Signal Déterministe à Temps Continu périodique ou à duréee limitée
– Représentation de Fourier (*SF*)

$x(t)$ est un signal périodique de période T ou à durée limitée sur l'intervalle T.
Il admet un développement en *Série de Fourier*:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{2\pi j \frac{k}{T} t}$$

Les coefficients de *Fourier* sont donnés par:

$$X_k = \frac{1}{T} \int_{(T)} x(t) e^{-2\pi j \frac{k}{T} t} dt$$

- composante *continue*: X_0

$X_0 = \frac{1}{T} \int_{(T)} x(t) dt$ L'intégrale représente l'aire sous la courbe sur T.

- composantes *harmoniques*: $X_{\pm 1} e^{2\pi j \frac{\pm t}{T}}$
- composantes *fondamentales*: $X_k e^{2\pi j \frac{k}{T} t}$, $k \neq 0, \pm 1$

Propriétés

– translation temporelle

$x(t) \quad \to \quad X_k$

$y(t) = x(t+\alpha) \quad \to \quad Y_k = \frac{1}{T} \int_{(T)} x(t+\alpha) e^{-2\pi j \frac{k}{T} t} dt$

On pose $\theta = t + \alpha \quad \to \quad Y_k = \frac{1}{T} \int_{(T)} x(\theta) e^{-2\pi j \frac{k}{T}(\theta - \alpha)} d\theta$

$$x(t+\alpha) \quad \to \quad e^{2\pi j \frac{k}{T} \alpha} X_k$$

– translation en valeur $\quad y(t) = x(t) + C \to Y_k = X_k + \delta_{k0} C$

$x(t) + C \quad \to \quad \frac{1}{T} \int_{(T)} [x(t) + C] e^{-2\pi j \frac{k}{T} t} dt$

$$= \frac{1}{T} \int_{(T)} x(t) e^{-2\pi j \frac{k}{T} t} dt + C\delta_k$$

$$x(t) + C \to X_k + C\delta_k$$

Seul le coefficient correspondant à la fréquence 0 est affecté par cette translation.

Exemple:

$$x(t) = \begin{cases} -1 & -\pi < t < 0 \\ 1 & 0 \leq t \leq \pi \end{cases}$$

$X_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) e^{-2\pi j \frac{k}{2\pi} t} dt = X_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) e^{-jkt} dt$

$X_k = \frac{-1}{2\pi} \int_{-\pi}^{0} e^{-jkt} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} e^{-jkt} dt = \frac{-1}{2\pi} [\frac{e^{-jkt}}{-jk}]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{2\pi} [\frac{e^{-jkt}}{-jk}]_{0}^{\pi}$

$X_k = \frac{1 - e^{jk\pi}}{2\pi jk} - \frac{e^{-jk\pi} - 1}{2\pi jk} = 2 \frac{1 - e^{jk\pi}}{2\pi jk} = \frac{1 - (-1)^k}{\pi jk}$

Nous avons en effet $e^{-\pi jk} = e^{\pi jk} = (-1)^k$.

$$X_k = \frac{1-(-1)^k}{\pi jk} = \begin{cases} 0 & k = 2p \\ \frac{2}{\pi jk} & k = 2p+1 \end{cases}$$

La composante continue X_0 est nulle. Il suffit de tracer la courbe de la fonction impaire sur $[-\pi, \pi]$.

Nous avons alors:

$x(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} X_{2p+1} e^{j(2p+1)t}$

$x(t) = ...X_{-5}e^{-5jt} + X_{-3}e^{-3jt} + X_{-1}e^{-jt} + X_1 e^{jt} + X_3 e^{3jt} + X_5 e^{5jt} + ...$

Nous avons $X_{-k} = -X_k$.

$x(t) = ... - X_5 e^{-5jt} - X_3 e^{3jt} - X_1 e^{jt} + X_1 e^{-jt} + X_3 e^{-3jt} + X_5 e^{-5jt} + ...$

$x(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} X_{2p+1}(e^{j(2p+1)t} - e^{-j(2p+1)t}$

$$x(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin(2p+1)t}{2p+1}$$

Remarque:

La fonction $x(t)$ est impaire. Elle s'exprime ainsi en une somme de sinus également fonction impaire.