Théorème (la valeur moyenne)

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur E
Pour tout $x, y \in E$, il existe $\theta \in]0,1[$ tel que

$$z_\theta = \theta x + (1-\theta) y \in E \text{ et vérifie}$$

$$f(y) - f(x) = Df(z_\theta) \cdot (y-x)$$

Différentiabilité directionnelle

Définition

Soient E et F 2 evn
Soit $f : E \to F$ une fonction et soient $x, v \in E$
La dérivé directionnelle de f en x, dans la direction v est défini par (lorsqu'elle existe)

$$f'(x,v) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t\|v\|_E}$$

- Lorsque f est Fréchet différentiable en x alors f admet des dérivés directionnelles

$$f'(x,v) = Df(x) \cdot v \quad \forall v \in E$$

Dans ce cas, l'application $v \mapsto f'(x,v)$ est linéaire et continue

- En général, l'application $v \mapsto f'(x,v)$ est positivement homogène :

$$f'(x,tv) = t f'(x,v) \quad \forall t > 0$$

- la dérivé directionnelle demande moins de régularité.

2) Différentiabilité au sens de Gateaux

Définition

On dit que la fonction $f : E \to F$ est différentiable au sens de Gateaux en $x \in E$, si elle admet des dérivées directionnelles $f'(x,v)$ $\forall v \in E$ et s'il existe une application linéaire $df(x) : E \to F$ tel que

$$\forall v \in E \quad f'(x,v) = df(x).v.$$

- Si $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}$ et si f est gateaux différentiable, on continue à identifier $df(x)$ avec un vecteur $p \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$df(x).v = \langle p, v \rangle$$

et $p = \nabla f(x)$ est encore appellé gradient de f en x.

Remarque

- Une fonction dérivable au sens de Fréchet l'est aussi au sens de gateaux. Mais la réciproque est fausse.

Exemple

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^6}{(y-x^2)^2 + x^8} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

soit $\underline{v} = (v_1, v_2) \neq (0,0)$ une direction dans $\mathbb{R}^2$

On montre que f est dérivable au sens de Gateaux en $(0,0)$ mais pas différentiable au sens de Fréchet

$$f'((0,0), \underline{v}) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(tv_1, tv_2) - \overbrace{f(0,0)}^{0}}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \frac{t^5 v_1^6}{(tv_2 - t^2 v_1^2)^2 + t^8 v_1^8}$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \frac{t^5 v_1^6}{t^2 v_2^2 - 2t^3 v_2 v_1^2 + t^8 v_1^8}$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \frac{t^3 v_1^6}{v_2^2 - 2t v_2 v_1^2 + t^6 v_1^8} = 0$$

De plus l'application $\underline{v} \longmapsto df(0,0) \cdot \underline{v} = 0$ et linéaire + continue

Donc f est différentiable au sens de gateaux

en choisissant $h = (\alpha, \alpha^2)$

$$\frac{\| f(\alpha, \alpha^2) - f(0,0) - df(0,0) \cdot h \|_1}{\|h\|_2}$$

$$= \frac{\alpha^6}{\|h\|_2 \alpha^8} = \frac{1}{\alpha \sqrt{\alpha^2 + \alpha^4}} = \frac{1}{\alpha^3 \sqrt{1 + \alpha^2}} \xrightarrow[\alpha \to 0]{} +\infty$$

Donc f non différentiable au sens de Fréchet.

Exemple

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ est elle gateaux différentiable ? en 0

idée Si on trouve des directions $v \in E$ telle que l'application $v \mapsto Df(x).v$ ne soit pas linéaire alors f n'est pas gateaux différentiable :

soit $v = 1 \in \mathbb{R}$

$$df(0).v = \underline{f'(0,1)} = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(0+tv) - f(0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \frac{|t|}{t} = \underline{1}$$

soit $v = -1$

$$df(0).v = \underline{f'(0,-1)} = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(0+tv) - f(0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \frac{|-t|}{t} = \underline{1}$$

si $df(0)$ était linéaire on aurait $df(0).(-1) = - df(0).1$

donc $df(0)$ n'est pas linéaire

donc f n'est pas gateaux différentiable

Dérivées partielles

- On suppose que $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}$

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle
soit $(e_i)_{i=1..n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$

Définition

Supposons que les dérivées directionnelles suivantes de f en x existent :

$$f'(x, e_i) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x + te_i) - f(x)}{t}$$

et que les application $\lambda \mapsto f'(x, \lambda e_i)$ soient linéaires
On appelle dérivé partielle de f par rapport à x_i le coefficient $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ tel que :

$$f'(x, e_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) . e_i$$

Lemme

Si f est Fréchet différentiable en x alors

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

on note $\partial_{x_i} f(x)$ au lieu de $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$

- Par définition, la dérivée partielle $\partial_{x_i} f(x)$ correspond à la dérivée de

$$t \mapsto f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

⚠ Une fonctionnelle $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ qui admet des dérivées partielles n'est pas nécessairement différentiable (ni même continue)

↳ Contre Exemple

Soit $f : \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

- f est différentiable en tout point de l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$ en effet montrons que f est C^1

Toute fonction de Classe C^1 est différentiable

$\forall (x,y) \neq (0,0)$ $f : (x,y) \mapsto \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$

De plus $\forall (x,y) \neq (0,0)$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{y}{x^2+y^2} \quad \text{continue sur } \mathbb{R}^2\setminus\{0,0\} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{-x}{x^2+y^2} \quad \text{continue sur } \mathbb{R}^2\setminus\{0,0\} \end{aligned}\right\} f' \text{ est continue sur } \mathbb{R}^2\setminus\{0,0\}$$

Ainsi f est C^1 donc différentiable.

- Montrons que $t \mapsto f(t,0)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

→ $f(t,0) = 0 \xrightarrow[t \to 0]{} 0 = f(0,0)$ donc f continue sur $\mathbb{R}$

• Montrons que f admet des dérivées partielles $\partial_x f(0,0)$ et $\partial_y f(0,0)$ en $(0,0)$

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f((0,0)+te_1) - f(0,0)}{t} = f((0,0),e_1)$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \frac{0-0}{t} = 0$$

l'application $t \mapsto f((0,0),te_1) = 0$ est linéaire

OR $f'((0,0),e_1) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \cdot e_1$

comme $e_1 \neq 0$ on déduit que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$

De même pour $\partial_y f(0,0)$.

• Montrons que f n'est pas continue en $(0,0)$

Soit $h = (h_1, h_2)$

$$f((0,0)+h) = f(h_1,h_2) = \frac{h_1 h_2}{h_1^2 + h_2^2} \leq \frac{1}{2} \xrightarrow[h \to 0]{} \frac{1}{2} \neq f(0,0)$$

f n'est donc pas continue mais admet pourtant des dérivées partielles en 0.

De plus comme f n'est pas continue en $(0,0)$ elle ne peut pas être différentiable.

Lien entre dérivées partielles et Fréchet différentiabilité :

Théorème

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle. On a l'équivalence :

- f est C^1 dans un voisinage de x
- Il existe $\varepsilon > 0$ tel que f admet des dérivées partielles en tout point $y \in B(x, \varepsilon)$ et l'application

$$y \mapsto \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f(y) \\ \vdots \\ \partial_{x_n} f(y) \end{pmatrix} \text{ est continue sur } B(x, \varepsilon)$$

Cas où $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^m$

Dans le cas où $F = \mathbb{R}^m$, $f(x)$ correspond à un vecteur à m composantes

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad f(x) = \sum_{j=1}^{m} f_j(x) e_j$$

où $(e_j)_{j=1\dots m}$ est une base de F.

On peut alors différentier chaques composantes de f.
La différentielle de f en x (lorsqu'elle existe) peut alors être écrite composante par composante :

$$df_1(x).h = \langle \nabla f_1(x), h \rangle = \partial_{x_1} f_1(x) h_1 + \partial_{x_2} f_1(x) h_2 + \dots + \partial_{x_n} f_1(x) h_n$$

$$\vdots$$

$$df_m(x).h = \langle \nabla f_m(x), h \rangle = \partial_{x_1} f_m(x) h_1 + \dots + \partial_{x_n} f_m(x) h_n$$

Définition Matrice Jacobienne

La matrice associée à $Df(x)$ dans les bases $(e_k)_{1\leq k\leq n}$ et $(e_i)_{1\leq i\leq m}$ est appellé matrice Jacobienne de f en x noté

$$[Df(x)] = \begin{bmatrix} \partial x_1 f_1(x) & \cdots & \partial x_n f_1(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial x_1 f_m(x) & \cdots & \partial x_n f_m(x) \end{bmatrix}$$

on appelle le Jacobien le déterminant de la matrice.

Propriété calcul de la Jacobienne

(Somme) Si $f : E \to F$ et $g : E \to F$ sont C^1 alors

$$[D(f+g)(x)] = [Df(x) + Dg(x)]$$

(Composition) Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont C^1 alors

$$[D(g \circ f)(x)] = [Dg(f(x))] \times [Df(x)]$$

III) Différentiabilité d'ordre 2

Définition

On suppose que $J : E \to F$ est différentiable sur un voisinage de x

Si l'application $DJ : E \to \mathcal{L}(E,F)$ est différentiable alors sa différentielle est appellée différentielle seconde de J en x

on note $D^2 J(x)$

$$D^2 J(x) \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E,F))$$

Si la différentielle $x \mapsto D^2 J(x)$ est continue de E dans $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E,F))$, on dit que J est C^2

Theorème Schwarz

Soit f une application 2 fois différentiable en x. Alors $D^2 f(x)$ est un application bilinéaire, continue et symétrique de $E \times E$ dans F.

→ On peut identifier $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E,F))$ à $\mathcal{L}(E \times F)$ et on écrit

$$(D^2 f(x).h).k = D^2 f(x).(h,k) \quad \text{où } (h,k) \in E \times E$$

Si $k = h$ on condense la notation en

$$D^2 f(x).h^2$$

Définition Hessienne cas $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}$

La hessienne $D^2 f(x)$ est une forme bilinéaire et continue de $\mathbb{R}^{n \times n}$
Il existe un unique élément $[D^2 f(x)] \in M_{nn}$ tel que

$$D^2 f(x) \cdot (h,k) = \langle [D^2 f(x)] h ; k \rangle_{\mathbb{R}^n} \quad \forall h,k \in \mathbb{R}^n$$

Les coefficients de $[D^2 f(x)]$ sont des dérivées partielles secondes notées

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k x_i}(x) \quad \text{ou} \quad \partial_k \partial_i f(x)$$

On peut montrer que

$$[D^2 f(x)] = \begin{bmatrix} \partial_1\partial_1 f(x) & \partial_2\partial_1 f(x) & \cdots & \partial_n\partial_1 f(x) \\ \partial_1\partial_2 f(x) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \partial_1\partial_n f(x) & \cdots & \cdots & \partial_n\partial_n f(x) \end{bmatrix}$$

En particulier, on peut écrire

$$\begin{aligned} D^2 f(x) \cdot (h,h') &= (\nabla^2 f(x) h ; h') \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} h_i h_j' \partial_i \partial_j f(x). \end{aligned}$$