Chapitre 1

Problème bien posé

1 Problème :

Trouver la solution z = R(u) avec :
— u donnée initiale
— z la solution
— R la relation fonctionnelle entre u et z

Ce problème est dit bien posé, au sens de Hadamard, si la solution :

1. existe
2. est unique
3. est stable par rapport aux perturbations

2 Stabilité :

Soient :
— $\mathcal{U}$ la classe des données d'entrée possible
— $\mathcal{Z}$ la classe des solutions possibles

Dans $\mathcal{Z}$ et $\mathcal{U}$ on définit la distance ρ_u et ρ_z qui mesure des variations sur u et z.

Si le point 3. du problème bien posé n'est pas vérifié, alors des variations, même très petites sur $\widetilde{u} \in \mathcal{U}$, ou des données initiales approximatives u, peuvent conduire à des variations très importantes pour les solutions correspondantes : $\widetilde{z} = \mathrm{R}(\widetilde{u})$ ou $z = R(u)$
et ainsi la solution approchée de tels problèmes n'a plus de sens ; le problème est dit instable et donc mal posé.
Remarque : Ici, la solution approchée $\widetilde{z}$ est prise solution exacte de $\widetilde{z} = \mathrm{R}(\widetilde{u})$

3 Règle :

Pour les problèmes instables, on ne peut pas prendre comme solution approchée une solution exacte donnée par R appliquée à $\widetilde{u}$.

3.1 Comment poser le problème des solutions approchées des problèmes instables ?

Si la distance $\rho_u(\mathrm{u}, \widetilde{u}) \leq \delta$ entraîne $\sup\limits_{\widetilde{v} \in R(\bar{B}(u,\delta))} \rho_z(z, \widetilde{v}) = \epsilon(\delta)$ alors $\epsilon(\delta)$ est dit module de définition du problème.
Si ϵ_0 est la précision demandée sur la solution, δ_0 est une précision donnée pour δ, et $\epsilon(\delta_0) > \epsilon_0$ alors le problème est analogue à un problème instable.

3.2 Comment définir un objet à partir de l'observation de ses caractéristiques ?

Par le plus d'observations possibles sur cet objet, qui doivent en général améliorer sa définition, mais cela donne souvent des problèmes mathématiques indéterminés, sans solution.
Exemple : vérification de l'hypothèse de l'existence d'une relation linéaire entre ses valeurs observées x et y et la définition de cette relation à partir de certaines observations.

La relation est de la forme :
$ax_i + by_i + c = 0$ avec (x_i, y_i) pour $i = 1, 2, \cdots n$ les observations
pas de solution classique pour n > 3
On prend une solution généralisée donnée par la méthode des moindres carrés qui demande la résolution d'un système linéaire.
Mais cette méthode peut donner des solutions instables :
Soit le système

$$\begin{cases} x + 7y = 5 \\ \\ \sqrt{2}x + \sqrt{98}y = \sqrt{50} \end{cases}$$

le comportement des systèmes approchés résolus sur ordinateur (ce qui modélise les systèmes approchés qui correspondent au traitement des observations) sont mis à l'étude :

Dans le calculateur on a :

- introduit l'information
- effectué les calculs avec une précision variable (par exemple en terme de centaines de décimales 100, 300 et 500)

et on obtient les résultats suivants :
$x_{100} = 0, \cdots, x_{300} = 1{,}6 \cdots, x_{500} = 5, \cdots$

d'où l'instabilité de la méthode implantée sur cet ordinateur.