

Part I

Méthode numérique pour résoudre des équations non linéaires

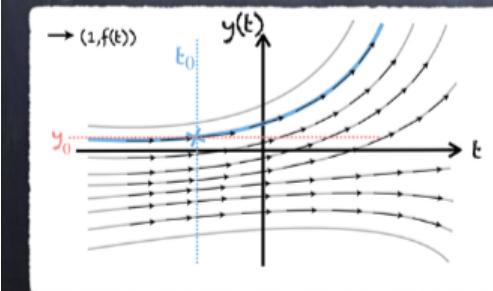
1 Théorème de Cauchy-Lipschitz (Rappel)

1.1 Définition (pb. de Cauchy)

Étant donné $t_0 \in [a, b]$, $\underline{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue, trouver $\underline{y} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction C^1 t.q.

$$\begin{cases} \underline{y}'(t) = \underline{f}(t, \underline{y}(t)), & t \in [a, b] \\ \underline{y}(t_0) = \underline{y}_0 \end{cases}$$

Illustration dans le cas $n=1$:



ε

1.3 Définition (Fonction Lipschitz)

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est (globalement) Lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable s'il existe $L > 0$ t.q. :

$$\forall t \in [a, b], \forall (\underline{y}, \underline{z}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad \|\underline{f}(t, \underline{y}) - \underline{f}(t, \underline{z})\| \leq L \|\underline{y} - \underline{z}\|$$

1.3 Théorème (de Cauchy-Lipschitz)

Si f est continue et Lipschitzienne par rapport à sa 2ème variable alors le problème de Cauchy admet une unique solution.

(Rappel de la) Preuve (dans le cas $n=1$) :

Point de départ : y sol. ssi $y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$

Unicité : Soient y_1 et y_2 deux solutions du problème de Cauchy, alors on a :

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leq \int_{t_0}^t |f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))| ds$$

Suite de la preuve :

Unicité : Soient y_1 et y_2 deux solutions du problème de Cauchy, alors on a :

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leq L \int_{t_0}^t |y_1(s) - y_2(s)| ds$$

1.3 Lemme de Grönwall (admis)

Soient Φ et Ψ de $[t_0, t] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues et positives vérifiant :

$$\Phi(t) \leq K + L \int_{t_0}^t \Psi(s) \Phi(s) ds \quad \text{alors} \quad \Phi(t) \leq K e^{\int_{t_0}^t \Psi(s) \Phi(s) ds}$$

$$\Rightarrow |y_1(t) - y_2(t)| \leq 0 \Rightarrow y_1 = y_2$$

Existence : y sol. ssi $y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$

On voit alors le problème de Cauchy comme une équation de point fixe

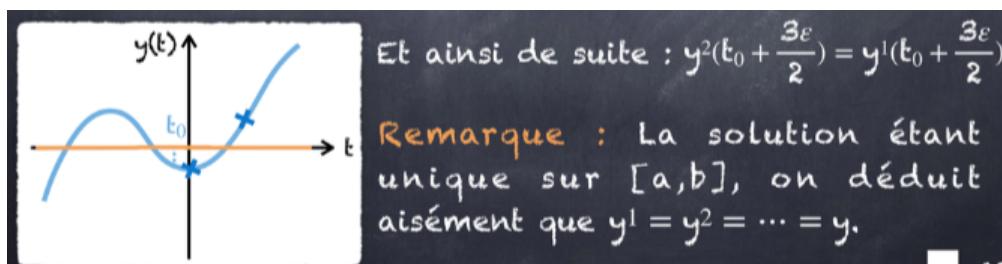
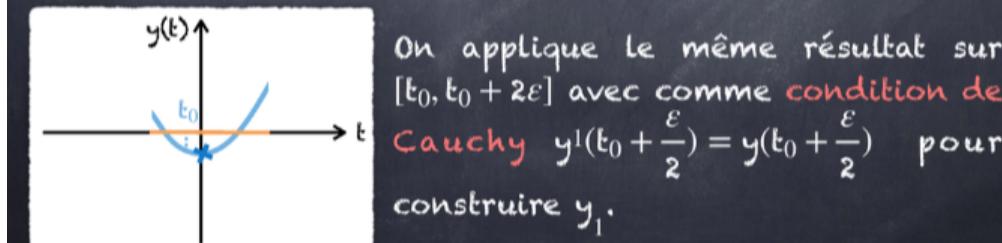
$$\mathcal{L}y = y$$

où l'opérateur $\mathcal{L} : B(a, b) = (\mathcal{C}^0[a, b], \|\cdot\|_\infty) \rightarrow B(a, b)$.

Or, on a : $\|\mathcal{L}y_1 - \mathcal{L}y_2\|_{L^\infty(a, b)} \leq L(b-a) \|y_1 - y_2\|_{L^\infty(a, b)}$

Si $L(b-a) < 1$, on a alors une contraction, et on en déduit qu'il existe une unique solution en appliquant le Thm. de point fixe.

Si $L(b-a) > 1$, l'idée est alors d'appliquer la même méthode sur un intervalle $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ avec $2\varepsilon L < 1$.



Remarques :

- ② En appliquant la démarche de prolongement précédente, on peut construire une solution sur \mathbb{R}
- ③ Si f n'est que localement Lip. (i.e. la constante L dépend de y_0) alors il existe une unique solution locale (maximale).

2 Les équations non linéaires

2.1 Les équations points fixes

Considérons l'équation de point fixe suivante :

Trouver $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ t.q. $\underline{G(x)} = \underline{x}$

où $\underline{G(x)}$ est une fonction de \mathbb{R}^n dans lui-même.

Remarque :

On peut facilement faire le lien entre l'équation de point fixe ci-dessus et le problème initial :

$$\underline{G(x)} = \underline{x} \Leftrightarrow \underline{G(x)} - \underline{x} = \underline{0}$$

où de manière plus générale

$$\underline{G(x)} = \underline{x} \Leftrightarrow \underline{H(x)}(\underline{G(x)} - \underline{x}) = \underline{0}$$

où on suppose $\underline{H(x)}$ inversible.

1.1 Définition

On dit que l'application \underline{G} est **contractante** ssi il existe une constante K t.q. $0 < K < 1$ et

$$\forall (\underline{x}, \underline{y}) \in \mathbb{R}^n, \quad \|\underline{G}(\underline{x}) - \underline{G}(\underline{y})\| \leq K \|\underline{x} - \underline{y}\|$$

1.2 Théorème (Point fixe)

L'application \underline{G} admet un unique point fixe \underline{x}^* et la suite $\underline{x}^{n+1} = \underline{G}(\underline{x}^n)$ converge vers ce point fixe.

1.3 Définition

On dit que l'application \underline{G} est **differentiable** au point $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ s'il existe une application linéaire $d_{\underline{x}_0} G$ vérifiant :

$$\textcircled{1} \quad \forall \underline{h} \in \mathbb{R}^n, \quad \underline{G}(\underline{x}_0 + \underline{h}) = \underline{G}(\underline{x}_0) + d_{\underline{x}_0} G(\underline{h}) + \underline{\Phi}(\underline{x}_0, \underline{h})$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{\underline{h} \rightarrow 0} \frac{\|\underline{\Phi}(\underline{x}_0, \underline{h})\|}{\|\underline{h}\|} = 0$$

Remarque :

L'application linéaire $d_{\underline{x}_0} G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ peut être représentée par sa matrice Jacobienne.

De plus, cette application est appelée la différentielle et elle généralise la notion de dérivée.

Remarque 2 :

Cette définition (ainsi que le théorème de Point Fixe) se généralise au cas d'application G d'un espace de Banach dans lui-même.

1.4 Théorème (Point fixe, le retour)

Si l'application G admet un point fixe $\underline{x}^* \in \mathbb{R}^n$, est différentiable en ce point et vérifie $\|d_{\underline{x}^*}G\| < 1$, alors il existe un voisinage V t.q. $\forall \underline{x}_0 \in V$, la suite $\underline{x}^{n+1} = G(\underline{x}^n)$ converge vers le point fixe.

Preuve

Dire que G est différentiable en x^* est équivalent à dire que G est continue en x^*

$$\begin{aligned} &\iff \lim_{x \rightarrow x^*} d_x G = d_{x^*} G \\ &\iff \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tq } \|x - x^*\| < \eta \implies \|d_x G - d_{x^*} G\| < \epsilon \\ &\iff d_x G \in B(d_{x^*} G, \epsilon) \end{aligned}$$

Posons $l = 1 - \|d_x G\|$ et prenons $\epsilon < l$ alors $\exists \eta \text{ tq } \|x - x^*\| < \eta \implies \|d_x G\| < \|d_{x^*} G\| + \epsilon < 1$
car $\|d_x G\| = \|d_x G + d_{x^*} G - d_{x^*} G\| < \|d_{x^*} G\| + \|d_x G - d_{x^*} G\| < \|d_{x^*} G\| + \epsilon < 1$.

$\forall x, y \in E$,

$$\begin{aligned} \|G(x) - G(y)\| &= \|G(x - y + y) - G(y)\| \\ &= \|G(y) - G(y) + d_y G(x - y) + \Phi_y(x - y)\| \end{aligned}$$

où $\Phi_y(h)$ est tel que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi_y(h)}{\|h\|} = 0$

Ainsi

$$\begin{aligned}\|G(x) - G(y)\| &\leq \|d_y G\| \|x - y\| + \frac{\Phi_y(x - y)}{\|x - y\|} \|x - y\| \\ &\leq (\|d_y G\| + \frac{\Phi_y(x - y)}{\|x - y\|}) \|x - y\|\end{aligned}$$

On a $\forall y \in B^f(x^*, \eta)$, $\|d_y G\| < 1$

Notons $\max_{y \in B^f(x^*, \eta)} \|d_y G\| = M^d < 1$

posons $\tilde{\epsilon} = \frac{1-M^d}{2} > 0$ alors $\exists \tilde{\eta}$ tel que $\|x - y\| < \tilde{\eta} \implies \frac{\Phi_y(x-y)}{\|x-y\|} < \tilde{\epsilon}$

Pour résumer, si $(x, y) \in (B(x^*, \min(\eta, \tilde{\eta})))^2$ alors $\|G(x) - G(y)\| \leq k \|x - y\|$ où $k = M^d + \tilde{\epsilon} < 1$

Ainsi, on aura

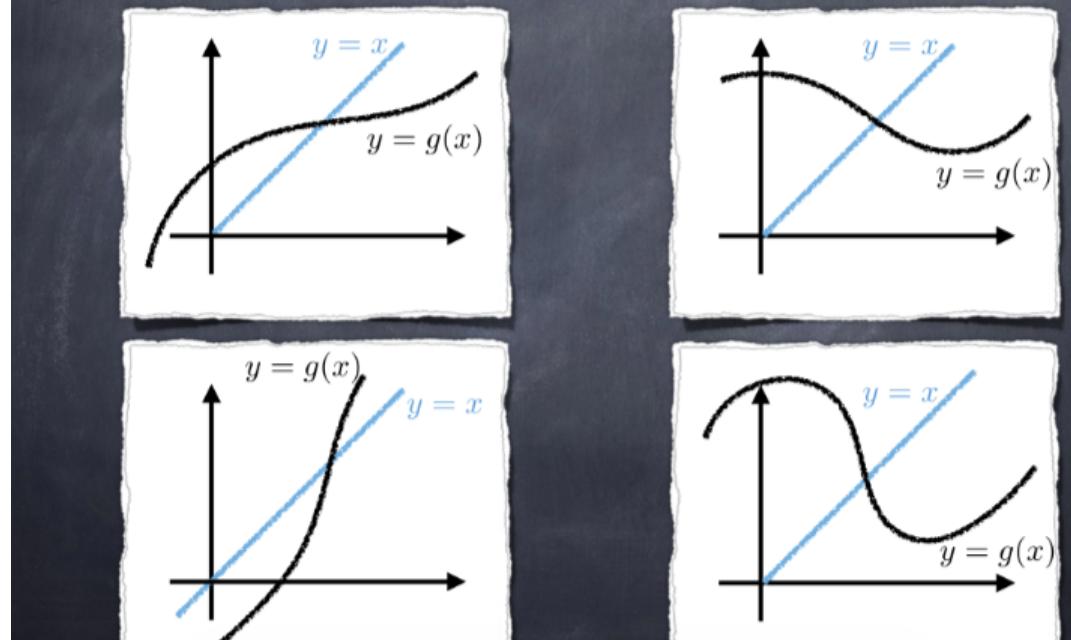
$$G : B(x^*, \min(\eta, \tilde{\eta})) \rightarrow B(x^*, \min(\eta, \tilde{\eta}))$$

qui sera une contraction et par le théorème du point fixe, on déduit que $x_{n+1} = G(x_n) \rightarrow x^*$ si $x_0 \in B(x^*, \min(\eta, \tilde{\eta}))$

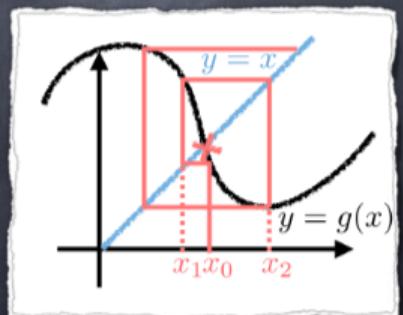
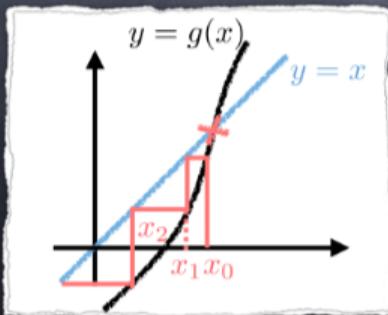
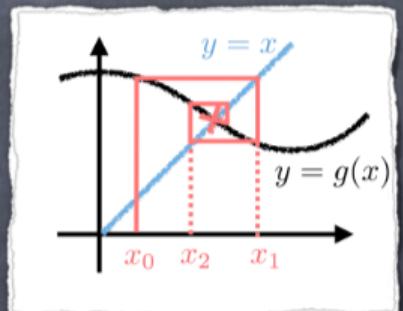
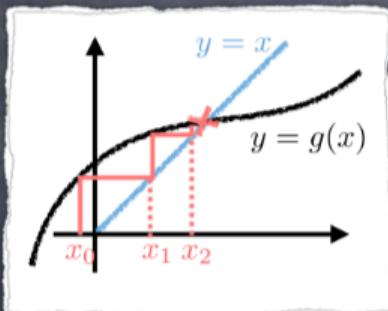
Notons que $\forall x \in B(x^*, \min(\eta, \tilde{\eta}))$, $\|G(x) - x^*\| \leq (\underbrace{\|d_{x^*} G\| + \frac{\Phi_y(x - x^*)}{\|x - x^*\|}}_{< 1}) \underbrace{\|x - x^*\|}_{\leq \min(\eta, \tilde{\eta})}$

d'où $G(x) \in B(x^*, \min(\eta, \tilde{\eta}))$

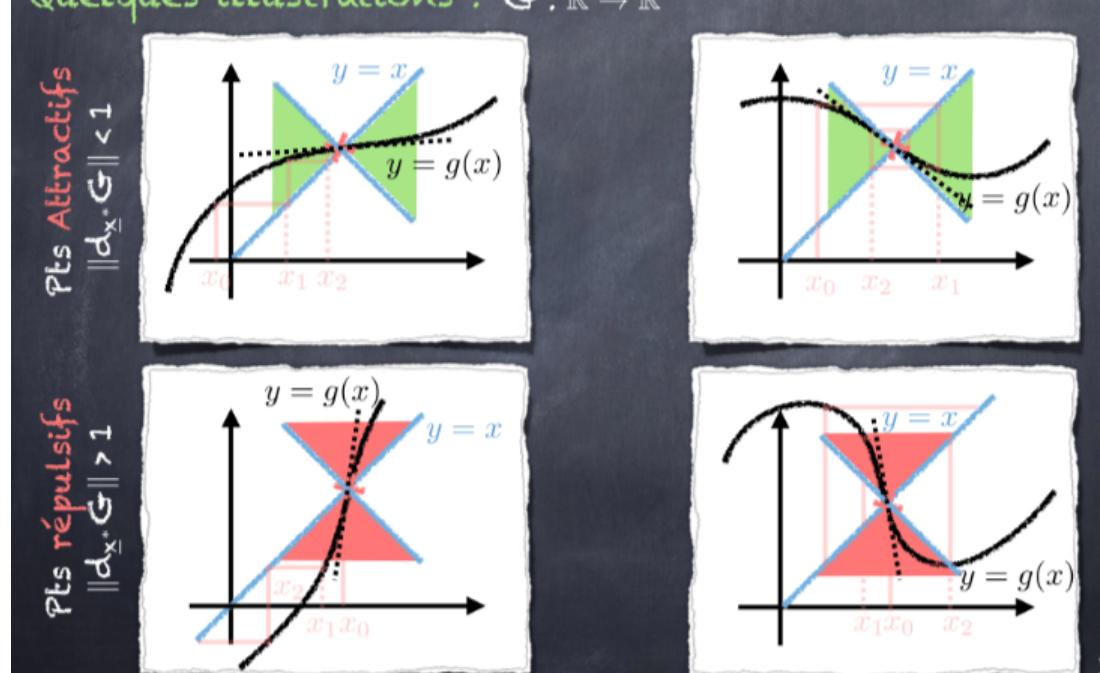
Quelques illustrations : $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



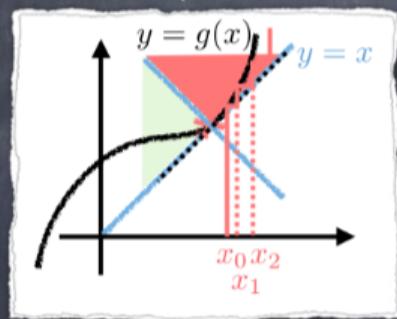
Quelques illustrations : $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



Quelques illustrations : $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



Un autre exemple... attractif ou répulsif ?



Dans cet exemple, tout dépend du point de départ !

Algorithme de point fixe :

$$\underline{x}_1 \leftarrow \underline{G}(\underline{x}_0)$$

Tant que $\|\underline{x}_0 - \underline{x}_1\| \geq \varepsilon$

$$| \quad \underline{x}_0 \leftarrow \underline{x}_1$$

$$| \quad \underline{x}_1 \leftarrow \underline{G}(\underline{x}_0)$$

Équivalent mathématiques

$$\underline{x}^{n+1} = \underline{G}(\underline{x}^n)$$

Remarque :

Lorsque le test de convergence est satisfait, on a alors :

$$\begin{aligned} \|\underline{x}_n - \underline{x}^*\| &\leq \|\underline{x}_n - \underline{x}_{n+1}\| + \|\underline{x}_{n+1} - \underline{x}^*\| \\ &\leq \epsilon + \|\underline{G}(\underline{x}_n) - \underline{G}(\underline{x}^*)\| \\ &\leq \epsilon + K \|\underline{x}_n - \underline{x}^*\| \end{aligned}$$

d'où : $\|\underline{x}_n - \underline{x}^*\| \leq \frac{\epsilon}{1-K}$ ($0 < K < 1$)

1.5 Définition (ordre d'une suite)

On dit que la suite $(\underline{x}_n)_n$ est d'ordre r s'il existe une constante $C > 0$ t.q. :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\|\underline{x}_{n+1} - \underline{x}^*\|}{\|\underline{x}_n - \underline{x}^*\|^r} = C$$

Remarque :

Cela revient à dire $\|\underline{x}_{n+1} - \underline{x}^*\| \sim C \|\underline{x}_n - \underline{x}^*\|^r$

Cette notion permet de « mesurer » la vitesse de convergence d'une suite (quand elle converge).

Si les hypothèses du Thm. de point fixe 1.4 sont vérifiées, on a alors :

$$\begin{aligned}\underline{x}_{n+1} &= \underline{G}(\underline{x}^* + \underline{x}_n - \underline{x}^*) \\ &= \underline{x}^* + d_{\underline{x}^*} \underline{G}(\underline{x}_n - \underline{x}^*) + \underline{\Phi}(\underline{x}^*, \underline{x}_n - \underline{x}^*)\end{aligned}$$

d'où : $\|\underline{x}_{n+1} - \underline{x}^*\| = \|(d_{\underline{x}^*} \underline{G})(\underline{x}_n - \underline{x}^*) + \underline{\Phi}(\underline{x}^*, \underline{x}_n - \underline{x}^*)\|$

et dont on déduit que la suite est au moins d'ordre 1

1.6 Théorème

Si l'application \underline{G} admet un point fixe $\underline{x}^* \in \mathbb{R}^n$, est r fois continûment différentiable et vérifie :

$$d_{\underline{x}^*} \underline{G} = \dots = d_{\underline{x}^*}^{r-1} \underline{G} = \underline{0} \text{ et } d_{\underline{x}^*}^r \underline{G} \neq \underline{0}$$

alors il existe un voisinage V t.q. $\forall \underline{x}_0 \in V$, la suite générée par $\underline{x}^{n+1} = \underline{G}(\underline{x}^n)$ converge à l'ordre r vers le point fixe.

On sait que la suite converge car $|G'(x_*)| = 0 < 1$ (cf. Thm 1.4). En utilisant le développement de Taylor au voisinage du point fixe, on a :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= G(x_* + (x_n - x_*)) \\ &= G(x_*) + \sum_{i=1}^{r-1} G^{(i)}(x_*) \frac{(x_n - x_*)^i}{i!} + G^{(r)}(\tilde{x}) \frac{(x_n - x_*)^r}{r!} \end{aligned}$$

où $\tilde{x} \in [x_n, x_*]$ (ou $[x_*, x_n]$ si $x_* < x_n$). On déduit alors :

$$\frac{|x_{n+1} - x_*|}{|x_n - x_*|^r} = \frac{|G^{(r)}(\tilde{x})|}{r!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{|G^{(r)}(x^*)|}{r!}$$

2.2 La méthode de Newton

Revenons à notre problème initial :

$$\text{Trouver } x \in \mathbb{R} \text{ t.q. } F(x) = 0$$

dans le cas particulier où $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Si F est différentiable (dérivable) en x , on a alors :

$$F(x+h) \simeq F(x) + (d_x F)(h)$$

Si x est une solution approchée de notre problème, on va chercher à l'aide de l'approximation ci-dessus h t.q. :

$$F(x+h) = 0 \Leftrightarrow F(x) + (d_x F)(h) = 0$$

$$\Leftrightarrow h = \frac{-F(x)}{d_x F} \Rightarrow x_2 = x + h$$

x_2 sera a priori une meilleure solution approchée.

24

Méthode de Newton :

On construit la suite $(x_n)_n$ comme suit :

$$\begin{aligned} F(x_{n+1}) &= F(x_n + (x_{n+1} - x_n)) \\ &\simeq F(x_n) + (d_{x_n} F)(x_{n+1} - x_n) \end{aligned}$$

où x_{n+1} est choisi de sorte que l'approximation ci-dessus soit nulle :

$$F(x_n) + (d_{x_n} F)(x_{n+1} - x_n) = 0 \Leftrightarrow x_{n+1} = x_n - (d_{x_n} F)^{-1} F(x_n)$$

Remarques :

❶ La suite est bien définie ssi $(d_{x_n} F) \neq 0$

❷ Ce choix de x_{n+1} correspond à imposer

$$F(x_{n+1}) = \Phi(x_n, x_{n+1} - x_n)$$

25

1.7 Proposition

x est solution de $F(x) = 0$ est équivalent à dire que c'est le point fixe de la fonction $G(x) = x - (d_x F)^{-1} F(x)$

Preuve

$$F(x^*) = 0.$$

$$g(x^*) = x^* \text{ où } g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \text{ revient à } x^* - \frac{f(x^*)}{f'(x^*)} = x^* \iff f(x^*) = 0$$

1.8 Corollaire

Si F est 3 fois continument différentiable, admet un 0 en x^* et $F'(x^*) \neq 0$, alors la méthode de Newton converge pour $x_0 \in V(x^*)$ et est d'ordre 2 au moins.

On a $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ donc $g'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = 1 - 1 - \frac{f''(x)}{(f'(x))^2}f(x) \iff g'(x^*) = \frac{f''(x^*)}{(f'(x^*))^2}f(x^*) = 0$ donc la méthode est convergente à l'ordre 2 au moins

Méthode de Newton :

$$x_1 \leftarrow x_0 - F(x_0)/F'(x_0)$$

Tant que $\|x_0 - x_1\| \geq \varepsilon$

$$x_0 \leftarrow x_1$$

$$x_1 \leftarrow x_0 - F(x_0)/F'(x_0)$$

Équivalent mathématiques :

$$x_{n+1} = x_n - (d_{x_n} F)^{-1} F(x_n)$$

Remarque :

Le point x_{n+1} est défini en fait comme le point où la tangent de F en x_n

$$y = (d_{x_n} F)(x - x_n) + F(x_n)$$

s'annule !

Remarque 2 :

La méthode se généralise au cas de fonction $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

On doit alors résoudre à chaque itération le système linéaire :

$$(d_{x_n} F)x_{n+1} = (d_{x_n} F)x_n - F(x_n)$$

2

Illustration de la méthode de Newton :

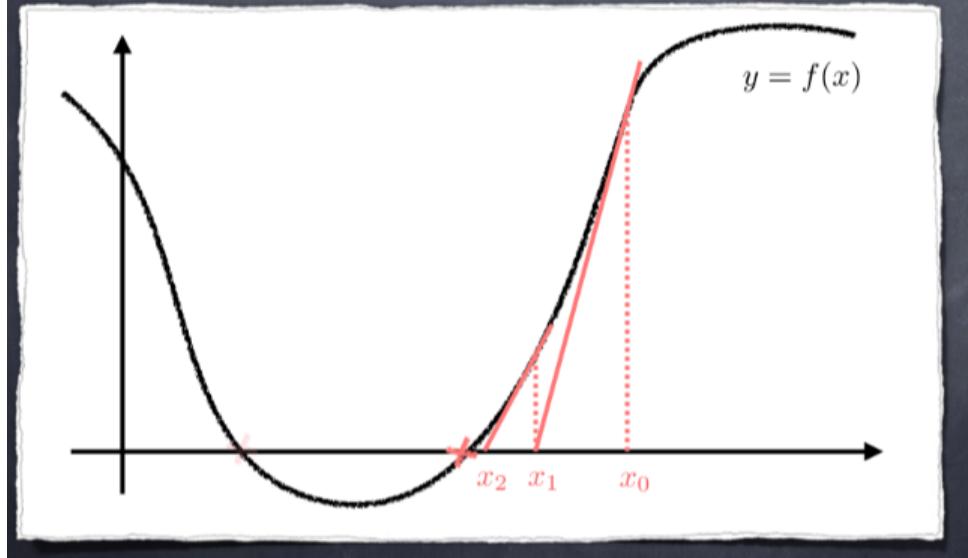
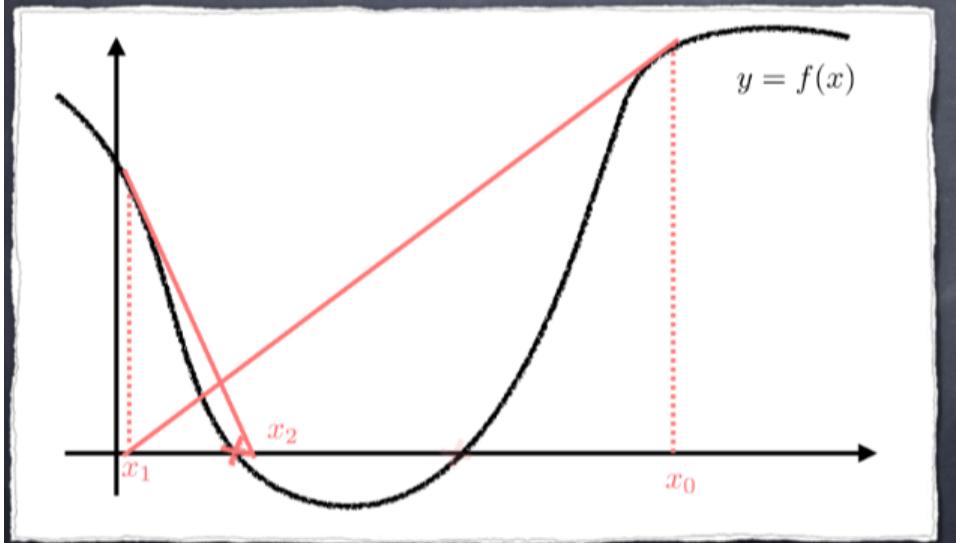


Illustration de la méthode de Newton :



Méthode de Newton :

On génère la suite $(x_n)_n$ ainsi : $x_{n+1} = x_n - (d_{x_n} F)^{-1} F(x_n)$

Dans certaines situations, le calcul de $(d_{x_n} F)^{-1}$ est coûteux voir impossible.

Une idée est alors d'utiliser l'approximation de la dérivée :

$$(d_{x_n} F) \simeq \frac{F(x_n) - F(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

On déduit alors la méthode de la fausse position

2.3 Méthode de la fausse position

Méthode de la fausse position :

On génère la suite $(x_n)_n$ ainsi :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{F(x_n) - F(x_{n-1})} F(x_n)$$

Remarques :

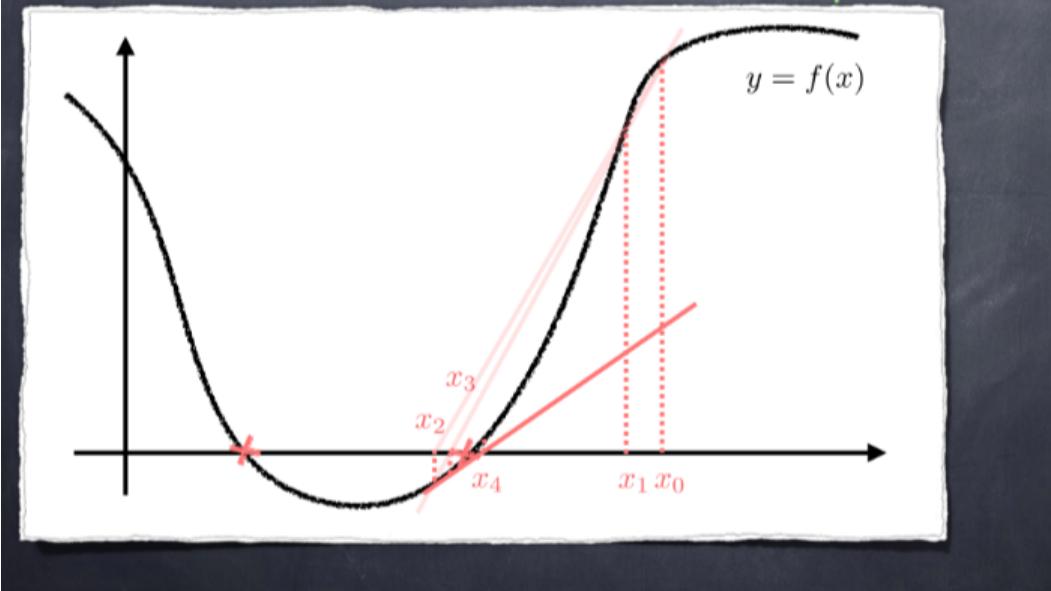
- ④ À la différence de la méthode de Newton, il faut deux points pour initialiser la méthode de la fausse position.
- ④ Le point x_{n+1} correspond au point où s'annule la droite définie par :

$$y = \frac{F(x_n) - F(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} (x - x_n) + F(x_n)$$

1.9 Théorème (cf TD)

Si F est 2 fois continument différentiable, admet un 0 en x^* et $F'(x^*) \neq 0$, alors il existe un voisinage V dans lequel $\forall (x_0, x_1) \in V$ la méthode de F.P. converge et est d'ordre $(1 + \sqrt{5})/2$ au moins.

Illustration de la méthode de la fausse position :



Méthode de la fausse position :

Tant que $\|x_0 - x_1\| \geq \varepsilon$

```
x2 ← x1 - (x1 - x0) × F(x1) / (F(x1) - F(x0))
x0 ← x1
x1 ← x2
```

Équivalent mathématiques : $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{F(x_n) - F(x_{n-1})} F(x_n)$

Remarque :

Pour la mise en œuvre de la méthode, en particulier si le calcul de $F(x)$ est coûteux, il est intéressant de remarquer qu'à chaque étape une seule évaluation de F est nécessaire...

Remarques de conclusion

- ➊ On est assuré de la convergence des méthodes de Newton et de F.P. seulement lorsque l'initialisation est dans un voisinage proche de la solution... Il faut donc avoir a priori une bonne solution approchée !
- ➋ Lorsque la racine est double, i.e. $F(x_*) = d_{x_*}F = 0$ les méthodes de Newton et F.P. convergent mais à un ordre plus petit (i.e. moins vite, cf TD !)
- ➌ On peut adapter la méthode de Newton pour résoudre des problèmes de minimisation (cf TD !).

3 Le cas des polynômes

3.1 Algorithme de Horner

On cherche ici à déterminer les zéros (ou racines) d'un polynôme, i.e. :

Trouver $x \in \mathbb{C}$ t.q. $P(x) = 0$

où : $P(x) = \sum_{i=0}^d a_i x^i$ et $a_d \neq 0$

Remarque :

Évidemment, les méthodes de Newton et de F.P. peuvent s'appliquer au cas des polynômes. Néanmoins, ces méthodes ne permettent pas d'obtenir toutes les racines du polynôme.

On cherche ici à déterminer les zéros (ou racines) d'un polynôme, i.e. :

Trouver $x \in \mathbb{C}$ t.q. $P(x) = 0$

où : $P(x) = \sum_{i=0}^d a_i x^i$ et $a_d \neq 0$

2.1 Théorème Fondamentale (admis)

Si $d > 0$, alors le polynôme admet au moins une racine complexe. Par conséquent, tout polynôme de degré d admet d racines complexes (possiblement multiples).

Depuis la théorie de Galois, on sait que les équations polynomiales sont résolubles (on peut déterminer les racines) de manière générale si et seulement si le degré du polynôme est inférieur strictement à 5...

Cela motive d'autant plus l'utilisation de méthodes numériques pour déterminer les racines de P .

Voyons tout d'abord comment évaluer un polynôme $P(x)$ en un point s donné :

$$\begin{aligned}
 P(s) &= a_0 + a_1 s + \dots + a_d s^d \\
 &= a_0 + s (a_1 + a_2 s + \dots + a_d s^{d-1}) \\
 &= a_0 + s (a_1 + s (a_2 + \dots + a_d s^{d-2})) \\
 &= a_0 + s (a_1 + s (a_2 + s (a_3 + \dots + s (a_{d-1} + s a_d) \dots)))
 \end{aligned}$$

L'idée est de factoriser autant que possible s afin de réduire le cout de calcul en évitant de calculer tous les s^i

Voyons tout d'abord comment évaluer un polynôme $P(x)$ en un point s donné :

$$P(s) = a_0 + s (a_1 + s (a_2 + s (a_3 + \dots + s (a_{d-1} + s a_d) \dots)))$$

2.1 Proposition

En notant $q_{i-1} = a_i + s q_i \quad \forall i \in \{1, d\}$ et $q_d = 0$, on a

$$P(x) = (x - s)Q(x) + r_0$$

où $Q(x) = q_0 + q_1 x + \dots + q_{d-1} x^{d-1}$ et $r_0 = a_0 + s q_0 = P(s)$

Algorithme d'évaluation de Horner :

$$q_d \uparrow 0$$

Pour i=d à l

$$\mathbf{q}_{i-1} \leftarrow \mathbf{a}_i + s\mathbf{q}_i$$

$$\mathbf{r}_0 \leftarrow \mathbf{a}_0 + \mathbf{s}\mathbf{q}_0$$

Equivalent mathématiques :

$$P(s) = a_0 + s(a_1 + s(a_2 + s(a_3 + \cdots + s(a_{d-1} + s a_d) \cdots)))$$

i = d-1
 i = d-2
 :
 i = 3

On appelle **division Euclidienne** d'un polynôme $P(x)$ par $D(x)$ l'opération consistant à déterminer $Q(x)$ et $R(x)$ t.q. :

$$P(x) = Q(x)D(x) + R(x)$$

où $\deg(R(x)) < \deg(D(x))$.

Exemple :

Calculer la division Euclidienne de :

$$P(x) = 3x^3 - 8x^2 + 9x - 9 \quad \text{par} \quad Q(x) = x - 2$$

La division euclidienne de $P(x)$ par $D(x) = (x-s)$ donne :

$$P(x) = (x - s)Q(x) + R$$

où : $\textcircled{1} \quad P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_dx^d$

$\textcircled{2} \quad Q(x) = q_0 + q_1x + \dots + q_{d-1}x^{d-1}$

où $q_{i-1} = a_i + sq_i \quad \forall i \in \{1, d\}$ et $q_d = 0$

$\textcircled{3} \quad R = r_0 = a_0 + sq_0$

Pour déterminer une racine de $P(x)$, on cherche s t.q.
 $R(s) = 0$.

Méthode de Newton-Horner :

La division euclidienne de $P(x)$ par $D(x) = (x-s)$ donne :

$$P(x) = (x - s)Q(x) + R$$

où $R = r_0 = a_0 + sq_0$ et on cherche s t.q. $R(s) = 0$.

Pour résoudre l'équation $R(s) = 0$, on va appliquer la méthode de Newton :

$$s_{n+1} = s_n - \frac{R(s_n)}{R'(s_n)} = s_n - \frac{P(s_n)}{Q(s_n)} \quad \left(= s_n - \frac{P(s_n)}{P'(s_n)} \right)$$

On exploitera l'algorithme de Horner pour évaluer les polynômes P et Q en s_n .

Ensuite, pour déterminer les autres racines, on procédera de même sur le polynôme $Q(x)$ (déflation).

Algorithme de Newton-Horner :

Pour $k=d$ à 1

Tant que $\|s_0 - s_1\| \geq \varepsilon$

$[P(s_0), Q] \leftarrow \text{Horner}(P, s_0)$

$[Q(s_0), \sim] \leftarrow \text{Horner}(Q, s_0)$

$s_1 \leftarrow s_0 - P(s_0)/Q(s_0)$

racine(k) = s_1

$P \leftarrow Q$

} $P(x) = (x - s_0)Q(x) + R$
Cal. $P(s_0)$ et $Q(s_0)$

} Itérations Newton

} Déflation

Remarque :

Lors du calcul de $P(s)$ avec l'algorithme de Horner, on détermine le polynôme $Q(x)$.

46

Remarque 2 :

Pour déterminer les racines complexes, si le polynôme est à coefficients réels, il faut initialiser s complexe.

3.2 Algorithme de Bairstow

L'idée de la méthode de Bairstow est de chercher un polynôme de degré 2 $D(x) = x^2 - sx + p$ t.q. :

$$P(x) = Q(x)D(x) + R(x)$$

2.2 Proposition

En notant : $\textcircled{1} \quad Q(x) = q_0 + q_1x + \dots + q_{d-2}x^{d-2}$
 $\textcircled{2} \quad R(x) = r_0 + r_1x$

on a les relations suivantes :

$$q_{i-2} = a_i + sq_{i-1} - pq_i \quad \forall i \in \{2, \dots, d\} \quad \text{et} \quad r_1 = a_1 + sq_0 - pq_1 \\ r_0 = a_0 - pq_0$$

$$\text{où } q_d = q_{d-1} = 0$$

La division euclidienne de $P(x)$ par $D(x)$ donne :

$$P(x) = Q(x)D(x) + R(x)$$

où $D(x) = x^2 - sx + p$ et $R(x) = r_0 + r_1x$ avec :

$$r_1(s, p) = a_1 + sq_0 - pq_1$$

$$r_0(s, p) = a_0 - pq_1$$

On cherche les valeurs de s et p annulant ces deux coefficients :

$$\begin{bmatrix} r_1(s, p) \\ r_0(s, p) \end{bmatrix} = 0$$

Comme précédemment, on va résoudre ce problème par la méthode de Newton.

Il est donc nécessaire de calculer $\partial_{s,p}r_1$ et $\partial_{s,p}r_0$

On a

$$\begin{aligned} p(x) &= (x - s)q(x) + r_0 \\ \iff \sum_{i=0}^d a_i x^i &= (x - s) \sum_{i=0}^{d-1} q_i x^i + r_0 \\ \iff \sum_{i=0}^d a_i x^i &= \sum_{i=0}^{d-1} q_i x^{i+1} - s \sum_{i=0}^{d-1} q_i x^i + r_0 \\ \iff \sum_{i=0}^d a_i x^i &= \sum_{i=1}^d q_{i-1} x^i - s \sum_{i=0}^{d-1} q_i x^i + r_0 \end{aligned}$$

Pour $i = d, a_d = q_{d-1}$

pour $i < d$ et $i \geq 1, a_i = q_{i-1} - sq_i \iff q_{i-1} = a_i + sq_i$

pour $i = 0, a_0 = -sq_0 + r_0 \iff r_0 = a_0 + sq_0$

donc $\forall i \geq 1, q_{i-1} = a_i + sq_i$ avec $q_d = 0$

Rq : la suite $(q_i)_i$ sert à

- évaluer $p(s)$

- connaître $p'(x)$ car $p(x) = q(x)(x - s) + r_0 \implies p'(x) = q'(x)(x - s) + q(x) \implies p'(s) = q(s)$

Remarque

$$\begin{aligned} & \begin{cases} r_1(s, p) = 0 \\ r_0(s, p) = 0 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} a_1 + sq_0 - pq_1(s, p) = 0 \\ a_0 - pq_1(s, p) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Rappel : $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - [J_{x_n} F]^{-1} F(x_n) \\ \iff x_{n+1} &= x_n + \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x^n) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x^n) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x^n) & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(x^n) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F_1(x_n) \\ F_2(x_n) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Pour l'algorithme de Baird, on a

$$F(s, p) = \begin{bmatrix} a_1 + sq_0 - pq_1(s, p) \\ a_0 - pq_1(s, p) \end{bmatrix}$$

Typiquement, on doit calculer $\frac{\partial F_1}{\partial s} = q_0(s, p) + s \frac{\partial q_0}{\partial s} - p \frac{\partial q_1}{\partial s} \dots$

On a vu que :

$$q_{i-2} = a_i + sq_{i-1} - pq_i \quad \forall i \in \{2, \dots, d\} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} r_1 &= a_1 + sq_0 - pq_1 \\ r_0 &= a_0 - pq_0 \end{aligned}$$

dont on déduit :

$$\partial_s q_{i-2} = q_{i-1} + s \partial_s q_{i-1} - p \partial_s q_i \quad \text{et} \quad \partial_p q_{i-2} = s \partial_p q_{i-1} - q_i - p \partial_p q_i$$

puis :

$$\partial_s r_1 = q_0 + s \partial_s q_0 - p \partial_s q_1 \quad \text{et} \quad \partial_p r_1 = s \partial_p q_0 - q_1 - p \partial_p q_1$$

$$\partial_s r_0 = -p \partial_s q_0 \quad \text{et} \quad \partial_p r_0 = q_0 - p \partial_p q_0$$

Algorithme de Bairstow :

I. Calculer les coefficients des polynômes Q et R

$$q_{i-2} = a_i + sq_{i-1} - pq_i \quad \forall i \in \{2, \dots, d\} \quad \text{et} \quad r_1 = a_1 + sq_0 - pq_1 \\ r_0 = a_0 - pq_0$$

II. Calculer les dérivées partielles en s et p des q_i et r_i
(cf slide précédent)

III. Mettre à jour les valeurs de s et p par la méthode de Newton.

IV. Répéter le I. tant que les coefficients du reste R sont supérieurs à un seuil

51

Quelques remarques :

- ④ Dans la méthode de Bairstow, une fois les coefficients s et p du diviseur $D(x)$ obtenus, on détermine 2 racines de $P(x)$. On peut ensuite continuer l'algorithme en l'appliquant à $Q(x)$ qui est de degré $p-2$.
- ④ La méthode de Bairstow est comme la méthode de Newton, pour une racine simple, au moins d'ordre 2. Néanmoins, elle converge en général plus vite.
- ④ En cas de racine double, la méthode de Bairstow converge à l'ordre 2 alors que celle de Newton seulement à l'ordre 1.