

## Introduction

On considère la transformation linéaire d'un vecteur  $g$  de  $\mathbb{C}^N = \mathbb{C}^{2^M-1}$  de la forme

$$g = \begin{pmatrix} g_0 \\ \vdots \\ g_k \end{pmatrix} \quad k \in [[0, 2^M-1]]$$

par un vecteur  $G \in \mathbb{C}^N$  de la forme

$$G = \begin{pmatrix} G_0 \\ \vdots \\ G_k \end{pmatrix} \quad j \in [[0, 2^M-1]]$$

tel que

$$G_j = \sum_{k=0}^{2^M-1} g_k W_N^{jk}$$

avec  $W_N^{jk} = e^{\frac{2I\pi}{2^M}} I\mathbb{C}$  tel que  $I^2 = -1$ .

$G$  est lié à  $g$  par la matrice  $S$  de taille  $N \times N$  tel que  $G = Sg$  avec

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N^1 & W_N^2 & \dots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & \ddots & \ddots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)^2} \end{pmatrix}$$

On reconnaît ici une matrice de Vandermonde  $V(1, W_N, \dots, W_N^{N-1})$ .  
Remarquons que  $S$  est symétrique.

## 1 La transformation est inversible

Montrons que cette transformation est inversible, c'est à dire que le déterminant de  $S$  est différent de 0.

Remarquons d'abord que si deux lignes de cette matrice sont identiques, alors le déterminant est nul.

Soit

$$V(1, W_N^1, \dots, W_N^{(N-1)}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N^1 & W_N^2 & \dots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & \ddots & \ddots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)^2} \end{pmatrix}$$

Montrons la relation suivante :

$$V(1, W_N^1, \dots, W_N^{(N-1)}) = V(1, W_N^1, \dots, W_N^{(N-2)}) \prod_{k=0}^{N-2} (W_N^{(N-1)} - W_N^k)$$

Posons

$$\begin{aligned} Q(x) &= V(1, W_N^1, \dots, W_N^{(N-2)}, x) \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N^1 & W_N^2 & \dots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & \ddots & \ddots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{N-2} & W_N^{2(N-2)} & \dots & W_N^{(N-1)(N-2)} \\ 1 & x^1 & x^2 & \dots & x^{(N-1)} \end{pmatrix} \\ &= x^{(N-1)} \det \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N^1 & W_N^2 & \dots & W_N^{N-2} \\ 1 & W_N^2 & \ddots & \ddots & W_N^{2(N-2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{N-2} & W_N^{2(N-2)} & \dots & W_N^{(N-2)^2} \end{pmatrix}}_{|S_{N-2}|} \end{aligned}$$

Donc  $Q \in P[X^{N-1}]$ . Par construction de  $Q$ , on a  $Q(1) = Q(W_N^1) = \dots Q(W_N^{(N-2)}) = 0$  car cela correspond à 2 lignes égales et donc un déterminant nul.

Donc

$$\begin{aligned} Q(x) &= C \times \prod_{k=0}^{N-2} (x - W_N^k) \\ &= Cx^{N-1} + \dots \end{aligned}$$

Par identification, on a

$$C = |S_{N-2}|$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
Q(W_N^{(N-1)}) &= V(1, W_N^1, \dots, W_N^{(N-1)}) \\
&= V(1, W_N^1, \dots, W_N^{(N-2)}) \prod_{k=0}^{N-2} (W_N^{(N-1)} - W_N^k) \\
&= V(1, W_N^1, \dots, W_N^{(N-3)}) \prod_{k=0}^{N-3} (W_N^{(N-2)} - W_N^k) \prod_{k=0}^{N-2} (W_N^{(N-1)} - W_N^k) \\
&= V(1, W_N^1) \prod_{k=0}^2 (W_N^3 - W_N^k) \times \dots \times \prod_{k=0}^{N-2} (W_N^{(N-1)} - W_N^k) \\
&= 1 \times (W_N^1 - 1) \times \dots \times \prod_{k=0}^{N-2} (W_N^{(N-1)} - W_N^k)
\end{aligned}$$

Comme  $W_N^i \neq W_N^j \forall i \neq j$  tel que  $i, j \in \{0, \dots, N-1\}$ , alors on a  $Q(W_N^{(N-1)}) = V(1, W_N^1, \dots, W_N^{(N-1)}) \neq 0$ . Donc cette transformation est inversible.

## 2 Inverse de la transformation S

Montrons que la matrice  $\frac{1}{N}V(1, W_N^{-1}, \dots, W_N^{1-N})$  est la matrice inverse de  $S$ .

Pour cela, calculons leur produit

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N^1 & W_N^2 & \dots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & \ddots & \ddots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)^2} \end{pmatrix} \times \frac{1}{N} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N^{-1} & W_N^{-2} & \dots & W_N^{1-N} \\ 1 & W_N^{-2} & \ddots & \ddots & W_N^{2(1-N)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{1-N} & W_N^{2(1-N)} & \dots & W_N^{(1-N)^2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{N} \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{N-1} 1 & \sum_{i=0}^N W_N^{-i} & \dots & \sum_{i=0}^{N-1} W_N^{-(N-1)i} \\ \sum_{i=0}^{N-1} W_N^i & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{N-1} W_N^{(N-1)i} & \dots & \dots & \sum_{i=0}^{N-1} W_N^{i^2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Or

- $W_N^{i^2} = e^{\frac{4I\pi i}{2^M}} = (e^{2I\pi i})^{2^{1-M}} = 1$

$$\begin{aligned}
\bullet \sum_{i=0}^N W_N^{-i} &= \frac{1-e^{\frac{2I\pi i}{2^M} \times 2^M}}{1-e^{\frac{2I\pi i}{2^M}}} = 0 \\
&= \frac{1}{N} \begin{pmatrix} N & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & N \end{pmatrix} = I_N
\end{aligned}$$

### 3 Cas où $M = 3$

On se place dans le cas  $M = 3$ , alors  $N = 2^3 = 8$ .  $S_{jk} = W_8^{jk}$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W_8^1 & W_8^2 & W_8^3 & W_8^4 & W_8^5 & W_8^6 & W_8^7 \\ 1 & W_8^2 & W_8^4 & W_8^6 & W_8^8 & W_8^{10} & W_8^{12} & W_8^{14} \\ 1 & W_8^3 & W_8^6 & W_8^9 & W_8^{12} & W_8^{15} & W_8^{18} & W_8^{21} \\ 1 & W_8^4 & W_8^8 & W_8^{12} & W_8^{16} & W_8^{20} & W_8^{24} & W_8^{28} \\ 1 & W_8^5 & W_8^{10} & W_8^{15} & W_8^{20} & W_8^{25} & W_8^{30} & W_8^{35} \\ 1 & W_8^6 & W_8^{12} & W_8^{18} & W_8^{24} & W_8^{30} & W_8^{36} & W_8^{42} \\ 1 & W_8^7 & W_8^{14} & W_8^{21} & W_8^{28} & W_8^{35} & W_8^{42} & W_8^{49} \end{pmatrix}$$

Remarquons que nous pouvons réécrire cette matrice grâce au cercle trigonométrique puisque, par exemple,  $W_8^p = \left(e^{\frac{2\pi I}{8}}\right)^p = e^{\frac{2p\pi I}{8}}$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W_8^1 & W_8^2 & W_8^3 & W_8^4 & W_8^5 & W_8^6 & W_8^7 \\ 1 & W_8^2 & W_8^4 & W_8^6 & W_8^0 & W_8^2 & W_8^4 & W_8^6 \\ 1 & W_8^3 & W_8^6 & W_8^1 & W_8^4 & W_8^7 & W_8^2 & W_8^5 \\ 1 & W_8^4 & W_8^0 & W_8^4 & W_8^0 & W_8^4 & W_8^0 & W_8^4 \\ 1 & W_8^5 & W_8^2 & W_8^7 & W_8^4 & W_8^1 & W_8^6 & W_8^3 \\ 1 & W_8^6 & W_8^4 & W_8^2 & W_8^0 & W_8^6 & W_8^4 & W_8^2 \\ 1 & W_8^7 & W_8^6 & W_8^5 & W_8^4 & W_8^3 & W_8^2 & W_8^1 \end{pmatrix}$$

On a

- $W_8^4 = \left(e^{\frac{2I\pi}{8}}\right)^4 = e^{I\pi} = -1$
- $W_8^2 = \left(e^{\frac{2I\pi}{8}}\right)^2 = e^{I\frac{\pi}{2}} = i$
- $W_8^6 = \left(e^{\frac{2I\pi}{8}}\right)^6 = e^{I\frac{3\pi}{2}} = -i$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W_8^1 & i & W_8^3 & -1 & W_8^5 & -i & W_8^7 \\ 1 & i & -1 & -i & 1 & i & -1 & -i \\ 1 & W_8^3 & -i & W_8^1 & -1 & W_8^7 & i & W_8^5 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & W_8^5 & i & W_8^7 & -1 & W_8^1 & -i & W_8^3 \\ 1 & -i & -1 & i & 1 & i & -1 & i \\ 1 & W_8^7 & -i & W_8^5 & -1 & W_8^3 & i & W_8^1 \end{pmatrix}$$

#### 4 Calcul de $T^{(M)}$ dans le cas $M = 3$

On introduit la transformation qui à un nombre binaire de la forme  $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_N)$  associe la transformation  $r : (\lambda_N, \lambda_{N-1}, \dots, \lambda_0)$ .

Notons en binaire l'indice des lignes de la matrice  $S$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W_8^1 & i & W_8^3 & -1 & W_8^5 & -i & W_8^7 \\ 1 & i & -1 & -i & 1 & i & -1 & -i \\ 1 & W_8^3 & -i & W_8^1 & -1 & W_8^7 & i & W_8^5 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & W_8^5 & i & W_8^7 & -1 & W_8^1 & -i & W_8^3 \\ 1 & -i & -1 & i & 1 & i & -1 & i \\ 1 & W_8^7 & -i & W_8^5 & -1 & W_8^3 & i & W_8^1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 000 (0) \\ 001 (1) \\ 010 (2) \\ 011 (3) \\ 100 (4) \\ 101 (5) \\ 110 (6) \\ 111 (7) \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 000 (0) \\ 100 (4) \\ 010 (2) \\ 110 (6) \\ 001 (1) \\ 101 (5) \\ 011 (3) \\ 111 (7) \end{matrix}$$

On associe alors la matrice de permutation  $P$  qui permet d'effectuer la permutation des lignes précédentes

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors

$$P \times S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i & 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -i & -1 & i & 1 & -i & -1 & i \\ 1 & W_8^1 & i & W_8^3 & -1 & W_8^5 & -i & W_8^7 \\ 1 & W_8^5 & i & W_8^7 & -1 & W_8^3 & -i & W_8^1 \\ 1 & W_8^3 & -i & W_8^1 & -1 & W_8^5 & i & W_8^7 \\ 1 & W_8^7 & -i & W_8^5 & -1 & W_8^1 & i & W_8^3 \end{pmatrix}$$

Remarquons que  $W_8^7 = -W_8^3$  et  $W_8^5 = -W_8$  (cercle trigonométrique)

Donc

$$T^{(3)} = P \times S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & \vdots & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i & \vdots & 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -i & -1 & i & \vdots & 1 & -i & -1 & i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & W_8 & i & W_8^3 & \vdots & -1 & -W_8 & -i & -W_8^3 \\ 1 & -W_8 & i & -W_8^3 & \vdots & -1 & W_8 & -i & W_8^3 \\ 1 & W_8^3 & -i & W_8 & \vdots & -1 & -W_8^3 & i & -W_8 \\ 1 & -W_8^3 & -i & -W_8 & \vdots & -1 & W_8^3 & i & W_8 \end{pmatrix}$$

On pose alors

$$T^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}$$

et

$$L^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W_8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W_8^3 \end{pmatrix}$$

$L^{(2)}$  est une matrice diagonale de taille 4.

On a

$$\begin{aligned} T^{(2)} \times L^{(2)} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W_8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W_8^3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & W_8 & i & W_8^3 \\ 1 & -W_8 & i & -W_8^3 \\ 1 & iW_8 & -i & -iW_8^3 \\ 1 & -iW_8 & -i & iW_8^3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Or  $iW_8 = e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{\frac{3i\pi}{4}} = W_8^3$  et  $iW_8^3 = e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{3\pi}{4}} = e^{\frac{5i\pi}{4}} = -e^{\frac{i\pi}{4}} = -W_8$   
ainsi on retrouve bien

$$T^{(2)} \times L^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & W_8 & i & W_8^3 \\ 1 & -W_8 & i & -W_8^3 \\ 1 & W_8^3 & -i & W_8 \\ 1 & -W_8^3 & -i & -W_8 \end{pmatrix}$$

On peut réécrire  $T^{(3)}$  sous la forme

$$T^{(3)} = \begin{pmatrix} T^{(2)} & T^{(2)} \\ T^{(2)}L^{(2)} & -T^{(2)}L^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^{(2)} & 0 \\ 0 & T^{(2)} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_d^{(2)} & I_d^{(2)} \\ L^{(2)} & -L^{(2)} \end{pmatrix}$$

## 5 Suite

Soit  $u_0 \in \mathbb{C}^N$

$$\begin{aligned} T^{(3)}u_0 &= \begin{pmatrix} T^{(2)} & 0 \\ 0 & T^{(2)} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_d^{(2)} & I_d^{(2)} \\ L^{(2)} & -L^{(2)} \end{pmatrix} u_0 \\ &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} T^{(1)} & 0 \\ 0 & T^{(1)} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_d^{(1)} & I_d^{(1)} \\ L^{(1)} & -L^{(1)} \end{pmatrix} u_0 & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} T^{(1)} & 0 \\ 0 & T^{(1)} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_d^{(1)} & I_d^{(1)} \\ L^{(1)} & -L^{(1)} \end{pmatrix} u_0 \end{pmatrix} \\ &\quad \times \begin{pmatrix} I_d^{(2)} & I_d^{(2)} \\ L^{(2)} & -L^{(2)} \end{pmatrix} u_0 \end{aligned}$$

Cherchons  $T^{(1)}$

$$T^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^{(1)} & T^{(1)} \\ T^{(1)}L^{(1)} & -T^{(1)}L^{(1)} \end{pmatrix}$$

Où  $T^{(1)}$  est de taille 4 et  $L^{(1)}$  est une matrice diagonale de taille 4.

Par identification, on trouve

$$T^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et

$$L^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

Calculons  $u_1 = \begin{pmatrix} I_d^{(2)} & I_d^{(2)} \\ L^{(2)} & -L^{(2)} \end{pmatrix} u_0$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W_8 & 0 & 0 & 0 & W_8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W_8^3 & 0 & 0 & 0 & W_8^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{0,0} \\ u_{0,1} \\ u_{0,2} \\ u_{0,3} \\ u_{0,4} \\ u_{0,5} \\ u_{0,6} \\ u_{0,7} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_{0,0} + u_{0,4} \\ u_{0,1} + u_{0,5} \\ u_{0,2} + u_{0,6} \\ u_{0,3} + u_{0,7} \\ u_{0,0} + u_{0,4} \\ W_8(u_{0,1} + u_{0,5}) \\ i(u_{0,2} + u_{0,6}) \\ W_8^3(u_{0,3} + u_{0,7}) \end{pmatrix}$$

Coût d'opération : 4 expo + 4 additions/soustractions + 6 multiplications

Calculons  $u_2 = \begin{pmatrix} I_d^{(1)} & I_d^{(1)} \\ L^{(1)} & -L^{(1)} \end{pmatrix} u_0$

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & -1 & 0 & & \vdots \\ 0 & i & 0 & -i & & \\ & & & & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & & & & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & & & & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \dots & & & 0 & i & 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,0} \\ u_{1,1} \\ u_{1,2} \\ u_{1,3} \\ u_{1,4} \\ u_{1,5} \\ u_{1,6} \\ u_{1,7} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_{1,0} + u_{1,2} \\ u_{1,1} + u_{1,3} \\ u_{1,0} - u_{1,2} \\ i(u_{1,1} - u_{1,3}) \\ u_{1,4} + u_{1,6} \\ u_{1,5} + u_{1,7} \\ u_{1,4} - u_{1,6} \\ i(u_{1,5} - u_{1,7}) \end{pmatrix}$$

Coût d'opération : 8 additions/soustractions + 2 multiplications



Calcul de  $T^{(3)}u_0$

$$\begin{aligned}
T^{(3)}u_0 &= \begin{pmatrix} T^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & T^{(1)} & \\ & & T^{(1)} & 0 \\ 0 & & 0 & T^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{2,0} \\ u_{2,1} \\ u_{2,2} \\ u_{2,3} \\ u_{2,4} \\ u_{2,5} \\ u_{2,6} \\ u_{2,7} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & & & & & 0 \\ 1 & -1 & & & & & & \\ 0 & & 1 & 1 & & & & \\ & & & 1 & -1 & & & \\ & & & & 1 & 1 & & \\ & & & & 1 & -1 & & 0 \\ & & & & & 1 & 1 & \\ 0 & & & & & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{2,0} \\ u_{2,1} \\ u_{2,2} \\ u_{2,3} \\ u_{2,4} \\ u_{2,5} \\ u_{2,6} \\ u_{2,7} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} u_{2,0} + u_{2,1} \\ u_{2,0} - u_{2,1} \\ u_{2,2} + u_{2,3} \\ u_{2,2} - u_{2,3} \\ u_{2,4} + u_{2,5} \\ u_{2,4} - u_{2,5} \\ u_{2,6} + u_{2,7} \\ u_{2,6} - u_{2,7} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Coût d'opération : 8 additions/soustractions

On voit ici très clairement l'interêt de cette méthode puisque les coûts de calculs ont été très nettement diminués, il y n'y a notamment plus de calcul exponentielle à effectuer et donc moins d'erreur d'approximation.