Transformée de Fourier

October 28, 2020

1 Introduction

L'objectif de ce cours est d'étudier la transformée de Fourier dans le but d'effectuer numériquement du traitement de signal.

Par rapport à la transformée de Fourier mathématique effectuée sur des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, la numérisation du signal apporte deux limites : d'une part le signal est tronqué dans le temps (durée de la mesure) et d'autre part il est échantillonné.

Dans la suite, nous noterons $s(t)$ notre signal. La durée de la mesure sera noté T. On notera f_e le taux d'échantillonnage (nombre d'échantillon par seconde). Le délai entre deux échantillons sera noté δt. Nous noterons N le nombre d'échantillon. Nous avons les relations suivantes :

$$T = N\delta t = \frac{N}{f_e} \tag{1}$$

Nous noterons $s_n = s(t_n) = s(n\delta t)$.

2 Définitions mathématiques

2.1 Série de Fourier

La série de Fourier est introduite dans le cas d'un signal périodique (T). Seules les harmoniques de la fréquence fondamentale sont présentes :

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi \frac{n}{T} t} \tag{2}$$

avec

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} s(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi \frac{n}{T} t}\,\mathrm{d}t \tag{3}$$

Le coefficient c_n correspond à la fréquence $f_n = n/T$.

2.2 Transformée de Fourier continue

La transformation de Fourier associe à une fonction intégrable définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes, une autre fonction sur $\mathbb{R}$ appelée transformée de Fourier dont la variable indépendante peut s'interpréter en physique comme la fréquence ou la pulsation.

- Transformée de Fourier :

$$\mathcal{F}(s) : \omega \mapsto \tilde{s}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t \tag{4}$$

- Transformée de Fourier inverse :

$$\mathcal{F}(\tilde{s}) : \ t \mapsto s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{s}(\omega)\, \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega t}\, \mathrm{d}\omega \tag{5}$$

Dans la suite, nous utiliserons indifféremment les pulsations ω ou les fréquences f. La principale différence provient des coefficients de normalisation souvent sans importance.

3 Transformée de Fourier d'un signal de durée finie

On considère un signal enregistré sur une durée T entre les instants $-T/2$ et $T/2$. La relation (2) reste valable pourvu que t reste dans l'intervalle $[-T/2, T/2]$. En effet, tant que l'on ne regarde par le signal au delà de cet intervalle (tant pour la relation (2) que (3)) on peut toujours supposer que s est périodique. En dehors de cet intervalle, les relations n'ont plus de sens.

3.1 Cas d'une fonction de support fini

On suppose que la fonction $s(t)$ est nulle en dehors de l'intervalle $[-T/2, T/2]$. On note $h(t)$ la fonction "porte" :

$$h(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \in [-T/2, T/2] \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases} \tag{6}$$

En définissant toujours les coefficients c_n à partir de l'équation 3 nous pouvons maintenant écrire que :

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\frac{n}{T}t} h(t) \tag{7}$$

Cette relation est valable quelque soit t.

À partir d'un nombre discret (mais infini) de coefficient c_n, il est possible de déterminer entièrement une fonction de support fini. Il est donc aussi possible de déterminer sa transformée de Fourier à partir de ces coefficients.

La transformée de Fourier de la fonction $h(t)$ est donnée par $\tilde{h}(f) = T\,\mathrm{sinc}(\pi f T)$. On obtient donc la relation suivante :

$$\tilde{s}(f) = T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\ \mathrm{sinc}(\pi(fT - n)) \tag{8}$$

A partir de cette relation on retrouve aussi $\tilde{s}\left(\frac{n}{T}\right) = Tc_n$.

3.2 Transformée de Fourier d'une fonction sinusoïdal de fréquence quelconque

On considère un signal $s(t) = e^{2\mathrm{i}\pi f_p t}$ de fréquence f_p enregistré entre $[-T/2, T/2]$. Les coefficients c_n sont donné par le formule :

$$c_n = \mathrm{sinc}(\pi(n - f_p T)) \tag{9}$$

Bien que le signal infini ne présente qu'une seule composante de Fourier, le signal tronqué dans le temps va présenter plusieurs composantes non nulle (sauf dans le cas où f_0 est un multiple de la période $1/T$). Ces coefficients vont décroître typiquement en $1/\Delta f$ où Δf est l'écart par rapport à la porteuse. Cette décroissance est liée à la fonction sinc elle même issue de la T.F. de la porte $h(t)$.

Pour changer ce comportement, et réduire l'importance des composantes de fréquences non désirées, il est possible de changer de fonction $h(t)$. La fonction h (que l'on nomme fenêtre) doit toujours être nulle en dehors de l'intervalle $[-T/2, T/2]$. Par contre elle n'est plus constante. Il existe plusieurs fonction de fenêtre. Citons par exemple la fonction de Hann :

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin(2\pi\frac{t}{T}) \text{ si } t \in [-T/2, T/2] \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases} \tag{10}$$

Cette fonction ne présentant pas de coupure brutale en $t = \pm T/2$, elle aura des composantes de Fourier plus faibles pour des fréquence importantes.

4 Cas d'une fonction de spectre fini

On va rapidement étudier le cas d'une signal $s(t)$ dont la transformée de Fourier est nulle en dehors d'un intervalle $[-F/2, F/2]$. Il n'y de fait presque rien à dire : la transformée de Fourier étant à peu de chose prêt sa propre réciproque, on peut appliquer ce qui a été dit ci dessus en inversant f et t.

En particulier la relation (8) nous dit qu'il est possible de reconstruire entièrement le signal $s(t)$ à partir de sa valeur pour des instants t_n donné par $t_n = n/F$. Si le taux d'échantillonnage d'un signal est supérieur à deux fois sa fréquence maximale, alors le signal peut être reconstruit entièrement à partir de ces échantillons en utilisant la relation :

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_n \,\mathrm{sinc}(\pi(f_e t - n)) \tag{11}$$

Ce résultat constitue le théorème d'échantillonnage ou le théorème de Nyquist-Shannon.

La possibilité d'interpoler la fonction n'est valable que dans le cas où le spectre est fini. Dans le cas où le signal $s(t)$ présence des fréquences au delà de l'intervalle $[-f_e/2, f_e/2]$, cette relation est fausse. Elle peut même conduire à des erreurs grossières. Si on prend le cas d'un signal sinusoïdal de fréquence f_0, alors les échantillons seront les mêmes si on change f_0 par un multiple de f_e. Un tel signal apparaîtra donc comme ayant une fréquence modulo f_e.

5 Transformée numérique

Nous avons vu le cas 1/ d'une fonction de support fini (pour laquelle on peut associer des fréquences discrètes) et 2/ le cas d'une fonction échantillonnée pour laquelle nous avons des fréquences bornées. La transformée numérique est combinaison des deux. Un signal fini et échantillonné sera représenté dans l'espace des fréquences par un signal fini et échantillonné.

On définit alors la transformée de Fourrier numérique de la façon suivante :

$$\tilde{s}_k = \sum_{j=0}^{N} s_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi \frac{k}{N} j} \tag{12}$$

Cette formule donne ce qui est calculé par les libraires de transformée de Fourrier. Elle ne fait par intervenir les coefficients dimensionné de la transformée de Fourier ($s(t)$ et $\tilde{s}(f)$ n'ont pas la même dimension.

On a le lien suivant avec la TF usuelle :

$$\tilde{s}_k = \sum s_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi \frac{k}{N\delta t}(j\delta t)} = \frac{1}{\delta t} \sum f(t_j) \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi t_j \frac{k}{T}} \delta t = \frac{1}{\delta t} \tilde{s}\left(\frac{k}{T}\right) \tag{13}$$

Dans cette formule, le coefficient $\tilde{s}_k$ est de période N. Il serait naturel de le restreindre entre $-N/2$ et $N/2$ pour les fréquences $-f_e/2$ et $f_e/2$. Cependant, numériquement, on utilise toujours des tableaux d'indice positif ! Les fréquences associées à s_k pour $k > N/2$ correspondent à des fréquences négatives données par $(k - N)/T$.

Cette formule nous permet d'utiliser correctement les librairies, à la fois pour l'échelle horizontale et verticale. La transformée de Fourier discrète (Discrete Fourier Transform - DFT) est souvent calculée en utilisant l'algorithme de FFT (Fast Fourier Transform). L'usage confond les deux acronymes et utilise FFT pour désigner la DFT.

L'algorithme de FFT permet de calculer de façon très rapide l'équation (12) pour l'ensemble des k. Naïvement, il faudrait effectuer N opérations pour chaque valeur de k soit au final une complexité de N^2. L'algorithme de FFT permet d'effectuer cette opération en un temps en $N \log_2(N)$.

Un oscilloscope permet typiquement d'enregistrer un signal sur 1 millions de points. La complexité dans ce cas passe 10^12 opérations à 2×10^7 opérations. En comptant environ 1ns par opération, cela donne 20 minutes ou 20 milliseconde !

6 Application de la TF

6.1 Convolution

La convolution de deux fonctions est un simple produit dans l'espace de Fourier. Cette propriété reste valable pour la DFT en utilisant la convolution circulaire (les indices sont prix modulo N). Si x_j et y_j sont deux tableaux, alors cette convolution se définie comme :

$$(x * y)_n = \sum_j x_j y_{n-j} \tag{14}$$

On a alors la relation :

$$\widetilde{(x * y)}_k = \tilde{x}_k \tilde{y}_k \tag{15}$$

Cette relation permet donc d'effectuer l'opération de convolution en un temps beaucoup plus rapide en utilisant la FFT.

6.2 Filtrage d'un signal

On considère un signal $e(t)$ qui passe dans un filtre passe bas de constante de temps τ (par exemple un filtre RC). Le signal de sortie sera noté $s(t)$. Il vérifie l'équation différentielle :

$$s'(t) = \frac{e(t) - s(t)}{\tau} \tag{16}$$

Cette équation se résout analytiquement avec : $s(t) = \int_{-\infty}^{t} s(\theta)e^{-(t-\theta)/\tau}\mathrm{d}\theta$
Il est naturel de passer dans l'espace de Fourier :

$$\tilde{s}(\omega) = \frac{\tilde{e}}{1 + \mathrm{i}\omega\tau} \tag{17}$$

En python, cela va donner :

```
from numpy.fft import fft, ifft
e_tilde = fft(e)
freqs = np.arange([i/T if i<=N/2 else (i-N)/T for i in range(N)])
s_tilde = e_tilde/(1 + 1J*2*np.pi*omega*tau)
s = ifft(s_tilde)
```

Nous utilisons les fonctions fft et ifft du module numpy. Le tableau des fréquences est calculé explicitement. La fonction numpy.fft.fftfreq permet de le calculer simplement.

Dans notre cas, bien que l'on passe par la transformée de Fourier qui est un nombre complexe on sait que les signaux sont réels. Il est alors possible d'utiliser les fonction rfft, irfft, et rfftfreq qui vont restreindre la transformée de Fourier aux fréquences positives (les fréquences négatives étant leur complexe conjugué). Cela permet de récupérer un tableau de type float.

Quelques remarques :

- Tout filtre qui atténue les hautes fréquences correspond à un filtre passe bas. Avec la transformée de Fourier on peut imaginer mettre en oeuvre des filtres d'ordre élevé. Cependant, toute fonction de transfert ne correspondra pas à un filtre réel car elle ne vérifie pas la causalité, à savoir que $s(t)$ ne dépend que de $e(\theta)$ pour $\theta \leq t$.
- Avec cet algorithme, la fonction $e(t)$ est implicitement supposé être périodique. Après le filtre, le signal au bord pourra dépendre de la valeur à l'autre bord. Il est possible de contrecarrer ce problème en rajoutant des points supplémentaires au tableau (par exemple, on rajoute des 0 pour les $t < 0$).
- Ce type de filtre est aussi beaucoup utilisé en traitement d'image. On utilise alors la transformée de Fourier 2D. Par exemple on peut réaliser un flou à l'aide d'une Gaussienne.

6.3 Analyse spectrale

On a tous une intuition de ce qu'est le spectre d'une source lumineuse : il s'agit de la décomposition en couleur (donc en fréquence) d'une onde lumineuse. On note $S(f)$ l'intensité du spectre à une fréquence f donné. La puissance totale de la source est donné par : $p = \int S(f)\mathrm{df}$. L'unité de $S(f)$ est donc en W/Hz.

On peut regarder plus en détail : la lumière est une onde électromagnétique caractérisé par un champ E (où B) et dont la puissance est proportionnelle E^2. La puissance moyenne est donc donnée par : $p = \frac{1}{T}\int |E(t)|^2 dt$. Cette relation est en fait très générale : pensons à une onde acoustique (avec le pression ou la vitesse de déplacement) ou une électrique (tension ou courant). La puissance est toujours le carré d'une amplitude.

Le théorème de Parseval nous permet de calculer cette intégrale en fonction des coefficients c_k :

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|s(t)|^2\mathrm{dt} = \sum_{\mathrm{k}}|\mathrm{c_k}|^2 \tag{18}$$

Cette relation montre simplement la conservation de la puissance, qui est maintenant décomposée en fréquence. Chaque coefficient c_k correspond à une bande de fréquence de $1/T = f_{k+1} - f_k$. De plus $|c_k| = |c_{-k}|$. On retrouve alors une relation entre la quantité physique $S(f)$ et les coefficients c_k (proportionnel à $\tilde{s}_k$):

$$S(f_k) = 2T|c_k|^2 \tag{19}$$

Lorsque l'on utilise des tableaux et la DFT, la relation de Parseval donne :

$$\sum_j s_j^2 = \frac{1}{N}\sum_k |\tilde{s}_k|^2 \tag{20}$$

L'analyse spectrale par transformée de Fourier est très utilisée dans l'analyse de son, car elle permet d'isoler facilement une signal du bruit et d'en mesurer la fréquence.

6.4 Équation d'onde

Équations dont on connaît des solutions dans l'espace des impulsion (