AlgoNum GM3
2022/2023

Arithmétique

AlgoNum - TD3 - MMSN

Etudiants : **DANTAS Alexandre** **DELL'OVA Fabio**
GUINES Antoine **LANGOLFF Clément**
KESSLER Aymeric

Encadrant : **Gleyse. B**

Contents

Part I
Théorie

1 Rationnel non entier décimal

Montrons qu'un rationnel non entier est décimal (représenté par une fraction décimale (dont le dénominateur est une puissance de 10)) si et seulement si son représentant irréductible a un dénominateur dont les seuls diviseurs premiers possibles sont 2 ou 5.

Soit $r = \frac{x}{10^n}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Posons $r = \frac{a}{b}$ tel que a et b soient premier entre eux (ainsi la fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible). Alors,

$$xb = a \times 10^n$$

D'après le lemme de Gauss, si l'entier b divise $a \times 10^n$ et si a et b sont premiers entre eux, alors b divise 10^n.

On a donc $10^n = kb$ avec $k \in \mathbb{N}$ donc

$$b = \frac{10^n}{k} = \frac{2^n 5^n}{k}$$

Or $b \in \mathbb{N}$ donc k ne peut être n'importe quel entier sinon b serait un nombre rationnel. k de décompose alors en multiple de 2 et 5 mais ces multiple doivent être obligatoiremnt inférieur au dénominateur, sinon on aurait encore une fois une fraction à la place d'un entier. Ainsi, on a $k = 2^i 5^j$ où i et j doivent être inférieur à n.

On a alors $b = 2^{n-i} 5^{n-j}$ d'où

$$\frac{x}{10^n} = \frac{a}{2^{n-i} 5^{n-j}}$$

Réciproquement, si le représentant irréductible de $\frac{x}{y}$ est de la forme $\frac{a}{2^{n-i} 5^{n-j}}$ avec $a \in \mathbb{N}$ alors

- si $j \leq i$, on "factorise" par 2^{n-j}et 5^{n-j} pour obtenir $\frac{a}{2^{n-i} 5^{n-j}} = \frac{a}{2^{j-i} \times 10^{n-j}}$. On a alors $\frac{x}{y} = \frac{a \times 2^{i-j}}{10^{n-j}}$ c'est donc bien décimale.
- si $i \leq j$, alors on procède de même en factorisant par $n - i$ pour obtenir $\frac{x}{y} = \frac{a \times 2^{j-i}}{10^{n-i}}$ et on en tire la même conclusion.

En reprenant la même demonstration avec 2, possèdant comme seul diviseur premier 2, on peut élargir à un rationnel non entier binaire, c'est à dire de la forme $\frac{a}{2^n}$.

2 Rationnel non entier et non décimal

Soit un rationnel non entier et non décimal $\frac{p}{q}$ avec p et q premier entre eux et tel que $0 < p < q$.

$$x = \frac{p}{q} = 0, x_1x_2...x_rMM...$$

avec M le motif de la période composé des m chiffres. On note r le premier indice avant que la période apparaisse.

Alors

$$10^rx = x_1x_2...x_r, MM...$$

Posons $E_r(x) = x_1x_2...x_r$la partie entière de x et $y = 10^rx - E_r(x) = 0, MM...$

On a $10^my = M, MM..$ où m est la longueur du motif en terme de chiffre.

$$10^my - y = M,$$

d'où $y(10^m - 1) = M$ ainsi $y = \frac{M}{10^m-1} = \frac{a}{b}$ avec $0 < a < b$, a et b premier entre eux ainsi que b et 10 premier entre eux (sinon y serait un rationnel décimal).

En réarrangeant les termes, on obtient $bM = a(10^m - 1)$, on applique le lemme de Gauss, si a et b sont premiers entre eux alors b divise $10^m - 1$. Autrement dit $10^m - 1 \equiv 0[b]$ et en utilisant la propriété des congruences on a finalement $10^m \equiv 1[b]$. Pour trouver la longueur de la période, il faut trouver le plus petit m qui vérifie $10^m \equiv 1[b]$. On choisit le plus petit car si on prenait m_1 avec $m_1 > m$ qui vérifie $10^{m_1} \equiv 1[b]$, alors on aurait la longueur de plusieurs périodes qui se suivent.

Cherchons maintenant à trouver le rang à partir duquel le motif commence.

On a vu que

$$y = 10^rx - E_r(x) = 10^rx - k = \frac{a}{b}, \;\; k \in \mathbb{N}$$

et donc

$$\begin{aligned} 10^rx &= k + \frac{a}{b} \\ 10^r\frac{p}{q} &= k + \frac{a}{b} \\ \frac{p}{q} &= \frac{kb + a}{10^rb} \end{aligned}$$

On a $\frac{kb+a}{10^r}$ qui est un rationnel décimal donc d'après la première partie, q peut s'écrire $q = b \times 2^\alpha5^\beta$.

En posant $r = max(\alpha, \beta)$, on obtiendra le rang du développement décimal à partir duquel la période apparaît et on pourra ainsi avoir le motif M.

3 Rationnel non entier et non binaire

Calculons le rang du développement décimal à partir duquel la période apparaît et la longueur de cette période pour un développement binaire infini périodique.

Soit un rationnel non entier et non binaire (développement binaire infini périodique) $\frac{p}{q}$ avec p, q premiers ente eux et $0 < p < q$ (sinon faire une division euclidienne)

$$x = \frac{p}{q} = 0, x_1 x_2 ... x_r, MM...\ avec\ M\ le\ motif$$

$$2^r x = x_1 x_2 ... x_r, MM..$$

$$y = 2^r x - E_r(x) = 0, MM..$$

$$2^m y = M, MM...$$

$$2^m y - y = M$$

d'où :

$$y = \frac{M}{2^m - 1} = \frac{a}{b}$$

avec a et b premiers entre eux, b et 2 premiers entre eux, $0 < a < b$

d'où : $bM = (2^m - 1)a$

D'après le Lemme de Gauss, si l'entier b divise $(2^m - 1)a$ et a et b sont premiers entre eux alors b divise $(2^m - 1)$.

donc $2^m - 1 \equiv 0[b]$

d'où $2^m \equiv 1[b]$

Pour trouver le rang r on procède comme la partie précédente

$$y = 2^r x - E_r(2^r x) = 2^r x - k = \frac{a}{b}$$
$$2^r x = \frac{a}{b} + k$$
$$\frac{p}{q} = \frac{kb + a}{b2^r}$$

et grâce à la première partie, on a $q = 2^\alpha b$ et on pose alors $r = \alpha$ pour avoir le rang et trouver le motif M.

4 Développement décimale infini vers le développement binaire infini

Procédons par contraposée :

Supposons que x soit un rationnel non entier à développement binaire fini :

$$x = \frac{a}{2^n}$$

x possède donc un développement décimal fini.

On en conclut qu'un nombre rationnel non entier à développement décimal infini a un développement binaire infini.

En revanche, la réciproque n'est pas correcte. En effet, il suffit de prendre un contre exemple pour s'en convaincre. Le nombre $0,1$ possède un développement décimal fini mais un développement binaire infini.

Cherchons d'abord à la main la représentation de 0,1 avec la norme IEEE754.

On a $\frac{1}{10} = 2^{-4} \times \frac{8}{5} = 2^{-4}(1 + \frac{3}{5})$

m	2m	b
$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{5}$	1
$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	0
$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}$	0
$\frac{4}{5}$	$\frac{8}{5}$	1
$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{5}$	1
$\vdots$	$\vdots$	0

On à la répétition du motif 1001.

La représentation de 0,1 en double présicion est donné par

- bit de signe : 0
- bits exposant (sur 11 bits) : $(2^{11} - 1 - 4)_{10}$= $(011\ 1111\ 1011)_2$
- mantisse : $\underbrace{\underbrace{1001}_{motif}100110011001...1001}_{52\ bits}$

À l'aide de gdb, nous affichons l'écriture de 0.1 en binaire :

```
(gdb) p/t 0.1
$1 = 11111110111001100110011001100110011001100110011001100110011010
(gdb) 
```

gdb nous affiche le résultat en double précision (gdb affiche à partir du premier bit égale à 1).

- bit de signe (caché) : 0
- On retrouve l'exposant codé 011 1111 1011 (avec le premier 0 caché)
- Puis nous avons une répétition du motif 1001
- Les deux derniers bits sont différents car l'ordinateur approxime le résultat au bit supérieur, c'est à dire ...10011001|1001 sera approximé par ...10011010|0000.... Le motif est alors interrompu mais le développement est théoriquement infini.

Par le raisonnement ci-dessus, on peut conclure quant à la réciproque de la propriété. Un nombre rationnel non entier à développement binaire infini n'admet pas nécessairement un développement décimal infini.

5 Développement binaire du rationnel $\frac{86}{40}$

Pour se mettre dans les conditions de la partie 3, on effectue la division euclidienne de $\frac{86}{40}$ et ainsi avoir un rationnel non entier et non binaire tel que de la forme $\frac{p}{q} < 1$

On a

$$\frac{86}{40} = 2 + \frac{3}{20}$$

De plus, on a $\frac{3}{20} = \frac{3}{2^2 \times 5}$

On peut donc en déduire que le rang du nombre rationnel $\frac{86}{40}$ est de 2 d'après la question 2.

De plus, pour connaître la longueur de la période de développement binaire du nombre rationnel $\frac{86}{40}$, nous cherchons le plus petit $k \in \mathbb{N}$ tq $2^k \equiv 1[5]$. Nous obtenons donc que $k = 4$ puiques $2^4 = 16 = 5 \times 3 + 1$ ce qui permet d'avoir une longueur de période du motif dans le développement binaire égale à 4.

Le codage de $\frac{86}{40}$ dans la norme IEEE754 est cependant diffèrent. En effet,

$$\frac{86}{40} = 2^1 \times (1 + \frac{3}{40})$$

Mantisse	2*Mantisse	Bit résultant	
3/40	6/40	0	}*Rang*
6/40	12/40	0	
12/40	24/40	0	
24/40	48/40	1	}*Motif*
8/40	16/40	0	
16/40	32/40	0	
32/40	64/40	1	
24/40	...	...	

- bit de signe : 0
- bit exposant : $(2^{11} - 1 + 1)_{10} = (100\ 0000\ 0000)_2$

L'affichage gdb nous conforte dans le résultat puisqu'après le bit de signe, les 11 bits d'exposant, vient la mantisse trouvée avec le calcul ci-dessus.

```
$1 = 100000000000001001100110011001100110011001100110011001100110011
(gdb)
```

Concernant l'arrondissement, la mantisse est arrondi au bit supérieur. Or, on a ...100110011|001100... comme le bit situé après la troncature est 0, on a pas d'arrondissement supérieur.

Part II

Développement binaire et application

6 développement binaire de 0,4

On a $0,4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$. Donc $0,4$ ne peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{2^n}$, on déduit donc que son développement binaire est infini. D'après la partie 1, on a $q = 5 = 2^0 \times 5$. Ainsi le rang r de 0,4 est 0. De plus, on cherche le premier entier positif α tel que $2^\alpha \equiv 1[5]$, on trouve alors 4. Donc le motif est formé par 4 bits et se trouve juste après la virgule.

7 Application

On considère un nombre décimal quelconque sans partie entière, avec un développement binaire unique noté $\alpha = (a_0, a_1....a_{n-1}a_na_{n+1}...)_2$ avec $a_0 = 0$ et $a_n = 1$. On note p le polynome $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$. On a alors :

$$\begin{aligned}\beta = p(\frac{1}{2}) &= (\sum_{i=1}^{n-1} a_i 2^{-i}) + 2^{-n} \\ &= 0, a_1....a_{n-1}1\end{aligned}$$

On remarque immédiatement que β est la représentation binaire de α jusqu'au rang n. β correspond à l'évaluation de $p(x)$ au point $\frac{1}{2}$. Pour évaluer ce polynôme avec une complexité linéaire en $O(n)$, on utilise l'algorithme de Hörner.
De plus la différence $\alpha - \beta = (0, ...0a_{n+1}a_{n+2}...)$ représente l'erreur absolue de α au rang n. Ainsi on a :

$$\alpha - \beta = \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i 2^{-i} = \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{2^{n+2}} + ... = \frac{1}{2^{n+1}}(a_{n+1} + \frac{a_{n+2}}{2} + \frac{a_{n+3}}{2^2}...) = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_{n+1+i}}{2^i}$$

Or les $a_i$ne peuvent prendre que 2 valeurs, soit 0, soit 1 car on est en base 2. D'ou la majoration suivante :

$$|\alpha - \beta| \leq \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}$$

Ainsi, plus le dévelopement binaire de α est grand, c'est à dire plus n est grand, meilleure sera la précision.
Faisons maintenant l'application numérique. On prend $\alpha = 0,4$ et $n = 3$. On a cette fois $p(x) = \sum_{i=0}^{3} a_i x^i$, donc :

$$\beta = \sum_{i=0}^{3} a_i 2^{-i}$$

Le développement binaire de $0,4$ étant :

$$0,4 = (0,011001100110...)_2$$

Calculons β grâce à l'algorithme de Hörner. On peut écrire $p(x)$ en le factorisant :

$$p(x) = \sum_{i=0}^{3} a_i x^i = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + a_3 x))$$

avec $0,4 = a_0, a_1 a_2 a_3... = 0,011...$

On veut ici évaluer $p(x)$ en $\frac{1}{2}$ donc on prend $x = \frac{1}{2}$, et on applique l'algorithme d'Hörner qui nous donne :

$$\beta = p(\frac{1}{2}) = 0 + 0,5 \times (0 + 0,5 \times (1 + 1 \times 0,5))$$

Ce qui nous donne les calculs suivants :

$$\begin{aligned}
b_3 &= a_3 = 1 \\
b_2 &= a_2 + \frac{1}{2} b_3 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\
b_1 &= a_1 + \frac{1}{2} b_2 = 0 + \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4} \\
b_0 &= a_0 + \frac{1}{2} b_1 = 0 + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

Ainsi on obtient la valeur de $p(\frac{1}{2}) = \beta = b_0 = \frac{3}{8}$. Et on a aussi $\beta = (0,011)_2 = \frac{3}{8}$. On peut par ailleurs écrire la différence telle que :

$$\begin{aligned}
\alpha - \beta &= (0,000001100110...)_2 \\
\alpha - \beta &= 0,4 - \frac{3}{8} = \frac{1}{40} = 0,025
\end{aligned}$$

De plus on a la majoration suivante :

$$|\alpha - \beta| \leq \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0,125$$

On pourrait dans ce cas majorer plus finement la différence puisque les coefficients suivant de α, a_4 et a_5 sont nuls donc ici on a en fait :

$$|\alpha - \beta| \leq \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32} = 0,03125$$

En fait, la majoration que l'on va pouvoir faire dépend de la valeur du reste, noté r, de la division euclidienne de n par 4 (la longueur du motif). Si r vaut 1 ou 2 on peut seulement majorer par $\frac{1}{2^n}$, car a_{n+1} à une valeur de 1. Si r vaut 0 alors on peut majorer par $\frac{1}{2^{n+1}}$ car a_{n+1} vaut 0, et si r vaut 3, alors on peut majorer par $\frac{1}{2^{n+2}}$ car a_{n+1} et a_{n+2} valent tous les deux 0.
En prenant $n = 6$, on pourrait diminuer la différence entre α et β, car a_6 et non nul. On a cette fois :

$$p(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + x(a_3 + x(a_4 + x(a_5 + xa_6)))))$$

a_4 et a_5 sont nuls donc en évaluant $p(x)$ en $0,5$ comme précédemment on obtient $\beta = \frac{3}{8} + 0,5^6 = \frac{25}{64}$. La majoration de la différence entre α et β donne :

$$|\alpha - \beta| \leq \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64} = 0,015625$$

Cette fois on ne peut guère majorer beaucoup plus finement, puisque $a_7 = 1$.