Filtre linéaire

1) Système linéaire

L'entrée du système est noté $x(t)$

La sortie est noté $y(t)$, est une fonction de $x(t)$.

<u>linéarité</u> :

$$\left.\begin{array}{l} x_0(t) \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow y_0(t) \\ x_1(t) \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow y_1(t) \end{array}\right\} \quad x_0(t) + x_1(t) \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow y_0(t) + y_1(t)$$

$$\mathcal{L}(\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)) = \alpha \mathcal{L}(x_1(t)) + \beta \mathcal{L}(x_2(t))$$

- Un système linéaire est dit <u>invariant par translation</u> si :

$$x(t) \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow y(t)$$

$$\Rightarrow x(t-\tau) \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow y(t-\tau)$$

- Un système linéaire est dit <u>instantané</u> si la sortie à l'instant t ne dépend que de l'entrée à l'instant t.

- Un système linéaire est dit à <u>mémoire</u> si la sortie à l'instant t dépend aussi de l'entrée à des instants différents.

<u>Exemple</u>

linéarité et invariance par translation : $y_0(t) = \mathcal{L}(x_0(t)) = h(t) * x_0(t)$

$$\mathcal{L}(x_0(t-1) + x_0(t-3)) = y_0(t-1) + y_0(t-3)$$

Système non linéaire, invariant en temps, à mémoire : $y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)} x^2(\tau)\, d\tau$

système non linéaire, invariant en temps, instantané : $y_k = 13 x_k + 10$

2) Filtre linéaire

Définition 1

Un filtre est un système linéaire invariant par translation (SLIT)

Définition 2

Un filtre linéaire est un convoluteur

Définition 3

Les signaux exponentiels sont les signaux propres d'un filtre linéaire.

Un filtre linéaire est définit par sa réponse impulsionnelle (RI) noté $h(t)$

$$y(t) = h(t) * x(t) = x(t) * h(t)$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

$$h(t) \xrightarrow{TF} H(f) = |H(f)|\, e^{j\varphi(f)}$$

gain du filtre

$\varphi(f)$: phase du filtre

3) Filtre causal, anti-causal, bi-latéral

$h(t)$ est dit causal s'il est nul pour $t < 0$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_0^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$
$$= \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$$

$h(t)$ est dit anti-causal s'il est nul pour $t \geq 0$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{0}$$

$h(t)$ est bi-latéral si il est non nul $\forall t \in \mathbb{R}$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}$$

La dirac est le filtre identité

$$x(t) \rightarrow \boxed{\delta(t)} \rightarrow y(t) = x(t)$$ car $x(t) * \delta(t) = x(t)$

Pour connaître la réponse Impulsive :

$$\delta(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow h(t)$$ $h(t) * \delta(t) = h(t)$

4) Filtre en série, en parallèle

- **En série :**

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h_1(t)} \xrightarrow{y_1(t)} \boxed{h_2(t)} \longrightarrow y(t)$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h_1(t) * h_2(t)} \longrightarrow y(t)$$

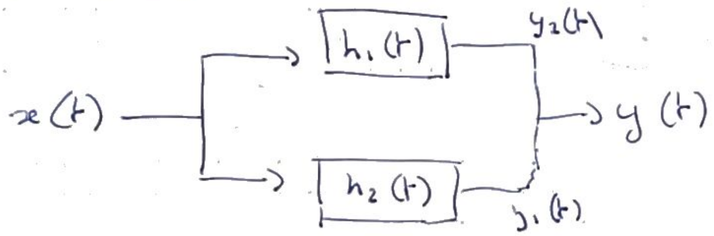
$$y(t) = h_2(t) * y_1(t)$$

$$y_1(t) = h_1(t) * x(t)$$

$$y(t) = h_2(t) * h_1(t) * x(t)$$

$$H(f) = H_1(f)\, H_2(f)$$

- **En parallèle**



$$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

$$= h_1(t) * x(t) + h_2(t) * x(t)$$

$$= \{h_1(t) + h_2(t)\} * x(t)$$

$$H(f) = H_1(f) + H_2(f)$$