# Filtre à temps discret

**Définition** identiques aux filtre linéaire à temps continue
FL à TC

1) Un filtre linéaire à Temps discret est un SLIT

2) Un filtre linéaire est un convoluteur

$h_k$ : réponse impulsionelle

$$x_k \longrightarrow \boxed{h_k} \longrightarrow y_k$$

$$y_k = h_k * x_k = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h_m x_{k-m} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_m h_{k-m}$$

3) Les signaux exponentielle sont les signaux propres du FL

$$e^{2\pi j k f_0} \longrightarrow \boxed{h_k} \longrightarrow e^{2\pi j f_0 k} \times ?$$

$$x_k = e^{2\pi j k f}$$

$$y_k = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h_m e^{2\pi j (k-m) f_0}$$

$$= e^{2\pi j k f_0} \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} h_m e^{-2\pi j m f_0}}_{H(f_0)}$$

## Causalité

$$Y_k = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h_m x_{k-m}$$

$$= \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{-1} h_m x_{k-m}}_{} + \underbrace{\sum_{m=0}^{+\infty} h_m x_{k-m}}_{}$$

$$= \underbrace{\ldots\ h_{-2} x_{k+2}}_{\text{non réalisable physiquement.}} + h_{-1} x_{k+1} + h_0 x_k + h_1 x_{k-1} \ldots$$

$$Y_k = \sum_{m=0}^{+\infty} h_m x_{k-m}$$

le filtre doit être causal car la sortie ne peut précéder l'entrée

On a alors $H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^{-k}$ $\quad |z| > R_1$

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

$p_k$ : pôles de $D(z)$ $\quad |z| > \max_n \{ |p_n| \}$

## Stabilité :

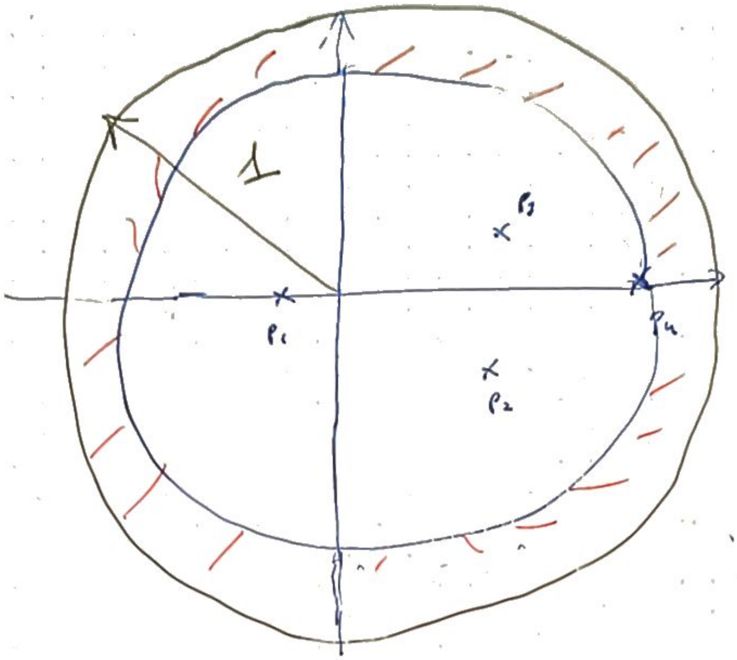
$$H(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k e^{-2\pi j k f}$$

et $H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k z^{-k}$

donc $H(f) = H(z) \Big|_{z = e^{2\pi j f}}$

$|z| = 1 \Rightarrow$ cercle unité.

× pôles




$|z| > \max$ pole

$|z| > |p_4|$

pôles complexe $\Rightarrow$ le conjugué est également racine.

Tous les pôles sont à l'intérieur du cercle unité

Le filtre est <u>réalisable</u> si il est causal et il est stable.

ce qui est équivalent à avoir les pôles dans le cercle unité.

<u>Exemple</u>

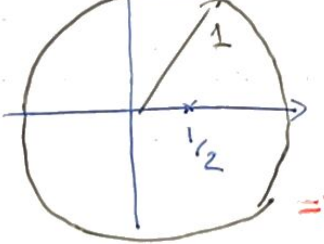
$$H_1(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}$$

$$H_2(z) = \frac{1}{1 - 2 z^{-1}}$$

$$\frac{1}{1 - a z^{-1}} \xrightarrow{\text{causal}} a^k u_k \quad |z| > |a|$$

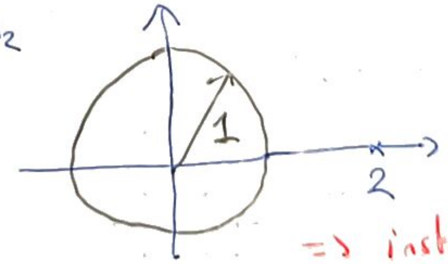
$$\frac{1}{1 - a z^{-1}} \xrightarrow{\text{anticausal}} -a^{k} u_{-k-1} \quad |z| < |a|$$

$H_1$




$\Rightarrow$ stable

$H_2$




$\Rightarrow$ instable.

$$H_1(f) = \sum_{k=0}^{-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k e^{-2\pi jkf} = H(z)\Big|_{z=e^{2\pi jf}}$$

$$H_2(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} 2^k e^{-2\pi jkf}$$

Exemple 2

$$H(z) = \frac{1 - z^{-2} + z^{-3}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

degré $N(z) = 3$

degré $D(z) = 2$

Rappel $h_k \xrightarrow{TZ} H(z)$

$h_{k-m} \xrightarrow{TZ} z^{-m} H(z)$

Posons $H_1(z) = \dfrac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{3}z^{-1}\right)}$

alors $H(z) = H_1(z) + z^{-2} H_1(z) + z^{-3} H_1(z)$