CS477 Combinatorics: Homework 8

于峥 518030910437

2020 年 4 月 30 日

Problem 1. π 和 σ 是两个 [2020] 上的排列，各自的圈结构中恰好有 2000 个圈。确定 $\pi \circ \sigma$ 的圈数的所有可能值。

Solution. 在求所有的可能值之前，我们不妨先确定圈数的上下界。由于我们知道一个对换可以分裂或合并一个环。
如果我们想让圈数最小, 我们要尽可能去合并环。由于环结构中恰好有 2000 个圈，我们将 π 分解成对换，我们取分解后得到对换数量最少的，那么每个圈可以贡献圈数大小减一个对换。所以我们有 20 个对换。现在我们希望每个对换作用在 σ 上后都能完成一次合并。这显然是可以做到的，例如我们让 σ 包含一个大小为 21 的环 $(1, 2 \cdots 21)$, 和 1999 个大小为 1 的环。那么我们只要简单的让 π 为 $(22, 23)(24, 25) \cdots (60, 61)$ 即可。此时 $\pi \circ \sigma$ 有 1980 个环。
同样要让环最大只需要让 π 为 $(1, 2)(2, 3) \cdots (20, 21)$，也就是 σ^{-1}。此时有 2020 个环。由于我们注意到 π 中 20 个对换每一个都能让圈的数量加一或减一。因此 1980 到 2020 之间的偶数都是可能做到的。

□

Problem 2. $[n]$ 的所有置换中有多少个恰好有 1 个圈? 恰好有 2 个、3 个、$n-2$ 个、$n-1$ 个、n 个?

Solution. 令 $f_{n,m}$ 表示 $[n]$ 的所有置换中恰有 m 个圈的数量，我们可以通过枚举 1 所在圈的大小进行递推求解

$$f_{n,m} = \sum_{i=1}^{n-m+1} (i-1)! \binom{n-1}{i-1} f_{n-i,m-1}$$

当 $m=1$ 时求解的是大小为 n 的轮换数量，所以 $f_{n,1}=(n-1)!$。
当 $m=2$ 时，

$$\begin{aligned}
f_{n,2} &= \sum_{i=1}^{n-1}(i-1)!\binom{n-1}{i-1}f_{n-i,1} \\
&= (n-1)!\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{n-i} \\
&= H_{n-1}(n-1)!
\end{aligned}$$

当 $m=3$ 时，

$$\begin{aligned}
f_{n,3} &= \sum_{i=1}^{n-2}(i-1)!\binom{n-1}{i-1}f_{n-i,2} \\
&= (n-1)!\sum_{i=1}^{n-2}\frac{H_{n-i-1}}{n-i} \\
&= (n-1)!\sum_{i=1}^{n-1}\frac{H_{n-i-1}}{n-i} \\
&= (n-1)!\sum_{i=1}^{n-1}\frac{H_{i-1}}{i} \\
&= \frac{1}{2}(n-1)![H_{n-1}^2-H_{n-1}^{(2)}]
\end{aligned}$$

当 $m=n$ 时，全都是大小为 1 的圈 $f_{n,n}=1$。
当 $m=n-1$ 时，有一个大小为 2 的圈，其他都为 1，所以 $f_{n,n-1}=\binom{n}{2}$。
当 $m=n-2$ 时，可以有一个大小为 3 的圈，其他都为 1 或者由两个大小为 2 的圈，所以

$$\begin{aligned}
f_{n,n-2} &= 2\binom{n}{3}+\frac{1}{2}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2} \\
&= 2\binom{n}{3}+3\binom{n}{4}
\end{aligned}$$

□

Problem 3. 等概率地随机地在 $[n]$ 的所有置换中取一个。

(a) 1 和 2 在同一个圈中的概率是多少?
(b) 1 所在的圈长度为 k 的概率是多少?
(c) 1 所在的圈的长度的期望是多少?
(d) 圈的个数的期望是多少?
(e) 每个圈至少包含 $[k]$ 中一个元素的概率是多少?

Solution.
(a) 计算 1 和 2 在同一个圈中的置换数量, 枚举 1 所在圈的大小

$$\begin{aligned}P =&\frac{1}{n!}\sum_{i=2}^{n}(i-1)!(n-i)!\binom{n-2}{i-2}\\ =&\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=2}^{n}i-1\\ =&\frac{1}{2}\end{aligned}$$

(b) 1 所在圈大小为 k 有 $(k-1)!\binom{n-1}{k-1}(n-k)!=(n-1)!$ 种，概率为 $\frac{1}{n}$。
(c) 由上一问，期望 $E=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}=\frac{n+1}{2}$。
(d) 沿用第二问的记号, 不难得到

$$E_n=\sum_{m=1}^{n}\frac{mf_{n,m}}{n!}$$

发现 $\sum_{m=1}^{n}mf_{n,m}$ 代表的意义就是所有置换的每个圈都统计一次贡献，但是我们也可以认为是每个圈中最小的那个元素作了一次贡献。那么 1 在所有置换中都做了一次贡献，即贡献为 $n!$。我们记 $g_n=\sum_{m=1}^{n}mf_{n,m}$, 那么除了 1 以外其他元素所作的贡献我们可以先枚举 1 所在环大小，那么剩下的元素贡献就成为了一个子问题。因此

$$g_n=n!+\sum_{m=1}^{n}(m-1)!\binom{n-1}{m-1}g_{n-m}=n!+(n-1)!\sum_{m=1}^{n-1}\frac{g_m}{m!}$$

对比 E_n 和 g_n, 可以发现

$$E_n=1+\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n-1}E_m$$

并且 $E_1=1$, 对比调和级数恒等式

$$\sum_{k=1}^{n}H_k=(n+1)H_n-n$$

可以发现两者相同，我们得到 $E_n = H_n$。

(e) 令 $h_{n,k}$ 代表大小为 n 的置换每个圈包含 $[k]$ 中一个元素的个数。我们首先有 $h_{n,0}=0, h_{0,0}=1$。当 $n>k>0$ 时，我们枚举 $[k]$ 中最小元素所在圈的大小和在 $[k]$ 中的元素个数。

$$h_{n,k} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{n-k}\binom{k-1}{i-1}\binom{n-k}{j}(i+j-1)!h_{n-i-j,k-i}$$

上面这个式子不会算，我们可以组合解释，认为是先让 $[k]$ 中的元素组成一个置换，然后放入其他元素，放入第一个元素有 k 种方法，然后是 $k+1, k+2, \cdots, n-1$。

所以 $h_{n,k} = k!\cdot k\cdot(k+1)\cdots(n-1) = k(n-1)!$，因此概率为 k/n。

Tips ：上面的题目可以用这样的性质做，一个置换可以表示成若干个轮换，如果我们把每个轮换的最小元素放在最后，然后按最小元素排列。例如 $(11,7,5,9,1)(6,3,2)(4,8,10,3)$ 我们将括号去掉之后依然能够得到原排列是什么样的。 □

Problem 4. * 将 $\mathbf{Z}_n$（模 n 的同余系 $0,1,\ldots,n-1$ 组成的环）的元素排在一个等分成 n 格的圆周上，每个格子一个元素，使得如果 $a+1$ 顺时针在 b 之前一格，那么 $b+1$ 顺时针在 a 之前一格。对什么样的 n，必定存在 x 使得 $x+1$ 在 x 之前一格?

Claim 当 n 不是 4 的倍数时，必定存在 $x+1$ 在 x 前一格。

(a) 当 $n=4k$, 我们这样进行构造。如果轮换为 $a=(a_0,a_1,a_2,\cdots,a_{n-1})$, 让 $a_0=n-1, a_1=n-4, a_2=n-3, a_3=n-2$, 其他 $a_i=a_{i-4}-4$。

我们先按下标四个为一组，对组内的关系进行检查，每一组都形如 $4k-1, 4k-4, 4k-3, 4k-2$。$4k-1$ 在 $4k-4$ 之前推出 $4k-3$ 在 $4k-2$ 之前，符合要求。$4k-4$ 在 $4k-3$ 之前推出 $4k-1$ 在 $4k-5$ 之前。不难发现 $4k-1$ 后继的确是 $4k-5$，因为我们有 $a_i=a_{i-4}-4$。这样我们顺便也完成了相邻组的检查，因此该构造满足要求。

(b) 当 n 为奇数时, 由于我们当我们想让 $a+1$ 在 b 之前，必然有 $b+1$ 在 a 之前，这意味着我们每次都会为两个不同的元素选择后继，而 n 为奇数，那

么最后只剩一个元素没有决定后继时一定会出现矛盾，所以必定存在 x 使得 $x+1$ 在 x 之前一格。
(c) 当 $n=4k+2$ 时, 假设满足条件的轮换为 π。令 σ 为轮换 $(0,1,2,\cdots,n-1)$。那么 $\pi\sigma$ 将会是 $\frac{n}{2}$ 个不相交的对换。因为如果 $(\pi\sigma)(a)=\pi(a+1)=b$, 那么必有 $(\pi\sigma)(b)=\pi(b+1)=a$。进而注意到 $\pi=(\pi\sigma)\sigma^{-1}$。由于 σ^{-1} π 都是一个环，而 $\pi\sigma$ 将会是奇数个的对换，因此等式右边是偶置换，左边是奇置换。因此不可能存在满足条件的 π.

PS 感觉这题也不是很复杂 QAQ，最后一种情况想了好久。