Équations différentielles (GM3)

Hasnaa Zidani

LMI - INSA Rouen

2022/2023 - CM5

Problème de Cauchy: (EDO)

$$y'(t) = f(y(t)) \quad \forall t \in I_v,$$
$$y(t_0) = v$$

- Où $v \in \mathbb{R}^n$ et $0 \in I_v$ l'intervalle associé à la solution maximale (I_v, y_v);
- La fonction $f : U \to \mathbb{R}^n$ est C^1, avec $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert non vide.

Rappel

- le système ci-dessus est autonome[a]
- Pour un système générale de la forme

$$z'(t) = g(t, z(t)) \quad \forall t \in J \subset I, \qquad z(0) = z_0,$$

on peut toujours se ramener à une forme autonome, il suffit de poser

$$y = \begin{pmatrix} t \\ z \end{pmatrix}, \qquad f(y) = \begin{pmatrix} 1 \\ g(t, z) \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 0 \\ z_0 \end{pmatrix}.$$

[a] c'est à dire que la dynamique f ne dépend pas explicitement de la variable t

Notion de flot

Définition

On appelle *flot* du champ de vecteurs f, l'application

$$\Phi : (t, v) \longmapsto y_v(t)$$

où (I_v, y_v) est la solution maximale de l'EDO avec $y_v(0) = v$.

L'application Φ est aussi appelée flot de l'équation (EDO).

Remarque

- Lorsqu'on fixe $v \in \mathbb{R}^n$, l'application $t \longmapsto \Phi(t, v)$ coïncide avec y_v. Donc, on a:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t, v) = f(\Phi(t, v)) \quad \forall t \in I_v,$$
$$\Phi(0, v) = v.$$

- Pour une étude qualitative de l'EDO, il est aussi important d'analyser, à t fixé, l'application

$$\Phi_t : v \longmapsto \Phi(t, v) = y_v(t).$$

- Deux points de vue différents:

$$\begin{cases} \text{solutions (ou orbites):} \quad t \longmapsto y_v(t) \\ \text{flot} \quad v \longmapsto \Phi_t(v) \end{cases}$$

Propriétés des orbites

Définition

On appelle *orbite* d'un point $v \in U$ (ou trajectoire passant pas v) la courbe

$$\mathcal{O}_v := \{\Phi_v(t) \quad t \in I_v\}.$$

Théorème

Soient $v, w \in U$, on a:

$$w \in \mathcal{O}_v \Longrightarrow v \in \mathcal{O}_w.$$

Et par conséquent, deux orbites **différentes ne se croisent pas.**

- Il y a trois sortes d'orbites
  - **Points équilibre**: $\mathcal{O}_v = \{v\}$ et donc $y_v \equiv v$;
  - **Courbe fermée**: $\exists w_0 \in U$ et $\exists T > 0$, t.q. $\Phi_T(w_0) = w_0$

    On parle alors de courbe T-périodique.
  - **Courbe ouverte**: $t \neq s \Longrightarrow \Phi_t(v) \neq \Phi_s(v)$.

Sensibilité par rapport aux conditions initiales Orbites

Exemple 1 - (1/2)

Considérons le système

$$\begin{cases} x'(t) = 2y(t), \\ y'(t) = -3x^2(t) - 12x(t) \end{cases}$$

- Points déquilibre:

$$O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

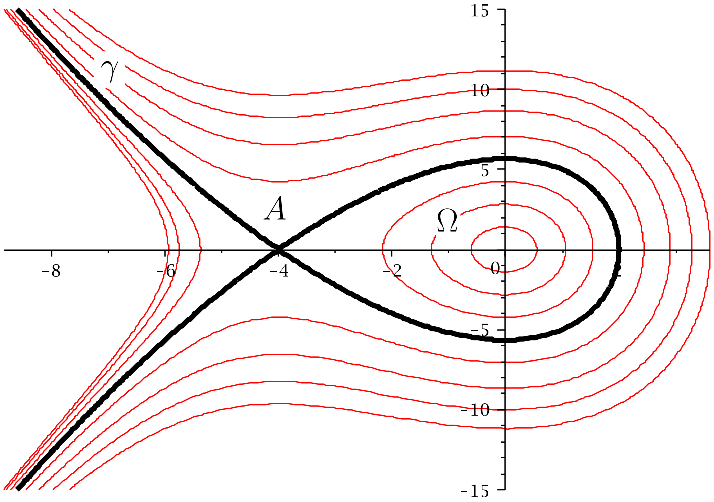
- Les trajectoires vérifient

$$x^3(t) + 6x^2(t) + y^2(t) = c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Exemple 1 - (2/2)

➡ Les trajectoires vérifient

$$x^3(t) + 6x^2(t) + y^2(t) = c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$



Proposition - Propriétés du *flot*

Soit $v \in U$. Si $t_1 \in I_v$ et $t_2 \in I_{\Phi_{t_1}(v)}$, alors $t_1 + t_2 \in I_v$, et on a:

$$\Phi_{t_1+t_2}(v) = \Phi_{t_2}(\Phi_{t_1}(v)).$$

En particulier, si $t \in I_v$, alors

$$\Phi_{-t}(\Phi_t(v)) = v.$$

Exemple

Dans le cas d'un système linéaire $f(y) = Ay$, le flot est une fonction linéaire

$$\Phi_t = e^{tA}.$$

Domaine de définition du flot

- Si le problème (EDO) admet une solution globale pour tout $v \in U$. Alors le domaine de Φ est $\mathcal{D} = \mathbb{R} \times U$. Dans ce cas, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a:

$$\Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{t+s}; \qquad \Phi_{-t} \circ \Phi_t = Id;$$
$$\Phi_0 = Id.$$

De plus, $\Phi_t(\cdot)$ est **continue**

- En général le domaine de Φ est

$$\mathcal{D} = \{(t, v) \in \mathbb{R} \times U \mid t \in I_v.\}$$

Avant d'étudier la continuité du flot, il faut d'abord s'assurer que le domaine $\mathcal{D}$ est bien un ouvert !

Théorème

Soit $x_0 \in U$, et soit (I_{x_0}, y) une solution maximale[a] sur $I_{x_0} =]t_-, t_+[$ vérifiant $y(0) = x_0$.

Il existe un voisinage $\mathcal{V} \subset U$ de x_0 tel que pour tout $v \in \mathcal{V}$, l'équation (EDO) admet une unique solution y_v définie sur $]t_-, t_+[$ et vérifiant $y_v(0) = v$.

De plus, l'application $v \longmapsto y_v(\cdot)$ est de classe C^1 sur $\mathcal{V}$ et sa différentielle en x_0 est l'application qui à $w \in U$ associe la solution du système:

$$\begin{cases} z'(t) = Df(y(t))z(t) & t \in]t_-, t_+[, \\ z(0) = w. \end{cases}$$

[a] $I_{x_0} =]t_-, t_+[$ un intervalle maximal contenant 0 et sur lequel est définie la solution y de (ED0) vérifiant $y(0) = x_0$.

Idée de la preuve

On applique le théorème de fonction implicite à la fonction

$$\Psi : U \times C^1([t_-, t_+]) \longrightarrow C^1([t_-, t_+])$$

Théorème (Fonctions implicites)

Si

- $J : \Omega \subset \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$ *de classe* C^k
- $(a, b) \in \Omega$ *tel que* $J(a, b) = 0$
- *La Jacobienne (partielle)* $[D_y J(a, b)]$ *est bijective*

Alors, *il existe* $\delta_1, \delta_2 > 0$ *et* $\varphi : \mathbb{B}(a, \delta_1) \longrightarrow \mathbb{B}(b, \delta_2)$ *de classe* C^k *tels que*

$$\Big[x \in \mathbb{B}(a, \delta_1), \;\; y \in \mathbb{B}(b, \delta_2), \;\; J(x, y) = 0\Big] \iff \Big[x \in \mathbb{B}(a, \delta_1), y = \varphi(x)\Big]$$

De plus, pour tout $x \in \mathbb{B}(a, \delta_1)$, *on a:*

$$D\varphi(x) = -\left(D_y J(x, \varphi(x))\right)^{-1} \circ D_x J(x, \varphi(x)).$$

Problème de Cauchy: (EDO)

$$y'(t) = f(y(t)) \quad \forall t \in I_v,$$
$$y(0) = v$$

Définition

Soit $\bar{x} \in U$. On dit que $\bar{x}$ est un **équilibre** si $f(\bar{x}) \equiv 0$.

Définition

- ✯ $\bar{x}$ est **stable** ssi $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que
$$\|v - \bar{x}\| \leq \delta \Longrightarrow \|y_v(t) - \bar{x}\| < \epsilon \qquad \forall t \geq 0.$$
- ✯ $\bar{x}$ est **asymptotiquement stable** ssi $\bar{x}$ est stable et il existe $\mathcal{V}$ un voisinage de $\bar{x}$ tel que
$$v \in \mathcal{V} \Longrightarrow y_v(t) \longrightarrow \bar{x} \qquad \text{quand } \to +\infty.$$

Points discutés au tableau

- ✯ Stabilité par linéarisation d'un système non-linéaire autour d'un point d'équilibre
- ✯ Stabilité par fonctions de Lyapounov.