MA150 Algebra

homework 1

Problem 1 *Page 5-4*

Solution: *(1)* 反身性： $\phi(a) = \phi(a) \to a \sim a$。

(2) 对称性： $a \sim b \to \phi(a) = \phi(b) \to b \sim a$。

(3) 传递性：$a \sim b, b \sim c \to \phi(a) = \phi(b) = \phi(c) \to a \sim c$。

令$[a] = \{x|\phi(x) = \phi(a)\}$，全体等价类为$\{[a]|a \in A\}$

Problem 2 *Page 6-8*

Solution: *(1)* 反身性： $ab = ab \to (a,b) \sim (a,b)$。

(2) 对称性：$(a,b) \sim (c,d) \to ad = bc \to (c,d) \sim (a,b)$。

(3) 传递性：$(a,b) \sim (c,d), (c,d) \sim (e,f) \to ad = bc, cf = de$。两式两边相乘消去 dc 得 $af = be \to (a,b) \sim (e,f)$。得证。

Problem 3 *Page 16-5*

Solution: *(1)* 封闭性： $a \oplus b = a + b - 2 \in \mathbb{Z}$。

(2) 结合律：

$$\begin{aligned}(a \oplus b) \oplus c &= (a+b-2) + c - 2 \quad (1)\\ &= a + (b+c-2) - 2 \quad (2)\\ &= a \oplus (b \oplus c) \quad (3)\end{aligned}$$

Author(s): 于峥

(3) 存在零元： $a \oplus 2 = a + 2 - 2 = a$。

(4) 存在负元*:* $a \oplus 4 - a = a + 4 - a - 2 = 2$。

Problem 4 *Page 17-12*

Solution: 任取 $x, y \in G$, 由题意，有 $(xy)^2 = e = (yx)^2$。

又有$\forall a \in G$, $a = a^{-1}$

整理得*:* $(xy)^2 = (yx)^2 = (yx)^{-1}yx = xy \cdot yx \Rightarrow xy = yx$。

所以G是一个交换群。

Problem 5 *Page 17-13*

Solution: **必要性**：由交换群的性质有，$(ab)^2 = a(ba)b = a(ab)b = a^2b^2$。**充分性**：$\forall a, b \in G$, $(ab)^2 = a^2b^2 \Rightarrow abab = aabb \Rightarrow ab = ba$。所以$G$为阿贝尔群。

Problem 6 *Page 17-16*

Solution: 令 $S = \{x | x \in G, x^3 = e\}$。

显然 $e \in S$, 若 $\exists a \in S$， $a \neq e$, 则$a^2 \in S$. 且根据假设$a \neq e$, 所以 $a \neq a^2$。且对于 $\forall a, b \in S, a \neq b, a \neq b^2$, 若 $a^2 = b^2$, 则$a^3 = e = ab^2 \to b = a$, 产生矛盾。所以对于S中除e外的元素都成对存在，又G为有限群，所以元素个数为奇数。