CS477 Combinatorics: Homework 10

于峥 518030910437

2020 年 5 月 13 日

Problem 1. 证明：任何一个元素为非负实数、每行每列之和为 1 的 $n \times n$ 矩阵可以表示成置换矩阵的凸组合。

Solution. 首先我们不难把矩阵转化为二分图，如果 $M_{ij} \neq 0$, 那么二分图 i, j 对应的点之间有边相连。我们首先证明这个二分图 $G = (L \cup R, E)$ 是有完美匹配的，即该二分图满足 Hall 条件。

如果存在子集 $S \subset L$, 满足 $|\mathcal{N}(S)| < |S|$，注意到 $|S|$ 所对应的行上的数字和为 $|S|$。这是 $|\mathcal{N}(S)|$ 对应列上的数字的部分和，而 $|\mathcal{N}(S)|$ 对应列上的数字和为 $|\mathcal{N}(S)| < |S|$, 产生矛盾，因此必定所有集合都满足 Hall 条件，即二分图有完美匹配。因此矩阵上至少有 n 个非零的 M_{ij}, 我们可以对矩阵中不为 0 的 M_{ij} 个数进行归纳。

Induction Base 如果有 n 个位置非零，这 n 个位置必定都为 1，不难发现 M 本身就是个置换矩阵。

Induction Step 对于非零位置数大于 n 的矩阵，我们找到对应二分图上的一个完美匹配，选择将匹配边对应的矩阵中的数中最小的一个，设为 λ_0, 匹配对应的矩阵为 P_0, 那么我们将矩阵减去 $\lambda_0 P_0$ 非零位置位置个数必定至少减少 1，因此我们将剩下的矩阵可以看作 $(1-\lambda_0)M'$, M' 依然是每行每列都为 1 的矩阵，根据归纳 M' 可以表示成置换矩阵的凸组合。

那么考虑此时矩阵 $M = \lambda_0 P_0 + (1-\lambda_0)M' = \lambda_0 P_0 + (1-\lambda_0)\sum_{i=1}^{k} \lambda_k P_k$。并且 $\lambda_0 + (1-\lambda_0)\sum_{i=1}^{k} \lambda_k = 1$, 因此 M 可以表示成置换矩阵的凸组合。

$\square$

Problem 2. G 是一个二分图，最大度数为 Δ。
证明：可以对 G 的边用 Δ 种颜色染色，使得任何两条有公共点的边不同色。

Solution. 假设我们至少需要 C 种颜色才能使得任何两条有公共点的边不同色。那么我们显然有 $C \geq \Delta$。
考虑二分图左侧 L 所有度数为 Δ 的点的集合 S，那么 S 和 $\mathcal{N}(S)$ 必然存在大小为 $|S|$ 的匹配，因为考虑任意子集 $T \subset S$, T 和 $\mathcal{N}(T)$ 之间的边数为 $|T|\Delta = |\mathcal{N}(T)|\overline{d}$. $\overline{d}$ 是 $\mathcal{N}(T)$ 的平均度数显然小于等于 Δ, 所以 $|T| \leq |\mathcal{N}(T)|$，这意味着这个子图满足 Hall 条件。我们记这个匹配为 M_L.
同理对右侧拥有度数 Δ 的点的集合找到完备匹配 M_R.
那么 $M_L \cup M_R$ 形成一个子图，首先我们有这个子图中的点度数都小于等于 2。所以这个子图的每个连通块只能是链或者环。
i) 如果是环，我们可以做到选泽环上一半的边, 这些边之间没有公共点，我们把它们从图上删去。此时这个连通块中的每个点度数都减少了 1。
ii) 如果是链，若这条链的长度为奇数 $2k+1$，那么我们可以做到删去 $k+1$ 条互相没有公共点的边使得每个点度数都减少 1。
若是偶数, 不难发现不可能链条两端的点度数在原图都是当前图的最大度数 Δ, 否则会出现两个度数为 Δ 的点匹配到了同一个点，根据构造这是不可能的。所以如果我们发现链的一端的度数小于 Δ, 那我们就从另一端开始，每隔一条边就删去一条边。我们可以做每个度数为 Δ 的点度数都减少 1。
每次操作可以让最大度数减少 1，因此 Δ 次后图将没有边。我们让一次删去的边染上同一种颜色，我们就得到了一个大小为 Δ 的染色。 □

Problem 3. 证明：对任意整数 $k \geq 2$，

$$r(3,k) \leq \frac{k^2+3}{2}.$$

Solution.

Induction Base 由于 $r(3,2)=3, r(3,3)=6$ 可以验证是满足要求的。

Induction Step 假设对于小于 k 时都成立，下面证明对于 k 也成立。
我们可以证明，$r(3,k) \leq r(3,k-1)+k$, 因为我们可以选择一个点，对于它连出去的 $r(3,k-1)+k-1$ 条边，如果黄色边数量大于等于 k, 那么对于黄

色边对应的点，如果不全是蓝色 (存在蓝色 K_k) 那么必有黄色三角形。如果黄色边数量小于 k, 那么就至少存在 $r(3,k-1)$ 条蓝色边，我们知道这些边对应的点如果存在蓝色 K_{k-1}, 那么加上选择的点构成蓝色 K_k。
当 k 是奇数时

$$r(3,k) \le k + \lfloor \frac{(k-1)^2+3}{2} \rfloor = k + \frac{(k-1)^2+2}{2} = \frac{k^2+3}{2}$$

当 k 是偶数时，我们可以证明 $\frac{k^2+2}{2}$ 个点将足够。因为如果每个点连出去的蓝边数量都小于 $\frac{(k-1)^2+3}{2}$, 并且黄边数量小于 k。
那么每个点连出去的黄边数量必须为 $k-1$, 而 $k-1$ 是奇数，而 $\frac{k^2+2}{2}$ 也是奇数，因此这个黄色子图不满足握手定律。因此必然存在一个点满足蓝边大于等于 $r(3,k-1)$ 或黄边大于等于 k。因此 k 为偶数时也满足。

□

Problem 4. 定义 $r_k(3)$ 为最小的 N 使得对 K_N 的边任意 k 染色，总有一个同色三角形。证明：

$$2^k < r_k(3) \le \lfloor ek! \rfloor + 1.$$

Solution. a) $2^k < r_k(3)$
`Induction Base` 当 $k=1$ 时，显然 2 个点不可能有同色三角形。
`Induction Step` 当小于 k 都成立时, 我们取两个大小为 2^{k-1} 的图且两个图没有同色三角形，根据归纳这能做到。我们用新的第 k 种颜色把两个图之间的边连起来，就得到了大小为 2^k 且没有同色三角形的图。
b) $r_k(3) \le \lfloor ek! \rfloor + 1$
用 k 种颜色对 K_n 染色，考虑 K_n 中某个点，它的邻边中必然有某种颜色出现了 $\lceil \frac{n-1}{k} \rceil$ 次，不妨设为黄色，如果这对应的 $\lceil \frac{n-1}{k} \rceil$ 个点的子图中出现了黄色，那么意味着出现了一个黄色三角形。否则如果 $\lceil \frac{n-1}{k} \rceil \ge r_{k-1}(3)$, 那么也有同色三角形。
因此我们得到

$$r_k(3) \le k(r_{k-1}(3) - 1) + 2$$

又 $r_2(3) = 3$, 我们让 $f_1 = 3, f_k = kf_{k-1} - k + 2$. 那么我们可归纳证明

$$f_k - 1 = \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!}$$

当 $k=1$ 时验证成立。若当小于 k 时成立，那么我们有 k 时也成立

$$f_k - 1 = k(f_{k-1}-1)+1 = k\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(k-1)!}{i!}+\frac{k!}{k!}=\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!}$$

因此 $r_k(3) \le f_k < ek!+1$, 考虑 $r_k(3)$ 为整数所以 $r_k(3) \le \lfloor ek! \rfloor + 1$.

$\square$

Problem 5. 称一个关于 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的方程 E 是 Ramsey 的，如果：对任意的 k，存在一个 N，使得对任意的染色 $f:[N]\to[k]$，总有 E 的同色解，即 E 的一组解 $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ 使得 $f(a_1)=f(a_2)=\cdots=f(a_n)$。注意其中 a_i 不必两两不同。对下面的方程的每一个，证明或否定它是 Ramsey 的。

(a) $E_1 : x = 2y$;

(b) $E_2 : x + y = z$;

(c) $E_3 : 5x + 3y = 7z + 12w$;

(d) $E_4 : x + 2020y = z$。

Solution. (a) E_1 不是 Ramsey 的，因为图 $G=([N],\{\{x,y\}:x=2y\})$ 由若干条链组成，可以二染色，所以对于任意的 N 都能做到不出现相邻同色节点，因此没有同色解。

(b) E_2 是 Ramsey 的，$\forall k$, 考虑

$$N = r_k(3) = \underbrace{r(3,3,\cdots,3)}_{\text{k 个 3}}$$

对于染色 $f:[N]\to[k]$，我们考虑 K_N, 对边进行 k 染色，染色方式是对于边 $\{u,v\}$, 颜色为 $f(|u-v|)$。那么由于其中必定存在同色三角形。设三角形的三个点为 $a,b,c(a>b>c)$, 那么边所对应的数为 $a-b, b-c, a-c$。由构造知道这三个数是同色的。又 $(a-b)+(b-c)=a-c$，所以满足 E_2。

(c) 否定，对于 $k=22$, 我们定义染色 $f:\mathbb{Z}_+\to[22]$, $f(23^k\cdot j)=j \mod 23$, 其中 $23 \nmid j$。假设存在一组同色解 $f(x)=f(y)=f(z)=f(w)=j$.

所以我们有

$$5\cdot 23^{k_1}(23x_1+j)+3\cdot 23^{k_2}(23y_1+j)=7\cdot 23^{k_3}(23z_1+j)+12\cdot 23^{k_4}(23w_1+j)$$

我们将等式两边除以 $23^{\max\{k_1,k_2,k_3,k_4\}}$

$$5\cdot 23^{m_1}(23x_1+j)+3\cdot 23^{m_2}(23y_1+j)=7\cdot 23^{m_3}(23z_1+j)+12\cdot 23^{m_4}(23w_1+j)$$

然后对等式两边对 23 取模, 注意到根据定义，$j\neq 0$，然后除以 j

$$5\cdot 23^{m_1}+3\cdot 23^{m_2}=7\cdot 23^{m_3}+12\cdot 23^{m_4} \pmod{23}$$

由于 m_1,m_2,m_3,m_4 中至少有一个是 0, 而枚举所有情况检查后发现不存在合法的 m_1,m_2,m_3,m_4，所以不存在同色解。
(d) E_4 是 Ramsey 的，借助范德蒙数的存在性来证明，

Lemma 1. *对任意的 k,l, 存在 N, 使得 $[N]$ 被 k 染色后中一定存在同色的长度为 l 的等差数列。最小的 N 记为 $W(k,l)$。*

注意到对于 $w(k,2021)$，如果我们能保证等差数列的公差也和等差数列同色。那么我们就找到了方程 $x+2020y=z$ 的一组解。我们记满足这样要求的最小的 N 为 $f(k)$。
我们归纳证明 $f(k)$ 是存在的，首先 $f(1)=2021$。
然后我们可以证明

$$f(k)\leq W(k,2020f(k-1)+1)$$

因为对 $[W(k,2020f(k-1)+1)]$ 进行 k 染色后，其中存在一个长度为 $2020f(k-1)+1$ 的同色等差数列 $a,a+d,\cdots,a+2020f(k-1)d$。不妨设颜色为黄色，那么我们再考虑 $d,2d,\ldots,f(k-1)d$, 如果这些数中存在黄色，设为 jd, 那么 $a,a+jd,\cdots,a+2020jd$ 就是满足要求的。否则 $d,2d,\ldots,f(k-1)d$ 是被 $k-1$ 染色的，根据归纳同样满足要求。
所以对于任意的 k, 都存在满足条件的 N。 $\square$