Traitement du signal

Introduction

On considère un signal $x(t)$. Du point de vue informatique ce signal sera enregistré pendant une durée T à un taux d'échantillonaage Δt. Il y aura en tout N points avec $N = \frac{T}{\Delta t}$.

1 Filtre analogique

Exemple du circuit RC. Le signal d'entrée $e(t)$. Le signal de sortie $s(t)$. On peut écrire l'équation différentielle

$$\frac{ds}{dt} = \frac{e-s}{RC} \tag{1}$$

Elle se résout en

$$s(t) = \frac{1}{\tau}\int_{-\infty}^{t} e^{(t-t')/\tau} e(t')dt' \tag{2}$$

où $\tau = RC$.

On remarque que si $e(t) = \delta(t)$, alors $s(t) = \frac{e^{-t/\tau}}{\tau}$ pour $t > 0$ et 0 sinon. On définit la fonction $g(t)$ de cette façon. On a alors la formule générale suivante :

$$s(t) = \frac{1}{\tau}\int_{-\infty}^{\infty} e(t')g(t-t')dt' \tag{3}$$

On remarque que l'intégrale va maintenant de $-\infty$ à $+\infty$. Cette formule est valable pour tout filtre linéaire avec $g(t)$ la réponse impulsionnelle du filtre.

On remarque aussi que s est le produit de convolution de e par g. Dans l'espace de Fourier on a donc

$$\tilde{s}(\omega) = \tilde{e}(\omega)\tilde{g}(\omega) \tag{4}$$

Dans le cas du filtre RC, on retrouve évidement le fait que $\tilde{g}(\omega)$ est la fonction de transfert que l'on peut calculer en utilisant les impédances complexes.

$$h(\omega) = \tilde{g}(\omega) = \frac{1}{1+i\omega\tau} \tag{5}$$

Quelques remarques :

— $|h(\omega)|$ est le gain en amplitude. L'angle $\arg(h(\omega))$ est le déphasage

— Toutes les fonctions $h(\omega)$ ne correspondent pas à des filtres physiques. Il faut en particulier respecter le principe de causalité : $g(t) = 0$ pour $t < 0$. En particulier, l'amplitude et la phase son liées.

— Pour appliquer un filtre par TF, il faut connaître l'intégralité du signal. Il n'est pas possible d'utiliser ce filtre pour faire du traitement en temps réél (par exemple un égaliseur audio numérique).

2 Densité spectrale de puissance

On utilise souvent des filtres pour éliminer du "bruit". Par exemple un filtre passe bas éliminera le bruit haute fréquence, ce qui lissera un signal. Un filtre passe haut (par exemple le filtre AC d'un oscilloscope), permettra de voir un petit signal caché par des fluctuation basses fréquences. L'objectif de cette partie est de caractériser le bruit afin d'être capable de le filtrer correctement.

2.1 Puissance et analyseur de spectre

Onde lumineuse, signal RF dans un cable coaxial, onde sonore : on parle d'amplitude $a(t)$ et puissance instantanée. La puissance instantanées $p(t)$ est proportionnelle à $a(t)^2$.

Exemple du prisme, lumière blanche (densité spectrale de puissance) et lumière monochromatique (spectre de puissance).

L'analyseur de spectre RF.

2.2 Déscription du bruit

On considère un signal monochromatique :

$$x(t) = ae^{i\omega t} \tag{6}$$

La puissance instantanée est donnée par $|x(t)^2|$ et vaut $p(t) = |a|^2$.

Regardons le cas où il y a plusieurs fréquences. On considère que des fréquences multiple de Δf :

$$x(t) = \sum a_n e^{2i\pi nt\Delta f} \tag{7}$$

On obtient alors en moyennant sur une durée $T = 1/\Delta f$ que

$$p = \sum |a_n|^2 \tag{8}$$

Si on veut passer à la limite continue (ce que l'on ne fera pas vraiment) alors il faut que l'on puisse écrire $|a_n|^2 = S(f)\Delta f$ de telle sorte que $p = \int S(f)df$. La fonction $S(f)$ est le densité spectrale de puissance.

Que vaut $x(t)$? Ce que l'on sait pour l'instant est que

$$x(t) = \sum \sqrt{S(f)}\sqrt{\Delta f}e^{2i\pi n\Delta ft}e^{i\phi_n} \tag{9}$$

Les phases ϕ_n sont des aléatoires. On parle alors de processus aléatoires.

On peut montrer que si on suppose que le processus est stationnaire d'ordre deux alors les phase ϕ_n sont aléatoires, uniforme et independantes.

Par exemple, si on regarde le champs électrique émis par une lumière blanche, ce champs est aléatoire par contre sa densité spectrale de puissance est connues. L'aléa est uniquement présent dans la phase.

Conclusion : un bruit, c'est un continuum de fréquences. Les signaux de chaque fréquence sont additionnés avec une phase aléatoire et une amplitude en $\sqrt{\Delta f}$ (marche aléatoire).

Autre propriété :

$$E(x(t)x^*(t+\tau)) = \int S(f)e^{2i\pi ft}df \tag{10}$$

En d'autres termes, $S(f)$ est la TF de la fonction d'auto correlation.

2.3 Estimation de la DSP

A partir d'une réalisation $x(t)$ enregistrée pendant une durée T on peut chercher à estimer la densité spectrale de puissance.

Le signal étant enregistré pendant une durée T sa TF présente des fréquence séparée de $\Delta f = 1/T$. On obtient donc que

$$S(f) = T|\tilde{x}(2\pi f)|^2 \tag{11}$$

C'est la méthode du périodogramme.

Avec la méthode du périodogramme, lorsque la durée de la mesure augmente, la résolution en fréquence s'améliore, mais le bruit de l'estimateur ne diminue pas. Pour combler ce problème, on peut découper la mesure en n intervales ayant la même durée et faire la moyenne de leur periodogramme. C'est la méthode de Welch

Note : voir la librairie `scipy.signal`.

2.4 Analyseur de spectre

On considère un signal $e(t)$. Le signal $s(t)$ est le signal obtenu après un par un filtre ayant une fonction de transfert $h(t)$. Dans l'espace de Fourier, nous avons :

$$s(\omega) = h(\omega)e(\omega) \tag{12}$$

En terme de densité spectrale de puissance on a la relation :

$$S_s(f) = S_e(f)|h(f)|^2 \tag{13}$$

Dans le cas où h est un filtre passe bande de largeur δf centré en f_0, alors, on peut calculer la puissance du signal $s(t)$

$$P_s = \int_{-\infty}^{+\infty} S_s(f) \approx S_e(f_0)\delta f \tag{14}$$

On retrouve ainsi le sens de la densité spectrale de puissance :

$$S_e(f_0) = \frac{\text{Puissance apres un filtre centre en } f_0 \text{ de largeur } \delta f}{\delta f} \tag{15}$$

C'est le principe de l'analyseur de spectre : un filtre étroit est balayé en fréquence, et on trace la puissance transmise en fonction de la fréquence centrale du filtre.

2.5 Utilisation de la DSP

2.5.1 Physique fondamentale

Dans certain cas, la physique peut nous permettre de calculer la DSP.

— Bruit de grenaille électrique. Intensité $i(t)$ de moyenne I. C'est une bruit blanc $S_i(f) = eI$

— Bruit de Johnson-Nyquist : variation de tension u aux bornes d'une resistance. $S_u(f) = 4k_BTR$.

2.5.2 Amplitude RMS du bruit

On a la relation :

$$E(x(t)^2) = \int S(f)df \tag{16}$$

Cette relation suppose que $x(t)$ est un processus aléatoire stationnaire. Notons que la nition de densité spectrale de puissance, sous entent que $x(t)^2$ est une puissance. Cependant, les relation mathématique sont valable pour tout signal bruité. Par exemple, $x(t)$ peut représenter une position, une vitesse, une temperature, etc. Cet outil sera utiliser alors pour estimer la variance du signal.

Si $y(t)$ est signal issu de $x(t)$ après un filtre de fonction de transfert $h(f)$ alors

$$E(y(t)^2) = \int |h(f)|^2 S(f) df \tag{17}$$

Exemple : bruit de Johnson après un filtre passe bas.

Autre example : on mesure la position $x(t)$ d'un objet. On veux estimer sa vitesse : $y(t) = (x(t+\tau) - x(t))/\tau$. Calculez la variance de y en fonction de la DSP de x.