Pic de Dirac

Soit le signal rectangulaire suivant:

$$\frac{1}{T} rect_{\frac{T}{2}}(t) = 1_{[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]}$$

C'est une rectangulaire de largeur T et de hauteur $\frac{1}{T}$. Son intégrale (*i.e.* superficie) vaut 1.

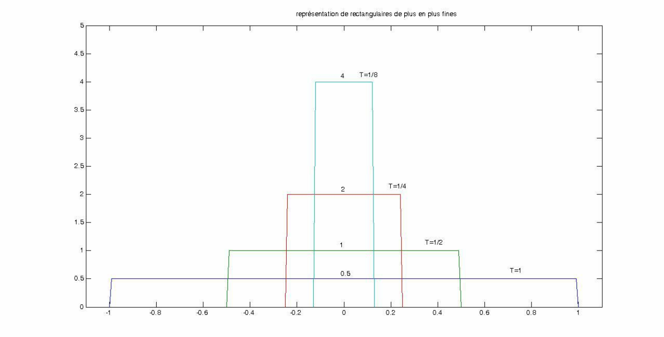

*fig*1: *représentation de rectangulaires de superficies égales à* 1

Si $T \to 0$ alors cette rectangulaire a une largeur qui tend vers 0 et une hauteur qui tend vers l'infini.Et son intégrale vaut toujours 1. On l'appelle *distribution de Dirac* et on l'a note $\delta(t)$.

$$\boxed{\delta(t) = \lim_{T \to 0} \frac{1}{T} rect_{\frac{T}{2}}(t)}$$

Par convention, la *Dirac* est représentée par une flèche vers le haut de hauteur 1 (l'intégrale de δ vaut 1), positionnée en $t = 0$.

En $\delta(t)$, nous avons une flèche de hauteur 1 positionnée en $t = a$.

Soit $f(t)$ fonction intégrable sur R.

On veut calculer l'intégrale suivante:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt$$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \lim_{T \to 0} \frac{1}{T} rect_{\frac{T}{2}}(t)dt = \lim_{T \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{T} rect_{\frac{T}{2}}(t)dt$$

$$I = \lim_{T \to 0} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \frac{1}{T} dt$$

On pose $t = uT$ donc $dt = Tdu$ et $I = \lim_{T \to 0} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(uT)du$

Par passage à la limite $I = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(0)du = f(0)$.

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0) \qquad (1)}$$

C’est la définition de la distribution de *Dirac*.

Représentation en fréquence

$\rightarrow \qquad f(t) = e^{-2\pi jft}$

$$(1) \qquad \Rightarrow \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = 1$$

$$\boxed{\delta(t) \quad \xrightarrow{TF} \quad 1}$$

Par symétrie de correspondance:

$$\boxed{1 \quad \xrightarrow{TF} \quad \delta(f)}$$

$\rightarrow \qquad x(t)e^{2\pi jf_0 t} \quad \xrightarrow{TF} \quad X(f-f_0)$

Si $x(t) = 1$, nous avons:

$$\boxed{e^{2\pi jf_0 t} \quad \xrightarrow{TF} \quad \delta(f-f_0) \qquad e^{-2\pi jf_0 t} \quad \xrightarrow{TF} \quad \delta(f+f_0)}$$

Exemple: $x(t) = cos 2\pi f_0 t$

$x(t) = \frac{1}{2}e^{2\pi jf_0 t} + \frac{1}{2}e^{-2\pi jf_0 t} \quad \xrightarrow{TF} \quad X(f) = \frac{1}{2}\delta(f-f_0) + \frac{1}{2}\delta(f+f_0)$

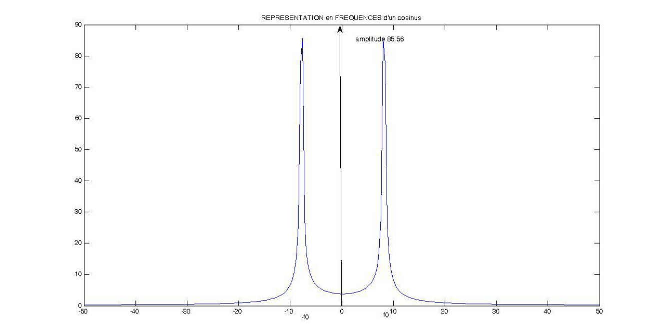

*fig*2: *Représentation en fréquence de* $\cos 2\pi f_0 t$

$\rightarrow \qquad x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{2\pi j\frac{k}{T}t} \quad \xrightarrow{TF} \quad X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \delta(f - \frac{k}{T})$

La représentation en fréquence d’un développement en série de *Fourier* est un spectre de raies d’amplitude X_k positionnées en $\frac{k}{T}$.