CS477 Combinatorics: Homework 12

于峥 518030910437

2020 年 5 月 26 日

Problem 1. 在一个学校有 1000 个俱乐部，每个俱乐部有 11 个人，俱乐部之间的成员可能会重复。证明，可以将所有学生分成两组，使得每个俱乐部都同时有来自两组的学生。

Solution. 我们将俱乐部和学生的关系看成二分图 $G = (L \cup R, E)$, L 代表俱乐部，R 代表学生，如果学生属于俱乐部那么这两个点之间有边相连。那么我们需要证明的是能够做到将 R 二染色后，使得 L 中每个元素的邻点集合包含两种颜色。
我们将 R 中的点以 $\frac{1}{2}$ 的概率随机染成黑白两色。那么存在俱乐部只有一种颜色的邻点的概率

$$P \le 1000 \cdot 2^{-11} \cdot 2 < 1$$

所以 $1 - P > 0$, 因此命题得证。 □

Problem 2. 一个竞赛图是一个每两个点之间恰好有一条边的有向图。证明：对每个 n，存在一个竞赛图包含至少 $n!/2^{n-1}$ 条哈密尔顿路。

Solution. 考虑对 K_n 中的边等概率随机定向。那么 K_n 中哈密尔顿路的期望数量为 $E(P) = \frac{n!}{2^{n-1}}$, 该式的意思是考虑每一个排列为哈密顿尔路的概率，因此肯定存在一个竞赛图包含至少 $n!/2^{n-1}$ 条哈密尔顿路。 □

Problem 3. $G = (V, E)$ 是一个二分图，$|V| = n$，$k > \log_2 n$ 是一个整数。在 G 的每个顶点 v 上有一个候选的颜色集合 $C(v)$ 满足 $|C(v)| \ge k$。证明：可以给每个点 v 选一个 $C(v)$ 中的颜色，使得 G 中任意相邻两点不同色。

Solution. 题目条件相当于把所有颜色分为两组，对于每一个左边点的 C 含有至少一个第一组的颜色，右边点的 C 含有至少一个第二组的颜色。对于任意一个点它被分到两组的概率是 $\frac{1}{2}$, 那么对于左边每一个颜色集合 C_i, 如果其中含有第一组的颜色那么 $X_i = 0$, 否则为 1。对于右边每一个颜色集合 C_i, 如果其中含有第二组的颜色那么 $X_i = 0$, 否则为 1。
那么 $E(\sum X_i) = \frac{n}{2^k} < 1$, 所以存在合法的分组。对于每一个点，如果在左边就任选一个第一组的颜色，在右边就选第二组的颜色即可。 □

Problem 4. 图 $G = ([1000], E)$ 中有至多 27000 个三角形。证明：G 中有一个 70 点的不含三角形的诱导子图。

Solution. 我们考虑 G 中所有的三角形，在 $\binom{[1000]}{100}$ 中有 $\binom{997}{97}$ 个集合包含这个三角形。因此所有 $\binom{[1000]}{100}$ 中的元素包含的三角形个数的期望

$$E = \frac{27000\binom{997}{97}}{\binom{1000}{100}} < 26\ 5$$

所以 G 中有一个 100 个点的三角形数量小于等于 26 的诱导子图, 从每个三角形中删去 1 个点，因此图中一定存在大于等于 74 个点的不含三角形的诱导子图。

□

Problem 5. $G = (V, E)$ 是一个 n 阶的、20 正则的简单图。证明：存在 $W \subseteq V$ ，使得 $V - W$ 中任意一个顶点在 W 中至少有一个邻居，并且 $|W| \leq n/5$.

Solution. 不难把题目中的条件转化找到 $W \subseteq V$, 成对于每一个点，要么它在 W 中，要么它的的某个邻点在 W 中。
我们将每个点以概率 p 的加入 S, 那么 $E(|S|) = pn$, 而 T 是那些不满足要求的点，即不在 S 中也没有邻居在 S 中的点。X_u 为一随机变量，如果点 u 在 T 中值为 1，否则为 0。那么 $E(|X_u|) \leq (1-p)^{21}$。

$$E(|S \cup T|) \leq np + n(1-p)^{21}$$

因此取 $p = 1 - 21^{-\frac{1}{20}}$, 那么 $E(|S \cup T|) < \frac{n}{5}$, 因此存在这样的 W. □

Problem 6. HW11 证明：对任意的 k, l，都存在图 G 使得 $\chi(G) > k, g(G) > l$。

Solution. 由于一个图的色数为 k 意味着将它分为了 k 个不相交的独立集，因此不难得到

$$\alpha(G) < \frac{|G|}{k} \Rightarrow \chi(G) > k$$

假设图 G 上每条边以 p 的概率出现，我们记事件 $\{\alpha(G) \geq \frac{|G|}{k}\}$ 为 X, 事件 $\{g(X) \leq l\}$ 为 Y。那么我们只需使 $P(X) + P(Y) < 1$ 即可。
首先考虑 $P(X)$, 图 G 上每条边以 p 的概率出现，记 $r = \frac{n}{k}$, 那么

$$P(X) \leq \binom{n}{r}(1-p)^{\binom{r}{2}} \leq 2^n e^{-p\binom{r}{2}}$$

我们只要让 $p \geq \frac{n}{\binom{r}{2}} = \frac{2k^2}{n-k}$ 即可。容易看到只要 n 足够大，我们就能让 $P(X)$ 小于任何正常数。
再考虑 $P(Y)$, 当 $n > l$ 时，$P(Y)$ 不可能为 1, 此时无论 $P(Y)$ 为何值，我们都能取足够大的 n，使得 $P(X) + P(Y) < 1$, 因此命题成立。 $\square$