Signal Déterministe à Temps Discret

Les démonstrations sont identiques à celles des signaux à TC si on remplace les intégrales par des sommes discrètes.

$$\{x_k, k \in Z\} \xrightarrow{TF} X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{-2\pi jkf} \qquad X(f) \xrightarrow{(TF)^{-1}} x(t) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(f) e^{2\pi jkf} df$$

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{-2\pi jkf}$$
$$X(f+1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{-2\pi jk(f+1)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{-2\pi jkf} e^{-2\pi jk}$$
$$e^{-2\pi jk} = \cos 2\pi k - j \sin 2\pi k = 1$$
$$\Rightarrow \qquad X(f+1) = X(f)$$

La TF d'un signal discret est *périodique de prériode* 1.

– $X(f)$ est une périodique de période 1. On étudie $X(f)$ sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ ou sur $[0, 1]$.

$$\{x_k, k \in Z\} \xrightarrow{TF} X(f) \qquad \{y_k, k \in Z\} \xrightarrow{TF} Y(f)$$

– *linéarité*: $\alpha x_k + \beta y_k \xrightarrow{TF} \alpha X(f) + \beta Y(f)\ \forall(\alpha, \beta) \epsilon \mathbb{C}^2$

– *renversement dans le temps*:

$$y_k = x_{(-k)} \xrightarrow{TF} Y(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k e^{-2\pi jkf} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{-k} e^{-2\pi jkf}$$
$$l = -k \qquad \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{-k} e^{-2\pi jkf} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x_l e^{2\pi jlf} = X(-f)$$
$$x_{(-k)} \xrightarrow{TF} X(-f)$$

– *conjugaison*: $X^*(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k^* e^{2\pi jkf}$

$$p_k = x_k^* \xrightarrow{TF} P(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k e^{-2\pi jkf} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k^* e^{-2\pi jkf} = X^*(-f)$$
$$x_k^* \xrightarrow{TF} X^*(-f)$$
$$x_{-k}^* \xrightarrow{TF} X^*(f)$$

– *translation*:

** temporelle $x_{k-m} \xrightarrow{TF} X(f) e^{-2\pi jmf}\ \forall m \epsilon \Re$

**fréquentielle (modulation) $x_k e^{2\pi jf_0 k} \xrightarrow{TF} X(f - f_0)\ \forall f_0 \epsilon \Re$

$$x_{k-m} \xrightarrow{TF} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{k-m} e^{-2\pi jkf}$$
$$l = k - m \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{k-m} e^{-2\pi jkf} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x_l e^{-2\pi j(l+m)f} = X(f) e^{-2\pi jmf}$$

$$x_k e^{2\pi jf_0 k} \xrightarrow{TF} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{2\pi jf_0 k} e^{-2\pi jkf} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{-2\pi jk(f-f_0)} = X(f - f_0)$$

– *convolution*:

** temporelle

$$x_k * y_k = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m y_{k-m} \quad \xrightarrow{TF} \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m y_{k-m} e^{-2\pi jkf}$$

$$l = k - m \qquad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m y_{k-m} e^{-2\pi jkf} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m y_l e^{-2\pi j(l+m)f}$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m e^{-2\pi jmf} \right) y_l e^{-2\pi jlf} = X(f) \sum_{l=-\infty}^{\infty} y_l e^{-2\pi jlf} = X(f)Y(f)$$

** fréquentielle $\qquad x_k y_k \xrightarrow{TF} X(f) * Y(f)$

– *Théorème de Parseval*: $\qquad E_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x_k|^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |X(f)|^2 df$

$\rightarrow$ conservation de l'énergie