CS477 Combinatorics: Homework 5

于峥 518030910437

2020 年 4 月 4 日

Problem 1. 给出 Turán 定理的一个证明。(你不需要证明第二部分：$T(n,p)$ 是唯一取到最大值的图。)

Solution.

归纳法

Inudction Base $p=2$, 考虑图 $G=(V,E)$。所有点的度数平方和。注意到对于任意 $\{u,v\}\in E$, 因为不能有 K_3, 所以 u 和 v 不能由公共邻点。即 $\deg(u)+\deg(v)\le n$

$$\begin{aligned}\sum_{u\in V}\deg(u)^2 &= \sum_{u\in V}\sum_{\{u,v\}\in E}\deg(u)\\ &= \sum_{\{u,v\}\in E}\deg(u)+\deg(v)\\ &\le mn\end{aligned}$$

又由柯西不等式

$$\sum_{u\in V}\deg(u)^2 \ge \frac{\left(\sum_{u\in V}\deg(u)\right)^2}{n} \ge \frac{4m^2}{n}$$

所以 $|E|=m\le\frac{n^2}{4}$

Induction Step $p > 2$ 的时候，考虑图 $G = (V, E)$。对于与假设图中度数对最大的点为 x。令

$$S = \{u : \{u, x\} \in E\}$$
$$T = V/S$$

由于 G 中没有大小为 $p+1$ 的团，因此 S 中没有大小为 p 的团，否则点集 $S \cup \{x\}$ 构成大小为 $p+1$ 的团。令

$$E' = \{\{u, v\} : u, v \in S, \{u, v\} \in E\} \cup \{\{u, v\} : u \in S, v \in T\}$$
$$G' = (V, E')$$

设 $\deg(u)$ 为 u 在 G 中的度数，$\deg'(u)$ 为 u 在 G' 中的度数。
若 $u \in S$, 那么由于 G' 中保留了所有 S 内部的边，并且加入了所有跨越 S 和 T 的边，所以 $\deg(u) \le \deg'(u)$。若 $u \in T$, 由于 x 是度数最大的点，所以 $\deg'(u) = \deg(x) \ge \deg(u)$。
因此 $|E'| \ge |E|$, 这意味着边数最大的图一定可以被转化成 G' 的形式。因此只需考虑 G' 的边最多为多少。
假设 $\deg(x) = d$, 因为 S 中没有大小为 p 的团，所以边数最多 $(1 - \frac{1}{p-1})\frac{d^2}{2}$。而 S 和 T 之间边数为 $(n-d)d$。而 $(n-d)d + (1 - \frac{1}{p-1})\frac{d^2}{2} \le (1 - \frac{1}{p})\frac{n^2}{2}$。其中等号取到时，$d = \frac{n(p-1)}{p}$。

奇怪的方法 图 $G = (V, E)$ 没有大小为 $p+1$ 的团，为图中每个点 i 指定一个权重 $\omega_i \ge 0$。权重满足 $\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$。我们要极大化

$$W = \sum_{\{u,v\} \in E} \omega_u \omega_v$$

对于任意一个权重分布，考虑图中不相邻的两个点 u, v。s_u s_v 是所有与 u, v 相邻的点的权重和。如果 $s_u \ge s_v$。那么我们让让 v 的权重为 0，u 的权重为 $\omega_u + \omega_v$。那么 W 一定是不降的。因此我们可以不断进行这样的步骤。直到最后所有的非零权重限制在一个团上。那么这个团的大小为 k, 那么必然有 $k \le p$。此时对于两个点，如果他们的权值不同, 将权值取平均。此时其他边的权值和没有变，而这条边的权值变大了。所以最后 k 团中所有点的权值都一样。此时

$$W = \frac{k(k-1)}{2}\frac{1}{k^2} = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{k})$$

假设我们初始让所有点的权值为 $\frac{1}{n}$。那么有

$$\frac{m}{n^2} \leq \frac{1}{2}(1-\frac{1}{k}) \leq \frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})$$

□

Problem 2. 如果在 n 个人中每个人最多和 100 个人相互认识，而每 50 个人中至少有两人相互认识。求 n 的最大值。

Solution. 先转化一下题目的条件，每 50 个人中至少有两人相互认识，这意味着把关系看成图的话，图 G 中不能有大小为 50 的独立集。$\overline{G}$ 不能有大小为 50 的团。由此我们可以知道 $\overline{G}$ 中的边 $m \leq \frac{24n^2}{49}$。
G 中每个人最多和 100 个人相互认识，在 $\overline{G}$ 每个点最多和 100 个点无连边。所以每个点的度数 $\deg(u) \geq n-101$。因此边数 $\frac{n(n-101)}{2} \leq m$。
连立得到 $n \leq 4949$。并且等号是可以取到的，只需要构造一个含有 49 个大小为 101 的团的图就是 G。 □

Problem 3. G 是一个有 n 个点和 m 条边的图，证明：G 中三角形的个数至少是 $m(4m-n^2)/(3n)$。

Solution. 考虑图 $G=(V,E)$。对于任意的 $\{u,v\} \in E$, 根据鸽巢原理，与他们都相邻的点至少有 $\max\{0, \deg(u)+\deg(v)-2-(n-2)\}$ 个。意味着存在这条边的三角形有这么多。记 T 为三角形个数。那么有下式成立，由于每个三角形可能被统计三次，因此需要除以 3，

$$T \geq \frac{1}{3} \sum_{\{u,v\}\in E} \deg(u)+\deg(v)-n$$

而

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{3}\sum_{\{u,v\}\in E}\deg(u)+\deg(v)-n\\
=&\frac{1}{3}\sum_{u\in V}\deg(u)^2-\frac{nm}{3}\\
\geq&\frac{1}{3n}\left(\sum_{u\in V}\deg(u)\right)^2-\frac{nm}{3}\\
=&\frac{4m^2}{3n}-\frac{nm}{3}
\end{aligned}$$

因此至少有 $\frac{4m^2}{3n}-\frac{nm}{3}$ 个三角形。 $\square$

Problem 4. 平面上任取 n 个点，使得它们两两之间距离最多为 1。定义 $f(n)$ 为所有这样的 n 个点中两两距离大于 $\sqrt{2}/2$ 的对数的最大值。求 $f(n)$。

Solution.

Claim 对于平面上任意 4 个点，两两之间的距离一定不都满足大于 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 且小于 1。

Proof 设四个点分别为 a,b,c,d。可以发现任意三个点组成的三角形，必定是锐角三角形，否则钝角所对应的边一定大于 1，因此这四个点不能构成凸四边形。所以存在一个点被包含另外三个点构成的三角形内部，不妨设这个点为 a。那么考虑 a 和 b,c,d 形成的三个角，由于和为 2π 所以不可能都为锐角，产生矛盾。

如果将小于 $\sqrt{2}/2$ 的点之间连边，这意味着图中不存在 K_4 子图，因此 $f(n)\leq\left\lfloor\frac{n^2}{3}\right\rfloor$。并且等号是可以取到的。我们可以进行如下构造来构造一个完全三分图。

1) 取一边长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}+2\epsilon$ 的等边 $\triangle ABC$, $\epsilon=10^{-8}$。

2) 在线段 AB 和 AC 上取和 A 距离 ϵ 的点 A_1,A_2, 在线段 BC 和 BA 上取和 A 距离 ϵ 的点 B_1,B_2, 在线段 CA 和 CB 上取和 A 距离 ϵ 的点 C_1,C_2。

3) 分别在线段 A_1A_2,B_1B_2,C_1C_2 任选 $\lfloor\frac{n}{3}\rfloor$, $\lfloor\frac{n+1}{3}\rfloor$, $\lfloor\frac{n+2}{3}\rfloor$ 个点作为完全三分图的三个部分。

长度限制 可以得到 $\overline{A_1B_2}=\frac{\sqrt{2}}{2},\overline{A_2B_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\epsilon,\overline{A_1B_2}=\overline{A_2B_1}>\frac{\sqrt{2}}{2}$。因此从分别从 A_1A_2 和 B_1B_2 上任意选两点 u,v, $1>\overline{uv}>\frac{\sqrt{2}}{2}$。
同理对于两外两对线段该结论也成立，因此图中所有边的长度满足题目要求。

取到等号 图中的边数有

$$|E|=\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor\left\lfloor\frac{n+1}{3}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor\left\lfloor\frac{n+2}{3}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n+1}{3}\right\rfloor\left\lfloor\frac{n+2}{3}\right\rfloor$$

而上界为 $M=\lfloor\frac{n^2}{3}\rfloor$。可以将 $n=3k,3k+1,3k+2$ 的情况依次代入验证。发现 $|E|$ 和 $|M|$ 相等。因此等号可以取到。
综上，$f(n)=\lfloor\frac{n^2}{3}\rfloor$。

□

Problem 5. 将一个图的各个点度数从大到小排序得到这个图的度数序列。给定序列 $d=(d_1,d_2,\ldots,d_n)$，其中 $d_1\geq d_2\geq\ldots d_n$。
如果 d 是某个简单图的度数序列，我们知道 $\sum d_i$ 是偶数；证明：对任意的 $1\leq k\leq n$,

$$\sum_{i=1}^{k}d_i\leq k(k-1)+\sum_{i=k+1}^{n}\min\{k,d_i\}.$$

Solution. 设 $G=(V,E)$, 任意取图中的 k 个点，组成集合 K, 其他的点设为集合 S。另外有 $E=\{\{u,v\}:u\in K,v\in S\}$。
注意到

$$\begin{aligned}\sum_{u\in K}\deg(u)&=\sum_{u\in K,v\in K.\{u,v\}\in E}2+\sum_{u\in K,v\notin K.\{u,v\}\in E}1\\&\leq k(k-1)+|E|\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}|E|&=\sum_{u\in S}\sum_{v\in K,\{u,v\}\in E}1\\&\leq\sum_{u\in S}\min(\deg(u),|K|)\end{aligned}$$

综上，

$$\sum_{u\in K}\deg(u)\le k(k-1)+\sum_{u\in V/K}\min(\deg(u),k)$$

由于 K 的任意性。所以即使 K 中包含度数最大的 k 个点依然成立。 $\square$

Problem 6. 构造 2020 个两两不同构但有相同度数序列的图。

Solution.
构造 $G_n=([10000],E_n)$

$$E_n=\{\{n,10000\},\{10000,n+1\}\}\bigcup\{\{k,k+1\}:1\le k\le 9998\}$$

Claim $E_2,E_3,\ldots,E_{2021}$ 度数序列相同且互不同构。
1) 不难发现 G_n 有两个度数为 3 的点为 n 和 $n+1$，两个度数为 1 的点 $1,9999$。其他点的度数均为 2。因此度数序列相同。
2) 当想要构造 G_n 和 $G_m(n\neq m)$ 的同构映射时，由于度数相同的限制，G_n 中 1 点必须被映射到 G_m 中某个度数为 1 的点，此时由于 G_n 中存在度数为 3 的点和 1 的最短距离分别为 $n.n-1$。而 G_m 中一定不存在这样的两个点。所以无法形成同构。

$\square$