CS477 Combinatorics: Homework 6

于峥 518030910437

2020 年 4 月 13 日

Problem 1. $\mathcal{Q}_n$ 为 n 维的超立方体。
(a) 计算 $\mathcal{Q}_n$ 的点数, 边数。
(b) 计算色数 $\chi(\mathcal{Q}_n)$，也就是说，至少需要几种颜色对 $\mathcal{Q}_n$ 进行染色，可以使任意两个相邻的点不同色。
(c) 证明：对任意两个 $\mathcal{Q}_n$ 中的点 u 和 v，都有一个 $\mathcal{Q}_n$ 的自同构 φ，使得 $\varphi(u)=v$。
(d) (*) 确定 $\mathcal{Q}_n$ 的自同构的个数。

Solution.
(a) $Q_n=(V_n,E_n)$.

$$|V_0|=1, |V_n|=2V_{n-1}$$
$$|E_0|=0, |E_n|=2E_{n-1}+V_n$$

所以 $|V_n|=2^n$, $|E_n|=n2^{n-1}$。
(b) $\chi(\mathcal{Q}_0)=1$, $\chi(\mathcal{Q}_n)=2(n>0)$。

`Induction Base` $n=1$, Q_1 为一条线段所以至少需要两种颜色。

`Induction Step` 如果 $\chi(Q_n)=2$, 而 Q_{n+1} 可以看成将 Q_n 复制一份后将对应点相连，因此我们可以把复制的版本的图点的颜色取反。那么此时两个图各自的染色满足条件。并且对应点的颜色也是不同的。
(c) 我们可以利用超立方体的另一定义，将 Q_n 中的节点看作 $\{0,1\}^{[n]}$ 中的元素，或者说 n 位二进制串。两个元素有边相连当且仅当这两个二进制串只有一位不同。若此时有 $\varphi(u)=v$，令 $u[i]$ 为 u 的二进制第 i 位。那么

$D = \{i : u[i] \neq v[i], i \in [n]\}$。我们让

$$\varphi(x)[i] = \begin{cases} x[i] & i \notin D \\ x[i] \ \texttt{xor} \ 1 & i \in D \end{cases}$$

如果两个二进制串 x, y 对应位置不同的集合为 S。$\varphi(x)$ 和 $\varphi(y)$ 不同位置的集合依然是 S。因此这是一个合法的自同构。

在 φ 下, $\varphi(0) = u \oplus v = s$, 我们可以更简单的写成 $\varphi_s(t) = s \oplus t$。

(d) $|Aut(Q_n)| = 2^n n!$。对于 $\forall \sigma \in Aut(Q_n)$, 如果 $\sigma(0) = s$, 那么必然存在 $\mu \in Aut(Q_n)$, $\varphi_s \circ \mu = \sigma$。因此只要找到所有的 μ 就可以找到全部的 $Aut(Q_n)$。而 $\mu(0) = (\sigma \circ \varphi_s^{-1})(0) = 0$。所以我们找到所有满足 $\mu(0) = 0$ 的自同构即可。

对于 Q_n, 有 n 个与 0 相邻的点 $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}$。由于经过 μ 映射后仍然需要和 0 相连。所以必然有 $\mu(2^i) = 2^j$。对于 $\mu(2^0)$ $\mu(2^1), \ldots, \mu(2^{n-1})$ 共有 $n!$ 种取值。假设 $\mu(2^i) = 2^{p(i)}$, 那么 $p(i)$ 就是 $0, 1, \ldots n-1$ 的排列。而每个 $p(i)$ 都可以对应合法的 μ。我们可以这样构造，$\mu_p(s)[i] = s[p(i)]$, 这相当于是对所有的 01 串做了相同的轮换，因此它依然满足格雷码的性质。

下面我们证明, μ_p 是也是唯一满足 $\mu(2^i) = 2^{p(i)}, \mu(0) = 0$ 的自同构。假设 s 上有 k 个 1, 那么从 0 到 s 的最短路径长度一定为 k, 因为每次走一条边最多变化一位，并且也一定可以做到变化任意一位。因此如果 $\mu_p(s) = t$, 由于 $\mu(0) = 0$, 那么 s 和 t 上 1 的数量一定相同。进而考虑 $\mu(2^i + 2^j)(i \neq j)$ 由于必须要与 $2^{p(i)}$ 和 $2^{p(j)}$ 距离都为 1。所以 $\mu(2^i + 2^j) = 2^{p(i)} + 2^{p(j)}$。依次类推，我们可以得到有三个 1 的时侯 $\mu(2^i + 2^j + 2^j)$ 必须要与 $\mu(2^i + 2^j)$, $\mu(2^i + 2^k)$，$\mu(2^j + 2^k)$ 距离为 1，一直到 $\mu(2^n - 1) = 2^n - 1$。因此 μ_p 唯一满足条件的映射。

所以 $|Aut(Q_n)| = 2^n n!$。

□

Problem 2. 给定正整数 k，集合 $A_1, A_2, \ldots, A_k$ 满足:

(1) 对每个 $i \in [k]$，$A_i \subseteq [n]$;

(2) 对每个 $x \in [n]$，存在 $i, j \in [k]$，使得 $i \neq j$ 且 $x \in A_i \cap A_j$;

(3) 对每对 $x, y \in [n]$，$x \neq y$，存在一个 $i \in k$，使得 $|A_i \cap \{x, y\}| = 1$。

求 n 的最大值。

Solution. 我们反过来考虑，对于 $x \in [n]$, 定义 $B_x = \{i : x \in A_i\}$。那么我们可以通过刻画 B 来描述 A。对于条件 (1) 是自动满足的。

而 (2) 意味着，$\forall x \in [n], |B_x| \geq 2$。(3) 意味着 $\forall x, y \in [n], x \neq y, B_x \neq B_y$。容易得到满足这样条件 (2) 的 B 共有 $2^k - k - 1$ 个，而这 $2^k - k - 1$ 集合也互不相同。所以 $n = 2^k - k - 1$ 最大。

□

Problem 3. n 个人玩这样一个游戏：每个人随机独立地被戴上红蓝两色帽子之一，概率各 1/2。每个人可以看到所有别人的颜色，但是看不到自己的颜色。他们需要同时猜各自帽子的颜色，但是每个人都可以选择弃权。
他们的目标是至少有一个人没有弃权，并且所有不弃权的人猜的都是对的。
在游戏开始前他们可以讨论一个策略。令 $f(n)$ 为所有策略能够达成目标的概率的最大值。
(a) 求 $f(2)$ 和 $f(3)$。
(b) 证明：$f(n) \leq n/(n+1)$。
(c) 证明：$\lim_{n\to\infty} f(n) = 1$。
(d) 对无穷多个 n，证明 $f(n) = n/(n+1)$。

Solution.

我们可以把 n 个人的帽子颜色看成是一个长度为 n 的 01 串。而第 i 个人可以观测到除了这个串的除第 i 位上的所有数。我们把 01 串看成 n 维超立方体上的一个点，相邻点只有一位不同。由于立方体上有 $n2^{n-1}$ 条边，而只有一位不同 01 串对数也是 $n2^{n-1}$。因此每个人所能观测的部分 01 串都对应了超立方体上的唯一的一条边。

假设第 i 个人对应的边为 $\{u, v\}$，这意味着他需要走向一个点，或者弃权。如果在策略 C 下选择了 v, 那么我们连一条 u 到 v 的有向边。因此对于每一个策略 C，都对应了了一个超立方体上的一个有向图。

在这个策略下，如果真正的序列所对应的点为 P, 那么对于点 P, 我们需要 C 中至少有一条边指向它，并且没有边从这个点出去，那么这些观测者就达到了目标。定义 R_C 为在策略 C 下，如果真正的序列所对应的点在集合 R_C 中，那么就无法达到目标的点的集合。此时达到目标的概率为 $1 - \frac{|R_C|}{2^n}$。

我们考察集合 R_C 的性质，对于任意不再 R_C 中的点 P, 必然有边指向

P，否则 $P \in R_C$。假设 Q 连向 P，那么 $Q \in R_C$。因此任意不属于 R_C 中的点与 R_C 中的某点相邻。

反之，任意满足该性质的点集，都可以找到一个策略与之对应。我们只需要让 R_C 中的点向其相邻的不在 R_C 中的点连边即可。

因此我们只要找到一个最小的满足该性质的点集，该点集所对应的策略就是最优策略。

(a) 在 $n = 2, 3$ 时，可以通过枚举得到最小点集 R_C 都为 2, 因此 $f(2) = \frac{1}{2}, f(3) = \frac{3}{4}$。

(b) 注意到 n 维立方体中每个点都与 n 个点相邻，这说明 R_C 中每个点最多可以让另外 n 个点不在 R_C 中，因此我们有 $(n+1)|R_c| \geq 2^n$，进而 $f(n) = 1 - \frac{|R_C|}{2^n} \leq \frac{n}{n+1}$。

(c) 记 $\gamma(n)$ 为 n 为立方体中最小的 $|R_C|$ 大小。那么题目原命题等价于

$$\forall \epsilon \exists N, s.t. \forall n > N, \gamma(n) \geq 2^n(1-\epsilon)$$

因此我们让 $\gamma(n) \geq \frac{2^n}{n+1} \geq 2^n(1-\epsilon)$。取 $N = \left\lceil \frac{1}{1-\epsilon} \right\rceil$ 即可。

(d) 我们可以证明当 $n = 2^k - 1$ 时，$f(n) = \frac{n}{n+1}$。即 $(n+1)|R_c| \geq 2^n$ 中可以取到等号。可以发现，若等号取到，那么对于超立方体中任意一个点，如果它不属于点集 R_C，那么 R_C 只有一个点与其相邻。这实际上就是汉明码的性质。对于一个长度为 $2^k - 1$ 的汉明码，其中 $2^k - k - 1$ 为真正的数据，另外 k 位校验码由这 $2^k - k - 1$ 所决定。所以合法的码有 2^{n-k} 种。当出现一位出错时可以被检测出来，并将其对应到唯一正确的汉明码。因此我们取这 2^{n-k} 种正确的汉明码作为 R_C, 这样就得到了满足等号条件的最小点集。

□