Série de FOURIER

$x(t)$, fonction périodique de période T ou à durée limité sur un intervalle T:

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{2\pi j \frac{k}{T} t}}$$

$$X_k = \frac{1}{T} \int_{(T)} x(t) e^{-2\pi j \frac{k}{T} t} dt$$

On écrit $x(t)$ en dissociant les *valeurs négatives* de k des *valeurs positives* de k:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{-1} X_k e^{2\pi j \frac{k}{T} t} + X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{2\pi j \frac{k}{T} t}$$

$$e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\sin\alpha$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{-1} X_k[\cos(2\pi \tfrac{k}{T} t) + j\sin(2\pi \tfrac{k}{T} t)] + X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k[\cos(2\pi \tfrac{k}{T} t) + j\sin(2\pi \tfrac{k}{T} t)]$$

On veut exprimer $x(t)$ en une somme avec $k \geq 1$. Nous changeons alors k en $(-k)$ dans la première somme en se rappelant que la fonction *cosinus est paire* et le fonction *sinus est impaire*:

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} X_k[\cos(2\pi \tfrac{k}{T} t) + j\sin(2\pi \tfrac{k}{T} t)] = \sum_{k=1}^{\infty} X_{-k}[\cos(2\pi \tfrac{k}{T} t) - j\sin(2\pi \tfrac{k}{T} t)]$$

Nous avons alors:

$$\boxed{x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty}[(X_k + X_{-k})\cos(2\pi \tfrac{k}{T} t) + j(X_k - X_{-k})\sin(2\pi \tfrac{k}{T} t)]}$$

que l'on peut écrire sous la forme:

$$\boxed{x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi \tfrac{k}{T} t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(2\pi \tfrac{k}{T} t)}$$

avec:

$$\boxed{\begin{aligned} a_k &= X_k + X_{-k} \\ b_k &= j(X_k - X_{-k}) \end{aligned}}$$

Du système précédent, on en déduit:

$$\boxed{\begin{aligned} X_k &= \tfrac{1}{2}(a_k - jb_k) \\ X_{-k} &= \tfrac{1}{2}(a_k + jb_k) \end{aligned}}$$