Cours Mesure et Intégration.

Ce résumé du cours Mesure et Intégration contient les définitions, les propriétés et les théorèmes fondamentaux ainsi que des exemples. Le but est de définir l'intégrale $\int f \ d\mu$ d'une application $f \ E \to \mathbb{C}$, définie sur un ensemble quelconque E, où μ est une mesure; et de donner toutes les propriétés de cette intégrale.
Idée principale : pour $f = 1_A$ l'application indicatrice d'un ensemble $A \subset E$, on pose $\int 1_A \ d\mu = \mu(A)$. Donc on doit pouvoir mesurer l'ensemble $A \subset E$ et connaître sa mesure $\mu(A)$. L'application f doit être mesurable. Dans la première partie du cours (théorie de la mesure), les définitions et propriétés d'une tribu de parties de E, d'une mesure et d'une applications mesurables sont présentées. Dans la deuxième partie du cous (Intégration), on définit d'abord l'intégrale d'une application mesurable à valeurs positives et on donne les propriétés et les théorèmes pour f positive (théorème de Beppo-Levi, ses corolaires et le lemme de Fatou). Puis on considère les applications à valeurs réelles ou complexes et on donne les propriétés et les théorèmes fondamentaux: applications μ-intégrables, théorème de convergence dominée, les espaces $L^p(\mu)$, théorème de Fubini-Tonnelli, définition et propriétés d'une intégrale dépendant d'un paramètre et des exemples d'applications.

Chapitre 1. Théorie de la mesure

I. Tribus et espaces mesurables.

1. Ensembles dénombrables.
2. Définition d'une tribu. Tribu engendrée par une famille.
3. Tribu borélienne. Image réciproque d'une tribu.

II. Mesures et espaces mesurés.

1. Définition, exemples et propriétés d'une mesure.
2. Ensembles négligeables pour une mesure.

III. Applications mesurables.

1. Définitions, exemples et propriétés de fonctions simples, et mesurables.
2. Théorèmes fondamentaux.

Chapitre 1. Théorie de la mesure

I. Tribus et espaces mesurables

1. Ensembles dénombrables

Définition 1 Un ensemble A est dénombrable si et seulement si le cardinal de A est fini ou il existe une bijection de A dans $\mathbb{N}$.

Définition 2 Un ensemble A est dénombrable s'il existe une application injective de A dans $\mathbb{N}$.

Proposition 1 Propriétés d'ensembles dénombrables
1) Les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.
2) Toute partie d'un ensemble dénombrable est dénombrable.
3) Une union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.
4) Un produit fini d'ensembles ensembles dénombrables est dénombrable.

Proposition 2 Propriétés d'ensembles non dénombrables
1) $\forall\, a < b \in \mathbb{R}$, l'intervalle $]a, b[$ n'est pas dénombrable.
2) $\mathbb{R}$ est non dénombrable.
3) $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ est non dénombrable.

Les preuves de ces propositions sont faites en TD.

2. Définitions et propriétés d'une tribu

Soit E un ensemble quelconque. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E. On sait que $\mathcal{P}(E)$ est stable par complémentaire (si $A \in \mathcal{P}(E)$ alors $A^c \in \mathcal{P}(E)$), et il est aussi stable par union et par intersection.

Définition. Une tribu de parties de E, notée $\mathcal{B}$, est une famille de parties de E, $(\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(E))$ qui vérifie :
1. $\emptyset \in \mathcal{B}$ et $E \in \mathcal{B}$.
2. $\mathcal{B}$ est stable par complémentaire: $\forall A \in \mathcal{B}$, on a $A^c \in \mathcal{B}$.
3. $\mathcal{B}$ est stable par union dénombrable: Si $A_n \in \mathcal{B}$, pour $n \in \mathbb{N}$, alors $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{B}$.

Définition. Les éléments de la tribu $\mathcal{B}$ sont appelés les parties mesurables de E. Le couple $(E, \mathcal{B})$ est appelé un espace mesurable.

Remarque. Si $\emptyset \in \mathcal{B}$, alors puisque $\emptyset^c = E$, on a par 2), $E \in \mathcal{B}$. les propriétés 2) et 3) impliquent que $\mathcal{B}$ est stable par intersection dénombrable. En effet : $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = (\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n^c)^c$.

Exemples Soit E un ensemble quelconque. On a :
1. $\mathcal{B} = \{\emptyset, E\}$ est une tribu de parties de E. C'est la plus petite tribu (au sens de l'inclusion) de parties de E.
2. $\mathcal{B} = \mathcal{P}(E)$ est une tribu de parties de E. C'est la plus grande tribu

(au sens de l'inclusion) de parties de E.
3. Soit $E = \{1, 2, 3\}$. $\mathcal{B} = \{\emptyset, E, \{1\}, \{2, 3\}\}$ est une tribu de parties de E. Mais $\mathcal{B} = \{\emptyset, E, \{1\}, \{2, 3\}, \{2\}, \{1, 3\}\}$ n'est pas une tribu de parties de E car $\{1\}$ et $\{2\}$ appartiennent à $\mathcal{B}$ mais $\{1\} \cup \{2\} = \{1, 2\} \notin \mathcal{B}$.

Définition. Soit E un ensemble quelconque et $\mathcal{X}$ une famille quelconque de parties de E ($\mathcal{X} \subset \mathcal{P}(E)$). On appelle tribu engendrée par $\mathcal{X}$, notée $\sigma(\mathcal{X})$, la plus petite tribu (pour $\subset$) de parties de E qui contient tous les éléments de $\mathcal{X}$.

Exemple. Soient A une partie de E et $\mathcal{X} = \{A\} \subset \mathcal{P}(E)$, la plus petite tribu de parties de E qui contient A est $\sigma(\mathcal{X}) = \{\emptyset, E, A, A^c\}$.

Propriétés immédiates. Il est clair que par définition on a :
1. Soit $\mathcal{X}$ une famille quelconque de parties de E, $\mathcal{X} \subset \mathcal{P}(E)$. Si $\mathcal{X}$ est une tribu de parties de E alors $\mathcal{X} = \sigma(\mathcal{X})$.
2. Soient $\mathcal{B}$ une tribu de parties de E et $\mathcal{X}$ une famille de parties de E. Si $\mathcal{X} \subset \mathcal{B}$ alors $\sigma(\mathcal{X}) \subset \mathcal{B}$.
3. Soient $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux familles de parties de E. Si $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$ alors $\sigma(\mathcal{X}) \subset \sigma(\mathcal{Y})$.

Proposition. Soient $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux familles de parties de E.

$$\sigma(\mathcal{X}) = \sigma(\mathcal{Y}) \iff \mathcal{X} \subset \sigma(\mathcal{Y}) \ \ et \ \ \mathcal{Y} \subset \sigma(\mathcal{X}).$$

Preuve: Supposons que $\sigma(\mathcal{X}) = \sigma(\mathcal{Y})$. Comme par définition $\mathcal{X} \subset \sigma(\mathcal{X})$ et $\mathcal{Y} \subset \sigma(\mathcal{Y})$ on en déduit que $\mathcal{X} \subset \sigma(\mathcal{Y})$ *et* $\mathcal{Y} \subset \sigma(\mathcal{X})$.
Si $\mathcal{X} \subset \sigma(\mathcal{Y})$ alors $\sigma(\mathcal{X}) \subset \sigma(\mathcal{Y})$ car $\sigma(\mathcal{Y})$ est une tribu; et de même si $\mathcal{Y} \subset \sigma(\mathcal{X})$ alors $\sigma(\mathcal{Y}) \subset \sigma(\mathcal{X})$ et donc $\sigma(\mathcal{X}) = \sigma(\mathcal{Y})$.

3. Tribu borélienne de $\mathbb{R}$

On note $\mathcal{O}$= l'ensemble de tous les ouverts de $\mathbb{R}$.
$\mathcal{O}_b$ l'ensemble de tous les intervalles ouverts bornés de $\mathbb{R}$,
$\mathcal{O}_b = \{]a, b[\ ,\ a, b \in \mathbb{R}\}$.
$\mathcal{F}_b$ l'ensemble de tous les intervalles fermés bornés de $\mathbb{R}$,
$\mathcal{F}_b = \{[a, b]\ ,\ a, b \in \mathbb{R}\}$.

Définition. La tribu borélienne de $\mathbb{R}$ est la tribu engendrée par l'ensemble de tous les ouverts de $\mathbb{R}$, notée $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. On a $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \sigma(\mathcal{O})$.

On utilise souvent les tribus $\sigma(\mathcal{O}_b)$ et $\sigma(\mathcal{F}_b)$ de parties de $\mathbb{R}$, engendrées par les familles $\mathcal{O}_b$ et $\mathcal{F}_b$ respectivement car on a la proposition suivante.

Proposition. $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \sigma(\mathcal{O}) = \sigma(\mathcal{O}_b) = \sigma(\mathcal{F}_b)$.

Preuve est faite en cours.

4. Image réciproque d'une tribu

Soient E, F deux ensembles et $f \quad E \to F$ une application. Si on a une tribu de parties de F (ensemble d'arrivée), on définit une tribu de parties de l'ensemble de E en utilisant l'application réciproque de f.

Définition. Soient E, F deux ensembles et $f \quad E \to F$ une application. L'application réciproque de f notée f^{-1} est:
$f^{-1} \quad \mathcal{P}(F) \to \mathcal{P}(E)$ et pour tout $A \subset F$, l'image réciproque de l(ensemble A est $f^{-1}(A) = \{x \in E / f(x) \in A\}$.

Il est clair que pour $x \in E$ on a $f(x) \in A \iff x \in f^{-1}(A)$.

Ne pas confondre l'application réciproque de f notée f^{-1} et l'application inverse d'une bijection f qui est aussi notée f^{-1}. Elles ne sont pas définies sur les mêmes ensembles.

Exemple. Soit $f \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 + y^2$.
Il est clair que f n'est pas une bijection.
$f^{-1}([0, 1]) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / f(x, y) \in [0, 1]\}$
$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$ c'est le disque unité fermé de $\mathbb{R}^2$.

L'application réciproque respecte toutes les opérations sur les ensembles.

Proposition. 1) Si $A_1 \subset A_2$ alors $f^{-1}(A_1) \subset f^{-1}(A_2)$.
2) $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$.
3) $f^{-1}(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \cup_{n \in \mathbb{N}}(f^{-1}(A_n))$.
4) $f^{-1}(\cap_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \cap_{n \in \mathbb{N}}(f^{-1}(A_n))$.

Preuve voir TD.

Définition. Soit $\mathcal{X}$ une famille de parties de F ($\mathcal{X} \subset \mathcal{P}(F)$). L'image réciproque de la famille $\mathcal{X}$ est $f^{-1}(\mathcal{X}) = \{f^{-1}(A),\ A \in \mathcal{X}\}$.

Théorème Soit $f \quad E \to F$ une application. Si $\mathcal{B}$ une tribu de parties de F, alors $f^{-1}(\mathcal{B}) = \{f^{-1}(A),\ A \in \mathcal{B}\}$ est une tribu de parties de E.

Théorème Soit $f \quad E \to F$ une application. Si $\mathcal{X}$ une famille de parties de F alors on a
1. $f^{-1}(\sigma(\mathcal{X}))$ est une tribu de parties de E.
2. $f^{-1}(\sigma(\mathcal{X})) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{X}))$.

Les preuves de ces deux théorèmes sont faites en cours.

II. Mesures et espace mesuré

1. Définitions et exemples

Définition Soit $(E, \mathcal{B})$ un espace mesurable. On appelle une mesure sur $(E, \mathcal{B})$ toute application $\mu \;\; \mathcal{B} \to [0, +\infty]$ qui vérifie:
a) $\mu(\emptyset) = 0$.
b) la σ-additivité : Si $(A_{n\in\mathbb{N}})$ une suite d'éléments de $\mathcal{B}$ telle que $A_m \cap A_k = \emptyset$, pour tous $m \neq k$, alors $\mu(\cup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$.

Définition Un espace mesuré est un triplet $(E, \mathcal{B}, \mu)$ où $(E, \mathcal{B})$ est un espace mesurable et μ est une mesure sur $(E, \mathcal{B})$.

Exemples de mesures
1. Mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ (la longueur), $\mu(]a, b[) = b - a$.
2. Mesure de comptage sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, $\forall A \subset \mathbb{N}$, $\mu(A) = \mathrm{Card}(A)$.
3. Mesure de Dirac δ_a pour $a \in E$, où $(E, \mathcal{B})$ est un espace mesurable, $\forall A \in \mathcal{B}$, $\delta_a(A) = 1$ si $a \in A$ et $\delta_a(A) = 0$ si $a \notin A$.
4. Mesure de probabilité.
5. Mesure définie par une fonction de répartition :

Proposition (admise). Soit $F \;\; \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue à droite et croissant. Il existe une unique mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, notée μ_F définie par $\mu_F(]a, b]) = F(b) - F(a)$, appelée mesure de fonction de répartition F.

2. Propriétés d'une mesure

Soit μ une mesure sur un espace mesurable $(E, \mathcal{B})$.
1. μ est croissant : Si $A_1, A_2 \in \mathcal{B}$ et $A_1 \subset A_1$, alors $\mu(A_1) \leq \mu(A_2)$.
2. Soit $A_1, A_2 \in \mathcal{B}$. Si $\mu(A_1 \cap A_2)$ est fini, alors
$\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2) - \mu(A_1 \cap A_1)$.
3. Inégalité et convexité dénombrable : Soit $(A_{n\in\mathbb{N}})$ une suite quelconque d'éléments de $\mathcal{B}$. On a $\mu(\cup_n) A_n) \leq \sum_n \mu(A_n)$.
4. Soit $(A_{n\in\mathbb{N}})$ une suite croissante (pour l'inclusion) d'éléments de $\mathcal{B}$. On a $\mu(\cup_n A_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \mathrm{Sup}_n(\mu(A_n))$.
5. Soit $(A_{n\in\mathbb{N}})$ une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{B}$ telle que $\mu(A_{n_0})$ est fini, pour un $n_0 \in \mathbb{N}$. On a $\mu(\cap_n A_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \mathrm{Inf}_n(\mu(A_n))$.

3. Ensembles négligeables pour une mesure

Définition Soit $(E, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré. Une partie Z de E est dite μ-négligeable s'il existe $A \in \mathcal{B}$ telle que $Z \subset A$ et $\mu(A) = 0$.

Proposition 1. Toute partie $A \in \mathcal{B}$ de mesure nulle est μ-négligeable.
2. Toute partie d'un ensemble μ-négligeable est aussi μ-négligeable.
3. Une union dénombrale de parties μ -négligeables est aussi μ-négligeable.

Preuve faite en TD.

Définition. Une propriété P est vraie μ presque partout si et seulement si l'ensemble $\{x \in E/P \; non \; vérifiée \; en \; x\}$ est μ-négligeable.

Exemples : Soit $(E, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré.
a) Convergence presque partout. Une application $f \;\; E \to \mathbb{R}$ converge simplement μ-presque partout si et seulement si
l'ensemble $\{x \in E/ \; (f(x)) \; ne \; converge \; pas \; \}$ est μ-négligeable.
b) Une application $f \;\; E \to \mathbb{R}$ est dite nulle μ-presque partout si et seulement si l'ensemble $A = \{x \in E/ \; f(x) \neq 0\}$ est μ-négligeable.
Noter que comme nous allons le voir si f est mesurable alors A est mesurable ($A \in \mathcal{B}$ car $A = f^{-1}(\mathbb{R}^*)$ et $\mathbb{R}^* \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$) et dans ce cas, f est nulle μ-presque partout si et seulement si $\mu(\{x \in E/ \; f(x) \neq 0\}) = 0$.

III. Applications mesurables

1. Définitions, exemples et propriétés

Définition. Soient $(E_1, \mathcal{B}_1)$ et $(E_2, \mathcal{B}_2)$ deux espaces mesurables. Une application $f \;\; (E_1, \mathcal{B}_1) \to (E_2, \mathcal{B}_2)$ est dite mesurable si l'image réciproque de toute partie mesurable de E_2 est une partie mesurable de E_1, c'est à dire : $\forall A \in \mathcal{B}_2, \;\; f^{-1}(A) \in \mathcal{B}_1$.

Exemples: Soient $E = \{a, b, c\}$ et $f(x) = x$, pour tout $x \in E$.
$f \;\; (E, \mathcal{P}(E)) \to (E, \sigma(\{\{a\}\}))$ est mesurable.
Mais $f \;\; (E, \sigma(\{\{a\}\})) \to (E_2, \mathcal{P}(E))$ n'est pas mesurable, car $f^{-1}(\{b\}) = \{b\}$ et $\{b\} \notin \sigma(\{\{a\}\})$.

Théorème Soient $(E, \mathcal{B})$ un espace mesurable, $A \subset E$ et 1_A l'application indicatrice définie par, $1_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $1_A(x) = 0$ si $x \notin A$.
$1_A \;\; (E, \mathcal{B}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}))$ est mesurable $\iff \;\; A \in \mathcal{B}$.

Théorème Soient $(E_1, \mathcal{B}_1)$ et $(E_2, \mathcal{B}_2)$ deux espaces mesurables où $\mathcal{B}_2 = \sigma(X)$, la tribu engendrée par X, avec $X \subset \mathcal{P}(E_2)$.
$f \;\; (E_1, \mathcal{B}_1) \to (E_2, \sigma(X))$ est mesurable $\iff \;\; \forall A \in X, f^{-1}(A) \in \mathcal{B}_1$.

Preuve faite en cours.

Corollaire Soit $f \;\; (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$.
Si f est continue sur $\mathbb{R}$ alors f est mesurable.

La réciproque n'est pas toujours vraie : par exemple $1_{\mathbb{Q}}$ est mesurable mais elle pas continue sur $\mathbb{R}$.

Proposition (Preuve sera faite en TD)
1. La composée de deux applications mesurables est mesurable.
2. La somme, le produit et la valeur absolue d'applications mesurables sont mesurables.

On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$ la tribu borélienne de $\overline{\mathbb{R}}$, c'est la tribu engendrée par $\{]a, b[\ ,\ a, b \in \mathbb{R}\} \cup \{[a, +\infty], [-\infty, b],\ \ a, b \in \overline{\mathbb{R}}\}$. La limite d'une fonction ou d'une suite peut être $\pm\infty$ pour cela on va considérer dans la suite $\overline{\mathbb{R}}$ et sa tribu borélienne $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$.

Théorème fondamental (admis). Soient $(E, \mathcal{B})$ un espace mesurable et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications mesurables, $f_n \quad (E, \mathcal{B}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$.
1. $\mathrm{Sup}_n(f_n)$ et $\mathrm{Inf}_n(f_n)$ sont mesurables.
2. Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f alors f est mesurable.

2. Fonctions simples

Définition. Soit $(E, \mathcal{B})$ un espace mesurable. Une fonction simple est une application $\varphi \quad (E, \mathcal{B}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$ mesurable et qui a un nombre fini de valeurs distinctes dans $\overline{\mathbb{R}}$.
φ est positive si toutes ses valeurs sont positives.

Exemple Fonction indicatrice d'une partie A mesurable de E:
$1_A \quad E \to \overline{\mathbb{R}}$, prend deux valeurs 0 et 1. On a $1_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $1_A(x) = 0$ si $x \notin A$. Et l'application 1_A est mesurable $\iff A \in \mathcal{B}$.

Ecriture canonique d'une fonction simple

Soient $\varphi \quad (E, \mathcal{B}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$ une fonction simple et $\{a_0, a_1, ...a_N\}$ l'ensemble de ses valeurs distinctes ($a_i \neq a_j$ pour $i \neq j$). On note
$A_i = \{x \in E : \varphi(x) = a_i\} = \{\varphi = a_i\} = \varphi^{-1}(\{a_i\})$. On écrit

$$\varphi = \sum_{0 \le i \le N} a_i 1_{A_i}.$$

On vérifie facilement que pour tout $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ et que $E = \cup_{0\le i\le N} A_i$ (on dit que $(A_i)_{0\le i\le N}$ est une partition de E).

Théorème fondamental (admis). Soient $(E, \mathcal{B})$ un espace mesurable et $f \quad (E, \mathcal{B}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$ application mesurable positive. Il existe une suite croissante de fonctions simples positives $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge simplement vers f et telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \le \varphi_n \le f$.

Idée de la preuve : pour chaque n, on considère

$$\varphi_n = \sum_{0\le k\le n2^n-1} \frac{k}{2^n} 1_{A_k} + n 1_{A_n}$$

$$A_k = \{x \in E \ / \ \frac{k}{2^n} \le f(x) < \frac{k+1}{2^n}\} = f^{-1}([\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[)$$

$$A_n = \{x \in E \ / \ f(x) \ge n\} = f^{-1}([n, +\infty]).$$

On a pour tout entier n, $0 \le \varphi_n \le \varphi_{n+1} \le f$ et pour chaque $x \in E$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_n(x) = f(x)$.

INSA. Rouen. GM3 et EM SIC 3. 2020/2021. Rachida El Assoudi.

Cours : Mesure et Intégration. Chapitre II. Intégration.

I. Intégrale d'une fonction simple positive.

1. Définitions, exemples.
2. Propriétés. Théorèmes fondamentaux.

II. Intégrale d'une application mesurable positive.

1. Définitions, exemples. Théorèmes fondamentaux.
2. Théorème de Beppo-Levi. Lemme de Fatou.
3. Mesure définie par densité.

III. Fonctions μ-intégrables à valeurs réelles ou complexes.

1. Définitions et propriétés.
2. Théorème de convergence dominée.
3. Espaces vectoriels $\mathcal{L}^p(\mu)$ et espaces normés $L^p(\mu)$.
4. Théorème de Fubini -Tonelli.
5. Intégrale dépendant d'un paramètre.

Exemples : Transformée de Fourier. Transformée de Laplace.

I. Intégrale d'une application simple positive

Soient $(E, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré et $\varphi\ (E, \mathcal{B}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$ une application simple positive. Par définition φ est une application mesurable qui prend un nombre fini de valeurs positives distinctes $\{a_0, a_1, ..., a_N\}$. L'écriture canonique de φ est :

$$\varphi = \sum_{0 \le i \le N} a_i 1_{A_i}, \quad a_i \ge 0, \quad a_i \ne a_j \ \ si \ \ i \ne j.$$

où $A_i = \{x \in E/\varphi(x) = a_i\} = \varphi^{-1}(\{a_i\})$; A_i est une partie mesurable de E ($A_i \in \mathcal{B}$), pour tout $i \ne j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ et $E = \cup_{0 \le i \le N} A_i$.

Définition On appelle intégrale de φ le nombre positif (dans $[0, +\infty]$)

$$\int \varphi d\mu = \int \sum_{0 \le i \le N} a_i \ 1_{A_i} \ d\mu = \sum_{0 \le i \le N} a_i \ \mu(A_i).$$

On note $\int \varphi \ d\mu = \int_E \varphi \ d\mu = \int \varphi(x) \ d\mu(x)$.

Proposition 1 Propriétés des applications indicatrices
Soient E un ensemble quelconque et $A_1, A_2 \subset E$. On a :
1) $A_1 \subset A_2 \subset E \iff 1_{A_1} \le 1_{A_2}$.
2) $1_{A_1 \cap A_2} = 1_{A_1}.1_{A_2}$
3) si $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ alors $1_{A_1 \cup A_2} = 1_{A_1} + 1_{A_2}$.
4) Soit (A_n), $n \in \mathbb{N}$, une suite dénombrable de parties de E, on a
 i) $1_{\cap_n A_n} = \Pi_n 1_{A_n}$.
 ii) si les A_n, $n \in \mathbb{N}$, sont disjoints 2 à 2 alors $1_{\cup_n A_n} = \sum_n 1_{A_n}$.

Preuve. On utilise la définition de l'application indicatrice $1_A(x)$ qui prend la valeur 1 sur A et la valeur 0 sur A^c. Voir détails en TD.

Proposition 2 Soient φ et ψ deux applications simples positives définies sur E. On a
1. $\int \varphi \, d\mu \geq 0$ et pour tout réel $\alpha \geq 0$, $\int \alpha\varphi \, d\mu = \alpha \int \varphi \, d\mu$.
2. $\int \varphi + \psi \, d\mu = \int \varphi \, d\mu + \int \psi \, d\mu$.
3. Si $\varphi \leq \psi$ alors $\int \varphi \, d\mu \leq \int \psi \, d\mu$.

Preuve Pour 1), considérons l'écriture canonique de φ:
$\varphi = \sum_{0\leq i\leq N} \, a_i 1_{A_i}$. Il suffit de remarquer que

$$\alpha\varphi = \alpha(\sum_{0\leq i\leq N} a_i 1_{A_i}) = \sum_{0\leq i\leq N} \alpha a_i 1_{A_i}.$$

Il est clair que l'application $\alpha\varphi$ est aussi simple positive, de valeurs distinctes $b_i = \alpha a_i$.

Par définition on a $\int \alpha\varphi \, d\mu = \int \sum_{0\leq i\leq N} \, \alpha a_i \, 1_{A_i} \, d\mu = \int \sum_{0\leq i\leq N} \, b_i \, 1_{A_i} \, d\mu$ $= \sum_{0\leq i\leq N} \, b_i \, \mu(A_i) = \alpha \sum_{0\leq i\leq N} \, a_i \, \mu(A_i) = \alpha \int \varphi d\mu$.

Pour le 2) voir TD (il suffit d'écrire $\varphi + \psi$ sous forme canonique).

Pour le 3) considérons l'écriture canonique de φ et de ψ:

$$\varphi = \sum_{0\leq i\leq N} a_i 1_{A_i} \;\; et \;\; \psi = \sum_{0\leq i\leq N} b_i 1_{B_i}.$$

Rappelons que $\varphi \leq \psi$ signifie que pour tout $x \in E$, $\varphi(x) \leq \psi(x)$. Donc pour des valeurs a_i et b_j non nulles, $a_i 1_{A_i} \leq b_j 1_{B_j}$ signifie que $a_i \leq b_j$ et $A_i \subset B_j$. On en déduit alors que $a_i \, \mu(A_i) \leq \, b_i \, \mu(B_i)$ et on a le résultat.

Théorème Soient $(E, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré et φ une application simple positive, $\varphi \;\; (E, \mathcal{B}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$. L'application $\nu_\varphi \;\; \mathcal{B} \to [o, +\infty]$, définie par

$$\forall A \in \mathcal{B}, \; \nu_\varphi(A) = \int_A \varphi \, d\mu = \int \varphi 1_A \, d\mu.$$

est une mesure sur $(E, \mathcal{B})$ appelée mesure de densité φ par rapport μ.

Preuve Considérons l'écriture canonique de φ: $\varphi = \sum_{0\leq i\leq N} \, a_i 1_{A_i}$. Soit $A \in \mathcal{B}$. On a

$$\varphi 1_A = (\sum_{0\leq i\leq N} a_i 1_{A_i}) 1_A = \sum_{0\leq i\leq N} a_i 1_{A_i} 1_A = \sum_{0\leq i\leq N} a_i 1_{A_i \cap A} \qquad (*).$$

Il est clair que $\varphi 1_A$ est aussi une application simple positive de valeurs distinctes a_i et les ensembles $A_i \cap A$ sont disjoints. Donc $\int \varphi 1_A \, d\mu$ est bien définie et positive. On a alors $\nu_\varphi(A)$ est bien défini.

Et $\nu_\varphi(\emptyset) = \int \varphi 1_\emptyset \, d\mu = \int 0.1_E \, d\mu = 0\mu(E) = 0$.

Notons que pour une mesure, $\mu(E)$ peut être égal à $+\infty$; donc dans ce cas on pose $0 \times +\infty = 0$. On justifiera cette égalité après.

La σ-additivité: Soient $A_n \in \mathcal{B}$, $n \in \mathbb{N}$, disjoints 2 à 2. On a vu (Proposition 1 . 4) que $1_{\cup_n A_n} = \sum_n 1_{A_n}$. Donc

$\nu_\varphi(\cup_n A_n) = \int \varphi 1_{\cup_n A_n} \, d\mu = \int \sum_{0 \le i \le N} \; a_i 1_{A_i \cap (\cup_n A_n)} \, d\mu$ (en utilisant $(*)$ avec $A = \cup_n A_n$).

Donc $\nu_\varphi(\cup_n A_n) = \sum_{0 \le i \le N} \; a_i \mu(A_i \cap (\cup_n A_n)$.

Pour chaque $i \in \{0, 1, ..., N\}$ fixé, on a $A_i \cap (\cup_n A_n) = \cup_n (A_i \cap A_n)$ et les $A_i \cap A_n$, pour $n \in \mathbb{N}$, sont disjoints 2 à 2. Comme μ est une mesure on obtient
$\mu(A_i \cap (\cup_n A_n)) = \mu((\cup_n (A_i \cap A_n)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_i \cap A_n)$. Et donc
$\nu_\varphi(\cup_n A_n) = \sum_{0 \le i \le N} \; a_i (\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_i \cap (\cup_n A_n))$
$= \sum_{n \in \mathbb{N}} (\sum_{0 \le i \le N} \; a_i (\mu(A_i \cap A_n))$.

car sommes de termes positifs. Finalement puisque pour chaque n, $\nu_\varphi(A_n) = \int \varphi 1_{A_n} \, d\mu = \sum_{0 \le i \le N} \; a_i (\mu(A_i \cap A_n)$, on obtient que

$\nu_\varphi(\cup_n A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu_\varphi(A_n)$.

II. Intégrale d'une application mesurable positive

Définition Soient $(E, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré et une application mesurable positive $f \;\; (E, \mathcal{B}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$. On appelle intégrale de f le nombre positif (dans $[0, +\infty]$)

$$\int f \, d\mu = \mathrm{Sup}_\varphi \int \varphi \, d\mu \quad \textit{où} \;\; \varphi \;\; \textit{étagère positive et} \; 0 \le \varphi \le f.$$

On note $\quad \int f \, d\mu = \int_E f \, d\mu = \int f(x) \, d\mu(x)$.

Remarque. L'intégrale de f existe car pour $f \; (E, \mathcal{B}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$ mesurable positive, le théorème fondamental nous dit qu' il existe une suite croissante de fonctions simples positives $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge simplement vers f et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n \le f$.

La proposition suivante montre que l'intégrale est linéaire et elle est croissante.

Proposition Soient $f, g \;\; (E, \mathcal{B}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$ deux applications mesurables positives. On a :
1) $\int f \, d\mu \ge 0$ et pour tout réel $\alpha \ge 0$, $\int \alpha f \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu$
2) $\int f + g \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$.
3) Si $f \le g$ alors $\int f \, d\mu \le \int g \, d\mu$.

Preuve. On utilise le fait que ces propriétés sont vraies pour les applications simples positives (voir Proposition 2) et par définition l'intégrale d'une application mesurable positive est égale au $\mathrm{Sup}_\varphi \int \varphi \, d\mu$. Donc les propriétés qui sont vraies pour les φ restent vraies en considérant le Sup.

Théorème de Beppo-Levi (convergence monotone de Lebesgue) Soient $(E, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions mesurables positives ($f_n \;\; E \to \overline{\mathbb{R}}$), qui converge simplement vers f. Alors $\int f_n \, d\mu$ converge vers $\int f \, d\mu$. C'est à dire

$$\lim_{n\to+\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu = \int \lim_{n\to+\infty} f_n \, d\mu.$$

Preuve. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \leq f_{n+1} \leq f$, la suite des intégrales $\int f_n \, d\mu$ est croissante et elle est majorée par $\int f \, d\mu$.
Donc $\lim_{n\to+\infty} \int f_n \, d\mu$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$. Notons l cette limite. Il est clair que $\lim_{n\to+\infty} \int f_n \, d\mu = l \leq \int f \, d\mu$. Il reste à montrer que $\int f \, d\mu \leq l$.
Si $l = +\infty$, c'est vident.
Si l est fini, on peut montrer (admis) que pour toute application simple positive $\varphi \leq f$ on a $\int \varphi \, d\mu \leq l$. Et donc $Sup_\varphi \int \varphi \, d\mu = \int f \, d\mu \leq l$.

En utilisant ce théorème de Beppo-Levi on en déduit les corollaires suivants:

Corollaire 1. Intégrale et série d'applications mesurables positives. Soient $(E, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque de fonctions mesurables positives. On a
$\lim_{N\to+\infty} \int \sum_{n=0}^{N} f_n \, d\mu = \int \sum_{n=0}^{+\infty} f_n d\mu$, et $\int \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int f_n \, d\mu$.

Preuve. On considére pour $N \geq 0$, $g_N = \sum_{n=0}^{N} f_n$. C'est une somme finie d'applications mesurables positives; donc g_N est mesurable. Il est clair que $g_{N+1} = g_N + f_{N+1}$ et donc la suite (g_N) est croissante. On applique le théorème de Beppo-Levi à la suite (g_N) et puisque $\lim_{N\to+\infty} g_N = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ on obtient le résultat.

Corollaire 2. Soient $(E, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré et $f \;\; E \to \overline{\mathbb{R}}$ une application mesurable positive.
L'application $\nu_f \;\; \mathcal{B} \to [0, +\infty]$, définie par

$$\forall A \in \mathcal{B},\ \nu_f(A) = \int_A f \, d\mu = \int f 1_A \, d\mu.$$

est une mesure sur $(E, \mathcal{B})$ appelée mesure de densité f par rapport μ.

Preuve. La Proposition 1 montre ce résultat pour une application étagère positive φ. Par ailleurs, on sait que pour toute application mesurable positive f il existe une suite croissante (φ_n) d'applications étagères positives, $\varphi_n \leq f$ telle que $\lim_{n\to+\infty} \varphi_n = f$. Il est clair que $(\varphi_n 1_A)$ est une suite croissante d'applications étagères positives, et que $\lim_{n\to+\infty} \varphi_n 1_A = f 1_A$. On applique le théorème de Beppo-Levi à la suite $(\varphi_n 1_A)$ et on obtient que $\forall A \in \mathcal{B}$,

$$\nu_f(A) = \int f 1_A \, d\mu = \int \lim_{n\to+\infty} \varphi_n 1_A \, d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int \varphi_n 1_A \, d\mu = \lim_{n\to+\infty} \nu_{\varphi_n}(A).$$

On vérifie que $\nu_f(\emptyset) = 0$. Pour la σ-additivité pour ν_f on utilise que $\nu_f(A) = \lim_{n\to+\infty} \nu_{\varphi_n}(A)$, pour $A = \cup_k A_k$ disjoints deux à deux.

.

Lemme de Fatou Soient $(E, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications mesurables positives $f_n \;\; E \to \overline{\mathbb{R}}$. On a:

$$\int \liminf_n f_n \, d\mu \;\leq\; \liminf_n \int f_n \, d\mu.$$

En particulier, si $\lim_n f_n$ existe alors

$$\int \lim_{n\to+\infty} f_n \, d\mu \;\leq\; \lim_{n\to+\infty} \int f_n \, d\mu.$$

Preuve sera faite ultérieurement.