Dans ce TP, nous utiliserons plusieurs fonction de `numpy` et `scipy`. En particulier :

— Distribution aléatoire : package `numpy.random`, fonctions `normal`, `poisson`, `binomial`. En général ces fonctions ont un paramètres `size` qui permet de faire un grand nombres de tirages. Il est aussi possible de leur envoyer un tableau de paramètre.

— Histogramme : on pourra utiliser la fonction `numpy.histogram` ou la fonction `matplotlib.pyplot.hist`. Il est important d'utiliser l'argument optionel `bins` en mettant une séquence. Par exemple `numpy.histogram(data,bins=(a,b))` calcule le nombre de point entre a et b.

— Dans le package scipy.stats, il existe des fonctions qui peuvent être utiles. Par exemple `scipy.stats.poisson.pmf` permet de calculer la fonction de distribution d'une loi de Poisson.

Dans tout ce TP, l'utilisation de boucles est en général inutile et fortement déconseillée.

Distribution de Bernouilli

On considère une distribution de Bernouilli de paramètre p. C'est à dire que $P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p$. On prendra $p = \frac{1}{2}$.

1. Vérifiez numériquement que l'espérance vaut p et l'écart type $\sqrt{p(1-p)}$. On prendra M tirages avec M=100000
2. On considère N tirages et la variable aléatoire $\bar{X} = (X_1 + .. + X_N)/N$. Vérifiez numériquement que l'espérance vaut p et l'écart type $\sqrt{p(1-p)}/\sqrt{N}$. On pourra prendre $N = 100$.
3. On considère la variable aléatoire $Y = (\bar{X} - p)\sqrt{N}$. En prenant M tirages tracer l'histogramme de Y. On pourra tracer l'histogramme entre -2 et 2. Il faut faire attention aux valeurs que l'on choisit pour la variable bins. Dans le cas d'une variable discrete, il faut éviter que le nombre de possbilité change d'un interval à l'autre. Une solution à ce problème est de prendre des points entre les valeurs possible. Ceci peut ce faire de la façon suivante : `bins = ((arange(N+1)-.5)/N -p)*sqrt(N)`. On selectionnera une partie de ce tableau.
4. Comparez à la valeur donnée par le théorème central limite, pour N=1, 10, 100 et 1000.

Distribution uniforme

On considère une variable aléatoire X qui suit une distribution uniforme en 0 et 1. A partir d'un échantillon de N mesures, l'objectif est de determiner le centre de cette distribution. On utilisera deux estimateurs : le premier est simplement la moyenne et le second est la moyenne entre le minimum et le maximum de l'échantillon. Comparez la distribution de ces deux estimateurs et leur erreur quadratique. On pourra prendre $N = 10$.

Loi de Poisson

Cette loi est très présente en physique. Une raison est que cette loi est stable par certaine transformation. Par exemple, la somme de deux variables aléatoires qui suivent une loi de Poisson suit aussi une loi de Poisson. Réciproquement, si on réduit l'intensité par un processus aléatoire, alors on retrouve un loi de Poisson.

On considère une source de lumière. Les photons sortent selon un processus poissonien. La mesure du nombre de photon pendant un duree Δt suit donc une loi poissonienne de paramètre $\lambda = \Phi\Delta t$ où Φ est le flux de photon. On prendra $\lambda = 10$). Une lame semi-réfléchissante réfléchi aléatoirement un photon sur deux.

1. Si on suppose que pendant la durée Δt, le nombre de photon sortant de la source est k, quelle est la distribution de probabilité au niveau du détecteur ?
2. Vérifiez graphiquement que la distribution est une distribution poissonienne de paramètre $\lambda/2$
3. On modifie maintenant le fonctionnement de la lame semi refléchissante et on suppose qu'elle réfléchi alternativament un photon sur deux. Dans le cas d'un nombre pair de photon on a donc $k/2$ photons et dans le cas impair, on $(k-1)/2$ ou $(k+1)/2$ photons avec une probabilité $1/2$. Vérifiez que la distribution n'est alors plus poissonienne.