有限的，$|A| = n$, 那么$\forall x \in A^*$, 我们可以将x看成一个$n+1$进制的数，于是A^*可以与$\mathbb{N}$一一对应，所以A^*是可数的。

(2) 若 A 是无限集，因为A是可数的，所以先给A中的元素规定好顺序。

我们可以给A^*中的任意两个元素规定顺序：即比较元素的字典序大小。

由于按照这个规则我们可以找到每个元素的最小的大于它本身的元素，所以可以将元素按顺序排成一列，所以A^*是可数的。

Problem 3 *Prove that for every set M there is no surjective function from M to $\mathcal{P}(M) = \{B|B \subseteq M\}$*

Solution: 设f是M到$\mathcal{P}(M)$的函数，构造

$$B = \{x \in M : x \notin f(x)\}$$

若$\exists y \in M$, $f(y) = B$。

考虑若 $y \in B$，则$y \in f(y)$，然而这与B的定义矛盾。

若 $y \notin B$, 则$y \notin B$, 所以$y \in B$产生矛盾。

所以不存在这样的函数f。

Problem 4 *Using first-order logic to express that*

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = 4$$

In particular, please specify the symbol set S and the appropriate S-sentence

Solution:

$$\forall\epsilon(\epsilon > 0 \Rightarrow \exists N(\forall n(n > N \Rightarrow |f(n) - 4| < \epsilon)))$$

$$S = \{f, >, 0, 4, -, ||\}$$

$$S_{sentence} \ \ is \forall\epsilon(\epsilon > 0 \Rightarrow \exists N(\forall n(n > N \Rightarrow |f(n) - 4| < \epsilon)))$$

Mathematical Logic