Équations différentielles (GM3)

Hasnaa Zidani

LMI - INSA Rouen

2022/2023 - CM4

EDO nonlinéaires

Dans tout ce chapitre, on utilisera les notations suivantes:

- Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $t_0 \in I$
- Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert non vide, et $y_0 \in \mathbb{R}^n$
- Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue
- On considère le système:

Problème de Cauchy: Equation différentielle (EDO)

$$y'(t) = f(y(t)) \quad \forall t \in J \subset I,$$
$$y(t_0) = y_0$$

Exemple 1: Dynamique de population

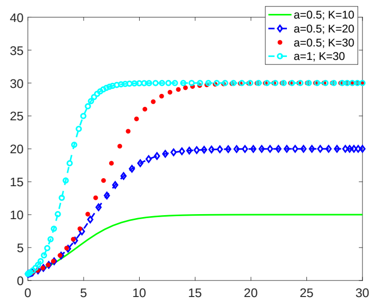
Modèle de Verhulst

$$y'(t) = ay(t)\left(1 - \frac{y(t)}{K}\right) \qquad t \geq 0,$$
$$y(0) = y_0 \in \mathbb{R}_+.$$

Modèle de Malthus

$$y'(t) = ay(t), \qquad t \geq 0,$$
$$y(0) = y_0 \in \mathbb{R}_+.$$

- $K > 0$: capacité de charge; seuil de saturation

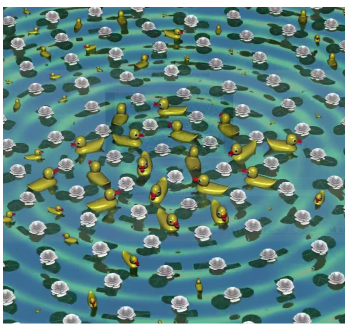


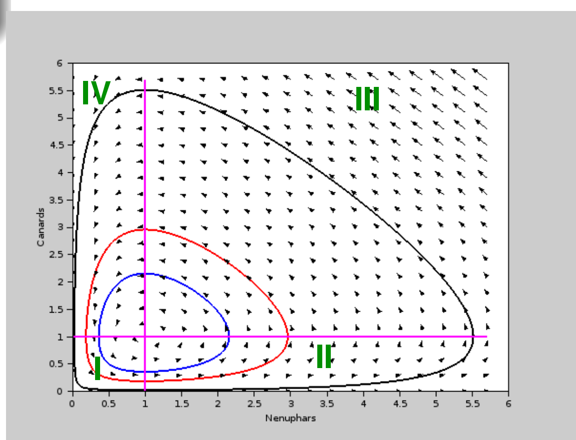
Exemple 2: Dynamique de population

Modèle de Volterra

$$y_1'(t) = ay_1(t) - by_1(t)y_2(t) \qquad t \geq 0,$$
$$y_2'(t) = dy_1(t)y_2(t) - cy_2(t) \qquad t \geq 0,$$

- $y_1(t)$: population des proies
- $y_2(t)$: population de prédateurs





Quelques exemples académiques

- **Exemple de non existence globale** :

$$y'(t) = y^2(t) \quad \text{avec} \quad y(0) = 1.$$

Soit $J \subset \mathbb{R}$ et $y(\cdot)$ une solution de l'EDO qui ne s'annule pas sur J. On a: $\dfrac{y'(s)}{y^2(s)} = 1$. Donc

$$\frac{-1}{y(t)} + \frac{1}{y(0)} = t,$$

ou encore $y(t) = \dfrac{1}{1-t}$. Cette solution n'est définie que sur $J =]-\infty, 1[$. Noter que cet intervalle de définition dépend de la condition initiale.

Dans cet exemple, l'EDO n'admet pas de solution globale sur $\mathbb{R}$.

Quelques exemples académiques

- **Exemple de non-unicité**:

$$y'(t) = \sqrt{|y(t)|} \quad \text{avec} \quad y(-2) = -1.$$

La condition initiale $y(-2) = -1 < 0$. Tant que la solution reste négative, on a:

$$\frac{y'(s)}{\sqrt{-y(s)}} = 1.$$

En intégrant entre -2 et t, on obtient

$$-2\sqrt{-y(t)} + 2\sqrt{-y(-2)} = t + 2,$$

ou encore

$$y(t) = -\left(1 - \frac{1}{2}(t+2)\right)^2 = -\left(\frac{1}{2}t\right)^2.$$

Par ailleurs, on peut construire une famille de solutions: pour $k \geq 1$,

$$y_k(t) = \begin{cases} -\left(\frac{1}{2}t\right)^2 & \text{si } t \leq 0, \\ 0 & \text{si } 0 < t \leq k, \\ \left(\frac{1}{2}(t+k)\right)^2 & \text{si } k < t. \end{cases}$$

Cette EDO admet une infinité de solutions.

Quelque définitions

Définition

Une solution du problème de Cauchy (EDO) est un couple (J, y) où

- ➢ $J \subset I$ désigne un intervalle ouvert **contenant** t_0,
- ➢ et y est une fonction de classe C^1 sur J qui vérifie

$$y'(t) = f(y(t)) \quad \forall t \in J, \quad y(t_0) = y_0.$$

- ✏ Portrait de phase : ensemble des trajectoires
- ✏ Espace de phase : $\mathbb{R}^n$
- ✏ Courbe intégrale : $\{(t, y(t)), \quad t \in J\}$
- ✏ Point d'équilibre : $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(x) = 0$

Proposition

(J, y) est une solution de (EDO) si et seulement si

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(y(s))\, ds \qquad \forall t \in J.$$

– L'équation différentielle (EDO) est équivalente à la forme intégrale donnée dans la proposition ci-dessus.

Fonctions Lipschitz

– On dit que $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est lipschitzienne si, et seulement si, il existe $L_f > 0$ t.q

$$\|f(u) - f(v)\| \leq L_f \|u - v\| \quad \forall u, v \in U.$$

La constante L_f est dite constante de Lipschitz.

– On dit que f est *localement* lipschitzienne si, et seulement si, pour tout $R > 0$, il existe $L_R > 0$ t.q

$$\|f(u) - f(v)\| \leq L_R \|u - v\| \quad \forall u, v \in U \cap \mathbb{B}(0, R).$$

Ici la constante de Lipschitz L_R dépend de la boule $\mathbb{B}(0, R)$.

– On dit que f est contractante si elle est lipschitzienne et $L_f < 1$.

✯ **Exemples**: les fonctions suivantes sont-elles loc. lipschitziennes?

$$g_1(x) = \cos(x) \qquad g_2(x) = \sqrt{x}$$

✯ On suppose que U est un ouvert convexe, et f est de classe C^1 sur U. Alors f est localement lipschitzienne sur U.

En effet, puisque f est de classe C^1, alors l'application $z \longmapsto df(z)$ est continue et bornée sur $U \cap \mathbb{B}(0, R)$ par une constante $L_R > 0$:

$$\|df(z)\| \leq L_R \qquad \forall z \in U \cap \mathbb{B}(0, R).$$

Maintenant, soit $u, v \in U \cap \mathbb{B}(0, R)$. D'après le théorème de la valeur intermédiaire,

$$\exists \theta \in (0, 1), \quad z_\theta = \theta u + (1 - \theta) v \in U \cap \mathbb{B}(0, R) \qquad \text{et} \qquad f(u) - f(v) = df(z_\theta)(u - v).$$

Par conséquent,

$$\|f(u) - f(v)\| = \|df(z_\theta)(u - v)\| \leq L_R \|u - v\|.$$

✯ On suppose que U est un ouvert convexe, et f une fonction de classe C^1 dont la différentielle $z \longmapsto df(z)$ est **bornée uniformément** sur U. Alors f est lipschitzienne sur U.

La preuve utilise les mêmes arguments que précédement, mais ici la constante qui borne la différentielle est uniforme sur U.

✯ Soit f_i, pour $i = 1, \cdots, n$, les composantes de f.
f est lipschitzienne (ou localement lipschitzienne) si et seulement si toutes les composantes f_i le sont.

Inégalités de Gronwall

Lemme

Soit ϕ et ψ deux fonctions continues sur un intervalle $]t_0 - c, t_0 + c[$ avec $c > 0$. Soit $\lambda > 0$. On suppose que ϕ est **à valeurs positives**. Si

$$\phi(t) \leq \psi(t) + \lambda \int_{t_0}^{t} \phi(s)\, ds \quad \forall t \in]t_0 - ,t_0 + c[$$

Alors

$$\begin{aligned} \phi(t) &\leq \psi(t) + \lambda \int_{t_0}^{t} \psi(s) e^{\lambda(t-s)}\, ds \quad \text{si } t \in [t_0, t_0 + c[\\ \phi(t) &\leq \psi(t) + \lambda \int_{t}^{t_0} \psi(s) e^{\lambda(s-t)}\, ds \quad \text{si } t \in [t_0 - c, t_0[\end{aligned}$$

Preuve du Lemme de Gronwall

- Soit $t \geq t_0$. Pour tout $s \in [t_0, t]$, on pose $Z(s) = \int_{t_0}^{s} \phi(\tau)\, d\tau$.
- Donc, on a $Z'(s) = \phi(s) \leq \psi(s) + \lambda Z(s)$.
- En multipliant les deux inégalités par $e^{-\lambda s}$, on obtient
$$\left(Z(s)e^{-\lambda s}\right)' \leq \psi(s)e^{-\lambda s}.$$
- En intégrant entre t_0 et t, et en utilisant $Z(t_0) = 0$, on obtient:
$$Z(t)e^{-\lambda t} \leq \int_{t_0}^{t} \psi(s)e^{-\lambda s}\, ds.$$
- En multipliant les deux inégalités par $e^{\lambda t}$, on obtient $Z(t) \leq \int_{t_0}^{t} \psi(s)e^{\lambda(t-s)}\, ds$.
- Par conséquent, on a:
$$\phi(t) \leq \psi(t) + \lambda Z(t) \leq \psi(t) + \lambda \int_{t_0}^{t} \psi(s)e^{\lambda(t-s)}\, ds.$$
- L'inégalité dans le cas $t \leq t_0$ s'obtient avec le même raisonnement.

Théorème (Cauchy-Lipschitz - version globalement Lipschitz)

On suppose que f est une fonction continue et lipschitzienne sur U.

Alors pour tout $(t_0, y_0) \in I \times U$, l'EDO admet **une unique solution globale** y *sur I.*

De plus, si f est de classe C^k alors y est aussi de classe C^{k+1}.

Preuve du théorème (1/5): Unicité

- Notons d'abord que toute solution du problème de Cauchy (quand elle existe) vérifie

$$y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(y(s))\, ds.$$

  - **Unicité**. Supposons que y_1 et y_2 sont deux solutions du problème de Cauchy. Donc, on a

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leq \int_{t_0}^{t} \Big| f(y_1(s)) - f(y_2(s)) \Big|\, ds.$$

    Comme f est Lipschitz de constante L_f, on a:

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leq \int_{t_0}^{t} L_f |y_1(s) - y_2(s)|\, ds \quad \forall t \in I.$$

    Par le Lemme de Gronwall, on obtient

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leq 0 \qquad \forall t \in I,$$

    ce qui prouve que $y_1 \equiv y_2$.

Preuve du théorème (2/5): Régularité

– **Régularité**. Supposons que f est de classe C^k pour $k \geq 1$. Si $y \in C^1$ est une slution à l'EDO, alors

$$s \longmapsto f(y(s)) \qquad \text{est de classe} \quad C^1,$$

et la solution y est alors de classe C^2.

Si $k \geq 2$, alors $s \longmapsto f(y(s))$ est de classe C^2, et y est alors de classe C^3.

Par un argument similaire, on vérifie que y est de classe C^{k+1}.

Preuve du théorème (3/5): Existence

- Notons d'abord que toute solution de l'EDO (quand elle existe) vérifie

$$y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(y(s))\, ds.$$

- Soit $\delta > 0$ un réel qu'on précisera plus tard. On pose $J_\delta :=]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$.
- On définit l'application $\mathcal{F} : C(J_\delta) \to C(J_\delta)$, où pour tout $\phi \in C(J_\delta)$, $\mathcal{F}(\phi)$ est une fonction définie par

$$\mathcal{F}(\phi)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\phi(s))\, ds \qquad \forall t \in J_\delta.$$

- Rappelons que l'espace $C(J_\delta)$ est muni de la norme:

$$\|\phi\|_\infty := \sup_{s \in J_\delta} |\phi(s)| \qquad \forall \phi \in C(J_\delta).$$

Preuve du théorème (4/5): Existence

- Soit $\phi_1, \phi_2 \in C(J_\delta)$. On a:

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}(\phi_1) - \mathcal{F}(\phi_2)\|_\infty &= \max_{t\in J_\delta} \left| \int_{t_0}^{t} \left[f(\phi_1(s)) - f(\phi_2(s))\right] ds \right| \\ &\leq \max_{t\in J_\delta} \int_{t_0}^{t} |f(\phi_1(s)) - f(\phi_2(s))| \; ds.\end{aligned}$$

- Puisque f est Lipschitzienne de constante $L_f > 0$, on obtient

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}(\phi_1) - \mathcal{F}(\phi_2)\|_\infty &\leq \max_{t\in J_\delta} L_f \int_{t_0}^{t} |\phi_1(s) - \phi_2(s)| \; ds \\ &\leq L_f\delta \max_{s\in J_\delta} |\phi_1(s) - \phi_2(s)| = L_f\delta \|\phi_1 - \phi_2\|_\infty\end{aligned}$$

- Si on choisit $\delta > 0$ tel que $L_f\delta < 1$, alors $\mathcal{F} : C(J_\delta) \to C(J_\delta)$ est une **contractante** dans l'espace de Banach $C(J_\delta)$.

- D'après le théorème du point fixe, il existe une fonction $y^1 \in C(J_\delta)$ telle que

$$y^1(t) = y^1(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(y^1(s))\, ds \qquad t \in J_\delta.$$

Preuve du théorème (5/5): Existence

- On vient donc de construire une trajectoire sur un intervalle $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

- Notons qu'ici le choix de δ ne dépend pas de t_0 mais uniquement de la constante de Lipschitz globale L_f

- Avec les mêmes arguments (que ci-dessus), on construit la solution y^2 sur l'intervalle $[t_0 + \delta, t_0 + 2\delta]$ en considérant l'EDO

$$y'(t) = f(y(t)), \qquad y(t_0 + \delta) = y^1(t_0 + \delta).$$

- De même, on peut construire aussi une solution sur $[t_0 - 2\delta, t_0 - \delta]$, en considérant l'EDO avec la condition initiale:

$$y(t_0 - \delta) = y^1(t_0 - \delta).$$

- On recommence cette procédure autant de fois que nécessaire pour construire une solution sur tout l'intervalle I.

- Le théorème précédent affirme, sous l'hypothèse que f est Lipschitzienne, l'existence et l'unicité d'une **solution globale** de l'EDO.
- L'hypothèse Lipschitz sur f est essentielle dans la preuve. Elle permet de choisir $\delta > 0$ indépendant des conditions initiales.

- **Si on suppose que f est seulement localement Lipschitz**, alors δ dépenderait de la constante de Lipschitz locale (et donc dépenderait de la condition initiale);
- La construction de la solution se fera alors sur des intervalles de tailles variables $\delta_k > 0$. Et dans ce cas, on ne peut pas assurer de construire une solution sur tout l'intervalle I.

Théorème (Cauchy-Lipschitz (version localement Lipschitz))

On suppose que f est une fonction continue et **localement lipschitzienne**. *Alors pour tout $(t_0, y_0) \in I \times U$, il existe t_- et t_+ tels que l'EDO admet une* **unique solution maximale** $(]t_-, t_+[, y)$

- Il existe un intervalle **maximal** $]t_-, t_+[$ sur lequel est défini la solution y et tel que $t_0 \in]t_-, t_+[$ et $y(t_0) = x_0$.
- Les bornes t_- et t_+ dépendent de la condition initiale (t_0, x_0)

➢ **Durée de vie de la solution**: y est définie de $]t_-, t_+[$ dans l'ouvert U, domaine de définition de f.

➥ Si $U = \mathbb{R}^n$, alors on a nécessairement $t_+ = +\infty$ **ou**

$$t_+ = +\infty \qquad \text{ou} \qquad \lim_{t \to t_+} \|y(t)\| = +\infty.$$

De même $t_- = -\infty$ **ou** $\lim_{t \to t_-} \|y(t)\| = +\infty$.

➥ Si U est un compact, alors

$$]t_-, t_+[=] - \infty, +\infty[.$$

Solution d'un problème de Cauchy | Existence de solution maximale

Dans la suite de ce chapitre, nous aborderons les questions de:

– Sensibilité de la solution d'un problème de Cauchy par rapport aux conditions initiales

– Stabilité du système autour d'un point d'équilibre.