MA150 Algebra

homework 6

Problem 1 *Page 79-2*

Solution: 根据$C(G)$的定义

$$C(G) = \{g \in G | gx = xg, \forall x \in G\}$$

则 $\forall a \in G$

$$\begin{aligned} aC(G)a^{-1} =& \{axa^{-1} | x \in C(G)\} \\ =& \{x(aa^{-1}) | x \in C(G)\} \\ =& C(G) \end{aligned}$$

所以$C(G)$是G的正规子群。

Problem 2 *Page 79-5*

Solution:

$$\begin{aligned} H =& \{(1), (2\ 4)\} \\ K =& \{(1), (2\ 4), (1\ 3), (2\ 4)(1\ 3)\} \\ G =& \{(1), (2\ 4), (1\ 3), (2\ 4)(1\ 3), (1\ 2)(3\ 4), (2\ 3)(1\ 4), (1\ 2\ 3\ 4), (1\ 4\ 2\ 3)\} \end{aligned}$$

其中 $(1\ 2\ 3\ 4)(1\ 3)(1\ 2\ 3\ 4)^{-1} = (2\ 4) \notin H$

Author(s): 于峥

Problem 3 *Page 79-6*

Solution: **必要性**：若H是Gd的正规子群，现有$a, b \in G$, $ab \in H$。

因为$bHb^{-1} = H$, 所以$b(ab)b^{-1} = ba \in H$。

充分性：若$ab \in H$，都有$ba \in H$，则$a(a^{-1}h) \in H \Rightarrow (a^{-1}h)a \in H$。所以$H$是正规子群。

Problem 4 *Page 79-9*

Solution: 根据定义, $\forall a \in N(H)$, $aHa^{-1} = H$,H是$N(H)$的正规子群是显然的。

首先$N(H) \subseteq G$, $\forall a, b \in N(G)$。

$$\begin{aligned}(ab^{-1})H(ab^{-1})^{-1} &= a(b^{-1}Hb)a^{-1} \\ &= a(b^{-1}(bHb^{-1})b)a^{-1} \\ &= aHa^{-1} \\ &= H\end{aligned}$$

所以$ab^{-1} \in N(H)$, $N(H)$是G的子群。

Problem 5 *Page 79-10*

Solution: **必要性**：由于H是正规子群，所以$\forall a, aHa^{-1} = H \Rightarrow \phi(H) \in H$。

充分性：由于$\phi(H) \in H$, 即$\forall a$, $aHa^{-1} \in H$, 所以H是G的正规子群。

Problem 6 *Page 79-11*

Solution: 考虑商群G/H, H为商群的单位元, 由于$|G/H| = [G : H] = m$。根据拉格朗日定理的推论，$(xH)^m = x^m H = \overline{e} = H$。所以$x^m \in H$