Traitement du signal

Introduction

Signal $x(t)$

Dispo en informatique :

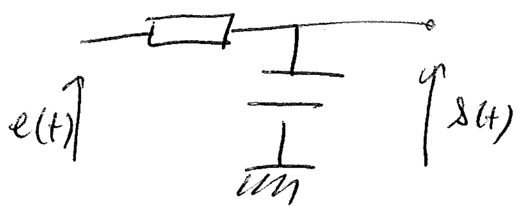
Taux d'échantillonage Δt

Durée T

Nb pts $N = \frac{T}{\Delta t}$

I/ Filtre ~~num~~ analogique

Exemple circuit RC



$$\frac{ds}{dt} = \frac{e-s}{RC} \longrightarrow s(T) = \int_{-\infty}^{T} e^{(t-T)/RC} \, e(t) \frac{dt}{\tau}$$

~~Réponse impulsionnelle~~ Si $e(t) = \delta(t)$ alors $s(T) = \frac{e^{-T/\tau}}{\tau}$

$g(T) = \frac{e^{-T/\tau}}{\tau}$ pour $T > 0$

0 Sinon

De façon générale on peut tjs écrire

$$e(T) = \int \delta(t-T)\, e(t)\, dt$$

et donc $s(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(t)\, g(T-t)\, dt$

g est la réponse impulsionnelle. Elle détermine le filtre

* $s = e * g$

Dans l'espace de Fourier

$$\tilde{s}(\omega) = \tilde{e}(\omega)\underbrace{\tilde{g}(\omega)}_{h(\omega)}$$

Exemple : filtre RC $\int e^{-i\omega t} e^{-t/\tau} dt = \frac{\tau}{1+i\omega\tau}$

On retrouve evidement la fonction de transfert en notation complexe

De façon generale $|h(\omega)|$ gain en amplitude

$\arg(h(\omega))$ déphasage.

Filtrage numérique

On a un tableau de points x_n ~~...~~ $= x(t_n)$

Il n'est pas possible de calculer $y(t_n)$ à partir des x_n car il manque de l'information.

On peut cependant filtrer les données avec des filtres proches des filtres analogiques correspondant.

Exemple du filtre RC

$$\frac{d\,s(t)}{dt} = \frac{e(t)-s(t)}{RC}$$

~~...~~

$$\frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{e(t) - s(t)}{\tau}$$

$$s(t+\Delta t) + \left(\frac{\Delta t}{\tau} - 1\right) s(t) = \frac{e(t)}{\tau}$$

$\rightarrow s_{n} + (\varepsilon - 1) s_{n-1} = \varepsilon e_n$ où $\varepsilon = \frac{\Delta t}{\tau}$ est petit.

Autre solution $s(n) = \sum_{n_0=-\infty}^{n} e^{-\frac{n_0 \Delta t}{\tau}} e(n-n_0) \cdot \frac{\Delta t}{\tau}$

Transformée en z

$$S(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} s_n z^{-n} \quad \text{on note } S = Z(s)$$

× On peut montrer que

$$Z(x * y) = Z(x)\, Z(y)$$

× Si y est la suite $n \longrightarrow x_{n+1}$

alors $Z(y) = z\, Z(x)$

Pour le filtre RC on va avoir

$$S \left(1 + (\varepsilon - 1)\frac{1}{z}\right) = \varepsilon E$$

De façon générale

$$S = \frac{E \times B(z)}{A(z)} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} B(z) &= b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_q z^{-q} \\ A(z) &= 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_p z^{-p} \end{aligned}$$

Ce sont des filtres simples à mettre en oeuvre

Il existe des façons de trouver les A et B en fonction de ce que l'on veut filtrer

Module scipy.signal

butter (Butterworth)

lfilter

* Les filtres sont rapides
* Necessitent peu de mémoire
* On peut le faire au fur et à mesure
* Il existe des processeurs spécialisés qui font uniquement ces filtres.

$$* \; H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \sum_{-\infty}^{\infty} h(k) z^{-k}$$

Réponse impulsionnelle

$$h(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H(e^{i\theta}) e^{ik\theta} d\theta$$ → Lien avec la TF discrète