Problem 1 *Page 71-1*

Solution: A_4中所有的左陪集有

- $(1)H = \{(1), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$
- $(1\ 2\ 3)H = \{(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 4), (2\ 4\ 3), (1\ 4\ 2)\}$
- $(1\ 3\ 2)H = \{(1\ 3\ 2), (1\ 4\ 3), (2\ 3\ 4), (1\ 2\ 4)\}$

S_4中所有的左陪集有

- $(1)H = \{(1), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$
- $(1\ 2\ 3)H = \{(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 4), (2\ 4\ 3), (1\ 4\ 2)\}$
- $(1\ 3\ 2)H = \{(1\ 3\ 2), (1\ 4\ 3), (2\ 3\ 4), (1\ 2\ 4)\}$
- $(1\ 2)H = \{(1\ 2), (3\ 4), (1\ 3\ 2\ 4), (1\ 4\ 2\ 3)\}$
- $(1\ 3)H = \{(1\ 3), (2\ 4), (1\ 2\ 3\ 4), (1\ 4\ 3\ 2)\}$
- $(2\ 3)H = \{(1\ 4), (2\ 3), (1\ 2\ 4\ 3), (1\ 3\ 4\ 2)\}$

Problem 2 *Page 71-8*

Solution: 因为 $ord(a) = 30$, 所以$a^{30} = e$。$ord(a^4) = \dfrac{30}{gcd(30, 4)} = 15$。所以有2个左陪集。分别为$a\langle a^4\rangle = \{a^i | i = 2k + 1, k \in \mathbb{N}\}$, $e\langle a^4\rangle = \{a^i | i = 2k, k \in \mathbb{N}\}$。

Problem 3 *Page 71-11*

Solution: 设H是群G的子群，aH是H的左陪集。

- 若$a \in H$, 则$aH = H = H^{-1} = Ha$。

- 若$a \notin H$, 则$\forall h \in H, (ah)^{-1} = h^{-1}a^{-1}$。所以$(aH)^{-1} = H^{-1}a^{-1} = Ha^{-1}$。

Problem 4 *Page 71-12*

Solution:

- $a(H_1 \cap H_2) \subseteq aH_1 \cap aH_2$:

  $\forall h \in H_1 \cap H_2$, $ah \in a(H_1 \cap H_2)$, 又$ah \in aH_1 mah \in aH_2$。所以

  $ah \in aH_1 \cap aH_2 \Rightarrow a(H_1 \cap H_2) \subseteq aH_1 \cap aH_2$。

- $aH_1 \cap aH_2 \subseteq a(H_1 \cap H_2)$:

  $\forall h_1 \in H_1/H_2, h_2 \in H_2/H_1$，显然$ah_1 \neq ah_2$, 而

  $\forall h \in H_1 \cap H_2$, 上面已经证明。所以$aH_1 \cap aH_2 \subseteq a(H_1 \cap H_2)$。

所以 $a(H_1 \cap H_2) = aH_1 \cap aH_2$。

Problem 5 *Page 72-20*

Solution: **方法一**: 假设没有阶为3的元素。

首先，若$\exists a, ord(a) = 33$, 则$ord(a^{11}) = 3$。

所以假设只存在阶为11的元素a，令$A = \{a^k | k \in \mathbb{N}\}$。取$b$为$H$外$G$中某个元素。根据假设只能有$ord(b) = 11$, 令$B = \{b^k | k \in \mathbb{N}\}$。则$AB \subseteq G$和所以存在$a^{x_0}b^{y_0} = a^{x_1}b^{y_1}$, 即存在$a^m = b^n$。而11是素数，所以$\langle a \rangle = \langle a^n \rangle = \langle b^m \rangle = \langle b \rangle$，产生矛盾！所以$ord(b)$只能为3, 所以必定存在3阶元素。

方法二: 当A, B为G的有限子群时, 运用$|AB||A \cap B| = |A| \cdot |B|$可以很方便的证明：$|AB| = \dfrac{|A||B|}{|A \cap B|} = 121 > |G|$。矛盾，所以必有$ord(b) = 3$。

Problem 6 *Page 72-22*

Solution: 设映射$\phi(a) = a^n$ 为$G \to G$ 的映射。

- **封闭性**：$\forall a,b \in G(a \neq b)$, $\phi(ab) = (ab)^n = a^n b^n = \phi(a)\phi(b)$。
- **单映射**：$\forall a,b \in G$, 若$a^n = b^n$, 则$(ab^{-1})^n = e$, 由于n与$|G|$互素，所以$ab^{-1} = e$，所以$a = b$。
- **满映射**：由于ϕ为单映射，所以$|G| = |\phi(G)|$，所以ϕ为满映射。

所以ϕ为$G \to G$自同构。