Système linéaire autonome 2

$$y'(t) = A\,y(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

On considère le cas d'une matrice A diagonalisable dans $\mathbb{C}$:

Comment calculer l'exponentielle ?

On considère A une matrice quelconque.
Son polynôme caractéristique est de la forme :

$$P_A(\lambda) = (-1)^n \prod_{j=1}^{r} (\lambda - \lambda_j)^{p_j}$$

avec $p_1 + \dots + p_r = n$

$\lambda_1 , \dots , \lambda_r \in \mathbb{C}$

Sous-espace caractéristique dans $\mathbb{C}$

$$\Gamma_{\lambda_j} = \ker (A - \lambda_j I)^{p_j}$$

Notons que $E_{\lambda_j} \subset \Gamma_{\lambda_j}$ et les 2 espaces coïncident lorsque A est diagonalisable

On a $\dim \Gamma_{\lambda_j} = p_j$ et

$$\mathbb{C}^n = \Gamma_1 \oplus \dots \oplus \Gamma_r$$

Théorème (Forme de Jordan)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Il existe une matrice de passage $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que la matrice $J = P^{-1}AP$ soit de la forme

$$J = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & B_{r-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & B_r \end{bmatrix}$$

avec

$$B_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

→ La décomposition de Jordan permet d'identifier la matrice A à une matrice J diagonale par bloc

$$A = P \begin{bmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_r \end{bmatrix} P^{-1}$$

→ Sur chaque sous espace caractéristique Γ_{λ_j} on a

$$A_{|\Gamma_{\lambda_j}} = \lambda_j I_{|\Gamma_{\lambda_j}} + N_j$$

où N_j est une matrice nilpotente, càd $N_j^{p_j} = 0$

$p_j \equiv$ multiplicité de λ_j

Théorème calcul de l'exponentielle - cas générale

$$e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{tB_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{tB_r} \end{pmatrix} P^{-1}$$

avec $$e^{tB_i} = e^{t\lambda_i} \left(I + tN_j + \dots + \frac{t^{m_j-1}}{(m_j-1)!} N_j^{m_j-1} \right)$$

où $m_j \geqslant 1$ est le plus petit entier tel que

$$N_j^{m_j-1} = 0$$

→ Rappelons que pour une matrice réelle $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a

$\lambda_j \in \mathbb{C}$ vp de $A \Rightarrow \overline{\lambda_j}$ vp de A

et $$P_A(\lambda) = (-1)^n \prod_{j=1}^{s} (\lambda - \lambda_j)^{p_j} \prod_{j=s+1}^{q} \left[(\lambda - \lambda_j)(\lambda - \overline{\lambda_j})\right]^{p_j}$$

avec $\lambda_j \in \mathbb{R}$ pour $j \in \{1 \dots s\}$

→ On définit les sous-espaces caractéristiques réels de A par

$$V_j = \Gamma_{\lambda_j} \quad \text{pour } j \in \{1 \dots s\}$$

$$V_j = (\Gamma_{\lambda_j} \oplus \Gamma_{\overline{\lambda_j}}) \cap \mathbb{R}^n \quad \text{pour } j \in \{s+1, \dots, q\}$$

→ D'après la décomposition des noyaux, on a

$$\mathbb{R}^n = V_1 \oplus \dots \oplus V_q$$

→ Soit $y(0) \in \mathbb{R}^n$, donc $y(0)$ se décompose :

$$y(0) = \sum_{i=1}^{s} u_i + \sum_{i=s+1}^{q} (u_{i_1} + u_{i_2})$$

où

$$u_i \in \Gamma_{\lambda_i} \quad \text{pour } i \in \{1..s\}$$

$$\text{et } u_{i_1} \in \Gamma_{\lambda_i} \; , \; u_{i_2} \in \Gamma_{\overline{\lambda_i}} \quad \text{pour } i \in \{s+1, \dots, q\}$$

→ L'unique solution de $y'(t) = Ay(t)$ est donnée par :

$$y(t) = e^{tA} y(0)$$

$$= \sum_{j=1}^{s} e^{t\lambda_j} \sum_{k=0}^{m_j - 1} \left(\frac{t^k}{k!} N_j^k \right) u_j$$

$$+ \sum_{j=s+1}^{q} \left[e^{t\lambda_j} \sum_{k=0}^{m_j-1} \left(\frac{t^k}{k!} N_j^k u_{j_1} \right) + e^{t\overline{\lambda_j}} \sum_{k=0}^{m_j-1} \left(\frac{t^k}{k!} N_j^k \right) u_{j_2} \right]$$

Theorème

Soit $A \in M_n(\mathbb{R}^n)$ une matrice donnée. Toute solution de $y'(t) = Ay(t)$ s'écrit

$$y(t) = \sum_{j=1}^{q} e^{t\alpha_j} \left(\sum_{k=0}^{m_j-1} t^k \left[\cos(t\beta_j) a_{j,k} + \sin(t\beta_j) b_{j,k} \right] \right)$$

où $\alpha_j = Re(\lambda_j)$ et $\beta_j = Im(\lambda_j)$

$$a_{j,k} , b_{j,k} \in V_j$$

→ Pour calculer les solution, il faut

1) calculer les valeurs propres
2) déterminer la décomposition de Jordan de la matrice
3) calculer $e^{tA} y(0)$

→ Le théorème donne la forme général de la solution sans précision les vecteurs $a_{j,k}$ et $b_{j,k}$

→ La forme général des solutions va permettre d'analyser le comportement asymptotiques des solution :

- Dans la décomposition $\mathbb{R}^n = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_q$

$$y(t) = y_1(t) + \dots + y_q(t)$$

avec

$$y_i(t) = e^{\lambda_i t} \sum_{k=0}^{m_i-1} t^k a_{i,k} \qquad \text{pour } i \in 1 \dots s$$

$$y_i(t) = e^{\alpha_i t} \sum_{k=0}^{m_i-1} t^k \left[\cos(t\beta_i) a_{i,k} + \sin(t\beta_i) b_{i,k}\right]$$

pour $i \in \{s+1, \dots, q\}$

où $\alpha_i = \mathrm{Re}(\lambda_i)$ $\beta_i = \mathrm{Im}(\lambda_i)$

$a_{i,k}, b_{i,k} \in V_i$

Théorème (stabilité globale de y)

Si pour toute valeur propre λ_i de A on a $Re(\lambda_i) < 0$ alors la solution de $y'(t) = Ay(t)$ est stable :

$$\lim_{t \to +\infty} \| y(t) \| = 0$$

La réciproque est aussi vraie. Si le système est stable, alors toutes les vp de A vérifient $Re(\lambda_i) < 0$

Théorème (stabilité des composantes de y)

Pour chaque $i \in \{1 .. q\}$

* Si $\alpha_i = Re(\lambda_i) < 0$ alors y_i est stable : $\lim_{t \to +\infty} \|y_i\| = 0$

* Si $\alpha_i = Re(\lambda_i) = 0$ alors on a 2 situations :

  → si $m_i = 1$ alors y_i est périodique et

  $$y_i(t) = \cos(t\beta_i) a_i + \sin(t\beta_i) b_i$$

  → $m_i > 1$, alors y_i est instable et

  $$\lim_{t \to +\infty} \|y_i\| = +\infty$$

* Si $\alpha_i = Re(\lambda_i) > 0$, alors y_i diverge cad $\lim_{t \to +\infty} \|y_i\| = +\infty$

  et y_i émane de l'origine cad $\lim_{t \to -\infty} \|y_i\| = 0$

Définition

On note :

- l'espace "stable" $E^s = \bigoplus_{Re(\lambda_i)<0} \Gamma_{\lambda_i} \cap \mathbb{R}^n$
- l'espace "instable" $E^u = \bigoplus_{Re(\lambda_i)>0} \Gamma_{\lambda_i} \cap \mathbb{R}^n$
- l'espace borné $E^c = \bigoplus_{Re(\lambda_i)=0} \Gamma_{\lambda_i} \cap \mathbb{R}^n$

Theorème

$$E^s = \{ y(0) \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t \to +\infty} \|y(t)\| = 0 \}$$

$$E^u = \{ y(0) \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t \to +\infty} \|y(t) = +\infty \}$$

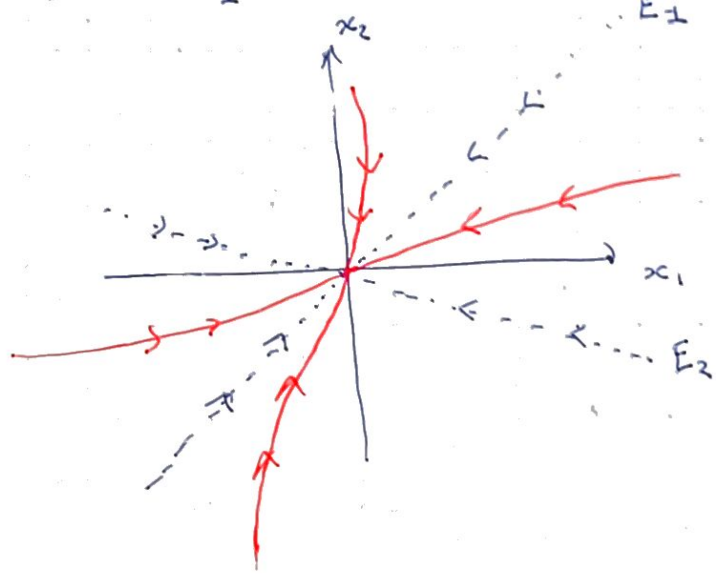
$$E^c = \{ y(0) \in \mathbb{R}^n \mid \exists\, C > 0 \text{ tq pour } t \text{ assez grand, } -C\|y(0)\| \leq \|y(t)\| \leq C\|y(0)\| \, |t^n| \}$$

Exemple Cas $A \in \mathcal{M}_2 \mathbb{R}$

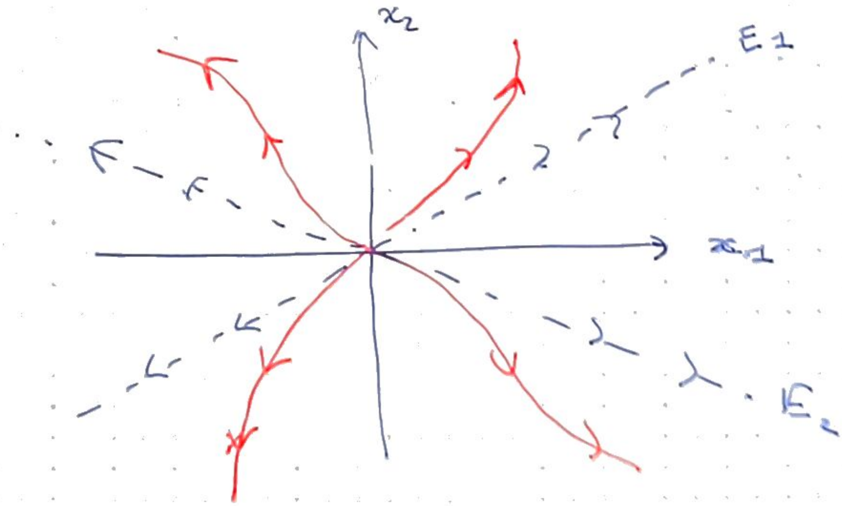
Soit λ_1 et λ_2 2 vp de A. Donc λ_1 et λ_2 sont réelles ou λ_1 et λ_2 sont complexes avec $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$

→ Cas 1 $Re(\lambda_1), Re(\lambda_2) \in]-\infty, 0[$

$E^s = E_1 \oplus E_2 = \mathbb{R}^2$

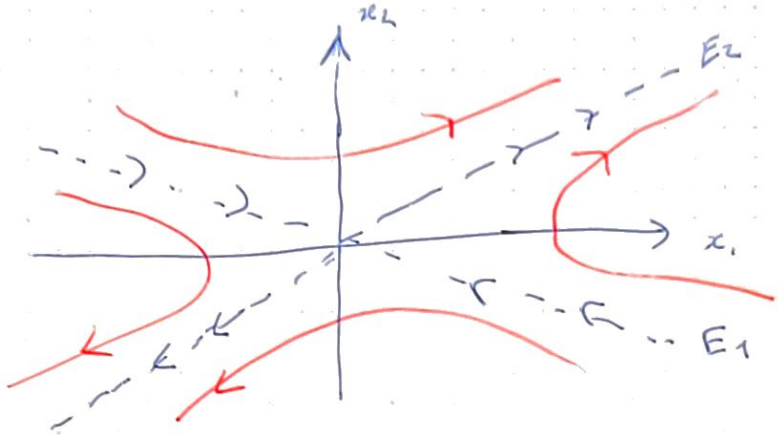


→ Cas 2 $Re(\lambda_1), Re(\lambda_2) \in]0, +\infty[$



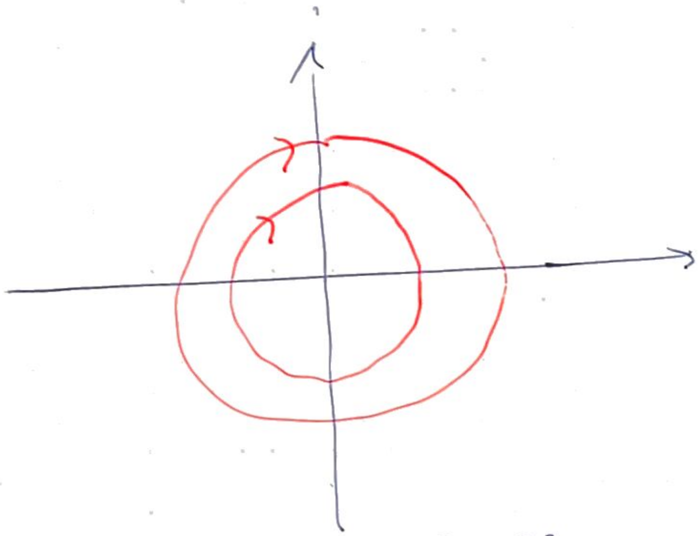
$E^u = E_1 \oplus E_2 = \mathbb{R}^2$

Cas 3 : $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$



Point de Col $E^s = E_1$, $E^u = E_2$

Cas 4 $Re(\lambda_1) = Re(\lambda_2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \overline{\lambda_2} \in i\mathbb{R}^*$



Périodique $E^c = \mathbb{R}^2$

Autre cas $\lambda_1 = 0$ ou $\lambda_1 = \lambda_2$