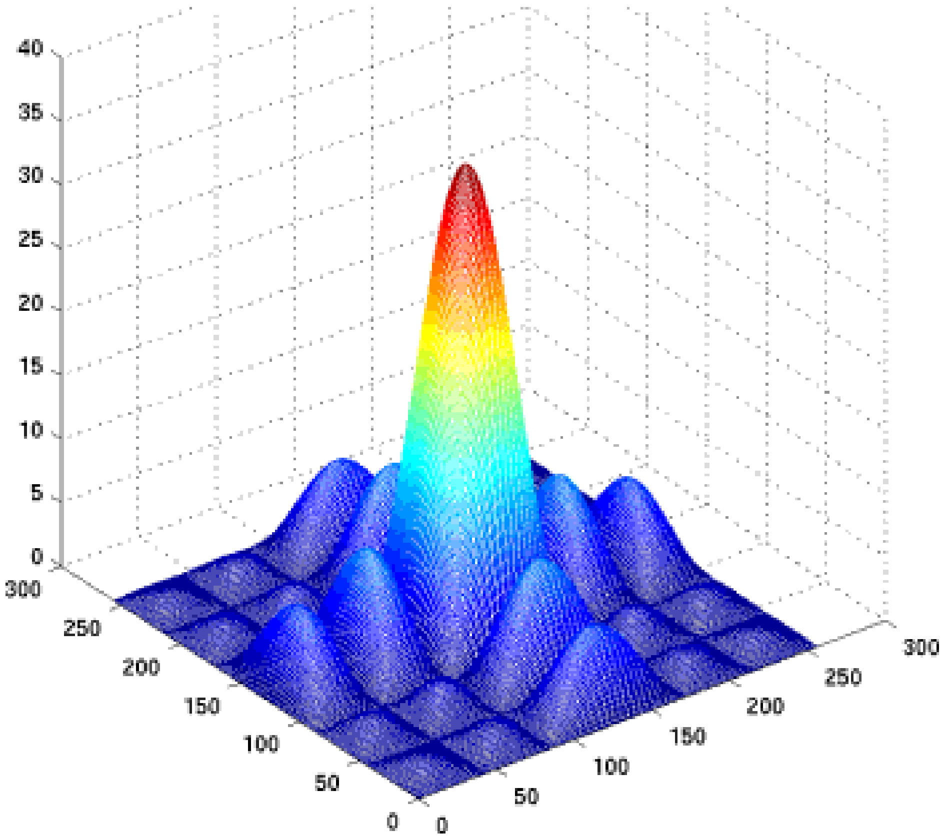
INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES

RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

NATALIE FORTIER

Signal

GM3
Année 2014-2015

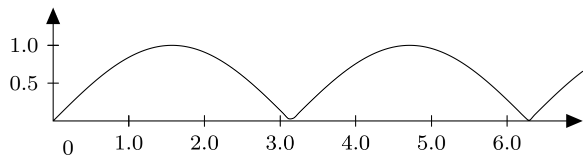


Introduction

Information $\longrightarrow$ modèle mathématique : signal dépendant de 1 ou plusieurs var

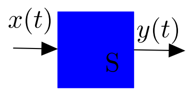
$E \qquad R$

<u>GM3</u> : signaux déterministe : $x(t); t \in \mathbb{R};$ temps



<u>GM4</u> : signaux aléatoires

<u>Systèmes</u> :



- Systèmes linéaires
- Relation entrée/sortie

Chapitre 1

Signal déterministe

1.1 Définitions

Soit $x(t), t \in \mathbb{R}$ un signal déterministe :
On définit l'énergie comme :

$$\boxed{E_x \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt}$$

Exemple : $x(t) = e^{-\alpha t}; t \geq 0; \alpha > 0$

$$\begin{aligned} E_x &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\alpha t} dt \\ &= \int_{0}^{+\infty} e^{-2\alpha t} dt \\ &= -\frac{1}{2\alpha}.[e^{-2\alpha t}]_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{2\alpha} \end{aligned}$$

On définit la puissance d'un signal comme :

$$\boxed{P_x \triangleq \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |x(t)|^2 dt}$$

On définit le signal échelon $u(t)$ de la manière suivante :

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On définit le signal rectangulaire comme :

$$rect_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leq T \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple :

Ecrire $rect_T(t)$ en utilisant $u(t)$: $rect_T(t) = u(t+T) - u(t-T)$

1.2 Représentation en fréquences d'un signal d'énergie finie

Pour le signal $x(t)$, d'énergie finie on définit la transformée de Fourier, notée TF comme :

$$\boxed{X(f) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2\pi j f t} dt}$$

On définit également la transformée inverse notée TF^{-1} :

$$\boxed{x(t) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{2\pi j f t} df}$$

Et on a : $x(t) \xrightarrow{TF} X(f)$

Exemple :

– $x(t) = e^{-\alpha t} u(t)$

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t} u(t) e^{-2\pi j f t} dt \\ &= \int_{0}^{+\infty} e^{-(\alpha + 2\pi j f)t} dt \\ &= -\frac{1}{\alpha + 2\pi j f} \left[e^{-(\alpha+2\pi j f)t} \right]_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{\alpha + 2\pi j f} \end{aligned}$$

– $x(t) = rect_T(t)$

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} rect_T(t) e^{-2\pi j f t} dt \\ &= \int_{-T}^{T} e^{-2\pi j f t} dt \\ &= \frac{2j \sin(2\pi f T}{2\pi j f} \\ &= \frac{\sin(2\pi f T}{\pi f} \\ &= 2T sinc(2Tf) \end{aligned}$$

Avec : $sinc\alpha \triangleq \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha}$

Propriété : Décalage temporel : $x(t - t_0) \xrightarrow{TF} e^{-2\pi j f t_0} X(f)$

On définit :

$z(t) \triangleq x(t) * y(t) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau$

En posant $\theta = t - \tau$, on obtient : $z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(\theta) x(t - \theta) d\theta$

Propriétés :

- $x(t) * y(t) \xrightarrow{TF} X(f)Y(f)$
- $x(t)y(t) \xrightarrow{TF} X(f) * Y(f)$
- $x^*(t) \xrightarrow{TF} X^*(-f)$
- $x(-t) \xrightarrow{TF} X(-f)$
- $x^*(-t) \xrightarrow{TF} X^*(f)$

Identité de Parceval :

Pour $t = 0$ on a :

$$x(t) * y^*(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)Y^*(f)df$$

De plus, si $x(t) = y(t)$ on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t)dt = E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

1.3 Série de Fourier

Soit $x(t)$ périodique de période T (E_x finie). On suppose $x(t)$ défini non nul sur un intervalle T :

$$\boxed{x(t) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{2\pi j \frac{k}{T} t}}$$

$$\text{avec } X_k \triangleq \frac{1}{T} \int_{(T)} x(t) e^{-2\pi j \frac{k}{T} t} dt$$

On définit la composante continu $X_0 = \frac{1}{T} \int_{(T)} x(t)dt$

On définit également les composantes fondamentales X_1 et X_{-1}.

Exemple : $x(t) = rect_{\frac{T}{2}}(t)$

$$\begin{aligned} X_k &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-2\pi j \frac{k}{T} t} dt \\ &= \frac{e^{\pi j k} - e^{-\pi j k}}{2\pi j k} \\ &= \frac{sin(k\pi)}{k\pi} \\ &= sinc(k) \end{aligned}$$

On sait que $X(f) = Tsinc(Tf) \implies X_k = \frac{1}{T} X(f)\Big|_{f=\frac{k}{T}}$

Définition :

$\delta(t)$: distribution de Dirac : $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\varphi(t)dt = \varphi(0)$

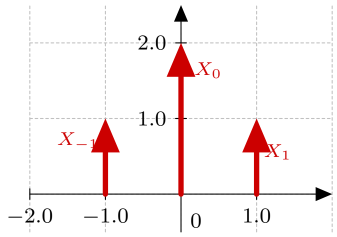
Si $\varphi(t) = e^{-2\pi j f t}$:

$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-2\pi j f t} dt = 1 \implies \boxed{\delta(t) \xrightarrow{TF} 1}$

Propriétés :

- $x(t) \xrightarrow{TF} X(f), \quad x(t)e^{2\pi j f_0 t} \xrightarrow{TF} X(f - f_0)$

– $x(t) = \sum_k X_k e^{2\pi j \frac{k}{T} t} \xrightarrow{TF} \boxed{X(f) = \sum_k X_k \delta(f - \frac{k}{T})}$



Exemple : $x(t) = \cos(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2}e^{2\pi j f_0 t} + \frac{1}{2}e^{-2\pi j f_0 t} \implies$ en $-f_0$ et f_0

1.4 Fonctions de corrélation

Supposons $x(t), y(t)$ d'énergie finie. On définit l'inter-corrélation comme :

$$\boxed{R_{xy}(t) \triangleq x(t) * y^*(-t)}$$

On définit aussi l'auto-corrélation comme étant :

$$\boxed{R_x(t) \triangleq x(t) * x^*(-t)}$$

L'auto-corrélation (resp inter) est le degré de similitude du signal à l'instant τ avec le signal à l'instant $\tau - t$. A $t = 0$, on obtient le degré de similitude maximum $R_x(0)$ et $\forall t, R_x(t) \leq R_x(0)$.

Exemple : $x(t) = rect_{\frac{T}{2}}(t)$

$$\begin{aligned} R_x(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} rect_{\frac{T}{2}}(\tau) rect_{\frac{T}{2}}(\tau - t) d\tau \\ &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} rect_{\frac{T}{2}}(\tau - t) d\tau \end{aligned}$$

or $-\frac{T}{2} + t \leq \tau \leq \frac{T}{2} + t$

$$R_x(t) = \int_{max(-\frac{T}{2}, -\frac{T}{2}+t)}^{min(\frac{T}{2}, \frac{T}{2}+t)} 1 d\tau$$

Si $t < 0$:

$$R_x(t) = T + t$$

Sinon :

$$R_x(t) = T - t$$

D'où :

$$R_x(t) = (T - |t|)rect_T(t)$$

Définition : Densité spectrale : $R_x(\tau) \xrightarrow{TF} S_x(f)$

$$\boxed{S_x(f) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau)e^{-2\pi jf\tau}d\tau}$$

Remarque : $R_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f)df = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2dt = E_x$

Exemple : $x(t) = rect_{\frac{T}{2}}(\tau)$

$R_x(\tau) = x(\tau) * x^*(-\tau) \xrightarrow{TF} S_x(f) = X(f)X^*(f) = |X(f)|^2 = (Tsinc(TF))^2$

Chapitre 2

Signal à temps discret

2.1 Transformée en z

Définition : $\{x_k, k \in \mathbb{Z}\} \xrightarrow{TZ} X(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k z^{-k}$ avec $|r_{min}| \leq |z| \leq |r_{max}|$

Exemple : $x_k = a^k u_k$ et $y_k = -a^k u_{-k-1}$

$$\begin{aligned}
X(z) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k u_k z^{-k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{a}{z})^k \\
&= \frac{1}{1-az^{-1}} & \text{pour } |a| < |z|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y(z) &= -\sum_{-\infty}^{-1} a^k z^{-k} \\
&= -\sum_{-1}^{\infty} a^{-k} z^{k} \\
&= -\Big(\sum_{0}^{\infty} a^{-k} z^{k} - 1\Big) \\
&= 1 - \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{z}{a})^k \\
&= \frac{1}{1-az^{-1}} & \text{pour } |a| > |z|
\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{a^k u_k \xrightarrow{TZ} \frac{1}{1-az^{-1}}, |z| > |a|}$$

$$\boxed{-a^k u_{-k-1} \xrightarrow{TZ} \frac{1}{1-az^{-1}}, |z| < |a|}$$

Définition :

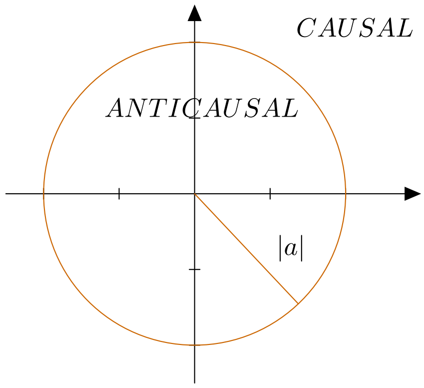
Signal causal : définit nul pour $k \leq 1$ (x_k)

Signal anticausal : définit nul pour $k \geq 0$ (y_k)

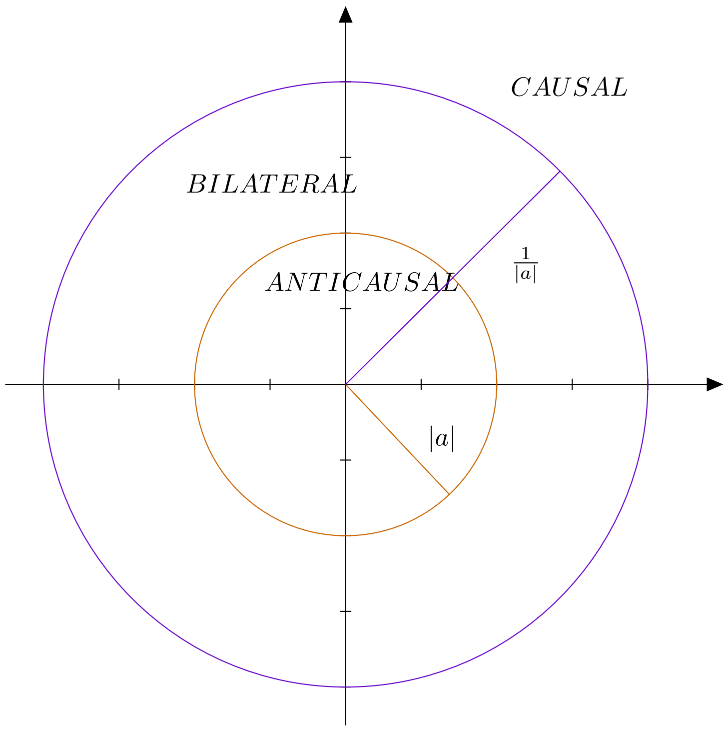
Signal bilatéral : est ni causal ni anticausal $(a^{|k|})$

Propriété : $x_k, k \in \mathbb{Z} \xrightarrow{TZ} X(z)$
$w_k \triangleq x_{k-k_0} \xrightarrow{TZ} W(z) = z^{-k_0}X(z)$

Si on prend le signal $x_k = \frac{1}{1-az^{-1}}$, on a $D(z) = 1 - az^{-1}$ avec un pôle $P_1 = a$. On constate qu'avec un pôle, on a deux régions de convergence :



Si on prend $Q(z) = \frac{1}{(1-az^{-1})(1-\frac{1}{a}z^{-1})}$ avec $|a| < 1$. On a $D(z) = (1-az^{-1})(1-\frac{1}{a}z^{-1})$. Soit $P_1 = a$ et $P_2 = \frac{1}{a}$. Pour $|a| < |z| < \frac{1}{|a|}$, on a trois régions de covergence :



Les pôles sont les valeurs de z qui annulent le dénominateur. pour n pôles on a $n+1$ signaux : un causal, un anticausal et des bilatéraux.

Remarque : $\delta_k \xrightarrow{TZ} 1$ et $\delta_{k-m} \xrightarrow{TZ} z^{-m}$

2.2 Transformée inverse

$X(z) \triangleq \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_nz^{-n}}{1+a_1z^{-1}+\cdots+a_pz^{-p}} = Q(z) + \frac{R(z)}{D(z)}$

Si $n > p$: on effectue une divison polynomiale $\implies N(z) = Q(z)D(z) + R(z)$ avec $\begin{cases} Q(z) \text{ de degré } n-p \\ R(z) \text{ de degré } < p \end{cases}$

Exemple :

$$X(z) = \frac{1-2z^{-1}-5z^{-2}+6z^{-3}}{1-\frac{5}{2}z^{-1}+z^{-2}}$$
$$\implies N(z) = (6z^{-1}+10) \times D(z) + 17z^{-1} - 10$$
$$\implies X(z) = 6z^{-1} + 10 + \frac{-10+17z^{-1}}{1-\frac{5}{2}z^{-1}+z^{-2}}$$

On cherche les pôles de $D(z), p_i$ puis on fait une décomposition en éléments simples $X(z) = Q(z) + \sum_{i=1}^{p} \frac{\alpha_i}{1-p_iz^{-i}}$

$X(z) = \sum_{j=0}^{n-p} \beta_j z^{-j} + \sum_{i=1}^{p} \frac{\alpha_i}{1-p_iz^{-i}}$ Avec $|z| > max(|p_i|)$, on a :

$$\boxed{x_k = \beta_0\delta_k + \beta_1\delta_{k-1} + \cdots + \beta_{n-p}\delta_{k-n-p} + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i p_i^k u_k \text{ Signal causal}}$$

Avec $Q(z) = \beta_0 + \beta_1 z^{-1} + \cdots + \beta n - pz^{n-p}$

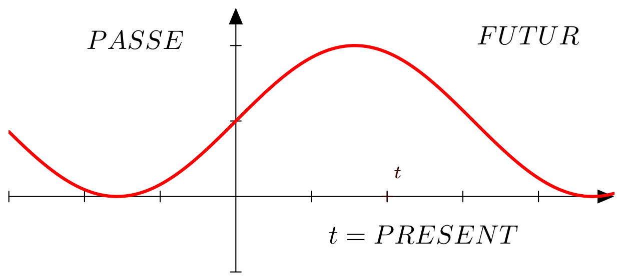
Exemple :

$$D(z) = 1 - \frac{5}{2}z^{-1} + z^{-2}$$
$$\Delta = \frac{9}{4} \implies z_1 = \frac{1}{2}, z_2 = 2 \implies z_1^{-1} = 2, z_2^{-2} = \frac{1}{2}$$
$$X(z) = 6z^{-1} + 10 + \frac{\alpha_1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{\alpha_2}{1-2z^{-1}}$$
$$\alpha_1 = (1-\frac{1}{2}z^{-1})\frac{R(z)}{D(z)}\Big|_{z^{-1}=2} = -\frac{25}{3}$$
$$\alpha_2 = (1-2z^{-1})\frac{R(z)}{D(z)}\Big|_{z^{-1}=\frac{1}{2}} = -\frac{2}{3}$$
$$x_k = 10\delta_k + 6\delta_{k-1} - \frac{25}{3}(\frac{1}{2})^k u_k - \frac{2}{3}(2)^k u_k$$
$$\text{Pour } k = 0 : x_0 = 1, k = 1 : x_1 = \frac{1}{2}$$
$$\text{Pour } k \geq 2 : x_k = -\frac{1}{3}\Big[25 \times (2^-k) + 2^{k+1}\Big]$$

Chapitre 3

Systèmes linéaires

Si $x(t)$ est un signal en entrée, on a $y(t) = \mathscr{L}\{x(t)\}$ le signal observé.
Linéarité : Si $x_1(t) \to y_1(t)$ et $x_2(t) \to y_2(t)$ alors $x_1(t) + x_2(t) \to y_1(t) + y_2(t)$
Décalage : $x(t-\theta) \to y_1(t-\theta)$: c'est l'invariance temporelle ou invariance par translation.
Système à mémoire : Un système est di à mémoire si pour un signal $x(t)$, $y(t)$ dépend de $\theta, \theta \leq t$ ($\neq$ système instantané).



Exemple :

A mémoire : $y(t) = x(t-1) + x(t) + x(t+2)$

Instantané : $y(t) = x(t)$

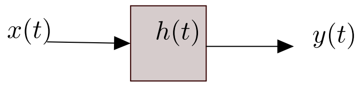
3.1 Filtres linéaires (FI)

Définition : Un FL est un système linéaire invariant par translation (SLIT).
Définition : Un FL est un convoluteur :
Pour $x(t)$ en entrée, $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$. $h(t)$ caractérise le FL, c'est la réponse impultionnelle.
Définition : Les signaux exponentiels sont des signaux propres du FL :
Si $x(t) = e^{2\pi j f_0 t}$ alors $y(t) = e^{2\pi j f_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = H(f_0)e^{2\pi j f_0 t}$
Remarque : Pour déterminer le réponse impultionnelle, il suffit de mettre en entrée la Dirac.

Exemple : $x(t)$ causal, $x(t) = 0, t < 0$

$$\begin{aligned} y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau &= \int_{0}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{t} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \end{aligned}$$

Un filtre linéaire est un convoluteur :



Réponse impultionnelle : $h(t) \xrightarrow{TF} H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-2\pi jft}dt$

$H(f) = |H(f)|e^{-j\varphi(t)}$ avec $|H(f)|$ le module de l'amplitude et $\varphi(t)$ la phase.

Un filtre linéaire est réalisable si il est causal et stable :

Causal : $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$

Stable : stabilité BIBO, entrée et sortie bornées.

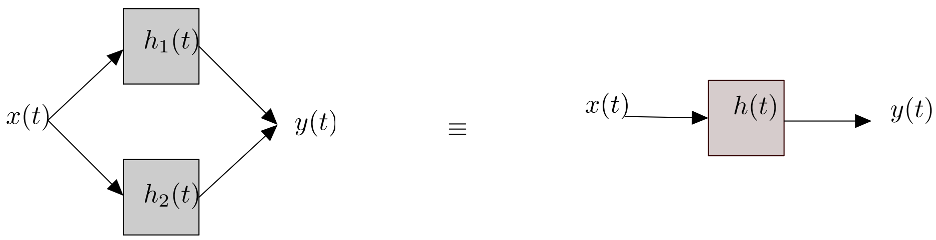
3.2 Filtre en série

$y_1(t) = h_1(t) * x(t)$ et $y(t) = h_2(t) * y_2(t) = h_2(t) * h_1(t) * x(t)$

On a aussi $y(t) = h(t) * x(t)$ d'où :

$$\boxed{h(t) = h_2(t) * h_1(t)} \quad \text{et} \quad \boxed{H(f) = H_1(f) \times H_2(f)}$$

3.3 Filtre en parallèle



On a : $y(t) = (h_1(t) + h_2(t)) * x(t)$ et $y(t) = h(t) * x(t)$ d'où :

$$\boxed{h(t) = h_1(t) + h_2(t)} \quad \text{et} \quad \boxed{H(f) = H_1(f) + H_2(f)}$$

3.4 Filtre linéaire à temps discret

$\{h_k, k \in \mathbb{Z}\}, y_k = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h_m x_{k-m}$

$$\boxed{H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k z^{-k}}, |r_1| < |z| < |r_2| \quad \text{et} \quad \boxed{H(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k e^{-2\pi jkf}}$$

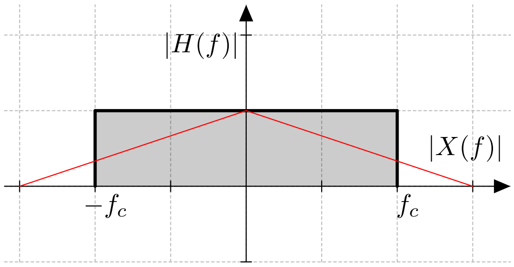
<u>Définition</u> : Un filtre linéaire est stable si $|z| = 1$ appartient à la région de convergence causale ($\equiv |z| > \max(p\hat{o}les)$). Un filtre linéaire sera causal et stable si tout les pôles sont à l'intérieur du cercle unité.

<u>Exemple :</u>

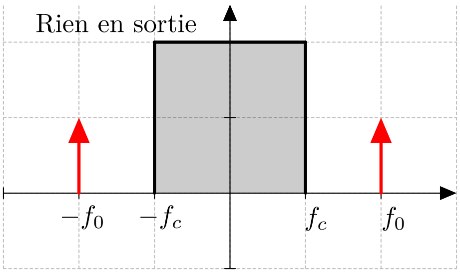
1. $H_1(z) = \frac{2z^{-1}-1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-2z^{-1})}$: $p_1 = \frac{1}{2}, p_2 = 2$, on a $|z| > 2 \implies |z| = 1 \notin RDC \implies$ non stable
2. $H_2(z) = \frac{3}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1+\frac{1}{4}z^{-1})(1+\frac{1}{7}z^{-1})}$: $p_1 = \frac{1}{3}, p_2 = -\frac{1}{4}, p_3 = -\frac{1}{7}$, on a $|z| > \frac{1}{3} \implies |z| = 1 \in RDC \implies$ stable

3.5 Caractéristiques de filtres

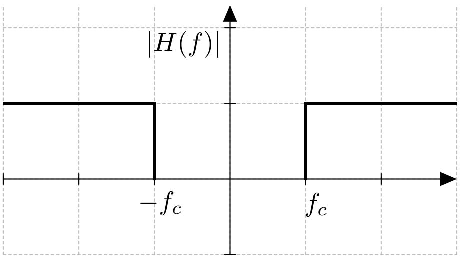
3.5.1 Filtre Passe-bas



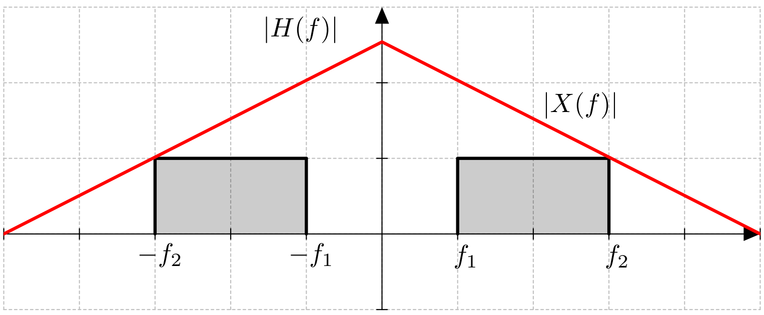
Exemple :



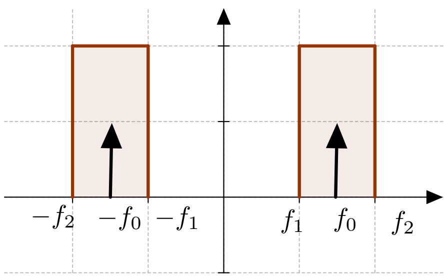
3.5.2 Filtre Passe-haut



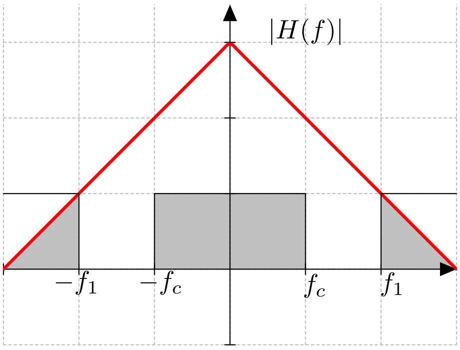
3.5.3 Filtre Passe-bande



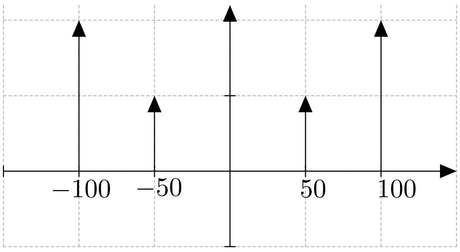
Exemple :



3.5.4 Filtre Coupe-bande

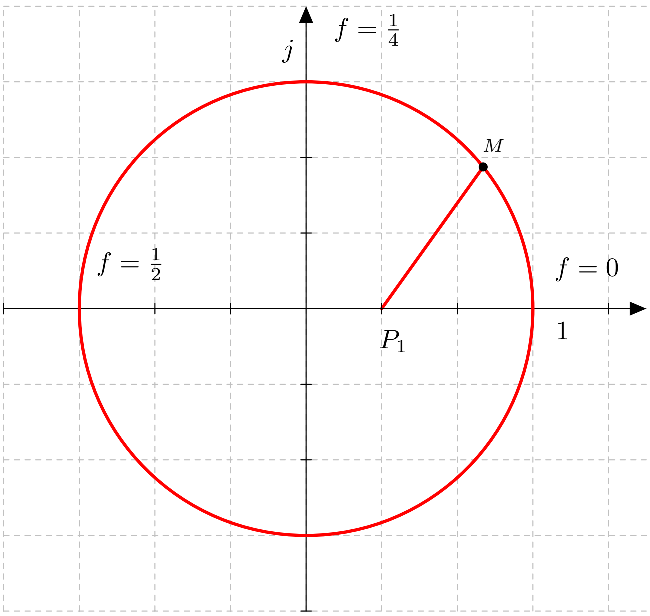


Exemple :



- Si on a un filtre passe-bas et $f_c = 75Hz$, on a en sortie les raies en $\pm 50Hz$.
- Si on veut un passe-bande pour récupérer la raie de $100Hz$, on prend $f_1 = 98$ et $f_2 = 101$ par exemple.
- Si On veut un coupe-bande pour tout récupérer, on prend $f_c = 55$ et $f_1 = 85$.

3.5.5 Allure de filtres



On a :

$$f = 0 \iff e^{2\pi j f} = 1$$
$$f = \frac{1}{2} \iff e^{2\pi j f} = -1$$
$$f = \frac{1}{4} \iff e^{2\pi j f} = j$$

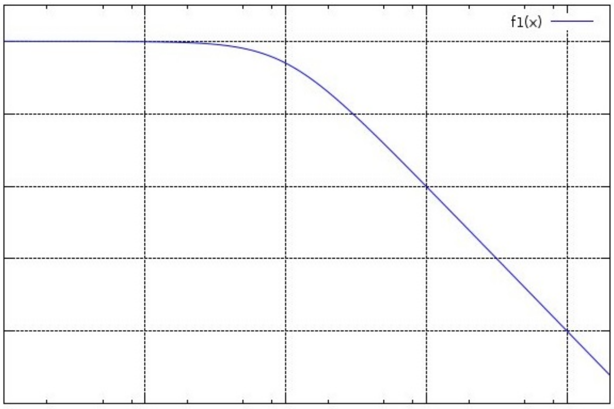
D'où, si $f \in$ cercle unité, $X(f) = X(z)|_{z=e^{2\pi jf}}$.
On a donc,

$$X(z) = \frac{1 - z_1 z^{-1}}{1 - p_1 z^{-1}} = \frac{z - z_1}{z - p_1}$$

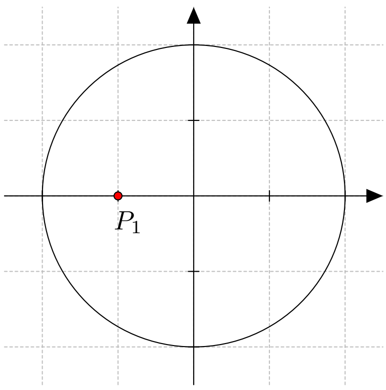
$$\text{et } |X(f)| = \frac{\overline{MZ_1}}{\overline{MP_1}}$$

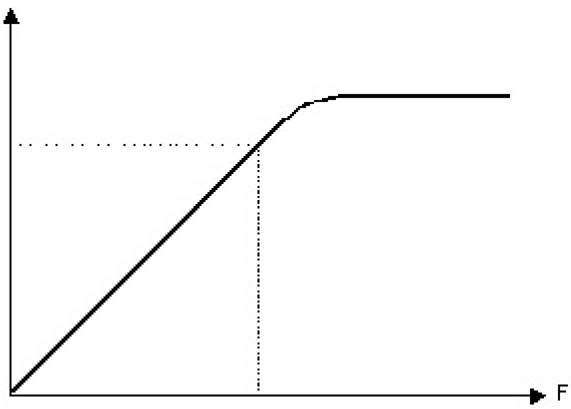
$$\text{avec } \begin{cases} M \text{ d'affixe } z \\ Z_i \text{ d'affixe } z_i \\ P_i \text{ d'affixe } p_i \end{cases}$$

Passe-bas : Si $z_1 = 0, |X(f)| = \frac{1}{MP_1}$. Quand $f = 0, \overline{MP_1}$ est la plus petite $\Longrightarrow$ $|X(f)|$ le plus grand. Donc le filtre est un passe-bas.

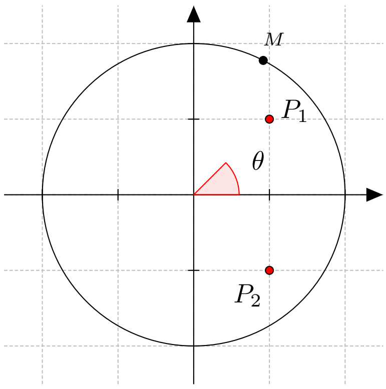


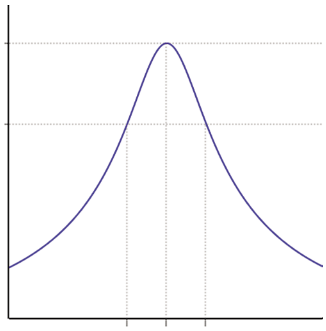
Passe-haut : $f = \frac{1}{2}$ est la fréquence qui rend la distance $\overline{MP_1}$ la plus petite.



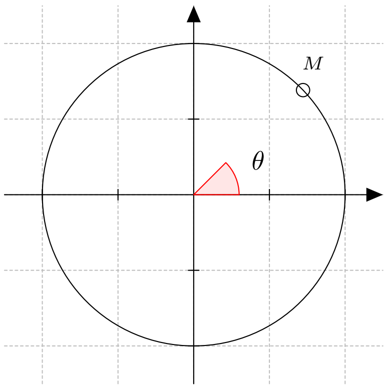


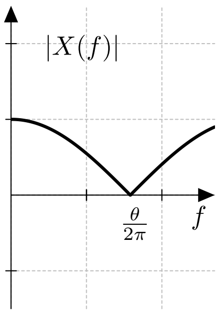
Passe-bande : $|X(f)| = \frac{1}{MP_1 MP_2}$, $\overline{MP_1}$ petit quand $f = \frac{\theta}{2\pi}$



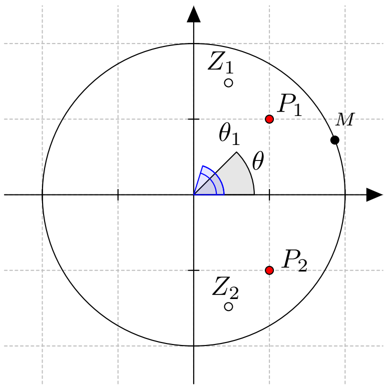


Coupe-bande : $H(f)\big|_{f={}^{\theta}/_{2\pi}} = 0$ et $|X(f)| = \overline{MZ_1}$





Autre : $|X(f)| = \frac{\overline{MZ_1} \times \overline{MZ_2}}{\overline{MP_1} \times \overline{MP_2}}$



Définition : Filtre à réponse impultionnelle finie (RIF) :

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_n z^{-n}, (\implies D(z) = 1)$$

$$H(z) \xrightarrow{TZ^{-1}} h_k = \begin{cases} b_k & 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \implies \text{pôles centrés en } 0$$

Un RIF est toujours stable ($p_1 = 0$ d'ordre n).

Définition : Filtre à réponse impultionnelle infinie (RII) :

Filtre RII purement récursif :

$$H(z) = \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_p z^{-p}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

On a donc :

$$Y(z)(1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_p z^{-p}) = b_0 X(z) \xrightarrow{TZ^{-1}} y_k + a_1 y_{k-1} + \cdots + a_p y_{k-p} = b_0 x_k$$
$$\implies y_k = b_0 x_k - a_1 y_{k-1} - \cdots - a_p y_{k-p} \implies \text{ on a des pôles et des 0 centrés}$$

Filtre récursif :

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_p z^{-p}}$$

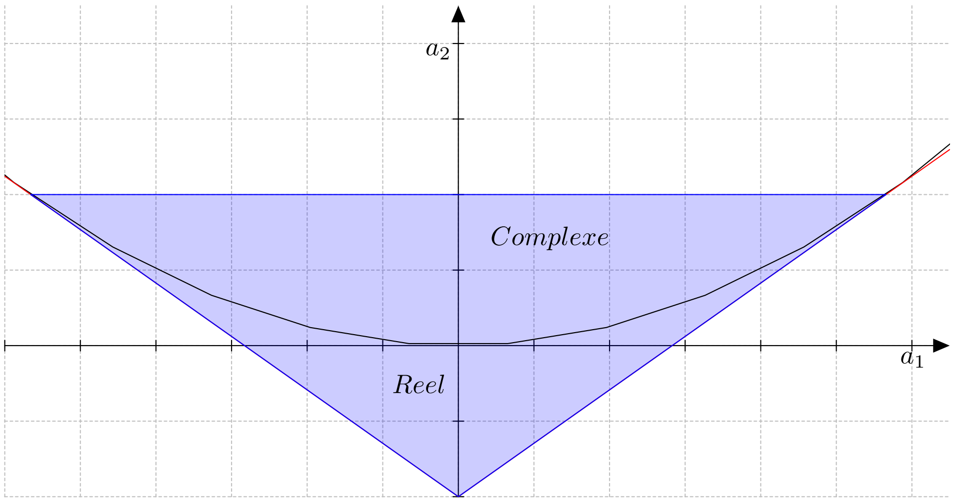
Par TZ^{-1}, on a :

$$y_k = b_0 x_k + \cdots + b_n x_{k-n} - a_1 y_{k-1} + \cdots + a_p y_{k-p} \implies \text{ on a des pôles et des 0}$$

Exemple : Etude d'un filtre RII purement récursif d'ordre 2 :

$$H(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

Est-il stable ? Dans quel domaine ?
On a : $D(1) > 0, D(-1) > 0$ et $1 > |a_2|$



$D(1) = 1 + a_1 + a_2, D(-1) = 1 - a_1 + a_2, |a_2| < 1$
On a : $\Delta = a_1^2 - 4a_2 \implies$ pôles réelles si $a_1^2 \geq 4a_2$
Supposons avoir deux pôles complexes :

$$z_1 = \rho e^{j\theta}, z_2 = \rho e^{-j\theta}$$
$$H(z) = \frac{1}{(1 - \rho e^{j\theta} z^{-1})(1 - \rho e^{-j\theta} z^{-1})}$$

On peut écrire $H(z)$ sous la forme suivante :

$$H(z) = \frac{\alpha}{1 - \rho e^{j\theta} z^{-1}} + \frac{\beta}{1 - \rho e^{-j\theta} z^{-1}}$$

Avec :

$$\alpha = \frac{1}{1 - \rho e^{-j\theta} z^{-1}}\Big|_{z^{-1} = \frac{1}{\rho} e^{-j\theta}} = \frac{1}{1 - e^{-2j\theta}}$$
$$\beta = \frac{1}{1 - e^{2j\theta}}$$
$$\implies H(z) = \frac{1}{(1 - e^{-2j\theta})(1 - \rho e^{j\theta} z^{-1})} + \frac{1}{(1 - e^{2j\theta})(1 - \rho e^{-j\theta} z^{-1})}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
\text{Pour } |z| > \rho : h_k &= \frac{1}{1 - e^{-2j\theta}} \rho^k e^{jk\theta} + \frac{1}{1 - e^{2j\theta}} \rho^k e^{-jk\theta}, k \geq 0 \\
&= \rho^k \left[\frac{e^{j\theta}}{e^{j\theta} - e^{-j\theta}} \times e^{jk\theta} + \frac{e^{-j\theta}}{e^{-j\theta} - e^{j\theta}} \times e^{-jk\theta} \right] \\
&= \rho^k \times \frac{e^{j(k+1)\theta} - e^{-j(k+1)\theta}}{e^{j\theta} - e^{-j\theta}} \\
&= \rho^k \times \frac{\sin{(k+1)\theta}}{\sin\theta} u_k
\end{aligned}$$

On a donc :$a_2 = \rho^2$ et $a_1 = -2\rho\cos\theta \implies \rho < 1$

$\boxed{3.6}$ Fréquence de résonance

$H(f) = H(z)\big|_{e^{2\pi jf}}$

$$\text{Si } H(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \text{ alors } H(f) = \frac{1}{1 + a_1 e^{-2\pi jf} + a_2 e^{-4\pi jf}} = \frac{1}{D(f)}$$

$$
\begin{aligned}
|H(f)|^2 &= \frac{1}{|D(f)|^2} \\
|D(f)| &= 1 + a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos 2\pi f + 2a_1\cos 2\pi f + 2a_2\cos 4\pi f \\
\left(|H(f)|^2\right)' &= \frac{-2|D(f)|'}{|D(f)|^3} \\
|D(f)|' &= -4\pi \sin 2\pi f(a_1a_2 + a_2 + 4a_2\cos 2\pi f)
\end{aligned}
$$

D'où

$$\sin 2\pi f = 0 \iff f = 0 \text{ ou } f = \frac{1}{2}$$

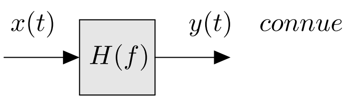
Et

$$a_1(1+a_2) + 4a_2\cos 2\pi f = 0 \iff \cos 2\pi f = \frac{-a_1(1+a_2)}{4a_2}$$

$$\implies f_r = \boxed{\frac{1}{2\pi}\arccos\frac{-a_1(1+a_2)}{4a_2}}$$

3.7 Déconvolution

On cherche un filtre G qui permet de retrouver l'entrée $x(t)$.

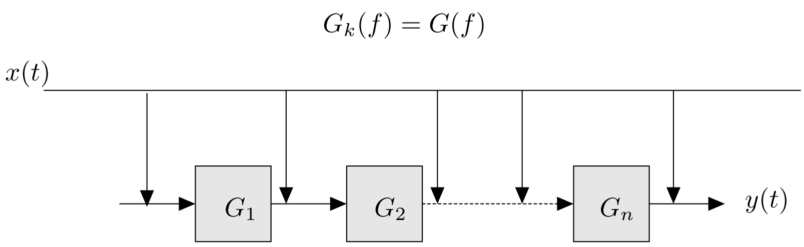


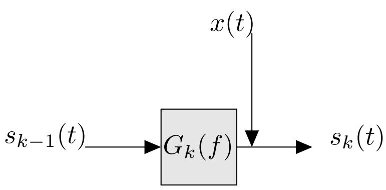
On a :

$$x(t) * h(t) = y(t) \xrightarrow{TZ} H(f)X(f) = Y(f)$$

D'où : $X(f) = \frac{Y(f)}{H(f)}$. Si il existe $f_1 \mid H(f_1) = 0 \implies Y(f_1) = 0 \implies$ donnée manquante.

Exemple : On cherche G permettant de retrouver l'entrée :

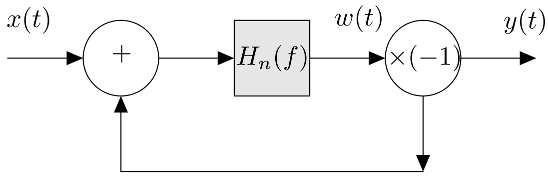




$$\begin{aligned} & s_k(t) = g_k(t) * s_{k-1}(t) + x(t) \\ & \text{avec } s_0(t) = x(t) \text{ et } s_n(t) = y(t) \\ & \xrightarrow{TZ} S_k(f) = G_k(f) \times S_{k-1}(f) + X(f) \end{aligned}$$

On en déduit donc :

$$\begin{aligned} & S_1(f) = X(f)(G(f)+1) \\ & S_2(f) = X(f)(G^2(f)+G(f)+1) \\ \implies & S_n(f) = X(f)(G^n(f)+\cdots+G(f)+1) \\ \implies & Y(f) = X(f) \times \frac{1-G^{n+1}(f)}{1-G(f)} \\ \implies & H_n(f) = \frac{1-G^{n+1}(f)}{1-G(f)} \end{aligned}$$



$$w(t) = h_n(t) * (x(t)+w(t)), y(t) = -w(t) \xrightarrow{TZ} W(f) = H_n(f)(X(f)+W(f))$$

Donc :

$$W(f) = \frac{H_n(f)}{1-H_n(f)} \times X(f)$$

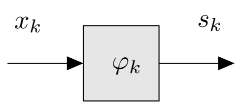
D'où :

$$\begin{aligned} W(f) &= \frac{1-G^{n+1}(f)}{G^{n+1}(f)-G(f)} \times X(f) \\ X(f) &= \frac{G^{n+1}(f)-G(f)}{1-G^{n+1}(f)} \times W(f) \\ &= -\frac{G^{n+1}(f)-G(f)}{1-G^{n+1}(f)} \times Y(f) \\ &= \frac{G(f)-G^{n+1}(f)}{1-G^{n+1}(f)} \times Y(f) \end{aligned}$$

Si $|G(f)| \ll 1, G^{n+1}(f) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \implies X(f) \approx G(f)Y(f)$.

3.8 Construction d'un filtre numérique

On suppose $X(f)$ et $H(f)$ à support bornée sur $[-B, B]$.
Echantillonage : on pose $x_k = x(kT_e), T_e =$ période d'échantillonage.



On pose : $e \stackrel{\Delta}{=} y_k - s_k$.

$$\begin{aligned} y(t) = h(t) * x(t) &\xrightarrow{TZ} Y(f) = H(f)X(f) \\ \Longrightarrow y(t) &= \int_{-B}^{B} H(f)X(f)e^{2\pi jft}df \\ \Longrightarrow y_k = y(kT_e) &= \int_{-B}^{B} H(f)X(f)e^{2\pi jkfT_e}df \end{aligned}$$

De la même manière

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-B}^{B} X(f)e^{2\pi jft}df \\ \Longrightarrow x_k &= \int_{-B}^{B} X(f)e^{2\pi jkfT_e}df \end{aligned}$$

Et

$$s_k = x_k * \varphi_k = \sum_m \varphi_m x_{k-m}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} e_k &= \int_{-B}^{B} X(f)e^{2\pi jkfT_e}\left(H(f) - \sum_m \varphi_m e^{2\pi jfmT_e}\right)df \\ &= -\sum_m \varphi_m \int_{-B}^{B} X(f)e^{2\pi j(k-m)fT_e}df + \int_{-B}^{B} H(f)X(f)e^{2\pi jkfT_e}df \end{aligned}$$

Si $e_k = 0$, alors :

$$H(f) = \sum_m \varphi_m e^{-2\pi jfmT_e}$$

D'où :

$$\varphi_m = \frac{1}{f_e}\int_{-B}^{B} H(f)e^{2\pi jf\frac{m}{f_e}}df$$