AlgoNum GM3
2022/2023

Systèmes Linéaires et Erreurs

AlgoNum - TD4 - MMSN

Etudiants : **DANTAS Alexandre** **DELL'OVA Fabio** **GUINES Antoine** **LANGOLFF Clément** **KESSLER Aymeric**

Encadrant : **Gleyse. B**

Question 1

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$A_n = n^2 A$

Remarque : A_n est une matrice carré d'ordre $n-1$, symétrique, tridiagonale.

Montrons que A_n est définit positive.

Soit $x \neq 0 \in \mathbb{R}^{n-1}$

$$\begin{aligned} < A_n x, x > &=< n^2 A x, x > \\ &= n^2 < \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \\ \vdots \\ -x_{n-2} + 2x_{n-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} > \\ &= n^2 (2x_1^2 - x_2 x_1 - x_{n-2} x_{n-1} + 2x_{n-1}^2 + \sum_{i=2}^{n-2} 2x_i^2 - x_{i-1} x_i - x_{i+1} x_i) \\ &= n^2 (x_1^2 + x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 + x_2^2 + ... + x_{n-2}^2 - 2x_{n-2} x_{n-1} + x_{n-1}^2 + x_{n-1}^2) \\ &= n^2 (x_1^2 + x_{n-1}^2 + \sum_{i=1}^{n-2} (x_i - x_{i+1})^2) > 0 \end{aligned}$$

De plus, supposons que

$$\begin{aligned} &< A_n x, x >= 0 \\ \Leftrightarrow & x_1^2 + x_{n-1}^2 + \sum_{i=1}^{n-2} (x_i - x_{i+1})^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} {x_1}^2 & = 0 \\ {x_{n-1}}^2 & = 0 \ \textit{car tous les termes} > 0 \\ \sum_{i=1}^{n-2} (x_i - x_{i+1})^2 & = 0 \end{cases}$$

Grâce à la troisième expression, on en déduit alors que $x_i = x_{i+1} \ \forall i \in \{1, .., n-2\}$ Cependant, puisque $x_1 | x_{n-1}$sont nuls, par suite on a que tous les x_i sont nuls et c'est l'unique vecteur annulant le produit scalaire.

Ainsi, A_n est définit positive symétrique car $x \neq 0_{\mathbb{R}^{n-1}}$; on peut alors lui appliquer une décomposition de Cholesky et trouver une solution au système $A_n u^{(n)} = b^{(n)}$.

De plus, d'après le théorème du rang,

$$\underbrace{dim(Im(A_n))}_{n-1}+dim(ker(A_n)) = n-1$$

d'où $ker(A_n) = \{0\}$, ainsi la solution existe et elle est unique.

Question 2

D'après l'expression de A_n, en considérant un vecteur propre $p^{(\lambda)} = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_{n-1} \end{bmatrix}$ et sa valeur propre associé λ,on obtient le système de $n-1$ équations suivant :

$$\begin{cases} n^2(2p_1 - p_2) & = \lambda p_1 \\ n^2(-p_{k-1} + 2p_k - p_{k+1}) & = \lambda p_k \\ n^2(-p_{n-2} + 2p_{n-1}) & = \lambda p_{n-1} \end{cases}$$

On pose $h = \frac{1}{n}$, alors

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\frac{2}{h^2} - \lambda)p_1 - \frac{1}{h^2}p_2 & = 0 \\ \frac{1}{h^2}(-p_{k-1} + (2 - h^2\lambda)p_k - p_{k+1}) & = 0 \ k \in [2..n-2] \\ (\frac{2}{h^2} - \lambda)p_{n-1} - \frac{1}{h^2}p_{n-2} & = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2 - \lambda h^2)p_1 - p_2 & = 0 \\ -p_{k-1} + (2 - h^2\lambda)p_k - p_{k+1} & = 0 \ k \in [2..n-2] \\ (2 - \lambda h^2)p_{n-1} - p_{n-2} & = 0 \end{cases}$$

En considérant $p_0 = p_n = 0$, on peut récrire la première et la dernière équation de la forme :

$$\begin{cases} (2 - \lambda h^2)p_1 - p_2 = 0 & \Leftrightarrow -p_0 + (2 - \lambda h^2)p_1 - p_2 = 0 \\ (2 - \lambda h^2)p_{n-1} - p_{n-2} = 0 & \Leftrightarrow -p_{n-2} + (2 - \lambda h^2)p_{n-1} - p_n = 0 \end{cases}$$

Dans ce cas, on peut donc écrire de manière générale une relation de récurrence entre les trois termesp_{k-1}, p_k et p_{k+1} pour $1 \leq k \leq n-1$

$$-p_{k-1} + (2 - h^2\lambda)p_k - p_{k+1} = 0$$

On cherche des solutions de cette relation de récurrence de la forme $p_k = sin(k\alpha)$ avec $k \in [0...n]$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

On pose $p_k = sin(k\alpha) \ \ k \in [0...n]$.

Appliquons cette relation pour $k = 1$, alors on a

$$\begin{aligned} -p_{k-1} + (2 - h^2\lambda)p_k - p_{k+1} &= 0 \\ -sin(0 \times \alpha) + (2 - \lambda h^2)sin(\alpha) - sin(2\alpha) &= 0 \\ \Leftrightarrow (2 - \lambda h^2)sin(\alpha) - sin(2\alpha) &= 0 \end{aligned}$$

On a $sin(\alpha) \neq 0$ car autrement, $p_k = 0 \ \forall k \in [0..n]$ ce qui donnerait un vecteur propre nul c'est donc absurde.

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (2 - \lambda h^2)sin(\alpha) = sin(2\alpha) \\ &\Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{h^2}(1 - cos(\alpha)) \\ &\Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{h^2}(2sin^2(\frac{\alpha}{2})) = \frac{4}{h^2}sin^2(\frac{\alpha}{2}) \end{aligned}$$

Utilisons maintenant les conditions $p_0 = p_n = 0$ pour donner une forme générale aux valeurs propres de A_n

On a vu précédemment que $\forall k \in [1...n - 1]$, le système pouvait s'écrire :

$$-sin((k - 1)\alpha) + (2 - \lambda h^2)sin(k\alpha) - sin((k + 1)\alpha) = 0$$

On déduit ensuite

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow -(sin(k\alpha)cos(\alpha) - sin(\alpha)cos(k\alpha)) + (2 - \lambda h^2)sin(k\alpha) - (sin(k\alpha)cos(\alpha) + sin(\alpha)cos(k\alpha)) = 0 \\ &\Leftrightarrow -sin(k\alpha)cos(\alpha) + sin(\alpha)cos(k\alpha) + (2 - \lambda h^2)sin(k\alpha) - sin(k\alpha)cos(\alpha) - sin(\alpha)cos(k\alpha) = 0 \\ &\Leftrightarrow -2sin(k\alpha)cos(\alpha) + (2 - \lambda h^2)sin(k\alpha) = 0 \\ &\Leftrightarrow (2 - \lambda h^2)sin(k\alpha) = 2sin(k\alpha)cos(\alpha) \ car \ (sin(\alpha) \neq 0) \\ &\Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{h^2}(1 - cos(\alpha)) \\ &\Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{h^2}(2sin^2(\frac{\alpha}{2})) = \frac{4}{h^2}sin^2(\frac{\alpha}{2}) \end{aligned}$$

Or nous avons également la relation

$$\begin{aligned} &p_n = 0 \Leftrightarrow sin(n\alpha) = 0 \\ &\Leftrightarrow n\alpha = \pi l \ avec \ l \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi l}{n} \ avec \ l \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

De plus, par les propriétés du sinus carré, les angles α seront tous positifs, différents et vont se trouver dans le premier cadran du cercle trigonométrique, c'est-à-dire dans $[0, \frac{\pi}{2}]$

On a finalement que $\lambda_l = \frac{4}{h^2}sin^2(\frac{\pi l}{2n}) \ \forall l \in [1..n - 1]$

De plus, le vecteur propre $p^{(\lambda_l)}$ s'écrit donc $p^{(\lambda_l)} = \begin{pmatrix} sin(\frac{\pi}{n}) \\ sin(\frac{2\pi}{n}) \\ \vdots \\ sin(\frac{\pi(n-1)}{n}) \end{pmatrix}$

La matrice $A_n$etant symétrique et définit positive, en se munissant de la norme 2, nous avons

$$K_2(A_n) = \frac{max_{(i)}(\lambda_i)}{min_{(i)}(\lambda_i)}$$

D'après le développement précédent, et par la croissance de $sin(x)$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$on a donc $\begin{cases} \max\limits_{i \in [[1,,n-1]]}(\lambda_i) & = \frac{4}{h^2} sin^2(\frac{\pi(n-1)}{2n}) \\ \min\limits_{i \in [[1,,n-1]]}(\lambda_i) & = \frac{4}{h^2} sin^2(\frac{\pi}{2n}) \end{cases}$ et par conséquent,

$$\begin{aligned} K_2(A_n) &= \frac{\frac{4}{h^2} sin^2(\frac{\pi(n-1)}{2n})}{\frac{4}{h^2} sin^2(\frac{\pi}{2n})} \\ &= \frac{sin^2(\frac{\pi(n-1)}{2n})}{sin^2(\frac{\pi}{2n})} \end{aligned}$$

De plus, on peut trouver un équivalent de K_2.

$$\begin{aligned} sin^2(\frac{\pi(n-1)}{2n}) &= sin^2(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n}) \\ &= cos^2(\frac{\pi}{2n}) \end{aligned}$$

On a quand $n \to +\infty$

$$\begin{aligned} cos^2(\frac{\pi}{2n}) &\sim 1 \\ sin^2(\frac{\pi}{2n}) &\sim \left(\frac{\pi}{2n}\right)^2 \end{aligned}$$

d'où

$$K_2(A_n) \sim \frac{1}{(\frac{\pi}{2n})^2} = \frac{4n^2}{\pi^2}$$

On peut ainsi dire que $K_2(A_n) \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$.

Par conséquent, la matrice est mal conditionnée; plus n est grand, plus la matrice va être difficile à inverser. En effet, la matrice A_n est proche d'une matrice singulière, l'erreur relative peut être de plus en plus grande lorsque l'on augmente n.

Soit $\tilde{u^{(n)}}$ la solution du système perturbé $A_n\tilde{u^{(n)}} = b^{(n)} + \Delta b^{(n)}$. On cherche à donner une majoration de $\frac{||\tilde{u^{(n)}} - u^{(n)}||_2^2}{||u^{(n)}||_2^2}$

On sait que $A_n\tilde{u^{(n)}} = b^{(n)} + \Delta b^{(n)}$ et $A_n u^{(n)} = b^{(n)}$

Donc $A_n(\tilde{u^{(n)}} - u^{(n)}) = \Delta b^{(n)}$. La matrice A_n étant inversible, on a en prenant la norme 2

$$\begin{aligned}
\left|\left|\tilde{u^{(n)}} - u^{(n)}\right|\right|_2^2 &= \left|\left|A_n^{-1}\Delta b^{(n)}\right|\right|_2^2 \\
&\leq \left|\left|A_n^{-1}\right|\right|_2^2 \left|\left|\Delta b^{(n)}\right|\right|_2^2 \\
&\leq \left|\left|A_n^{-1}\right|\right|_2^2 \times \frac{||A_n u^{(n)}||_2^2}{||A_n u^{(n)}||_2^2} \times \left|\left|\Delta b^{(n)}\right|\right|_2^2 \\
&\leq \left|\left|A_n^{-1}\right|\right|_2^2 \times \frac{||A_n||_2^2}{||b^{(n)}||_2^2} \times \left|\left|\Delta b^{(n)}\right|\right|_2^2 \\
\frac{||\tilde{u^{(n)}} - u^{(n)}||_2^2}{||u^{(n)}||_2^2} &\leq K_2(A_n)\frac{||\Delta b^{(n)}||_2^2}{||b^{(n)}||_2^2}
\end{aligned}$$

Donc

Plus le conditionnement de A_n sera important, plus l'erreur sera importante.

Question 3

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. On considère n points distincts $\{x_0, ..., x_{n-1}\} \in [a, b]$

On définit les sommes de Riemann par la formule suivante :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)f(x_i)$$

Dans notre cas, $f = -u''$ Or nous savons que u est $C^2([0, 1])$ donc f est bien continue sur $[0, 1]$

Si l'on considère des points équi-répartis, nous avons $x_i = \frac{i}{n}$ ($x_0 = 0$ et $x_n = 1$) et $x_{i+1} - x_i = h = \frac{1}{n}$ alors

$$
\begin{aligned}
\underset{n\to+\infty}{lim} h\left|\left|b^{(n)}\right|\right|_2^2 &= \underset{n\to+\infty}{lim} h\sum_{i=1}^{n-1} {f_i}^2 \\
&= \underset{n\to+\infty}{lim} h\sum_{i=0}^{n-1} {f_i}^2 - hf(x_0) \\
&= \underset{n\to+\infty}{lim} \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i){f_i}^2 - \underbrace{hf^2(0)}_{\to 0} \\
&= \int_0^1 f^2(x)dx
\end{aligned}
$$

On reproduit le même calcul pour $u^{\mathbf{2}}$

$$
\begin{aligned}
\underset{n\to+\infty}{lim} h\left|\left|u^{(n)}\right|\right|_2^2 &= \underset{n\to+\infty}{lim} h\sum_{i=1}^{n-1} {u_i}^2 \\
&= \underset{n\to+\infty}{lim} h\sum_{i=0}^{n-1} {u_i}^2 - h\underbrace{u_0}_{0} \\
&= \underset{n\to+\infty}{lim} \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i){u_i}^2 \\
&= \int_0^1 u^2(t)dt
\end{aligned}
$$

On a vu à la question précédente que
Pour le prouver, rappelons que $A_n\Delta u^{(n)} = \Delta b^{(n)} \Leftrightarrow \Delta u^{(n)} = A_n^{-1}\Delta b^{(n)}$
D'où

$$
\begin{aligned}
&\left|\left|\Delta u^{(n)}\right|\right|_2^2 \leq \left|\left|A_n^{-1}\right|\right|_2^2\left|\left|\Delta b^{(n)}\right|\right|_2^2 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{||\Delta u^{(n)}||_2^2}{||u^{(n)}||_2^2} \leq \frac{||A_n^{-1}||_2^2||\Delta b^{(n)}||_2^2}{||u^{(n)}||_2^2} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{||\Delta u^{(n)}||_2^2}{||u^{(n)}||_2^2} \leq \frac{||A_n^{-1}||_2^2||b^{(n)}||_2^2||\Delta b^{(n)}||_2^2}{||u^{(n)}||_2^2||b^{(n)}||_2^2}
\end{aligned}
$$

De plus A_n^{-1} est diagonalisable et ses valeurs propres sont $\frac{1}{\lambda(A_n)}$.

En effet, $A_n$est diagonalisable car on $n-1$valeurs propres dans un espace de dimension $n-1$. On peut donc écrire $A_n = PDP^{-1} \Leftrightarrow A_n^{-1} = P^{-1}D^{-1}P$. De plus, nous savons que $||A_n^{-1}||_2^2 = \rho(A_n^{-1})$. Par conséquent, nous avons que $||A_n^{-1}||_2^2 \leq \frac{1}{\lambda_1}$.

Finalement, nous avons

$$\frac{||\Delta u^{(n)}||_2^2}{||u^{(n)}||_2^2} \leq \underbrace{\frac{||b^{(n)}||_2^2}{\lambda_1 ||u^{(n)}||_2^2}}_{C_n} \times \frac{||\Delta b^{(n)}||_2^2}{||b^{(n)}||_2^2}$$

Cherchons un équivalent de C_n

Si l'on s'intéresse à la nouvelle majoration trouvée, nous avons

$$\frac{||\Delta u^{(n)}||_2^2}{||u^{(n)}||_2^2} \leq \frac{||b^{(n)}||_2^2}{\lambda_1 ||u^{(n)}||_2^2} \times \frac{||\Delta b^{(n)}||_2^2}{||b^{(n)}||_2^2}$$

Nous obtenons alors :

$$\frac{||b^{(n)}||_2^2}{\lambda_1 ||u^{(n)}||_2^2} = \frac{1}{\frac{4}{h^2} sin^2(\frac{\pi}{2n})} \times \frac{||b^{(n)}||_2^2}{||u^{(n)}||_2^2}$$

Or $\frac{1}{\frac{4}{h^2} sin^2(\frac{\pi}{2n})} \sim_{+\infty} \frac{1}{\frac{4}{h^2} \times (\frac{\pi}{2n})^2} = \frac{1}{\pi^2}$ car $h = \frac{1}{n}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{\pi^2}$.

De plus, par la question précédente, nous avons également que $\lim\limits_{n\to+\infty} h||b^{(n)}||_2^2 = \int_0^1 f^2(x)dx$ et de même pour u, $\lim\limits_{n\to+\infty} h||u^{(n)}||_2^2 = \int_0^1 u^2(x)dx$.

Donc

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{h||b^{(n)}||_2^2}{h||u^{(n)}||_2^2} &= \frac{\int_0^1 f^2(x)dx}{\int_0^1 u^2(x)dx} \\ &= \frac{||f||_{L^2}^2}{||u||_{L^2}^2}\end{aligned}$$

Finalement,

$$\lim_{n\to+\infty} C_n = \frac{1}{\pi^2} \times \frac{||f||_{L^2}^2}{||u||_{L^2}^2}$$

Et comme f et u sont des fonctions C^2 et qu'on les intègre sur un intervalle finit, nous pouvons en conclure que la majoration tend vers une limite finie. À la question précédente, nous avions obtenu une majoration en fonction de K_2. Ce dernier est très grand pour la matrice A_n et tend vers l'infini lorsque n tend vers l'infini. Dans cette question on arrive à avoir une majoration qui tend vers une limite finie. On peut conclure que le fait d'avoir un conditionnement très grand n'implique pas une erreur relative très grande.