Densité spectrale de puissance

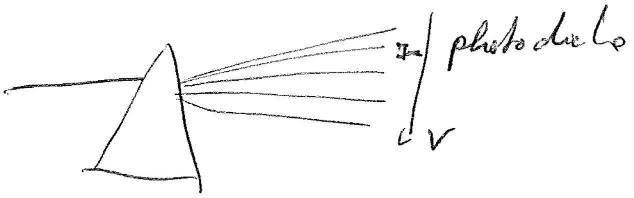
Idée : • onde lumineuse

$$E(t)=Ee^{i\omega t} \longrightarrow \text{puissance instantanée } \frac{E^2}{2\mu_0 c}$$

• Électricité : charge de 50 Ω

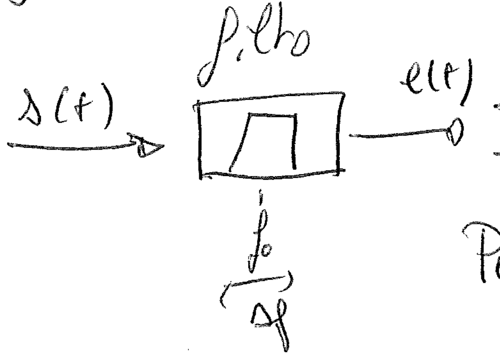
$$P(t)=R\,u(t)^2$$

On considère un prisme



On peut mesurer le spectre

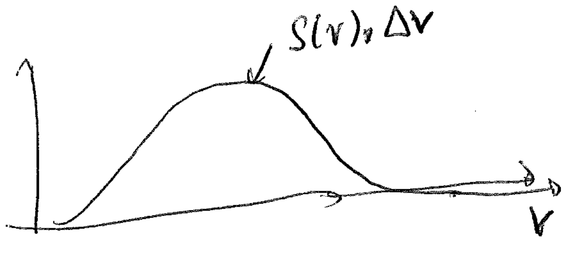
De façon générale un analyseur de spectre.



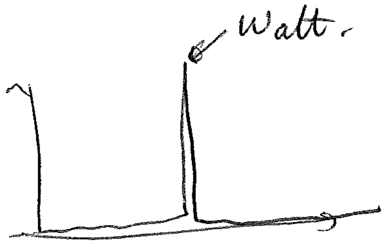
] puissance $= \langle e(t)^2 \rangle_T$

Puissance en fonction de la fréquence.

Lumière blanche



Laser



Bruit : puissance est prop. à $\Delta\nu$
limite $\Delta\nu \to 0$) W par Hz $S(\nu)$

Pour un signal

$$x(t) = a e^{i\omega t}$$

puissance $|x(t)|^2 \longrightarrow p(t) = a^2$

Si $x(t) = \sum_n a_n e^{2i\pi n \Delta f t} \longrightarrow p \sim \sum |a_n|^2$

si on moyenne sur une durée $> \frac{1}{\Delta f}$

Pour une lumière "blanche" / un bruit : on veut faire une limite ~~$n \to \infty$~~ $\Delta f \to 0$

Pour que la puissance converge, il faut donc que $|a_n|^2 = S(f)\Delta f$

Que vaut $x(t)$?

$$x(t) = \sum \sqrt{S(f)}\sqrt{\Delta f}\, e^{i\varphi_n} e^{2i\pi \Delta f n t}$$

Les phases φ_n sont aléatoires

$\longrightarrow$ Processus aléatoire $x(t)$

On suppose que rien ne change au cours du temps

$x(t+\tau)$ similaire à $x(t)$

$$E\left(e^{i\varphi(\omega)}\right) = E\left(e^{i\varphi(\omega)+\omega\tau}\right) = 0 \text{ sauf pour } \omega = 0$$

$\longrightarrow$ les phases sont aléatoires et uniformes.

$$E\left(x(t)\,x^*(t+\tau)\right) = \sum_{n n'} \sqrt{S(f)S(f')}\, e^{i(\varphi_n - \varphi_{n'})} e^{2i\pi\Delta f (n-n')t} e^{2i\pi \Delta f n'\tau}$$

Indépendant de t donc $E\left(e^{i(\varphi_n - \varphi_{n'})}\right) = 0$ si $n \neq n'$

Les phases à 2 freq $\neq$ ne sont pas corrélées

$$E(x(t)\, x^*(t+\tau)) = \sum_n S(f)\, e^{2i\pi f \tau}\, \Delta f$$

$$= \int S(f)\, e^{2i\pi f t}\, df$$

En d'autre termes $S(f)$ est la TF de la fonction d'auto corrélation

Conclusion : * On parle d'un processus stationnaire

* La densité spectrale de puissance est la TF de la fonction d'autocorrélation

* Un analyseur de spectre mesure la densité spectrale de puissance.

Question : j'ai une réalisation de $x(t)$, comment obtenons la densité spectrale de puissance ?

$$x(t)\, x^*(t+\tau) = \sum_{n,n'} \sqrt{S(f) S(f')}\; e^{i(\varphi_n - \varphi_{n'})}\; e^{2i\pi \Delta f (n-n') t}\; e^{2i\pi \Delta f n' \tau}$$

On fait la moyenne sur t

$$\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\, x^*(t+\tau) \longrightarrow \sum_n S(f)\; e^{2i\pi \Delta f n' \tau}\; \Delta f$$

Ergodicité : moyenne temporelle $\rightarrow$ moyenne statistique

Périodogramme : estimateur de la densité spectrale de puissance