1 Avant propos

Lorsque l'on digitalise un signal, on parle de taux d'échantillonnage ($1/\Delta t$ où Δt est le délai entre deux mesures), le nombre N de points, la durée T de la mesure (on a $T = N\Delta t$). On note t_i l'instant de la mesure i (on a $t_i = t_0 + i\Delta t$). Pour un signal $x(t)$, on note $x_i = x(t_i)$.

Un point important lors du traitement numérique de signaux et de convertir les formules continues en formules discrètes.

2 Densité spectrale du bruit d'une machine à laver

Nous avons enregistré le bruit d'une machine à laver le linge pendant la phase d'essorage. Les fichiers `.wav` dans le répertoire `data` correspondent à trois enregistrements. On entend un son aigu correspondant au moteur. Le tambour tourne beaucoup plus lentement.

1. Quel est la fréquence typique de rotation du tambour d'une machine à laver la linge ? (Il n'est pas interdit d'utiliser internet pour répondre à cette question).
2. Lire un des fichiers `wav` en utilisant la fonction `read` de la librairie *scipy.io.wavfile*. On enregistrera l'amplitude du son dans la variable *amplitude*. Appliquer sur cette variable la transformation suivante

```
amplitude = amplitude[44100:]/2**15
```

   Tracer l'amplitude du son pendant la dernière seconde.
3. On va utiliser la fonction `periodogram` du module `scipy.signal`. Le périodogramme est le nom de la méthode utilisée pour estimer la densité spectrale de puissance en se basant sur le transformée de Fourier(équation 1.22 du cours). Déterminer la fréquence de rotation du tambour en zoomant entre 10 et 50 Hz.
4. On suppose que après la transformation de la question 2, les unités de `amplitude` sont des volts (V). Quelle est l'unité de la densité spectrale de bruit ? Quelle est sa valeur typique entre 10 et 100 Hz ?
5. Lorsque l'on fait l'analyse spectrale du son, nous distinguons le signal que l'on veut voir (ici la rotation du tambour) du bruit ambiant. Le signal est défini par son amplitude et le bruit par sa densité spectrale de puissance. En utilisant l'option `scaling='spectrum'` de la fonction `periodogram`, calculer l'amplitude du signal.
6. Sur quelle bande passante faut-il filtrer pour espérer voir le signal ?

3 Filtre par transformée de Fourier

3.1 Avant propos

Transformée de Fourier continue

Voici quelques rappels :

— Transformée de Fourier continue

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \mathrm{d}t$$

— Transformée de Fourier inverse

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) e^{+i\omega t} \mathrm{d}\omega$$

Série de Fourier

Elle sont introduite dans le cas d'un signal périodique (T). Seules les harmoniques de la fréquence fondamentale sont présentes :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i2\pi \frac{n}{T} t}$$

avec

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^e T f(t) e^{-i2\pi \frac{n}{T} t} dt$$

Les formules donnant $f(x)$ et les coefficients c_n ont été écrites pour une fonction périodique. Cependant elles restent toujours valable pour toute fonction si on se restreint à des valeurs de x entre 0 et T. Si une fonction est définie sur un intervalle $[0, T]$, alors cette fonction peut être décrite par une nombre infini mais discret de coefficients c_n correspondant aux fréquences n/T.

La TF étant sa propre réciproque, on peut en déduire que si une fonction est définie pour une ensemble discret de temps (séparé par Δt), alors elle aussi décrite par des fréquences comprises entre 0 et $\frac{1}{\Delta t}$ (ou entre $-\frac{1}{2\Delta t}$ et $\frac{1}{2\Delta t}$).

Transformée de Fourier Discrète

Dans le cas d'un signal défini sur une ensemble discret de temps (échantillonnage) et sur une durée finie, on définit la transformée de Fourrier de la façon suivante :

$$\tilde{x}_k = \sum_{i=0}^{N} x_j e^{2i\pi \frac{kj}{N}}$$

Cette formule donne ce qui est calculé par les librairies de transformée de Fourrier.

On a le lien suivant avec la TF continue :

$$\tilde{x}_k = \sum x_j e^{2i\pi (j\Delta t) \frac{k}{N\Delta t}} = \frac{1}{\Delta t} \sum f(t_j) e^{2i\pi t_j \frac{k}{T}} \Delta t = \frac{1}{\Delta t} \tilde{f}\left(\frac{k}{T}\right)$$

Cette formule nous permet d'utiliser correctement les librairies, à la fois pour l'échelle horizontale et verticale.

La transformée de Fourier discrète (Discret Fourier Transform - DFT) est souvent calculée en utilisant l'algorithme de FFT (Fast Fourier Transform). L'usage confond les deux acronymes et utilise FFT pour désigné la DFT.

3.2 Transformée de Fourier en Python

Les algorithmes de fft se trouvent dans le module `fft` de numpy. Il est possible de simplifier le calcul de la TF lorsque le signal est réél (puisque $\tilde{f}(-\omega) = \tilde{f}(\omega)^*$). On utilise alors les fonction `rfft` et `irfft` pour effectuer la FFT. La fonction `rfftfreq` va donner les fréquences.

On crée le signal suivant

```
samplerate = 44100
signal = zeros(samplerate*3)
signal[samplerate:samplerate*2)] = 1
plot(signal)
```

1. Vérifier que l'on obtient le même signal après avoir appliqué `rfft` et `irfft`

```
import numpy as np
signal_tilde = np.fft.rfft(signal)
signal_2 = np.fft.irfft(signal_tilde)
plot(signal_2)
```

2. Utiliser la fonction `rfftfreq`. Est que ce qu'elle renvoie vous semble cohérent ?
3. Appliquer un filtre passe bas sur le signal de fréquence de coupure $f_c = 3$ Hz :

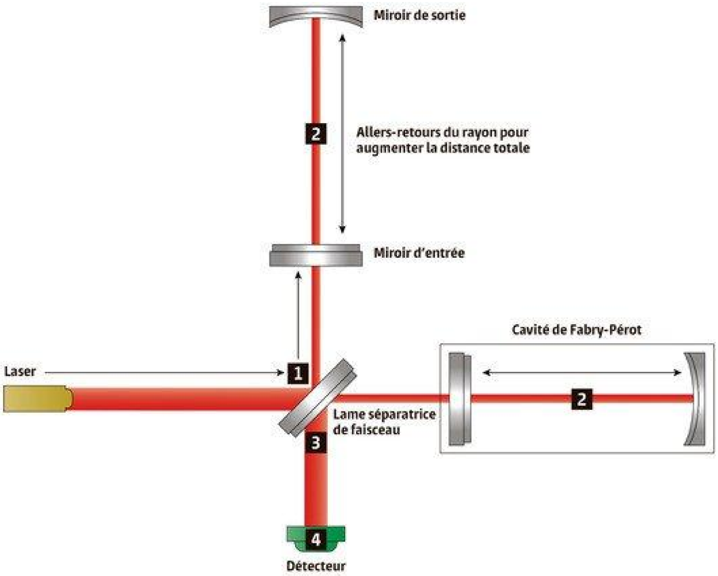
$$H(f) = \frac{1}{1 + j(f/f_c)}$$

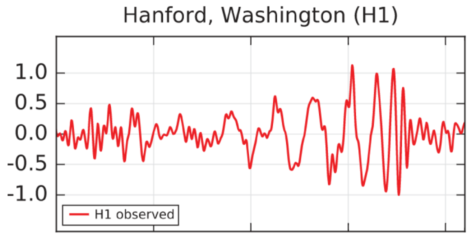
   Le filtre sera appliqué dans l'espace de Fourrier.
4. De même avec un filtre passe haut :

$$H(f) = \frac{j(f/f_c)}{1 + j(f/f_c)}$$

5. Créer deux fonctions python `passe_haut` et `passe_bas`.
6. Filtrer le son de la machine à laver avec un filtre passe basse bas de fréquence 30 Hz. Peut-on voir le signal ?

4 Onde gravitationnelle





L'objectif de cette partie est d'analyser les signaux provenant des deux détecteurs d'onde gravitationnelle de LIGO (Hanforg et Linvingston). Le signal qui est enregistré est de celui de l'élongation relative (strain) des deux bras de l'interféromètre de Michelson.

1. En utilisant la fonction `loaddata` de la librairie `readligo`, extraire les données d'élongation relative et de temps des deux fichiers `H-H1_LOSC_4_V1-1126259446-32.hdf5` et `L-L1_LOSC_4_V1-1126259446-32.hdf5`.
2. L'unité de temps est la seconde. Quelle est la durée de la mesure, le taux d'échantillonnage ?
3. Ces données sont centrées autour du moment où une onde gravitationnelle a été détectée, le 14 septembre 2015, vers 9h50. Quelle est l'origine du temps (le rédacteur de ce TD n'a pas trouvé de réponse, peut être faut-il regarder la page https://en.wikipedia.org/wiki/Julian_day) ?
4. Tracer le signal pendant 10 secondes autour du passage de l'onde (autour du centre des données). Le passage de l'onde gravitationnelle a duré 100 ms environ. Peut-on voir ce signal ?
5. Tracer la densité spectrale de puissance entre 10 Hz et 2kHz. On utilisera la fonction `periodogram`. Puis on utilisera la fonction `welch` (toujours dans le module `scipy.signal`). La méthode de Welch effectue la moyenne de plusieurs périodogrammes pris consécutivement sur des durées plus courtes (argument `nperseg`). On prendra une largeur de bande de 1 Hz (i.e. on prendra `nperseg` égal au taux d'échantillonnage) :

```
f, psd = welch(strain_H1, samplerate, nperseg=samplerate)
```

6. Quel la valeur typique de la densité vers 100 Hz. Estimez la variance du signal après un filtre entre 30 et 300 Hz. Qu'en pensez-vous ?
7. Le problème est qu'il y a des pics de résonance qui représentent la majeur partie du bruit. Pour les supprimer, on va appliquer un filtre dont le gain en puissance sera inversement proportionnel à la densité spectrale de puissance.

Voici comment ce filtre sera appliqué

```
from scipy.interpolate import interp1d

def whiten(strain, dt):
    freqs, psd_welch = welch(strain, fs=1/dt, nperseg=int(1/dt))
    interp_psd = interp1d(freqs, psd_welch)

    N = len(strain)
    freqs = np.fft.rfftfreq(N, dt)

    strain_tilde = np.fft.rfft(strain)
    gain = 1 / np.sqrt(interp_psd(freqs))
    gain = gain/gain.max()
    white_strain_tilde = strain_tilde * gain
    white_strain = np.fft.irfft(white_strain_tilde)
    return white_strain
```

8. Il reste encore du bruit à haute et basse fréquence. Appliquer un filtre passe bas de fréquence 300 Hz et un filtre passe haut de fréquence 20 Hz. Peut-on voir le signal ? Tracer le signal des deux détecteurs l'un à côté de l'autre, en changeant le signe d'un des deux signal. Quel est le délai entre les deux signaux ?
9. Sur cet événement, on peut facilement voir le signal sur chaque détecteur car il est supérieur au bruit après filtrage. Cependant, il est aussi possible de corréler les deux détecteurs. On peut alors appliquer un filtre passe bas de plus passe fréquence car après corrélation, le signal ne se moyenne plus à zéros. Effectuer le produit des deux signaux et filtrer avec un filtre passe bas de fréquence de coupure à 10 Hz. Donner un ordre de grandeur du bruit RMS et de l'amplitude du signal. Quel est le facteur d'amélioration sur le rapport signal sur bruit ?