I.) Dérivée au sens de Fréchet

Définition

Soient E et F deux e.v.n sur le même corps commutatif $\mathbb{K}$.
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application continue.
$x \mapsto f(x)$

f est differentiable au sens de Fréchet en un point $x \in E$
s'il existe une application linéaire continue $Df(x) : E \longrightarrow F$
$h \mapsto Df(x).h$

telle que

$$\| f(x+h) - f(x) - Df(x).h \|_F = \|h\|_E \, \varepsilon(h)$$

où $\varepsilon : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ avec $\varepsilon(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$

→ Une fonction differentiable en chaque point de E est dite différentiable sur E.

→ f est dite continûment différentiable en $x \in E$ lorsque f est différentiable dans un voisinage de x et l'application $y \mapsto Df(y)$ est continue en x cad

$$\lim_{y \to x} \| Df(x) - Df(y) \|_{\mathcal{L}(E,F)} = 0$$

$\Leftrightarrow$ $x \to Df(x)$ est continue

en dimension infini équivalent à toutes les dérivées partielle sont continues

Exemple

$J : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x)$ où $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ et symétrique
$b \in \mathbb{R}^n$

$$J(x+h) - J(x) = \frac{1}{2}(A(x+h), x+h) - (b, x+h) - \frac{1}{2}(Ax, x) + (b, x)$$

$$= \frac{1}{2}(Ah, x) + \frac{1}{2}(Ah, h) + \frac{1}{2}(Ax, h) - (b, h)$$

$$= (Ax, h) - (b, h) + \frac{1}{2}(Ah, h)$$

$$= \underbrace{(Ax - b, h)}_{DJ(x).h} + \frac{1}{2}(Ah, h)$$

$$\| J(x+h) - J(x) - DJ(x).h \|_F = \| \frac{1}{2} \overbrace{(Ah, h)}^{cst} \|$$

$$= \frac{1}{2} |(Ah, h)|$$

$$= \frac{1}{2} \|h\|^2 \|A\|$$

$$= \|h\| \, \varepsilon(h)$$ avec

$$\varepsilon(h) = \frac{1}{2} \|A\| \|h\| \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$$

J est elle continuement différentiable ?

Oui car

$x \mapsto (Ax + b, h)$ est une application linéaire.
donc continue

→ Si $f : E \to F$ est différentiable dans un voisinage de $x \in E$ alors f est continue. En effet

$$\| f(x+h) - f(x) \|_F \leq \underbrace{\| Df(x).h \|_F + \|h\|_E \, \varepsilon(h)}_{\varphi(h)}$$

avec $\varphi(h) \to 0$
car $Df(x) : E \to F$ est une application linéaire continue.

→ Par définition, la dérivé au sens de Fréchet correspond à un developpement limité d'ordre 1 au voisinage de x

$$\forall h \in E \quad f(x+h) = f(x) + Df(x).h + \|h\| \, \varepsilon(h)$$

→ Si la différentielle de f existe, elle est unique

Proposition

Si E est de dimension finie, alors il existe $p \in E$ tel que

$$Df(x).h = \langle p, h \rangle_E \quad \forall h \in E$$

on appelle p le gradient de f en x et on note $p = \nabla f(x)$

Dans l'exemple precedent : $\nabla J(x) = Ax - b$

Si $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^m$

Proposition

Il existe une unique matrice $\in \mathcal{M}_{m,n}$ telle que
$$Df(x).h = Mh \quad \forall h \in E = \mathbb{R}^n$$

On appelle M la matrice Jacobienne de f en x et on note $M = Df(x)$

Rappel sur les normes matricielles

- La Jacobienne ne dépend pas des normes choisies sur $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^m$

- On peut munir l'espace $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ de la norme induite $\|A\|_{m,n}$ vérifiant
$$\|Ax\|_{\mathbb{R}^m} \leq \|A\|_{m,n} \|x\|_{\mathbb{R}^n} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

- Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, il existe $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ avec $\|\bar{x}\|_{\mathbb{R}^n} = 1$ et tel que
$$\|A\|_{m,n} = \|A\bar{x}\|_{\mathbb{R}^m}$$

- Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ et $B \in \mathcal{M}_{n,r}$. On a
$$\|AB\|_{m,r} \leq \|A\|_{m,n} \|B\|_{n,r}$$

- Si $n = m$, on a $\|I_n\|_{n,n} = 1$

- Il existe des normes matricielles qui ne sont pas induites (par exemple la norme matricielle de Frobenius)

Proposition

Soit E, F, G 3 espaces normés.

- (Somme) Si $J_1 : E \to F$ et $J_2 : F \to G$ sont différentiable en $x \in E$, alors $J_1 + J_2$ est aussi différentiable en x et on a

$$D(J_1 + J_2)(x).h = DJ_1(x).h + DJ_2(x).h \quad \forall h \in E$$

- (Produit) La fonction $J_1 \times J_2$ est aussi différentiable en x et on a

$$D(J_1 \times J_2)(x).h = DJ_1(x) \cdot [J_2(x).h] + J_1(x) \times [DJ_2(x).h]$$

- Si $J_2 : E \to F$ est différentiable en $x \in E$ et $J_2 : F \to G$ différentiable en $J_1(x)$, alors

$$D(J_2 \circ J_1)(x) = DJ_2(J_1(x)) \circ DJ_1(x)$$

Preuve de la différentielle d'une composé.

$J_1 : E \to F$ différentiable

$J_2 : F \to G$ différentiable

$$J_2 \circ J_1 = J_2(J_1) : E \to G$$

$$J_2 \circ J_1(x+h) = J_2(J_1(x+h))$$

Or $J_1(x+h) = J_1(x) + DJ_1(x).h + \|h\|_E \, \varepsilon_1(h)$

$$J_2(J_1(x+h)) = J_2(J_1(x) + \underbrace{DJ_1(x).h + \|h\|_E \, \varepsilon_1(h)}_{h'})$$

$$= J_2(J_1(x)) + DJ_2(J_1(x)).\left[DJ_1(x).h + \|h\|_E \, \varepsilon_1(h)\right]$$

$$+ \| DJ_1(x).h + \|h\|_E \, \varepsilon_1(h) \|_F \, \varepsilon_2(h')$$

$DJ_1(x) : E \to F$

$DJ_2(J_1(x)) : E \to G$

$\Leftrightarrow D J_2 \circ J_1(x) : E \to G$

$$J_2 \circ J_1(x+h) = J_2 \circ J_1(x) + DJ_2(J_1(x)).(DJ_1(x).h)$$

$$+ DJ_2(J_1(x)).\|h\|_E \, \varepsilon_1(h) + \|\dots\| \, \varepsilon_2(h')$$

$E \to G$

$h \mapsto DJ_2(J_1(x)).\underbrace{DJ_1(x).h}_{\in F}$ est une application linéaire continue (con dim finie)

$$J_2 \circ J_1(x+h) = J_2 \circ J_1(x) + DJ_2(J_1(x)).(DJ_1(x).h) + \|h\|_E \, \tilde{\varepsilon}(h)$$

où $\tilde{\varepsilon}(h) = \underbrace{DJ_2(J_1(x)).\varepsilon_1(h)}_{\xrightarrow[h \to 0]{} 0} + \underbrace{\frac{1}{\|h\|_E} \| DJ_1(x).h + \|h\|_E \, \varepsilon_1(h) \|_F \, \varepsilon_2(h)}$

$$\leq \frac{1}{\|h\|_E} \|DJ_1(x).h\|_F + \|\varepsilon_1(h)\|_F$$

$$= \underbrace{\|DJ_1(x)\|_{\mathcal{L}(E,F)}}_{\text{scalaire}} + \|\varepsilon_1(h)\|_1$$

$\tilde{\varepsilon}(h) : E \to G$

$\tilde{\varepsilon}(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$