Espace De Krylov

Soit $x^0 \in \mathbb{R}^n$, on note $r^0 = b - Ax^0$

L'espace de Krylov d'ordre p associé est définit par

$$K_p(A, r^0) = \text{vect}(r^0, Ar^0, A^2r^0, \dots, A^{p-1}r^0)$$

- Si $A^p r^0 \in K_p(A, r^0)$ alors $\forall q \geqslant 0 \quad A^{p+q} r^0 \in K_p(A, r^0)$

preuve

par récurrence sur q :

- si $q = 0 \qquad A^{p+q} r^0 = A^p r^0 \in K_p(A, r^0)$
- On suppose que $A^{p+q} r^0 \in K_p(A, r^0)$

$$\begin{aligned} A^{p+q+1} r^0 &= A^{q+1} A^p r^0 \\ &= A^{q+1} \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i A^i r^0 \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i A^{i+q+1} r^0 \end{aligned}$$

Or $\quad i + 1 + q \leqslant p + q \quad \forall i \in \{0, \dots, p-1\}$

Donc par hypothèse de récurrence,

$A^{i+q+1} r^0 \in K_p(A, r^0)$

Donc $\quad A^{p+q+1} \in K_p(A, r^0)$

- La suite $(K_p(A,r^0))_p$ est strictement croissante jusqu'à p_{max}.

Autrement dit, $K_1(A,r^0) \subset K_2(A,r^0) \subset \dots \subset K_{p_{max}}(A,r^0)$

et $\forall q \geq p_{max}$ $\quad K_q(A,r^0) = K_{p_{max}}(A,r^0)$

preuve

Rappel

- Polynôme unitaire : coeff du terme de plus haut degrés $=1$

$$P = 1.X^n + \alpha_{n-1}X^{n-1} + \dots + \alpha_1 X + \alpha_0$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe un polynôme unitaire P_A tq $P_A(A) = 0$

- Polynôme minimal de A : Polynôme unitaire P et pour tout $Q \in \mathbb{R}^n[X]$ tq $Q(A) = 0$ alors P divise Q.
P divise le polynôme caractéristique de A et a les mêmes racines.

Soit $F = \{ P \in \mathbb{R}^n[X], A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid P(A)r^0 = 0 \}$

$F \neq \phi$ car $P_A(A) = 0$ où P_A est le polynôme caractéristique de A.

Soit P un polynôme unitaire minimal de F

$\iff P(A)r^0 = 0$ et $\forall Q \in F \setminus \{0\}$
$\deg(Q) \geq \deg(P)$

$$P(X) = 1.X^d + \alpha_{d-1}X^{d-1} + \dots + \alpha_1 X + \alpha_0$$

avec $d = \deg(P)$

On a

$$P(A)r^0 = A^d r^0 + \dots + \alpha_1 A r^0 + \alpha_0 r^0$$
$$= 0 \quad \text{car } P \in F$$

→ Pour montrer que $(K_p(A, r^0))_p$ est strictement croissant, on montre que les vecteurs $\{r^0, Ar^0, \dots A^{d-1} r^0\}$ sont linéairement indépendant.

- Soit $\beta_0, \dots, \beta_{d-1}$ tq $\sum_{i=0}^{d-1} \beta_i A^i r^0 = 0$

On pose $Q = \sum_{i=0}^{d-1} \beta_i X^i$

On a $Q(A)r^0 = 0$ donc $Q \in F$.

Or $\deg(Q) \leq d-1 < \deg(P)$

$\Rightarrow Q = \tilde{0}$ car P est minimal par hypothèse

Donc $\sum_{i=0}^{d-1} \beta_i X^i = \tilde{0} \Rightarrow \beta_i = 0 \quad \forall i \in 1 .. d-1$

La famille $(r^0, Ar^0, \dots, A^{d-1} r^0)$ est donc linéairement indépendant.

- D'autre part, par définition de P,

$$P(A)r^0 = A^d r^0 + \sum_{i=0}^{d-1} \alpha_i A^i r^0 = 0$$

donc $A^d r^0 = - \sum_{i=0}^{d-1} \alpha_i A^i r^0$

$\Leftrightarrow A^d \in K_d(A, r^0)$

Donc par le lemme précédent, $\forall q \geq 0 \quad A^{d+p} \in K_d(A, r^0)$

$\Leftrightarrow \forall q \geq d \quad A^q \in K_d(A, r^0)$

Le lemme est vérifié pour $d = p_{max}$.

Remarque

p_{max} désigne la dimension maximale du sous-espace de Krylov.
La dimension maximale satisfait $p_{max} \leq 1 + \mathrm{Rang}(A)$
et $p_{max} \leq n+1$

Plus exactement, $p_{max} \leq \deg(P_A)$ où P_A est le polynôme minimal de A.
De plus il existe x^0 tq $p_{max} = \deg(P_A)$

Théorème

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible.
La solution $\bar{x}$ du système $Ax = b$ appartient à l'espace affine

$$W = \{ v = x^0 + y \mid y \in K_p(A, r^0) \}$$

preuve

Soit P_A le polynôme minimal de A

$$\Leftrightarrow P_A(A) = A^d + \alpha_{d-1}A^{d-1} + \dots + \alpha_1 A^1 + \alpha_0 = 0$$

On suppose $\alpha_0 \neq 0$

On a $P_A(A)\, r^0 = A^d r^0 + \alpha_{d-1}A^{d-1}r^0 + \dots + \alpha_1 A r^0 + \alpha_0 r^0 = 0$

D'où

$$\alpha_0 r^0 = -\sum_{i=1}^{d-1} \alpha_i A^i r^0 - A^d r^0$$

$$r^0 = -\frac{1}{\alpha_0}\sum_{i=1}^{d-1}\alpha_i A^i r^0 - \frac{1}{\alpha_0}A^d r^0 \quad \big) \times A^{-1}$$

$$A^{-1}r^0 = \underbrace{A^{-1}(b - Ax^0)}_{x - x^0} = -\frac{1}{\alpha_0}\sum_{i=1}^{d-1}\alpha_i A^{i-1} r^0 - \frac{1}{\alpha_0}A^{d-1}r^0$$

$$x = x^0 - \frac{1}{\alpha_0}\underbrace{\sum_{i=0}^{d-2}\alpha_i A^i r^0}_{\in K_d(A, r^0)} - \frac{1}{\alpha_0}\underbrace{A^{d-1}r^0}_{\in K_d(A, r^0)}$$

Afin de manipuler facilement l'espace de Krylov, on va chercher à construire une base orthonormale de
$K_p(A, r^0) = \mathrm{vect}(r^0, Ar^0, \dots, A^{p-1}r^0)$

Pour cela, on utilise l'algorithme d'orthonormalisation d'Arnoldi. C'est le même algorithme que Gram-Schmidt appliqué aux vecteurs obtenus par le produit successif par la matrice pour le produit scalaire usuel.

Algorithme D'Arnoldi

$r^0 = b - Ax^0$

$v_1 = \dfrac{r^0}{\|r^0\|}$

Pour $i \leftarrow 1$ à $p-1$

$\quad w \leftarrow Av_i$

$\quad$ Pour $j \leftarrow 1$ à i

$\quad\quad w \leftarrow w - (w, v_j)v_j$

$\quad$ Fin Pour

$\quad v_{i+1} \leftarrow \dfrac{w}{\|w\|}$

Fin Pour

$$w = Av_i - \sum_{j=1}^{i} (Av_i, v_j) v_j$$

$$v_{i+1} = \frac{w}{\|w\|}$$

$$(r^0 \quad , \quad Ar^0 \quad , \quad A^2 r^0 \quad , \quad \dots \quad , \quad A^{p-1} r^0)$$

$v_1 = \dfrac{r^0}{\|r^0\|}$

$w^1 = Ar^0$

$w^1 = w^1 - (w^1, v_1)$

$v_2 = \dfrac{w^1}{\|w^1\|}$

$w^2 = A^2 r^0$

$w^2 = w^2 - (w^2, v_1)v_2 - (w^2, v_2)v_2$

$v_3 = \dfrac{w^2}{\|w^2\|}$

On note h_{ij} le coefficient d'orthogonalisation par rapport à v_i et

$h_{j+1,j}$ la norme du vecteur la norme du vecteur w.

On a

$$A v_j = \sum_{i=1}^{j+1} h_{ij} v_i$$

Exemple pour $j=3$

$$w^3 = A v_3 = \underbrace{(A v_3, v_1)}_{h_{13}} v_1 + \underbrace{(A v_3, v_2)}_{h_{23}} v_2 + \underbrace{(A v_3, v_3)}_{h_{33}} v_3 + \underbrace{\|w^3\|}_{h_{43}} \cdot v_4$$

car $$w = A v_i - \sum_{j=1}^{i} (A v_i, v_j) v_j$$

et $$v_{i+1} = \frac{w}{\|w\|}$$

donc $$A v_i = w + \sum_{j=1}^{i} (A v_i, v_j) v_j$$

$$A v_i = v_{i+1} \|w\| + \sum_{j=1}^{i} (A v_i, v_j) v_j$$

$$= \sum_{j=1}^{i+1} h_{ij} v_j$$

On construit ainsi

$$H(p+1,p) = \begin{array}{r} \text{" \% de } v_1 \text{"} \\ \text{" \% de } v_2 \text{"} \\ \text{" \% de } v_3 \text{"} \\ \\ \\ \\ \text{" \% de } v_{p+1} \text{"} \end{array} \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & \cdots & h_{1p} \\ h_{21} & h_{22} & & & h_{2p} \\ 0 & h_{32} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & h_{pp} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & h_{p+1,p} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{p+1,p}(\mathbb{R})$$

décomposition de Av_1 dans la base $\{v_1, v_2\}$

$$Av_1 = (Av_1, v_1)v_1 + \|\hat{w}\| v_2$$
$$= h_{11} v_1 + h_{21} v_2$$

décomposition de Av_p dans la base $\{v_1, v_2, \ldots, v_{p+1}\}$

$$Av_p = \sum_{i=1}^{p} (Av_i, v_i) v_i + \|w\| v_{p+1}$$
$$= \sum_{i=1}^{p} h_{ip} v_i + h_{p+1,p} v_{p+1}$$

On note

$$V(p) = (v_1 \quad v_2 \quad \ldots \quad v_p) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$$

On a les relations suivantes :

$$AV(p) = V(p+1)\, H(p+1,p)$$

car $\displaystyle Av_j = \sum_{i=1}^{j+1} h_{ij} v_i$

et $V^T(p)\, A\, V(p) = H(p)$

car
$$A v_{(p)} = v_{(p+1)} H_{(p+1,p)}$$
$$A v_{(p)} = v_{(p)} H_{(p)} + h_{p+1,p} v_{p+1} e_p^T$$
$$\Longleftrightarrow v_{(p)}^T A v_{(p)} = H_{(p)} \quad \forall p < k$$

$$H(p) = V^T_{(p)} A v_{(p)} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & \cdots & h_{1p} \\ h_{21} & h_{22} & & & h_{2p} \\ 0 & h_{32} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & h_{p-1,p} & h_{pp} \end{bmatrix} \in M_p(\mathbb{R})$$

$H(p)$ est une matrice de Hessenberg

elle correspond à la projection de l'application linéaire associé à A dans l'espace de Krylov.