Geometrie im $\mathbb{R}^2$: Quadriken und Hauptachsentransformation, Partielle Ableitung und Tangentialebene.

1. Betrachten Sie eine Quadrik im $\mathbb{R}^2$, also

$$q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x} + \vec{b}^T \vec{x} + c = 0,$$

mit $\vec{x}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$, symmetrischer Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $c \in \mathbb{R}$. Schreiben Sie eine MATLAB-Datei `blatt03a.m` mit einer MATLAB-Funktion

`blatt03a(A,a,c)`,

in der die Hauptachsentransformation dieser Quadrik durch Drehung und Schiebung dargestellt und visualisiert wird. Sie können dabei davon ausgehen, dass die Matrix A regulär ist.

(a) Achten Sie bei der Ausführung der folgenden Aufgaben auf eine ansprechende Visualisierung und Darstellung, verwenden Sie beispielsweise verschiedene Farben für die Visualisierung der einzelnen Kurven.

Ziel ist es die Quadrik in Normalform darzustellen, also in der Form

$$q_0(\vec{y}) = \vec{y}^T D \vec{y} + \vec{b}_0{}^T \vec{y} + c = 0,$$

mit $A = VDV^T$ und $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$.

- Wenden Sie die Drehung $\vec{x} = V\vec{y}$ auf die Quadrik an.
- Wenden Sie die Schiebung $\vec{z} = \vec{y} + \vec{t}$ mit $\vec{t} \in \mathbb{R}^2$ auf die Quadrik an.
- Stellen Sie den Übergang (Drehung, Schiebung) von der Quadrik q zur Quadrik q_0 in einer Grafik dar.

  Bemerkung: Die Quadrik $q_0(\vec{y}) = 0$ liegt dann symmetrisch um $(0, 0)$.

Alle Visualisierungen sollen in einer Grafik zu sehen sein, um Zusammenhänge nachvollziehbar zu machen.

(b) Verwenden Sie die Quadrik

$$7x_1^2 + 13x_2^2 + 6\sqrt{3}x_1x_2 - 12(\sqrt{3}+4)x_1 - 12(4\sqrt{3}-1)x_2 = -164$$

um Ihre MATLAB-Funktion zu testen.

2. Schreiben Sie eine MATLAB-Datei `blatt03b.m` mit einem Programm

   `blatt03b(x0,y0)` ,

   das die Funktion
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
   in einem dreidimensionalen Plot über dem Quadrat $[-1,1] \times [-1,1] \subset \mathbb{R}^2$ darstellt. Bestimmen Sie die Tangentialebene T im übergebenen Punkt $(\mathtt{x0}, \mathtt{y0}) \neq (0,0)$, visualisieren Sie diese und zeichnen Sie dort die beiden Tangenten t_x und t_y (siehe Abbildung 6.5 im Skriptum zur Vorlesung) ein.

   - Benutzen Sie die MATLAB-Befehle `meshgrid` und `mesh`, um die Fläche $z = f(x,y)$ zu zeichnen.
   - Benutzen Sie `plot3`, um eine geeignete Linie zu zeichnen, welche die Tangenten t_x, t_y darstellen.

   Hinweis: Visualisieren Sie zuerst die Funktion und wählen Sie zum Testen einen hinsichtlich der Tangentialebene geeigneten Punkt $(\mathtt{x0}, \mathtt{y0})$ aus.