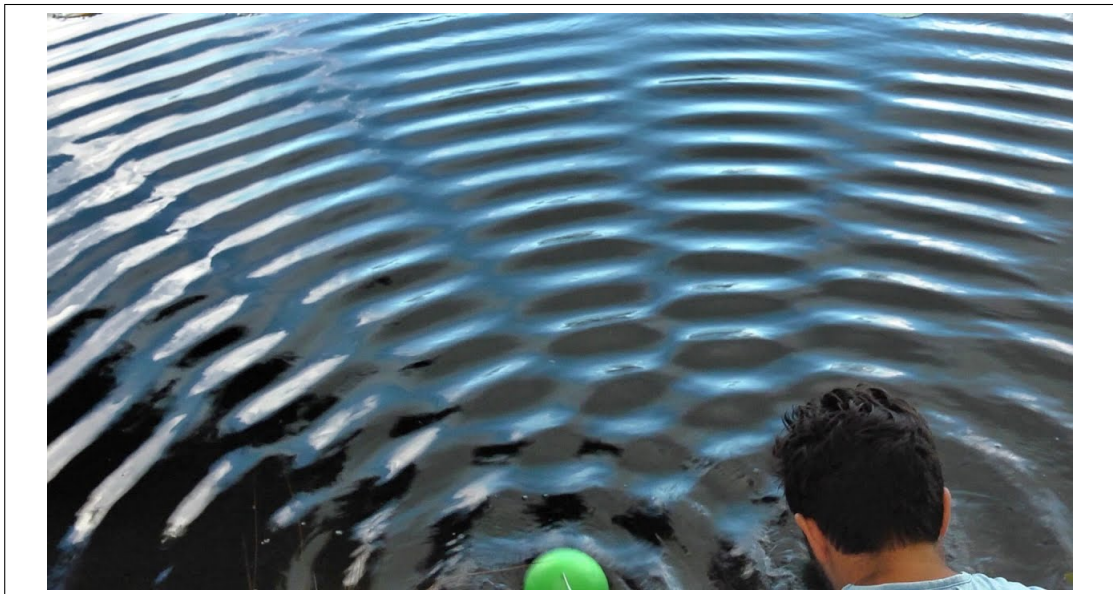


## ***TP2 : Quadrature et Équation de Helmholtz***

*Analyse Numérique 2 - MMSN - GM3*



**Etudiants : Guines Antoine, Langolff Clément**

# Table des matières

I. Intégrale d'une fonction $f$	4
1. Théorie	5
1.1. Méthode d'Hermite . . . . .	5
1.1.1. Exactitude de la formule d'Hermite . . . . .	5
1.1.2. Ordre de la méthode d'Hermite . . . . .	7
1.2. Formules composites . . . . .	9
1.2.1. Rappel des formules composites . . . . .	9
1.2.1.1. Formule des Trapèzes . . . . .	9
1.2.1.2. Méthode de Gauss à 2 points . . . . .	10
1.2.1.3. Méthode d'Hermite . . . . .	11
1.2.2. Implémentation efficace . . . . .	11
1.2.2.1. Formule composite des Trapèzes . . . . .	11
1.2.2.2. Formule composite de Gauss à 2 points . . . . .	12
1.2.2.3. Formule composite d'Hermite . . . . .	12
2. Code	13
2.1. Observation de l'action des paramètres $p$ et $k$ . . . . .	13
2.2. Analyse de convergence . . . . .	14
2.3. Test des méthodes sur la fonction $f(x) = x^2$ . . . . .	16
2.4. Conclusion sur les méthodes . . . . .	17
II. Ondes et équation d'Helmotz	18
3. Théorie	19
3.1. Tronquature de l'intégrale et estimation d'erreur . . . . .	19
3.1.1. Pourquoi tronquer l'intégrale ? . . . . .	19
3.1.2. Majoration de l'erreur . . . . .	21
3.2. Démonstration que $u$ est une fonction $C^\infty$ . . . . .	22
3.3. Démonstration de la formule intégrale (Bonus) . . . . .	25
3.3.1. Démonstration pour une source ponctuelle . . . . .	25
3.3.2. Généralisation . . . . .	26
4. Code	27
4.1. Complétion du code . . . . .	27
4.2. Test du code . . . . .	27

## *Table des matières*

4.3. Cas plus complexes . . . . .	29
4.3.1. Cas de deux sources ponctuelles . . . . .	29
4.3.2. Cas d'une fente (Bonus) . . . . .	31
4.3.3. Cas de deux fentes . . . . .	34

Première partie

Intégrale d'une fonction  $f$

# 1. Théorie

Dans cette première partie on cherche à évaluer, grâce à différentes méthodes de quadrature, l'intégrale suivante :

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

## 1.1. Méthode d'Hermite

Dans un premier temps nous allons nous intéresser à la méthode de quadrature d'Hermite. On veut ici évaluer l'intégrale sur l'intervalle  $[-1; 1]$ .

### 1.1.1. Exactitude de la formule d'Hermite

Nous disposons de trois points, donc nous sommes au moins exacte sur  $\mathbb{P}_2$ . Cela se traduit par :

La formule est exacte sur  $\mathbb{P}_2 \iff \forall f \in \mathbb{P}_2 \ R(f) = 0$ , avec :

$$R(f) = (A_0 f(0) + B_{-1} f'(-1) + B_1 f'(1)) - \left( \int_{-1}^1 f(\hat{x}) d\hat{x} \right)$$

Déterminons alors les coefficients  $A_0$ ,  $B_{-1}$ , et  $B_1$  tels que cette formule soit effectivement exacte sur  $\mathbb{P}_2$ . On a :

## 1. Théorie

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \begin{cases} R(1) &= 0 \\ R(x) &= 0 \\ R(x^2) &= 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \int_{-1}^1 1dx - A_0 &= 0 \\ \int_{-1}^1 xdx - (B_{-1} + B_1) &= 0 \\ \int_{-1}^1 x^2dx - 2(-B_{-1} + B_1) &= 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} A_0 &= 2 \\ B_{-1} + B_1 &= 0 \\ 2(-B_{-1} + B_1) &= \frac{2}{3} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} A_0 &= 2 \\ B_{-1} &= -B_1 \\ -B_{-1} + B_1 &= \frac{1}{3} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} A_0 &= 2 \\ B_{-1} &= -\frac{1}{6} \\ B_1 &= \frac{1}{6} \end{cases}
\end{aligned}$$

La formule de quadrature s'écrit alors :

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = 2f(0) - \frac{1}{6}f'(-1) + \frac{1}{6}f'(1) + R(f)$$

Regardons maintenant si nous pouvons être exacte sur  $\mathbb{P}_k$  avec  $k > 2$ . Pour cela on utilise la propriété du cours nous disant que si  $R(x^i) = 0 \forall i \in \{0, \dots, k\}$ , alors la formule de quadrature est exacte sur  $\mathbb{P}_k$ . Dans notre cas on a donc :

$$\begin{aligned}
R(f) &= (A_0f(0) + B_{-1}f'(-1) + B_1f'(1)) - \left( \int_{-1}^1 f(\hat{x})d\hat{x} \right) \\
R(x^3) &= 2 \times 0 - \frac{1}{6} \times 3 \times (-1)^2 + \frac{1}{6} \times 3 \times 1^2 - \underbrace{\int_{-1}^1 x^3dx}_0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ainsi, la formule est exacte sur  $\mathbb{P}_3$ . Essayons de montrer l'exactitude de la formule pour un  $k$  plus grand, on prend donc  $k = 4$  :

$$\begin{aligned}
R(x^4) &= 2 \times 0 - \frac{1}{6} \times 4 \times (-1)^3 + \frac{1}{6} \times 4 \times 1^3 - \int_{-1}^1 x^4dx \\
&= \frac{4}{3} - \frac{2}{5} \neq 0
\end{aligned}$$

## 1. Théorie

La formule n'est pas exacte sur  $\mathbb{P}_4$ .

Ainsi, le  $k$  maximum tel que la formule soit exacte sur  $\mathbb{P}_k$  est  $k = 3$ .

### 1.1.2. Ordre de la méthode d'Hermite

Soit  $p$  le polynome appartenant à  $\mathbb{P}_3$  tel que :

$$\begin{cases} p(0) &= f(0) \\ p'(1) &= f'(1) \\ p'(-1) &= f'(-1) \\ p'(0) &= f'(0) \end{cases}$$

Nous rajoutons un point pour exploiter l'exactitude sur  $\mathbb{P}_3$ . Pour majorer l'erreur, cherchons d'abord  $v_n \in \mathbb{P}_3$  tel que :

$$v(0) = v'(0) = v'(1) = v'(-1) = 0$$

On a :

$$\underbrace{v'(t)}_{deg=3} = \underbrace{t(t+1)(t-1)}_{deg=3} Q(t)$$

On déduit alors que  $deg(Q) = 0$  et donc  $Q(t) = a$ . On obtient donc :

$$\begin{aligned} v'(t) &= t(t^2 - 1)a \\ &= at^3 - at \end{aligned}$$

Après intégration, il vient que :

$$v(t) = \frac{a}{4}t^4 - \frac{a}{2}t^2$$

Pour simplifier la majoration, nous allons prendre  $v$  comme étant un polynôme unitaire, ainsi nous prenons  $a = 4$ .

$$\begin{aligned} v(t) &= t^4 - 2t^2 \\ &= t^2(t^2 - 2) \end{aligned}$$

Soit  $x \in ]-1; 1[$  et  $x \neq 0$ . Alors pour tout  $x$  fixé on ajoute la condition que  $f(x) = p(x)$ . Posons maintenant :  $E(t) = f(t) - p(t) - \frac{f(x)-p(x)}{v(x)}v(t)$ .

Par construction,  $E$  s'annule en  $t = 0$  et en  $t = x$ .  $E$  s'annule en 2 points distincts donc par le théorème de Rolle, on sait que  $E'$  s'annulera au moins une fois en un point de l'intervalle  $]0; x[$ . Ce point sera donc différent de 0, 1 et  $-1$ . De plus également par construction de  $E$ , on sait que  $E'$  va s'annuler en 0, 1 et  $-1$ . Par conséquent on déduit que  $E'$  s'annule au moins en 4 points distincts de  $[-1; 1]$ .

## 1. Théorie

Ainsi en vertu du théorème de Rolle, on déduit que  $E^{(4)}$  s'annule au moins une fois, en un point  $\xi \in [-1, 1]$ . Ainsi :

$$E^{(4)}(\xi) = f^{(4)}(\xi) - \frac{f(x) - p(x)}{v(x)} 4! = 0$$

Donc :

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} v(x)$$

Cependant cette égalité n'est valable seulement sur  $[-1, 1]$ . Si on veut pouvoir majorer l'erreur de notre intégrale sur un intervalle  $[a, b]$  quelconque il nous faut trouver un nouveau  $v$ . On découpe alors  $[a, b]$  en  $p$  sous intervalle, et le pas vaut  $h = \frac{b-a}{p}$ . On note  $[x_i, x_{i+1}] \forall i \in \{0, \dots, p-1\}$  les  $p$  sous-intervalles de  $[a, b]$ . Pour cela, nous allons poser  $p \in \mathbb{P}_3$  défini sur l'intervalle  $[x_i, x_{i+1}]$  tel que

$$\begin{cases} p(x_i + \frac{h}{2}) &= f(x_i + \frac{h}{2}) \\ p'(x_i) &= f'(x_i) \\ p'(x_{i+1}) &= f'(x_{i+1}) \\ p'(x_i + \frac{h}{2}) &= f'(x_i + \frac{h}{2}) \end{cases}$$

On définit alors  $v(t) \in \mathbb{P}_3$  tel que  $v(x_i + \frac{h}{2}) = v'(x_i + \frac{h}{2}) = v'(x_{i+1}) = v'(x_i) = 0$ . Avec un raisonnement analogue à celui réalisé pour l'intervalle  $[-1, 1]$ , nous exprimons l'équivalent de  $v$  sur l'intervalle  $[x_i, x_{i+1}]$  avec la formule  $t = \frac{\hat{t}+1}{2}h + x_i$  pour  $\hat{t} \in [-1, 1]$ . On obtient alors le  $v(t)$  associé à l'intervalle  $[x_i, x_{i+1}]$  :

$$v(t) = \left(t - (x_i + \frac{h}{2})\right)^2 \left(t - (\frac{\sqrt{2}+1}{2}h + x_i)\right) \left(t - (\frac{-\sqrt{2}+1}{2}h + x_i)\right)$$

On prend cette fois  $x \in ]x_i, x_{i+1}[$ , puis on pose comme précédemment :  $E(t) = f(t) - p(t) - \frac{f(x)-p(x)}{v(x)}v(t)$  avec cette fois  $t \in [x_i, x_{i+1}]$ . Comme précédemment par le théorème de Rolle on a  $E^{(4)}(t)$  qui s'annule au moins une fois en un  $\xi \in [x_i, x_{i+1}]$



## 1. Théorie

. Ainsi :

$$\begin{aligned}
 |R(f)| &= \left| \sum_{i=0}^{p-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) - p(x) dx \right| \\
 &\leq \sum_{i=0}^{p-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x) - p(x)| dx \\
 &\leq \sum_{i=0}^{p-1} \frac{\|f^{(4)}\|_{\infty}}{4!} \int_{x_i}^{x_{i+1}} v(x) dx \\
 &= \sum_{i=0}^{p-1} \frac{\|f^{(4)}\|_{\infty}}{4!} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \underbrace{\left(x - \left(x_i + \frac{h}{2}\right)\right)^2}_{\leq h^2} \underbrace{\left(x - \left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}h + x_i\right)\right)}_{\leq h} \underbrace{\left(x - \left(\frac{-\sqrt{2}+1}{2}h + x_i\right)\right)}_{\leq h} dx \\
 &\leq \sum_{i=0}^{p-1} \frac{\|f^{(4)}\|_{\infty}}{4!} h^4 \int_{x_i}^{x_{i+1}} dx \\
 &= \sum_{i=0}^{p-1} \frac{\|f^{(4)}\|_{\infty}}{4!} h^5 \\
 &= p \frac{\|f^{(4)}\|_{\infty}}{4!} h^5 \\
 &= (b-a) \frac{\|f^{(4)}\|_{\infty}}{4!} h^4
 \end{aligned}$$

On obtient finalement que  $|R(f)| \leq (b-a) \frac{\|f^{(4)}\|_{\infty}}{4!} h^4$ , ce qui montre que la méthode d'Hermite est d'ordre 4.

## 1.2. Formules composites

### 1.2.1. Rappel des formules composites

#### 1.2.1.1. Formule des Trapèzes

Pour la méthode des trapèzes la formule de quadrature sur l'intervalle de référence  $[-1; 1]$  est donnée par :

$$\int_{-1}^1 f(\hat{x}) d\hat{x} \approx f(1) + f(-1)$$

Cette formule est exacte sur  $\mathbb{P}_1$ . Pour construire la méthode composite pour les trapèzes sur un intervalle  $[a, b]$ , nous divisons celui-ci en  $p$  intervalles d'un pas  $h = \frac{b-a}{p}$ . Grâce à la formulation de Riemann, on a :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{j=0}^{p-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x) dx$$

## 1. Théorie

On pose alors  $x = \frac{\hat{x}+1}{2}h + x_j$  où  $h = x_{j+1} - x_j$  et  $\hat{x} \in [-1, 1]$ . On a donc  $dx = \frac{h}{2}d\hat{x}$ , ainsi :

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx = \int_{-1}^1 f\left(\frac{\hat{x}+1}{2}h + x_j\right)\frac{h}{2}d\hat{x}$$

En reprenant la formule de quadrature des trapèzes et en évaluant en  $\hat{x} = -1$  et  $\hat{x} = 1$ , on a :

$$\begin{aligned}\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx &\approx \left( f\left(\frac{1+1}{2}h + x_j\right) + f\left(\frac{-1+1}{2}h + x_j\right) \right) \frac{h}{2} \\ &= \frac{h}{2} (f(x_{j+1}) + f(x_j))\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &\approx \frac{h}{2} \sum_{j=0}^{p-1} (f(x_{j+1}) + f(x_j)) \\ &= \frac{h}{2} (f(x_0) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{p-1}) + f(x_p)) \\ &= \frac{h}{2} \left( f(x_0) + f(x_p) + 2 \sum_{j=1}^{p-1} f(x_j) \right) \\ &= h \left( \frac{f(x_0) + f(x_p)}{2} + \sum_{j=1}^{p-1} f(x_j) \right)\end{aligned}$$

### 1.2.1.2. Méthode de Gauss à 2 points

Pour la méthode de Gauss à 2 points, nous avons pu montrer que la formule de quadrature sur l'intervalle de référence  $[-1; 1]$  est donnée par :

$$\int_{-1}^1 f(\hat{x})d\hat{x} \approx f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Notons que cette formule de quadrature est exacte sur  $\mathbb{P}_3$ .

Pour déterminer la formule composite associée à cette méthode, on reprend le même raisonnement que précédemment. On a toujours :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{j=0}^{p-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx$$

Par un changement de variable on va traiter  $x \in [x_j, x_{j+1}]$  en considérant  $\hat{x}$  qui est un point de l'intervalle de référence  $[-1, 1]$ , en posant :  $x = \frac{\hat{x}+1}{2}h + x_j$ . On a donc :

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx = \int_{-1}^1 f\left(\frac{\hat{x}+1}{2}h + x_j\right)\frac{h}{2}d\hat{x}$$

## 1. Théorie

$$\begin{aligned} &\approx \frac{h}{2} \left( f \left( \frac{\frac{-1}{\sqrt{3}} + 1}{2} h + x_j \right) + f \left( \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + 1}{2} h + x_j \right) \right) \\ &= \frac{h}{2} \left( f \left( \frac{-1 + \sqrt{3}}{\sqrt{12}} h + x_j \right) + f \left( \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{12}} h + x_j \right) \right) \end{aligned}$$

D'où :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2} \sum_{j=0}^{p-1} \left( f \left( \frac{-1 + \sqrt{3}}{\sqrt{12}} h + x_j \right) + f \left( \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{12}} h + x_j \right) \right)$$

### 1.2.1.3. Méthode d'Hermite

Finalement pour la méthode d'Hermite nous avons pu montrer que la formule de quadrature sur  $[-1, 1]$  était donnée par :

$$\int_{-1}^1 f(\hat{x})d\hat{x} \approx 2f(0) - \frac{1}{6}f'(-1) + \frac{1}{6}f'(1)$$

Alors, en procédant exactement comme précédemment, il vient que :

$$\begin{aligned} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx &= \int_{-1}^1 f\left(\frac{\hat{x}+1}{2}h + x_j\right)\frac{h}{2}d\hat{x} \\ &\approx hf\left(\frac{0+1}{2}h + x_j\right) - \frac{h^2}{24}f'\left(\frac{-1+1}{2}h + x_j\right) + \frac{h^2}{24}f'\left(\frac{1+1}{2}h + x_j\right) \\ &\approx hf\left(\frac{1}{2}h + x_j\right) - \frac{h^2}{24}f'(x_j) + \frac{h^2}{24}f'(h + x_j) \\ &= h \left( f\left(\frac{x_{j+1} + x_j}{2}\right) - \frac{h}{24}f'(x_j) + \frac{h}{24}f'(x_{j+1}) \right) \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= h \sum_{j=0}^{p-1} \left( f\left(\frac{x_{j+1} + x_j}{2}\right) - \frac{h}{24}f'(x_j) + \frac{h}{24}f'(x_{j+1}) \right) \\ &= \frac{h^2}{24} \times (f'(b) - f'(a)) + h \times \sum_{j=0}^{p-1} f\left(\frac{x_{j+1} + x_j}{2}\right) \end{aligned}$$

### 1.2.2. Implémentation efficace

#### 1.2.2.1. Formule composite des Trapèzes

Pour cette première méthode, la formule composite est donnée par :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2} \left( f(x_0) + f(x_p) + 2 \sum_{j=1}^{p-1} f(x_j) \right)$$

## 1. Théorie

Dans ce cas, nous ferons attention à ne calculer qu'une seule fois les  $f(x_j)$ . On va tout d'abord initialiser une variable  $res$  qui contiendra la somme de tous les  $f(x_j)$ , avec le premier terme  $f(x_0)$ . Ensuite on va faire une boucle dans laquelle on calculera le terme  $f(x_j+h)$ , puis on ajoutera  $f(x_j)$  et  $f(x_j+h)$  à la variable  $res$ . On stockera ensuite  $f(x_j+h)$  dans une variable pour l'utiliser dans la somme au prochain tour sans la recalculer. On incrémente également  $x$  de  $h$  à chaque tour. On s'arrête lorsque  $x$  dépasse  $b$ . Finalement, on multiplie le résultat, donc la variable  $res$ , par  $h * 0.5$ .

### 1.2.2.2. Formule composite de Gauss à 2 points

Pour cette méthode la formule composite est donnée par :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2} \sum_{j=0}^{p-1} \left( f\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{\sqrt{12}}h + x_j\right) + f\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{12}}h + x_j\right) \right)$$

Pour implémenter cette formule de manière efficace, il est impératif de calculer une unique fois les 2 produits  $c1 = \frac{-1+\sqrt{3}}{\sqrt{12}}h$  et  $c2 = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{12}}h$  qui sont des constantes. Ensuite on réalise une boucle dans laquelle on calcule  $f(c1+x)$  et  $f(c2+x)$ . On somme ces 2 valeurs dans une variable contenant la somme, notée  $res$ , puis on incrémente  $x$  de  $h$ . On s'arrête lorsque  $x$  dépasse  $b$ .

### 1.2.2.3. Formule composite d'Hermite

Pour cette dernière méthode, la formule composite est donnée par :

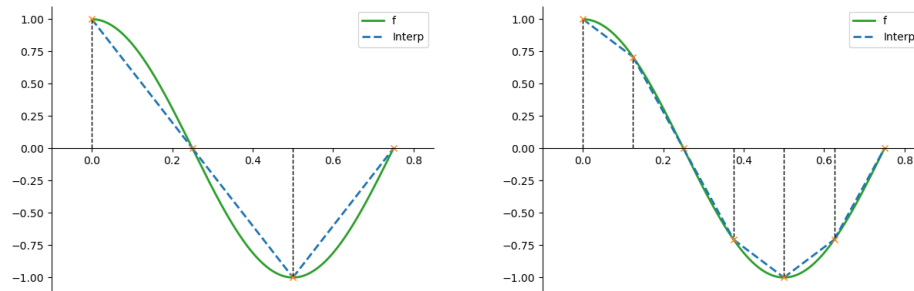
$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h^2 \times (f'(b) - f'(a))}{24} + h \times \sum_{j=0}^{p-1} f\left(\frac{x_{j+1} + x_j}{2}\right)$$

Dans ce cas, il est important de remarquer qu'il n'est nécessaire de calculer la dérivé de  $f$  qu'aux points  $a$  et  $b$ . Ensuite, il suffit de faire une boucle dans laquelle on évalue  $f$  au milieu de chaque intervalle  $[x_j, x_{j+1}]$  et on l'ajoute à une variable  $res$  contenant la somme. Pour cela on initialise  $x$  en  $a$ , et on crée la variable  $h_{div2} = \frac{h}{2}$ . Ensuite il nous suffit d'évaluer  $f$  en  $x + h_{div2}$ , puis on incrémente  $x$  de  $h$ , et ainsi de suite. On s'arrête quand  $x$  dépasse  $b$ . Finalement, on ajoute à  $res$  le terme  $h \times \frac{f'(b)-f'(a)}{24}$ , puis on multiplie le tout par  $h$ .

## 2. Code

### 2.1. Observation de l'action des paramètres $p$ et $k$

Dans cette section, nous allons observer l'influence des paramètres  $p$  et  $k$  sur le résultat donné par les 3 méthodes. Dans un premier temps, on fixe  $k = 1$ , afin d'observer graphiquement l'impact de  $p$ .



$p$  correspond au nombre d'intervalle  $[x_i, x_{i+1}]$  qui viennent subdiviser l'intervalle  $[a, b]$  dans les méthodes composites. Plus  $p$  est grand, plus il y a d'intervalle, et plus ceux-ci sont petits. Sur chacun de ces intervalle de taille  $h = \frac{b-a}{p}$  nous appliquerons la méthode de quadrature de notre choix. Ici nous avons appliqué celle des trapèzes. Sur l'image de gauche, on a pris  $p = 3$ , alors qu'à droite  $p = 6$ . Augmenter  $p$  doit permettre dans le cadre des méthodes composites d'augmenter la précision de l'estimation (ou de diminuer l'erreur commise). C'est d'ailleurs ce que nous montre le tableau que nous avons réalisé ci-dessous, pour  $k$  fixé à 1 :

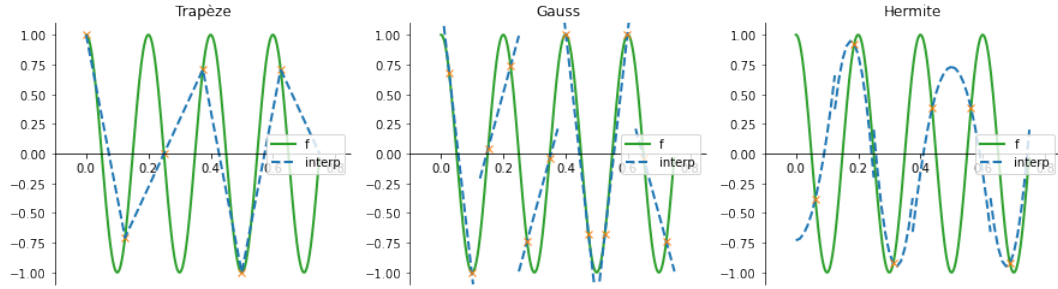
p	err Trapèze	err Gauss	err Hermite
4.0	0.018848152842005722	7.421415127101261e-05	0.00038671401886872236
8.0	0.004628777047911564	4.484795461723312e-06	2.3501186120017392e-05
16.0	0.0011521523399815603	2.779828800480999e-07	1.458728368736173e-06
32.0	0.00028772540807786573	1.7338042251902053e-08	9.101409126355264e-08
64.0	7.191184756114022e-05	1.0830681074214255e-09	5.685941578681408e-09
128.0	1.7976743451719734e-05	6.768297033943327e-11	3.5533323505809733e-10

Ce tableau nous montre bien que pour les 3 méthodes composites utilisées,

## 2. Code

l'augmentation de  $p$  est associé à une diminution de l'erreur.

En ce qui concerne  $k$ , comme on a  $f(x) = \cos(2k\pi x)$  son augmentation va accroître la pulsation, c'est à dire qu'en augmentant  $k$  on aura une augmentation du nombre d'oscillation du cosinus sur un même intervalle. La fréquence des oscillations sera donc plus élevée, et le période plus faible. Intuitivement on pourrait s'attendre à ce qu'une augmentation de la valeur de  $k$  conduise à une moins bonne approximation de l'intégrale de la fonction, puisque le sens de variation de la fonction changera beaucoup, et si  $p$  est relativement faible, alors l'erreur commise par les différentes méthodes risque d'augmenter. Graphiquement, voici ce que l'on obtient pour  $k = 5$  et  $p = 6$  :



Quant aux erreurs de chacune des méthodes, toujours pour  $k = 5$ , voici ce que l'on obtient :

p	err Trapèze	err Gauss	err Hermite
4.0	0.5031440660051768	0.0939549750913532	0.40269623419658396
8.0	0.027214204086011787	0.000752320173761676	0.0037659635526181776
16.0	0.005971692312125656	3.7183342682926834e-05	0.00019293510756802912
32.0	0.001451271613636021	2.203583207467663e-06	1.1535042756534442e-05
64.0	0.0003603415382790326	1.3594474587708127e-07	7.131889852018958e-07
128.0	8.993248785674202e-05	8.46912197316474e-09	4.44547765890424e-08

Grâce à ce tableau on peut se rendre compte à quel point l'augmentation de la valeur de  $k$  à fait augmenter l'erreur d'approximation intégrale. En effet si l'on compare au tableau précédent, lorsque  $k$  était égal à 1 les erreurs commises étaient bien inférieures, notamment lorsque  $p$  est faible. En effet, pour la méthode des Trapèzes avec  $p = 4$ , il y un facteur 10 entre les 2 erreurs, et pour les méthodes de Gauss et d'Hermite un facteur  $10^4$  entre les erreurs commises pour  $k = 1$  et  $k = 5$ .

### 2.2. Analyse de convergence

Dans cette partie, nous allons détailler nos résultats portant sur l'analyse de convergence des différentes méthodes. Nous avons effectuer ce test en prenant

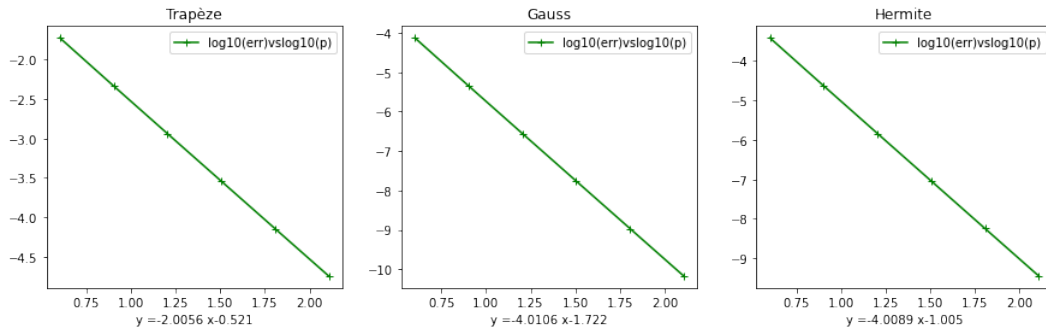
## 2. Code

la fonction donnée initialement  $f(x) = \cos(2k\pi x)$ , avec  $k = 1$ .

Pour compléter le code, nous devons calculer la valeur exacte de l'intégrale de  $f(x)$  sur l'intervalle  $[a, b] = [0, 0.75]$ . Cela est possible dans notre cas car la fonction est simple, donc on peut calculer analytiquement la valeur de l'intégrale. Cependant, notons que tout l'intérêt de l'analyse de convergence est de pouvoir majorer l'erreur commise par les méthodes dans le calcul d'intégrale dont on ne peut pas avoir de valeur exacte. Si l'on revient à notre cas, nous avons :

$$\begin{aligned} ValEx &= \int_a^b f(x)dx \\ &= \int_0^{0.75} \cos(2k\pi x)dx \\ &= \left[ \frac{\sin(2k\pi x)}{2k\pi} \right]_0^{0.75} = \frac{1}{2\pi} \times \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \approx -0,159154943 \end{aligned}$$

À partir de cela il nous est possible de calculer l'erreur commise par chacune des méthodes, et donc de comparer l'évolution de l'erreur suivant la valeur de  $p$  (le nombre d'intervalle) et donc de la taille du pas  $h$ . Plus précisément, nous comparons ici les logarithmes en base 10, et pour ce faire on trace  $\log(err)$  en fonction de  $\log(p)$ . La pente de la droite correspond alors à l'ordre de la méthode. Voici les graphes obtenus.



D'après ces graphiques, la méthode des trapèzes est d'ordre 2, et celle de Gauss et d'Hermite d'ordre 4, car ce sont les valeurs des coefficients directeurs des différentes droites. Pour Hermite, l'ordre trouvé numériquement correspond donc bien à celui obtenu par le calcul dans la partie précédente.

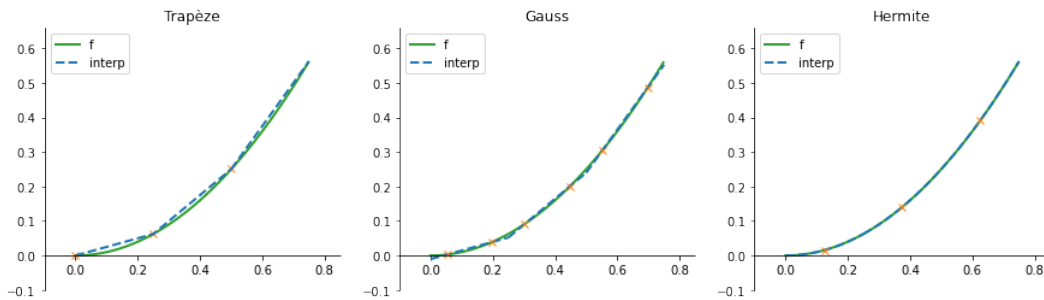
Pour la méthode des Trapèzes et celle de Gauss, on pouvait également s'attendre à obtenir ce résultat. En effet, d'après une proposition vue en cours, si une méthode de quadrature simple est exacte sur  $\mathbb{P}_k$ ,  $k \geq n$ , et n'est pas exacte sur  $\mathbb{P}_{k+1}$ , alors la formule composite sera exactement d'ordre  $k + 1$ . Or dans notre cas la méthode des trapèzes pour  $n = 1$  (2 points) est exacte sur  $\mathbb{P}_1$ , et ne l'est plus sur  $\mathbb{P}_2$ , ainsi la formule composite associée à cette méthode est d'ordre 2. Il en est de même pour la méthode simple de Gauss à 2 points ( $n = 1$ ), qui est exacte sur  $\mathbb{P}_3$  mais pas sur  $\mathbb{P}_4$ , et donc on déduit que cette méthode est d'ordre 4.

## 2. Code

Les résultats obtenus numériquement semblent donc cohérents au regard de la théorie. Finalement, rappelons que dire que la méthode est d'ordre  $n$ , signifie que l'écart entre la valeur exacte de l'intégrale, et la valeur donnée par la méthode de quadrature décroît en  $h^n$ . Cela permet alors, sans même pouvoir calculer analytiquement l'intégrale, d'avoir une idée de l'erreur commise par la méthode.

### 2.3. Test des méthodes sur la fonction $f(x) = x^2$

Nous avons également testé les méthodes sur la fonction  $f(x) = x^2$ , qui est beaucoup plus régulière que la fonction  $\cos(x)$ . Les résultats devraient donc être meilleurs. Voici ce que l'on obtient graphiquement :



Et voici le tableau d'erreur associé :

p	err Trapèze	err Gauss	err Hermite
4.0	0.00439453125	2.7755575615628914e-17	0.0
8.0	0.0010986328125	0.0	0.0
16.0	0.000274658203125	0.0	0.0
32.0	6.866455078125e-05	0.0	0.0
64.0	1.71661376953125e-05	0.0	0.0
128.0	4.291534423828125e-06	0.0	0.0

Ces 2 figures nous montrent bien que pour une fonction très régulière comme  $x^2$ , les approximations données par les méthodes de quadrature sont excellentes. Les erreurs commises par Gauss et Hermite sont d'ailleurs tellement petites qu'elles sont codées par 0 en machine. Notons que sur cet exemple la méthode d'Hermite semble (très) légèrement meilleure que celle de Gauss, alors que pour la fonction  $\cos(x)$  c'était l'inverse.



## 2.4. Conclusion sur les méthodes

Dans cette première partie nous avons pu étudier 3 méthodes composites que sont les méthodes des Trapèzes, de Gauss, et d'Hermite. Nous avons pu montrer puis confirmer expérimentalement, que la méthode composite des trapèzes est d'ordre 2, alors que celle de Gauss et d'Hermite d'ordre 4. Conformément à cela, nous avons pu remarquer à travers différents tests que les erreurs commises par Hermite et Gauss étaient moindre que celles faites par la méthodes des trapèzes. Cependant cette dernière méthode est probablement la moins couteuse numériquement. Entre Hermite et Gauss, les résultats sont très proches, car l'ordre est le même, cependant la méthode la moins coûteuse numériquement est sûrement celle de Gauss, bien que la différence n'est pas si grande que ça avec Hermite.

## Deuxième partie

# Ondes et équation d'Helmotz

## 3. Théorie

Dans cette partie, nous nous intéressons à modéliser la célèbre expérience des fentes de Young. Pour cela, nous allons calculer la solution de l'équation d'Helmotz, qui résulte de l'équation d'onde à laquelle la dépendance au temps a été retiré.

Équation d'Helmotz :

$$-\Delta u - (\omega^2 + i\epsilon)u = 0$$

où  $\Delta$  est l'opérateur Laplacien,  $\omega$  la pulsation et  $\epsilon$  l'atténuation du milieu.

### 3.1. Tronquature de l'intégrale et estimation d'erreur

#### 3.1.1. Pourquoi tronquer l'intégrale ?

Dans cette partie, nous allons justifier pourquoi l'on choisit de tronquer l'expression intégrale de  $u(x, y)$  à une valeur  $\xi = T > \omega$ . Tout d'abord, rappelons que  $u(x, y)$  est défini par :

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi(y-y_0)} e^{ix\sqrt{\omega^2+i\epsilon-\xi^2}} d\xi \quad \forall x > 0, y \in \mathbb{R}$$

Le problème vient du fait que les bornes soient infinies, car nous ne pouvons pas calculer numériquement cette intégrale sur un intervalle de longueur infini. On souhaite donc restreindre l'intervalle d'intégration en un intervalle fini, noté  $[-T, T]$ . La question est de savoir comment choisir  $T$  pour que l'intégrale tronquée se rapproche au mieux de l'intégrale initiale, tout en gardant un intervalle  $[-T, T]$  de taille raisonnable.

Considérons  $x > 0$  fixé et  $\epsilon > 0$ .

Montrons que la fonction  $\xi \rightarrow e^{ix\sqrt{\omega^2+i\epsilon-\xi^2}}$  est exponentiellement décroissante à partir d'un certain  $\xi_N$ .

Pour cela posons  $z = \omega^2 - \xi^2 + i\epsilon$ . On peut alors réécrire ce complexe sous forme polaire pour évaluer plus facilement sa racine. Comme  $\sqrt{z} = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ , on a donc :

$$e^{ix\sqrt{\omega^2+i\epsilon-\xi^2}} = e^{ix\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}} = e^{ix\sqrt{r}(\cos(\frac{\theta}{2}) + i\sin(\frac{\theta}{2}))} = e^{-x\sqrt{r}\sin(\frac{\theta}{2})} \times \underbrace{e^{ix\sqrt{r}\cos(\frac{\theta}{2})}}_{|| \leq 1}$$

Comme le module de la partie imaginaire est borné, on va s'intéresser à l'évolution de la partie réelle, et donc à celle de  $\sqrt{r}\sin(\frac{\theta}{2})$ . On différencie alors 2 cas :

### 3. Théorie

- Si  $\Re(z) = \omega^2 - \xi^2 > 0$  c'est à dire  $\omega > |\xi| \iff \xi \in ]-\omega, +\omega[$  alors
  - $r = \sqrt{(\omega^2 - \xi^2)^2 + \epsilon^2} = \sqrt{\omega^4 + \xi^4 - 2\omega^2\xi^2 + \epsilon^2}$
  - $\theta = \arctan\left(\frac{\epsilon}{\omega^2 - \xi^2}\right)$

Comme  $\xi \rightarrow \frac{\epsilon}{\omega^2 - \xi^2} > 0$ , croît quand  $\xi^2$  croît, avec  $\xi \in ]-\omega, +\omega[$ , et que la fonction  $\arctan$  est positive et croissante sur  $\mathbb{R}^+$ , alors  $\theta \in [\arctan(\frac{\epsilon}{\omega^2}), \frac{\pi}{2}[$ . Ainsi  $\frac{\theta}{2} \in [\frac{1}{2}\arctan(\frac{\epsilon}{\omega^2}), \frac{\pi}{4}[$  et donc :

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \in \left] \sin\left(\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\epsilon}{\omega^2}\right)\right), \frac{\sqrt{2}}{2} \right[$$

car la fonction  $\sin$  est croissante sur l'intervalle  $[0, \frac{\pi}{2}]$ . De plus, on peut noter que le minimum est atteint lorsque  $\xi = 0$ , et les 2 maximums sur cet intervalle sont atteint lorsque  $\xi \rightarrow \omega$  et  $\xi \rightarrow -\omega$ .

Par ailleurs remarquons que  $|e^{-x\sqrt{r}\sin(\frac{\theta}{2}) + ix\sqrt{r}\cos(\frac{\theta}{2})}| \leq |e^{-x\sqrt{r}\sin(\frac{\theta}{2})} \times 1| \leq e^{-x \times \epsilon \times M}$  avec  $M = \sin(\frac{1}{2}\arctan(\frac{\epsilon}{\omega^2}))$ .

Cela nous amène donc à la conclusion que, lorsque  $\omega^2 - \xi^2 > 0$ , la fonction  $\xi \rightarrow e^{ix\sqrt{\omega^2 + i\epsilon - \xi^2}}$  reste borné sur l'intervalle  $] -\omega, \omega[$ . Cependant cela ne nous permet pas encore de justifier la troncature pour  $\xi > \omega$ . Pour cela intéressons nous au cas où  $\xi \in ]-\infty, -\omega[ \cup ]\omega, +\infty[$ . Ce que l'on voudrait, c'est pouvoir montrer que dans ce cas l'intégrande décroît exponentiellement, et donc que cette partie compte très peu dans le calcul intégrale.

- Si  $\Re(z) = \omega^2 - \xi^2 < 0$  c'est à dire  $|\omega| < \xi \iff \xi \in ]-\infty, -\omega[ \cup ]\omega, +\infty[$  alors
  - $r = \sqrt{(\omega^2 - \xi^2)^2 + \epsilon^2} = \sqrt{\omega^4 + \xi^4 - 2\omega^2\xi^2 + \epsilon^2}$
  - $\theta = \arctan\left(\frac{\epsilon}{\omega^2 - \xi^2}\right) + \pi$

Comme  $\frac{\epsilon}{\omega^2 - \xi^2} < 0$ , croît lorsque  $\xi^2$  croît avec  $\xi \in ]-\infty, -\omega[ \cup ]\omega, +\infty[$ , et que la fonction  $\arctan$  est croissante et négative sur  $\mathbb{R}^-$ , alors :

$$\arctan\left(\underbrace{\frac{\epsilon}{\omega^2 - \xi^2}}_{<0}\right) \in ]-\frac{\pi}{2}, 0[ \implies \theta \in ]\frac{\pi}{2}, \pi[$$

Ainsi  $\frac{\theta}{2} \in ]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$  donc  $\sin(\frac{\theta}{2}) \in ]\frac{\sqrt{2}}{2}, 1[$ . De plus lorsque  $\xi^2 \rightarrow +\infty$  alors  $\frac{\epsilon}{\omega^2 - \xi^2} \rightarrow 0^- \implies \arctan(\frac{\epsilon}{\omega^2 - \xi^2}) \rightarrow 0$ , et donc  $\theta \rightarrow \pi$ . Cela implique que  $\sin(\frac{\theta}{2}) \rightarrow 1$ , et  $\cos(\frac{\theta}{2}) \rightarrow 0$ . Remarquons que dans ce cas, quand  $\xi \rightarrow +\infty$ , alors  $r \rightarrow +\infty$ . Cela nous permet alors de déduire que :

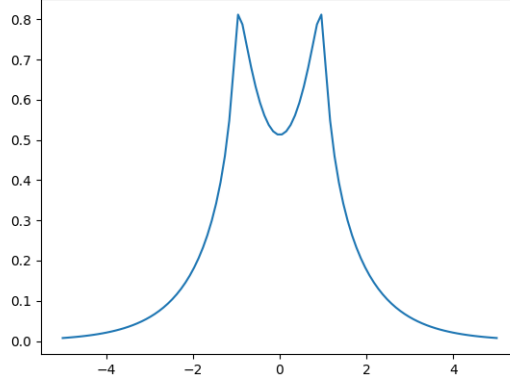
$$|e^{-x\sqrt{r}\sin(\frac{\theta}{2})} \times e^{ix\sqrt{r}\cos(\frac{\theta}{2})}| \leq e^{-x\sqrt{r}\frac{\sqrt{2}}{2}} \xrightarrow{\xi \rightarrow +\infty} 0$$

Donc l'intégrande est maximale quand  $\xi \rightarrow \omega^+$  ou  $\xi \rightarrow -\omega^-$  puis elle décroît exponentiellement et tend vers 0 lorsque  $\xi^2 \rightarrow +\infty$ .

Finalement, cela nous amène à la conclusion que la fonction  $\xi \rightarrow e^{ix\sqrt{\omega^2 + i\epsilon - \xi^2}}$  décroît exponentiellement lorsque  $\xi \in ]-\infty, -\omega[ \cup ]\omega, +\infty[$ , et donc par conséquent

### 3. Théorie

cela justifie le fait de tronquer l'intégrale pour  $\xi > \omega$ , car la partie de l'intégrale où  $|\xi| > |\omega|$  deviendra vite négligeable.



Partie réelle de la fonction  $\xi \rightarrow e^{ix\sqrt{\omega^2 + i\epsilon - \xi^2}}$  pour  $\omega = 1$

#### 3.1.2. Majoration de l'erreur

Essayons maintenant de majorer l'erreur provoquer par cette tronquature.

Notons  $F(x, \xi) = e^{ix\sqrt{\omega^2 + i\epsilon - \xi^2}}$   $I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x, \xi) e^{i\xi(y-y_0)} d\xi$  et  $I_T = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{+T} F(x, \xi) e^{i\xi(y-y_0)} d\xi$  alors

$$|I - I_T| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\infty}^{-T} F(x, \xi) e^{i\xi(y-y_0)} d\xi + \int_T^{+\infty} F(x, \xi) e^{i\xi(y-y_0)} d\xi \right|$$

Dans la première, intégrale, on pose le changement de variable  $\gamma = -\xi$ , ainsi  $d\gamma = -d\xi$

$$\begin{aligned} |I - I_T| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_T^{+\infty} F(x, \gamma) e^{-i\gamma(y-y_0)} d\gamma + \int_T^{+\infty} F(x, \xi) e^{i\xi(y-y_0)} d\xi \right| \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_T^{+\infty} F(x, \xi) \left( e^{-i\xi(y-y_0)} + e^{i\xi(y-y_0)} \right) d\xi \right| \\ &= \frac{1}{\pi} \left| \int_T^{+\infty} F(x, \xi) \cos(\xi(y-y_0)) d\xi \right| \\ &\leq \frac{1}{\pi} \left| \int_T^{+\infty} F(x, \xi) d\xi \right| \end{aligned}$$

### 3. Théorie

Or :

$$\begin{aligned} F(x, \xi) &= e^{ix\sqrt{\omega^2 + i\epsilon - \xi^2}} \\ &= e^{ix\sqrt{-\xi^2 \left(1 - \left(\frac{\omega}{\xi}\right)^2 - i\frac{\epsilon}{\xi^2}\right)}} \\ &= e^{-\xi x \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\xi}\right)^2 - i\frac{\epsilon}{\xi^2}}} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} |I - I_T| &\leq \frac{1}{\pi} \int_T^{+\infty} e^{-\xi x \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\xi}\right)^2 - i\frac{\epsilon}{\xi^2}}} d\xi \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_T^{+\infty} e^{-\xi x \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{T}\right)^2 - i\frac{\epsilon}{T^2}}} d\xi \\ &= \frac{1}{\pi x \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{T}\right)^2 - i\frac{\epsilon}{T^2}}} \left[ e^{-\xi x \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{T}\right)^2 - i\frac{\epsilon}{T^2}}} \right]_T^{+\infty} \\ &= \frac{e^{-Tx \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{T}\right)^2 - i\frac{\epsilon}{T^2}}}}{\pi x \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{T}\right)^2 - i\frac{\epsilon}{T^2}}} \end{aligned}$$

On pose afin d'alléger l'écriture  $M = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{T}\right)^2 - i\frac{\epsilon}{T^2}}$ . Cela donne :

$$|I - I_T| \leq \frac{e^{-TxM}}{\pi x M}$$

Cette majoration d'erreur diminue lorsque  $T \rightarrow +\infty$ , ce qui est cohérent.

### 3.2. Démonstration que $u$ est une fonction $C^\infty$

Montrons que la fonction  $u(x, y)$  est  $C^\infty$  par rapport à  $x$ , et par rapport à  $y$ . Soit  $f : (x, y, \xi) \rightarrow \frac{1}{2\pi} e^{i\xi(y-y_0)} e^{ix\sqrt{\omega^2 + i\epsilon - \xi^2}}$  l'intégrande telle que  $u(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y, \xi) d\xi$ . Pour montrer cela, il nous suffit de montrer que  $u(x, y)$  est dérivable une infinité de fois par rapport à chacune de ses variables, puisque la dérivabilité d'une fonction implique sa continuité. On cherche donc à montrer que les dérivées partielles à l'ordre  $k$  de  $u(x, y)$  existent  $\forall k \in \mathbb{N}$ . Rappelons tout d'abord que l'on peut écrire que, pour  $y$  fixé,  $\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f(x, \xi)}{\partial x} d\xi$  si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

- Pour presque tout  $\xi \in \mathbb{R}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, \xi)$  existe  $\forall x > 0$  (dans notre cas  $x > 0$ )
- $\forall x > 0$  il existe une application  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  intégrable, et un voisinage  $V$  de  $x$  tel que :

$$\forall z \in V, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(z, \xi) \right| \leq |g(\xi)|$$

### 3. Théorie

Alors si ces 2 conditions sont vérifiées,  $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$  existe et, pour  $y$  fixé,  $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f(x,\xi)}{\partial x} d\xi$ . On procède de la même manière en fixant  $x$  et en considérant les dérivées partielles de  $u(x,y)$  par rapport à  $y$ . Appliquons ce théorème afin d'obtenir les dérivées partielles de  $u(x,y)$ . On a en reprenant les même notations en coordonnées polaires que précédemment :

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x, \xi) = \frac{e^{i\xi(y-y_0)}}{2\pi} \times i\sqrt{\omega^2 + i\epsilon - \xi^2} \times e^{ix\sqrt{\omega^2 + i\epsilon - \xi^2}}$
- Cette dérivée existe pour tout  $x > 0$ .
- $\forall x > 0$ , on considère  $V$  un voisinage de  $x$  tel que  $V = B(x, a)$ , et soit  $z \in V$ , avec  $a < x$ , donc  $z > 0$ . On a :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(z, \xi) \right| &\leq |i\sqrt{\omega^2 + i\epsilon - \xi^2} \times e^{iz\sqrt{\omega^2 + i\epsilon - \xi^2}}| \\ &\leq |i\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}} \times e^{iz\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}}| \\ &\leq |i\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}} \times e^{-z\sqrt{r}\sin(\frac{\theta}{2})} \times e^{iz\sqrt{r}\cos(\frac{\theta}{2})}| \\ &\leq |\sqrt{r} \times e^{-z\sqrt{r}\sin(\frac{\theta}{2})}| \\ &\leq |\sqrt{r} \times e^{-(x-a)\sqrt{r}\sin(\frac{\theta}{2})}| \end{aligned}$$

Car  $z \in B(x, a)$ , donc  $x - a \leq z \implies e^{-z\sqrt{r}\sin(\frac{\theta}{2})} \leq e^{-(x-a)\sqrt{r}\sin(\frac{\theta}{2})}$ . Précisons que nous pouvons écrire la dernière inégalité car nous avons montré dans la partie précédente que  $\forall \xi \in \mathbb{R}$ ,  $\sin(\frac{\theta}{2}) > 0$ . Donc comme on considère  $z$  dans le voisinage d'un  $x$  fixé, on peut poser  $g(\xi) = \sqrt{r} \times e^{-(x-a)\sqrt{r}\sin(\frac{\theta}{2})}$ , avec :

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(\omega^2 - \xi^2)^2 + \epsilon^2} \\ \theta &= \begin{cases} \arctan\left(\frac{\epsilon}{\omega^2 - \xi^2}\right) & \text{si } \xi \in [-\omega, \omega] \\ \arctan\left(\frac{\epsilon}{\omega^2 - \xi^2}\right) + \pi & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi on a bien :

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(z, \xi) \right| \leq g(\xi)$$

Avec  $g(\xi)$  qui est une exponentielle décroissante car  $-(x-a)\sqrt{r}\sin(\frac{\theta}{2}) > 0$   $\forall \xi \in \mathbb{R}$ , donc une fonction intégrable.

Finalement, cela nous permet d'écrire que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2\pi} e^{i\xi(y-y_0)} e^{ix\sqrt{\omega^2 + i\epsilon - \xi^2}} \right) d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\xi(y-y_0)}}{2\pi} \times i\sqrt{\omega^2 + i\epsilon - \xi^2} \times e^{ix\sqrt{\omega^2 + i\epsilon - \xi^2}} d\xi \end{aligned}$$

Cette dérivée existe  $\forall x > 0$ , et on peut dériver autant de fois qu'on le

### 3. Théorie

souhaite car on pourra à chaque fois trouver une fonction  $g(\xi)$  en majorant exactement comme fait précédemment. De plus en utilisant les propriétés de la dérivée de l'exponentielle, on sait qu'à chaque fois cela fera descendre une racine et on aura donc :

$$\frac{\partial^k u}{\partial x^k}(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\xi(y-y_0)}}{2\pi} \times \left( i\sqrt{\omega^2 + i\epsilon - \xi^2} \right)^k \times e^{ix\sqrt{\omega^2 + i\epsilon - \xi^2}} d\xi$$

On peut donc dériver une infinité de fois  $u(x, y)$  par rapport à  $x$ , ainsi on en déduit que  $u(x, y)$  est une fonction de classe  $C^\infty$  par rapport à  $x$ .

On fait de même par rapport à  $y$ . Cela nous donne cette fois :

- $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{i\xi}{2\pi} e^{i\xi(y-y_0)} e^{ix\sqrt{\omega^2 + i\epsilon - \xi^2}}$
- Cette dérivée existe pour tout  $y \in \mathbb{R}$ .
- $\forall y \in \mathbb{R}$ , on considère  $V$  un voisinage de  $y$  tel que  $\forall z \in V$  :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, z) \right| &\leq \left| i\xi e^{i\xi\sqrt{\omega^2 + i\epsilon - \xi^2}} \right| \\ &\leq \left| e^{-x\sqrt{r}\sin(\frac{\theta}{2})} \times e^{ix\sqrt{r}\cos(\frac{\theta}{2})} \right| \\ &\leq \left| e^{-x\sqrt{r}\sin(\frac{\theta}{2})} \right| = g(\xi) \end{aligned}$$

Pour les mêmes raison que précédemment, on déduit que  $g(\xi)$  est intégrable. Finalement, cela nous permet d'écrire que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{2\pi} e^{i\xi(y-y_0)} e^{ix\sqrt{\omega^2 + i\epsilon - \xi^2}} \right) d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i\xi}{2\pi} e^{i\xi(y-y_0)} e^{ix\sqrt{\omega^2 + i\epsilon - \xi^2}} d\xi \end{aligned}$$

En procédant de la même manière on pourrait majorer cette nouvelle intégrande, et donc dériver une deuxième fois, et ainsi de suite. Donc en utilisant les propriétés de la dérivée de l'exponentielle, on réitère le principe plusieurs fois et on se rend alors compte que  $u$  est  $C^\infty$ , car on peut dériver  $u(x, y)$  une infinité de fois. De plus la dérivée à l'ordre  $k$  est donnée par :

$$\frac{\partial^k u}{\partial y^k}(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(i\xi)^k}{2\pi} e^{i\xi(y-y_0)} e^{ix\sqrt{\omega^2 + i\epsilon - \xi^2}} d\xi$$

Cela nous permet donc de conclure que  $u(x, y)$  est bien une fonction de classe  $C^\infty$  par rapport à chacune de ses variables.



### 3. Théorie

#### 3.3. Démonstration de la formule intégrale (Bonus)

##### 3.3.1. Démonstration pour une source ponctuelle

Dans un premier temps, nous allons considérer une source ponctuelle dont émane une onde, représenté par une Dirac. Nous noterons cette condition au bord par  $u(0, y - y_0) = \delta(x, y - y_0) = 1$  si  $\begin{cases} x = 0 \\ y = y_0 \end{cases}$ .

Cette source ponctuelle est alors située en  $x = 0$  et  $y = y_0$ . Pour résoudre l'équation, nous passons par la transformée de Fourier par rapport à la variable  $y$ .

$$\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Grâce aux propriétés de la dérivée pour la transformé de Fourier, on obtient :

$$\Delta \hat{u}(x, \xi) = \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} - \xi^2 \hat{u}$$

Ainsi l'équation de Helmotz devient :

$$\begin{aligned} \frac{-\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} + \xi^2 \hat{u} - (\omega^2 + i\epsilon) \hat{u} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} + \hat{u}(\omega^2 + i\epsilon - \xi^2) &= 0 \end{aligned}$$

La solution est donc donnée par :

$$\hat{u}(x, \xi) = A(\xi) e^{ix\sqrt{\omega^2 + i\epsilon - \xi^2}} + B(\xi) e^{-ix\sqrt{\omega^2 + i\epsilon - \xi^2}}$$

Nous devons déterminer  $A$  et  $B$  grâce aux conditions au bord. La condition initiale est donnée par un pic en  $x = 0$  et  $y = y_0$ . On souhaite de plus que l'équation reste bornée lorsque  $x \rightarrow +\infty$ . Or, on a vu que l'on pouvait écrire  $\sqrt{\omega^2 + i\epsilon - \xi^2} = \sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}}$

$$\begin{aligned} \hat{u}(x, \xi) &= A(\xi) e^{ix\sqrt{r}(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2})} + B(\xi) e^{-ix\sqrt{r}(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2})} \\ &= A(\xi) e^{-x\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2} + ix\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}} + B(\xi) e^{x\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2} - ix\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

Dans le cas où  $\xi \leq \omega$ , on a vu que  $\sin\frac{\theta}{2} \geq 0$ . Pour  $\xi$  fixé, on remarque alors que lorsque  $x \rightarrow +\infty$ , on a  $e^{x\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2} - ix\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}} \rightarrow +\infty$ . La solution devant rester bornée impose que  $B$  soit nulle. La condition initiale permet alors de trouver  $A$ .

Il faut tout d'abord faire la transformé de Fourier de cette condition. Comme  $\int_{\mathbb{R}} \delta(x) f(x) dx = f(0)$  alors on a :

$$\hat{u}(0, \xi) = \widehat{\delta(x, y - y_0)} = \int_{\mathbb{R}} \delta(x, y - y_0) e^{-i\xi y} dy = e^{-i\xi y_0}$$

### 3. Théorie

Ainsi, on obtient :

$$\hat{u}(0, \xi) = A = e^{-i\xi y_0}$$

Finalement

$$\hat{u}(x, \xi) = e^{-i\xi y_0} e^{ix\sqrt{\omega^2 + i\epsilon - \xi^2}}$$

Pour retourner dans le domaine spatiale, on applique la transformée inverse.

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(x, \xi) e^{i\xi y} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi y_0} e^{ix\sqrt{\omega^2 + i\epsilon - \xi^2}} e^{i\xi y} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi(y-y_0)} e^{ix\sqrt{\omega^2 + i\epsilon - \xi^2}} d\xi \end{aligned}$$

Ce qui prouve la formule intégrale.

#### 3.3.2. Généralisation

On peut généraliser cette formule en prenant différentes conditions au bord. En prenant  $u = f$  sur  $\{0\} \times \mathbb{R}$ , on note  $\hat{F}(x, \xi)$  sa transformé de Fourier. On aura alors :

$$\hat{u}(0, \xi) = A = \hat{F}(x, \xi)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(x, \xi) e^{i\xi y} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{F}(x, \xi) e^{ix\sqrt{\omega^2 + i\epsilon - \xi^2}} e^{i\xi y} d\xi \end{aligned}$$

## 4. Code

### 4.1. Complétion du code

Dans le code nous devons donner à myf la valeur de l'intégrande :

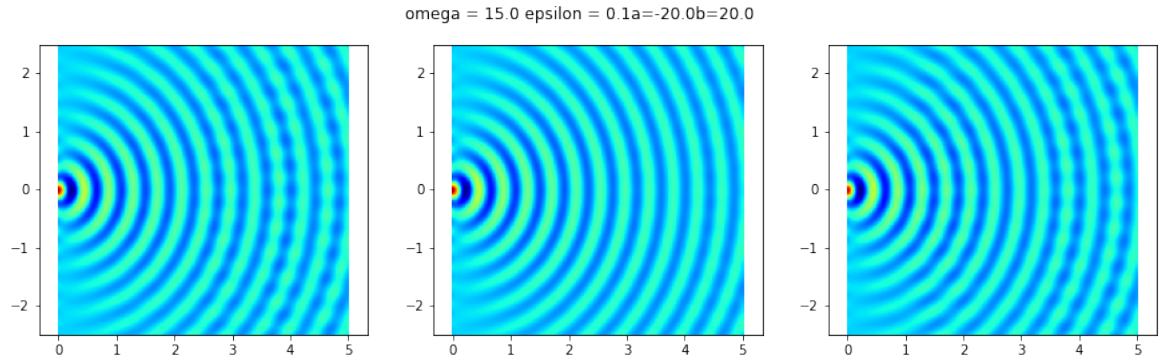
$$f(x, y, \xi) = \frac{1}{2\pi} e^{i\xi(y-y_0)} e^{ix\sqrt{\omega^2+i\epsilon-\xi^2}}$$

avec un signe + pour la première exponentielle d'après la démonstration précédente, et non un -. Et pour mettre en place la méthode d'Hermite, nous devons dériver l'intégrande pour compléter mydf, on a :

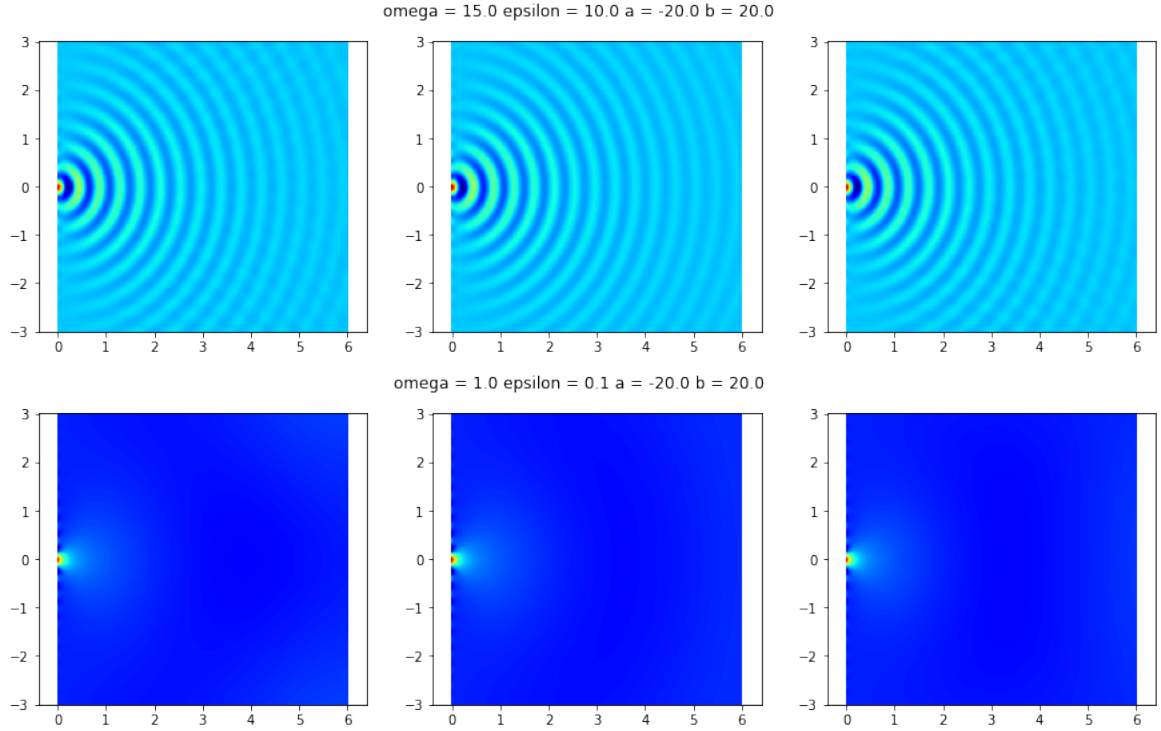
$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \left( \frac{1}{2\pi} e^{i\xi(y-y_0)} e^{ix\sqrt{\omega^2+i\epsilon-\xi^2}} \right) &= \frac{1}{2\pi} \frac{d}{d\xi} \left( e^{i(\xi(y-y_0)+x\sqrt{\omega^2+i\epsilon-\xi^2})} \right) \\ &= \frac{i}{2\pi} \left( y - y_0 - \frac{x\xi}{\sqrt{\omega^2+i\epsilon-\xi^2}} \right) e^{i(\xi(y-y_0)+x\sqrt{\omega^2+i\epsilon-\xi^2})} \end{aligned}$$

### 4.2. Test du code

Nous pouvons modéliser la propagation de l'onde à partir d'une source ponctuelle suivant les 3 méthodes vu dans la partie 1 (Dans l'ordre Trapèzes, Gauss, Hermite).

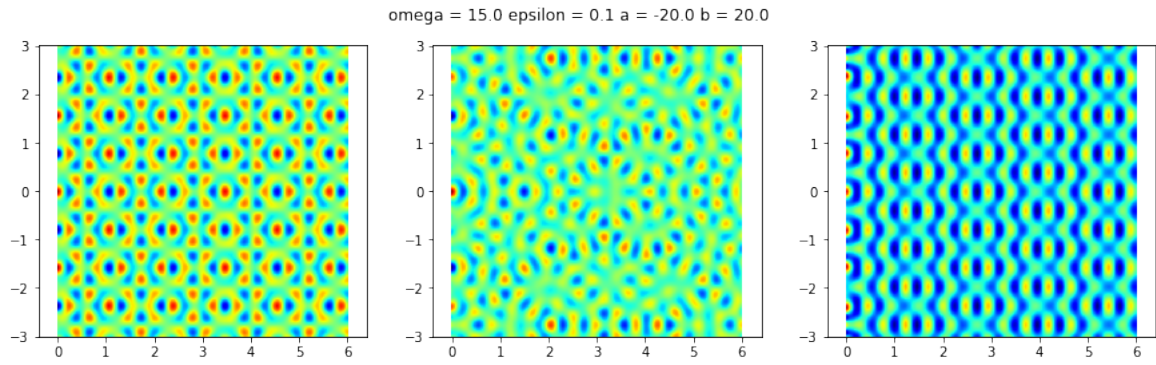


#### 4. Code



On peut voir ici que la pulsation de l'onde a un impact sur la forme de l'onde. En effet, la pulsation d'une onde est liée à l'énergie qu'elle propage. Ces phénomènes s'expriment par des ondelettes plus ou moins hautes suivant l'énergie transportée, les résultats observés sont cohérents. Quant à l'impact de l'atténuation du milieu on se rend bien compte que plus les vagues progressent plus elle diminue lorsque l'atténuation est élevée. C'est ce qu'on observe entre les 2 premiers graphes. En ce qui concerne l'analyse numérique, la méthode qui est la plus fidèle à la réalité est la méthode de Gauss. On peut voir pour les méthodes des Trapèzes et d'Hermite, des régions avec des vaguelettes, surtout vers la fin qui correspondent à l'accumulation des erreurs d'intégration. Par la suite, dans la prochaine partie pour limiter les calculs extrêmement gourmands, nous limiterons cette étude en utilisant seulement la méthode de Gauss. Par ailleurs on a ici réalisé les simulations pour  $p = 50$ . Mais prenons  $p = 5$  et voyons ce que cela produit :

## 4. Code



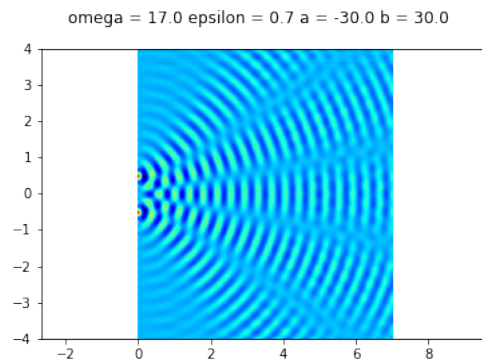
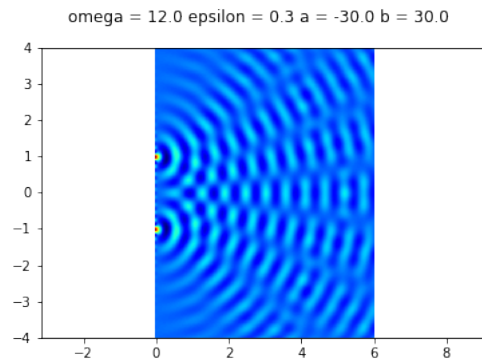
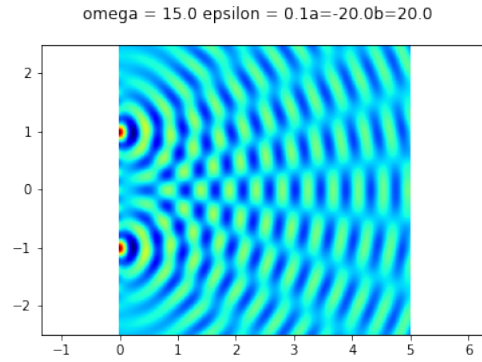
On se rend compte que lorsque  $p$  est trop faible, les figures ne sont pas constituées entièrement, et on n'observe pas d'ondes complètes, seulement des motifs. Il faut donc prendre  $p$  suffisamment grand pour avoir une bonne représentation des ondes.

### 4.3. Cas plus complexes

#### 4.3.1. Cas de deux sources ponctuelles

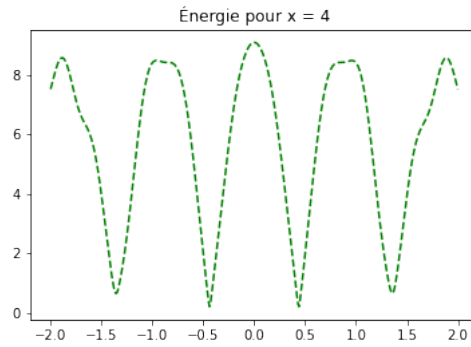
Dans le cas de deux sources ponctuelles, la solution s'exprime simplement par la somme des solutions de deux sources ponctuelles calculées séparément.

#### 4. Code



Pour deux sources relativement proches, ici positionnées en  $y_0 = 1$  et  $y_1 = 0$ , on observe déjà un phénomène d'interférence. En effet, on peut observer des régions où les énergies des deux ondes se compensent parfaitement pour obtenir une région lisse et des zones où les énergies s'additionnent pour atteindre un maximum ou un minimum.

#### 4. Code



Projection de l'énergie pour un  $x$  fixé

##### 4.3.2. Cas d'une fente (Bonus)

Pour modéliser une fente, on peut utiliser la fonction rectangulaire comme condition au bord. Cela nous donne :

$$u = f(x, y) = \text{rect}_T(x, y - y_0) \text{ sur } \{0\} \times \mathbb{R}$$

$$\text{avec } \text{rect}_T(x, y - y_0) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \text{ et } y \in [-T + y_0, T + y_0] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Sa transformé de Fourier est donnée par :

$$\hat{F}(x, \xi) = \int_{\mathbb{R}} \text{rect}(x, y - y_0) e^{-i\xi y} dy$$

Faisons le changement de variable  $v = y - y_0$  :

#### 4. Code

$$\begin{aligned}
\hat{F}(x, \xi) &= \int_{\mathbb{R}} rect(x, v) e^{-i\xi(v+y_0)} dv \\
&= e^{-i\xi y_0} \int_{-T}^T e^{-i\xi v} dv \\
&= \frac{e^{-i\xi y_0}}{i\xi} \left[ e^{-i\xi v} \right]_{-T}^T \\
&= e^{-i\xi y_0} \frac{e^{i\xi T} - e^{-i\xi T}}{i\xi} \\
&= \frac{2e^{-i\xi y_0}}{\xi} \frac{(e^{i\xi T} - e^{-i\xi T})}{2i} \\
&= \frac{2e^{-i\xi y_0}}{\xi} \sin(\xi T) \\
&= 2e^{-i\xi y_0} T \text{sinc}(\xi T)
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} T \text{sinc}(\xi T) e^{ix\sqrt{\omega^2+i\epsilon-\xi^2}} e^{i\xi(y-y_0)} d\xi$$

Nous dérivons ensuite l'intégrande pour utiliser la méthode d'Hermite :

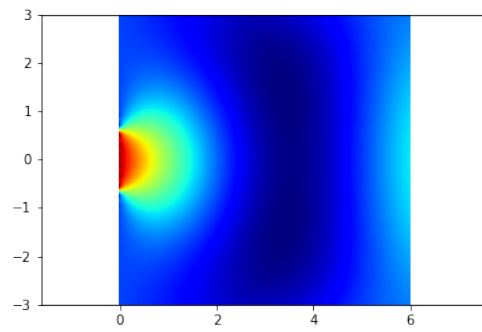
$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\xi} \left( \frac{1}{\pi} T \text{sinc}(\xi T) e^{ix\sqrt{\omega^2+i\epsilon-\xi^2}} e^{i\xi(y-y_0)} \right) &= \frac{1}{\pi} \frac{d}{d\xi} \left( \frac{\sin(\xi T)}{\xi} e^{i(x\sqrt{\omega^2+i\epsilon-\xi^2}+\xi(y-y_0))} \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \frac{T \cos(\xi T) \xi - \sin(\xi T)}{\xi^2} e^{i(x\sqrt{\omega^2+i\epsilon-\xi^2}+\xi(y-y_0))} \\
&\quad + \frac{\sin(\xi T)}{\xi} i(y - y_0 - \frac{x\xi}{\sqrt{\omega^2+i\epsilon-\xi^2}}) e^{i(\xi(y-y_0)+x\sqrt{\omega^2+i\epsilon-\xi^2})} \\
&= \frac{1}{\pi} e^{i(\xi(y-y_0)+x\sqrt{\omega^2+i\epsilon-\xi^2})} \\
&\quad \times \left( \frac{T \cos(\xi T) \xi - \sin(\xi T)}{\xi^2} + \frac{\sin(\xi T)}{\xi} i(y - y_0 - \frac{x\xi}{\sqrt{\omega^2+i\epsilon-\xi^2}}) \right)
\end{aligned}$$



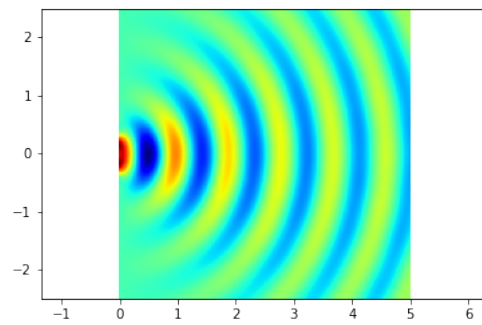
#### 4. Code

Voici différentes simulations faites dans le cas d'une fente.

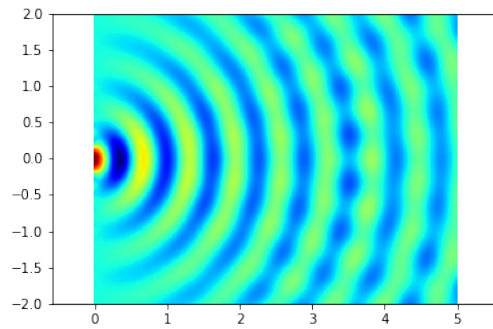
$\omega = 1.0$   $\epsilon = 0.0$   $a = -30.0$   $b = 30.0$  ouverture 0.2



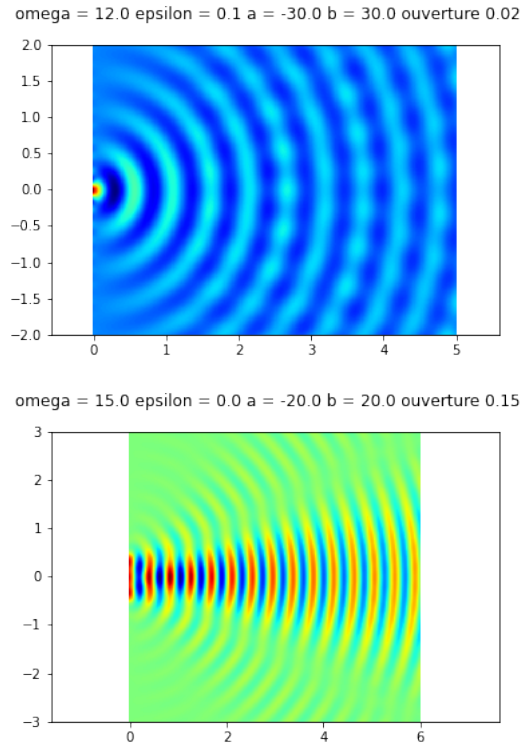
$\omega = 7.0$   $\epsilon = 0.1$   $a = -20.0$   $b = 20.0$



$\omega = 10.0$   $\epsilon = 0.2$   $a = -30.0$   $b = 30.0$  ouverture 0.05



#### 4. Code



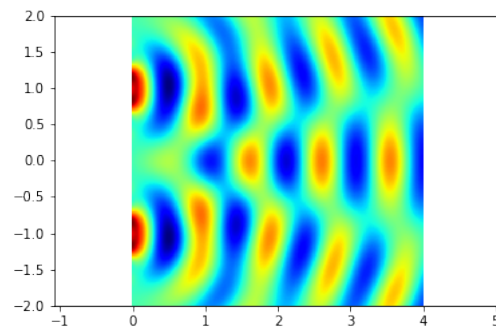
Lorsque l'ouverture de la fente augmente, l'énergie est focalisée dans le même couloir que la fente. Elle ne se propage pas circulairement autour comme dans le cas des sources ponctuelles. Il y a donc plus d'énergie au centre où est positionnée la fente que sur les cotés.

##### 4.3.3. Cas de deux fentes

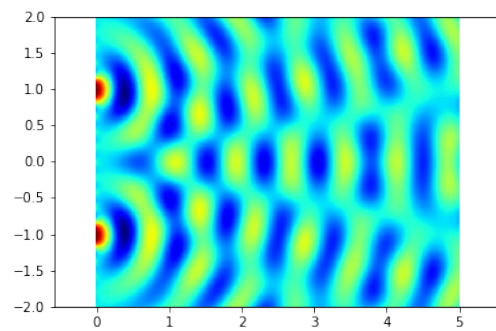
Nous avons aussi fait différentes simulations dans le cas de 2 fentes, situation qui se rapproche de la célèbre expérience des fentes de Young.

#### 4. Code

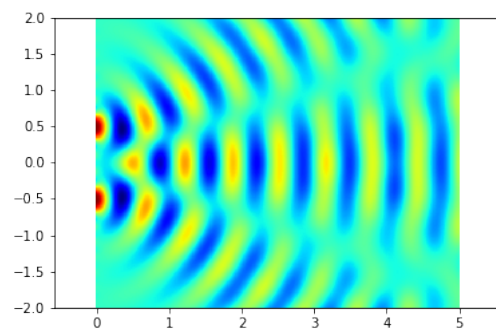
$\omega = 7.0$   $\epsilon = 0.0$   $a = -20.0$   $b = 20.0$   $T_1 = 0.1$   $T_2 = 0.1$



$\omega = 9.0$   $\epsilon = 0.1$   $a = -30.0$   $b = 30.0$   $T_1 = 0.05$   $T_2 = 0.05$

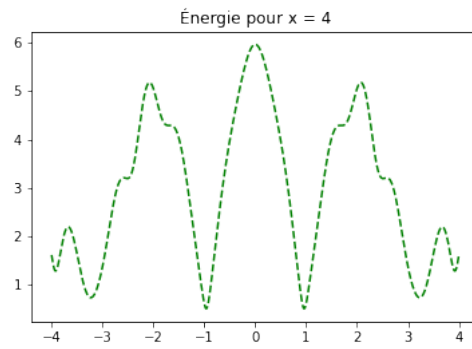


$\omega = 10.0$   $\epsilon = 0.2$   $a = -30.0$   $b = 30.0$   $T_1 = 0.05$   $T_2 = 0.05$



Voici différents cas pour les 2 fentes en faisant varier la valeur de la pulsation. On observe bien moins d'interférences que sur les deux sources ponctuelles, elles sont en revanche beaucoup plus marquées.

#### 4. Code



Projection de l'énergie pour un  $x$  fixé avec les conditions du dernier graphe

Même si cette simulation n'est pas réaliste face à l'expérience des fentes de Young, elle reste plus fidèle que celle des 2 sources ponctuelles puisque l'on peut observer ici une atténuation de l'énergie sur les bords.

# Conclusion

Pour conclure ce TP a été très instructif, car il nous a permis de comparer par la pratique les différentes méthodes de quadrature que nous avons pu voir en cours. Ces algorithmes sont relativement coûteux en calculs et doivent être optimisés au maximum pour effectuer des intégrations de fonctions complexe (sans faire de jeux de mots). Tout leur intérêt réside justement dans le fait qu'ils nous permettent de calculer des solutions approchées d'intégrales qu'on ne sait résoudre analytiquement, et la connaissance de l'ordre de la méthode, nous permet d'avoir une idée de l'erreur commise par cette approximation, alors même que nous ne connaissons pas la solution exacte.

Par ailleurs, nous avons pu voir dans la seconde partie de ce TP l'importance de la transformé de Fourier, notamment pour la résolution d'équations différentielles. C'est ici que nous avons pu voir les limites de certaines méthodes d'intégration comme la méthode des Trapèzes et la méthode d'Hermite.