

MMSN

# Analyse numérique 2

Chapitre 2 :

Quadrature polynomiale

Cours 6-7-8-9

GM 3 Année 2022 - 2023

Contact : A. Tonnoir

antoine.tonnoir@insa-rouen.fr

# Au programme (Chapitre 2)

Objectif :

Étant donné une fonction  $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ , on souhaite calculer numériquement l'intégrale

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

Exemples d'application :

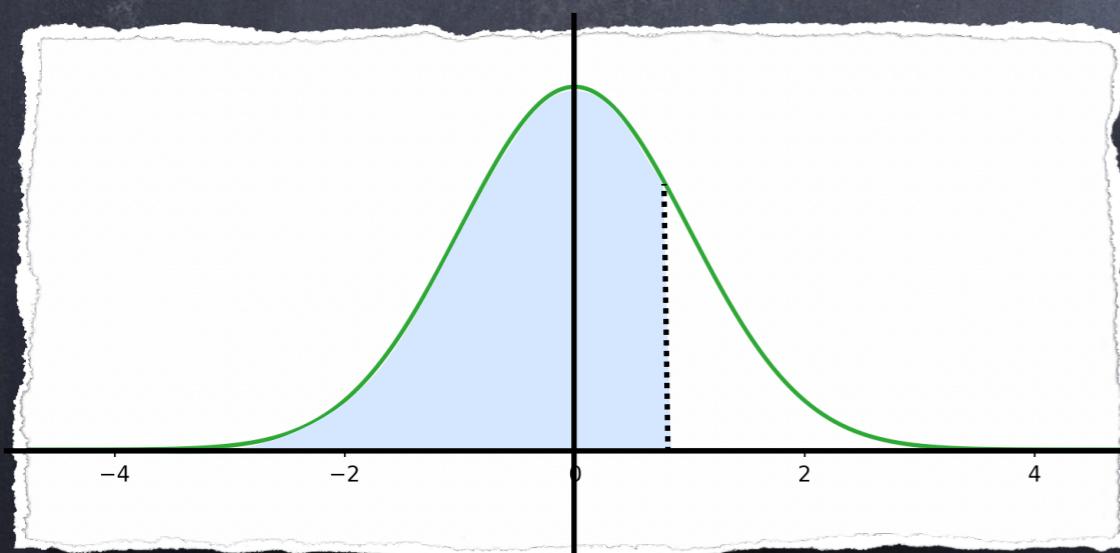


Table de la loi normale

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} / \sqrt{2\pi}$$

# Au programme (Chapitre 2)

Objectif :

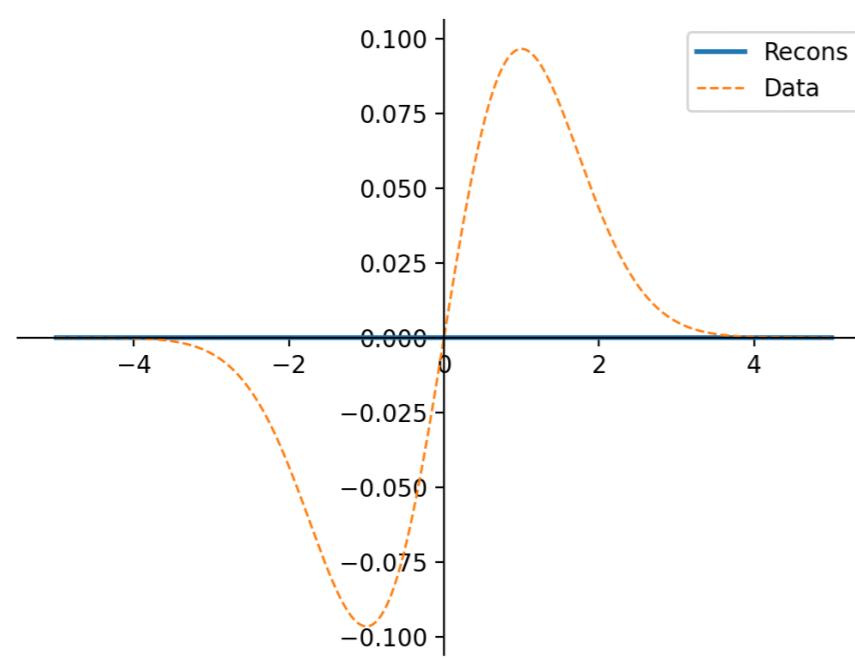
Étant donné une fonction  $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ , on souhaite calculer numériquement l'intégrale

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

Exemples d'application :

Table de la loi normale

Calcul (numérique) de séries de Fourier (ou autre transformée)



$$a_n = \int_0^T \cos(2\pi n x) f(x) dx$$

# Au programme (Chapitre 2)

Objectif :

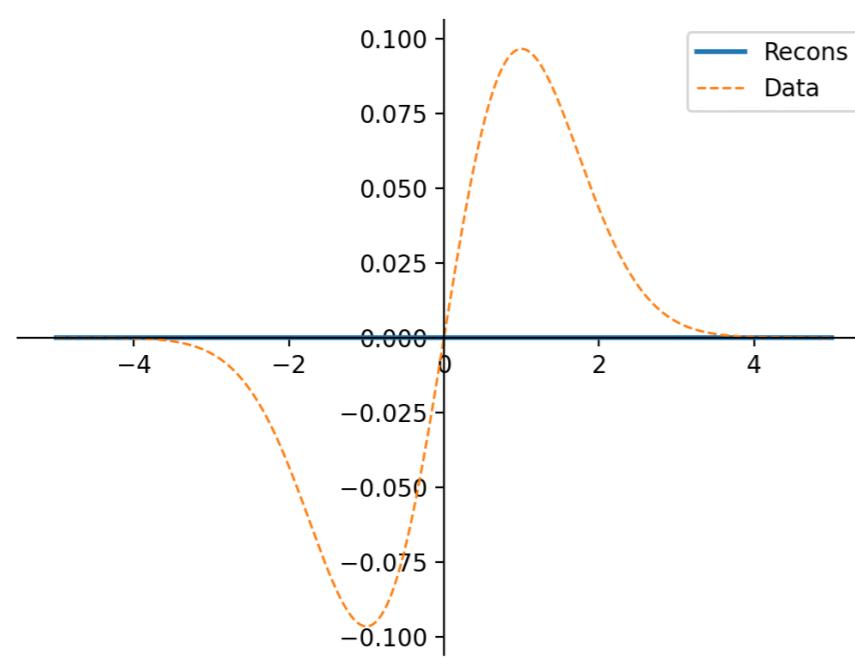
Étant donné une fonction  $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ , on souhaite calculer numériquement l'intégrale

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

Exemples d'application :

Table de la loi normale

Calcul (numérique) de séries de Fourier (ou autre transformée)



$$a_n = \int_0^T \cos(2\pi n x) f(x) dx$$

# Au programme (Chapitre 2)

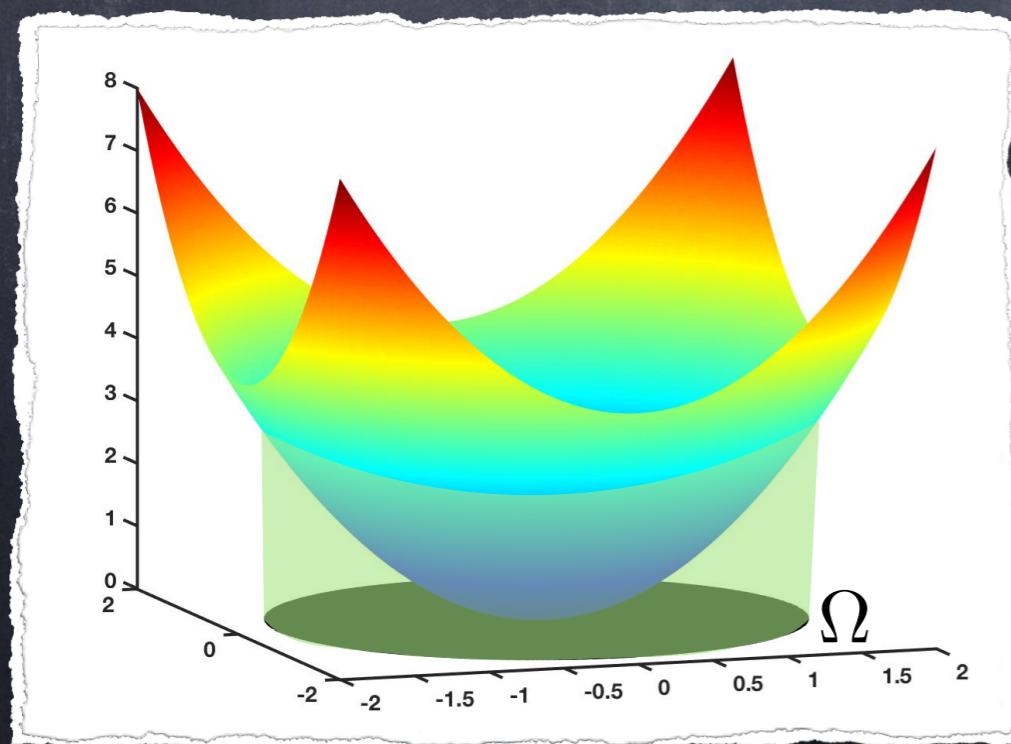
Objectif :

Étant donné une fonction  $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ , on souhaite calculer numériquement l'intégrale

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

Exemples d'application :

- ④ Table de la loi normale
- ④ Calcul de séries de Fourier
- ④ Calcul de volume  
(méthodes des EF, GM 4)



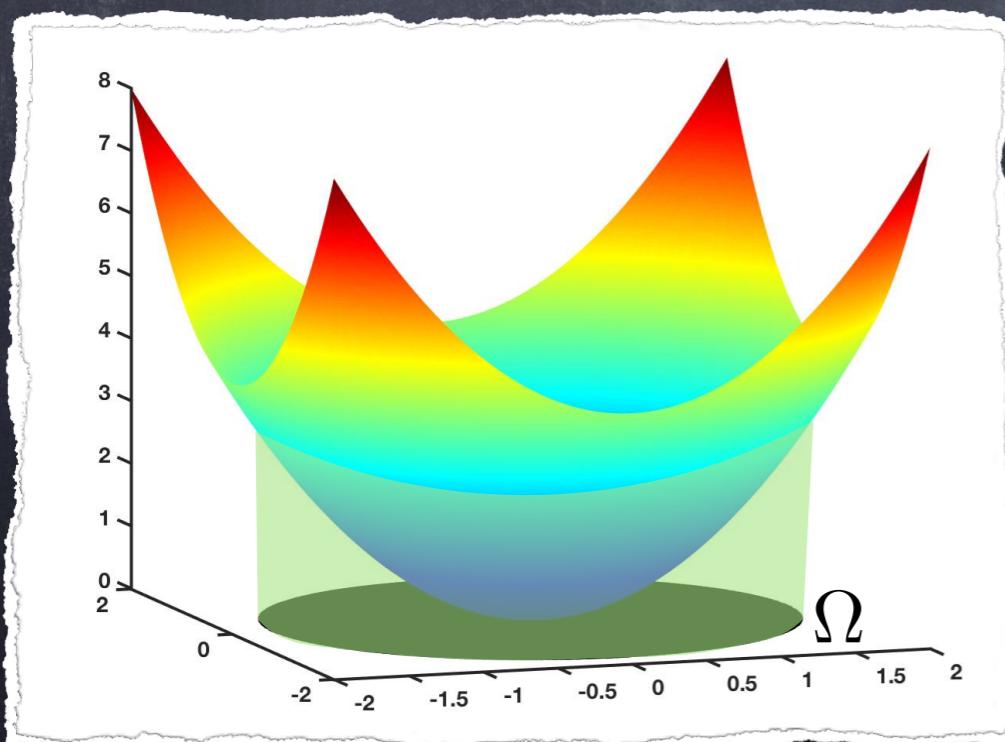
# Au programme (Chapitre 2)

Objectif :

Étant donné une fonction  $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ , on souhaite calculer numériquement l'intégrale

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

Exemples d'application :



- ④ Table de la loi normale
- ④ Calcul de séries de Fourier
- ④ Calcul de volume  
(méthodes des EF, GM 4)
- ④ Construction de schéma  
pour les EDO  
(cf. dernier chapitre)

# Au programme (Chapitre 2)

Objectif :

Étant donné une fonction  $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ , on souhaite calculer numériquement l'intégrale

$$I = \int_a^b f(x) \, dx$$

Plan :

I. Quadrature de Newton-Côtes

II. Quadrature de Gauss

III. Méthodes composites

IV. Quelques extensions

# Au programme (Chapitre 2)

Objectif :

Étant donné une fonction  $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ , on souhaite calculer numériquement l'intégrale

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

Plan :

I. Quadrature de Newton-Côtes

a) Définition de la méthode

b) Analyse de convergence

II. Quadrature de Gauss

III. Méthodes composites

IV. Quelques extensions

## I. a) Définition de la méthode

### 1.1 Définition

Une formule de quadrature est définie par un ensemble de  $n+1$  points  $a \leq x_0 < \dots < x_n \leq b$  associé à  $n+1$  poids  $\omega_i$

$$I = \sum_{i=0}^n \omega_i f(x_i) + R_n(f)$$

où  $R_n(f)$  est appelé le reste.

## I. a) Définition de la méthode

### 1.1 Définition

Une formule de quadrature est définie par un ensemble de  $n+1$  points  $a \leq x_0 < \dots < x_n \leq b$  associé à  $n+1$  poids  $\omega_i$

$$I = \sum_{i=0}^n \omega_i f(x_i) + R_n(f)$$

### 1.2 Définition

On dira qu'une formule de quadrature est exacte sur  $\mathbb{P}_k$  ssi  $R_n(f) = 0 \quad \forall f \in \mathbb{P}_k$ .

## I. a) Définition de la méthode

### 1.1 Définition

Une formule de quadrature est définie par un ensemble de  $n+1$  points  $a \leq x_0 < \dots < x_n \leq b$  associé à  $n+1$  poids  $\omega_i$

$$I = \sum_{i=0}^n \omega_i f(x_i) + R_n(f)$$

### 1.2 Définition

On dira qu'une formule de quadrature est exacte sur  $\mathbb{P}_k$  ssi  $R_n(f) = 0 \quad \forall f \in \mathbb{P}_k$ .

### 1.3 Proposition

La formule est exacte sur  $\mathbb{P}_k$  ssi  $R_n(x^i) = 0 \quad \forall i \in \{0, \dots, k\}$ .

Preuve : au (vrai) tableau !

## I. a) Définition de la méthode

Méthodes de Newton-Côtes :

Considérons les points équirépartis  $x_i = a + ih$ ,  $h = \frac{b-a}{n}$

Une idée alors pour calculer  $I$  est de remplacer  $f$  par son polynôme d'interpolation  $P_n f$ :

$$P_n f(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i^n(x)$$

## I. a) Définition de la méthode

Méthodes de Newton-Côtes :

Considérons les points équirépartis  $x_i = a + ih$ ,  $h = \frac{b-a}{n}$

Une idée alors pour calculer  $I$  est de remplacer  $f$  par son polynôme d'interpolation  $P_n f$  :

$$P_n f(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i^n(x)$$

On déduit alors la formule de quadrature :

$$I = \int_a^b \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i^n(x) + E_n f(x) dx \quad \text{où } E_n f = f(x) - P_n f(x)$$

$$= \sum_{i=0}^n f(x_i) \int_a^b L_i^n(x) dx + R_n f$$

## I. a) Définition de la méthode

Méthodes de Newton-Côtes :

Considérons les points équirépartis  $x_i = a + ih$ ,  $h = \frac{b-a}{n}$

Une idée alors pour calculer  $I$  est de remplacer  $f$  par son polynôme d'interpolation  $P_n f$  :

$$P_n f(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i^n(x)$$

On déduit alors la formule de quadrature :

$$I = \int_a^b \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i^n(x) + E_n f(x) dx \quad \text{où } E_n f = f(x) - P_n f(x)$$

$$= \sum_{i=0}^n f(x_i) \int_a^b L_i^n(x) dx + R_n f = \sum_{i=0}^n f(x_i) \omega_i + R_n f$$

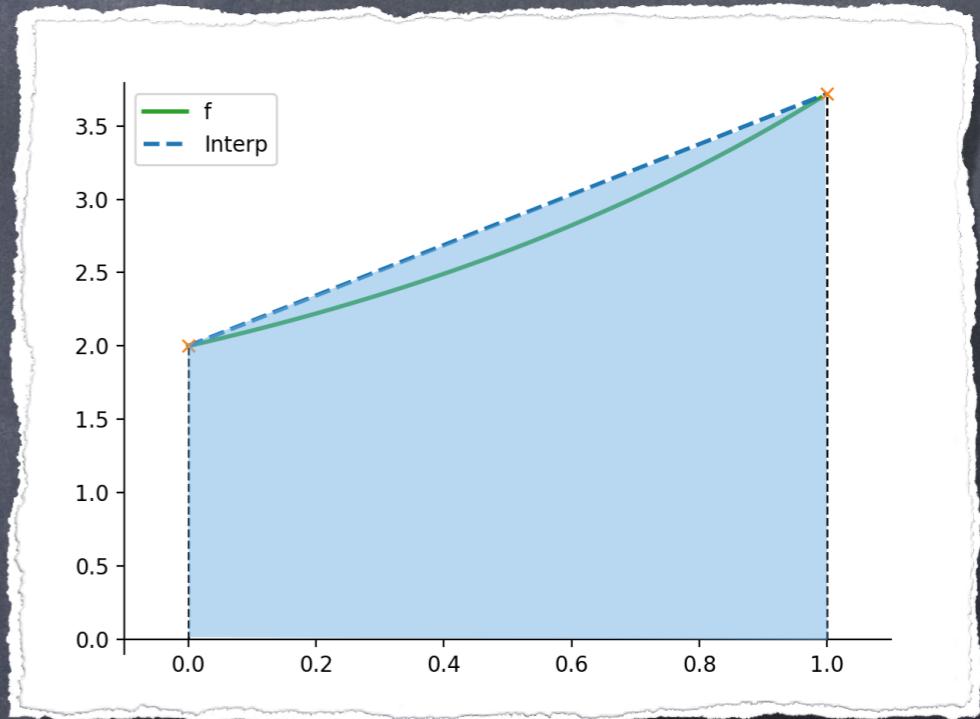
# I. a) Définition de la méthode

Méthodes de Newton-Côtes :

## ④ Formule des trapèzes ( $n=1$ )

$$I = \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)) + R_1(f)$$

(détails au (vrai) tableau)



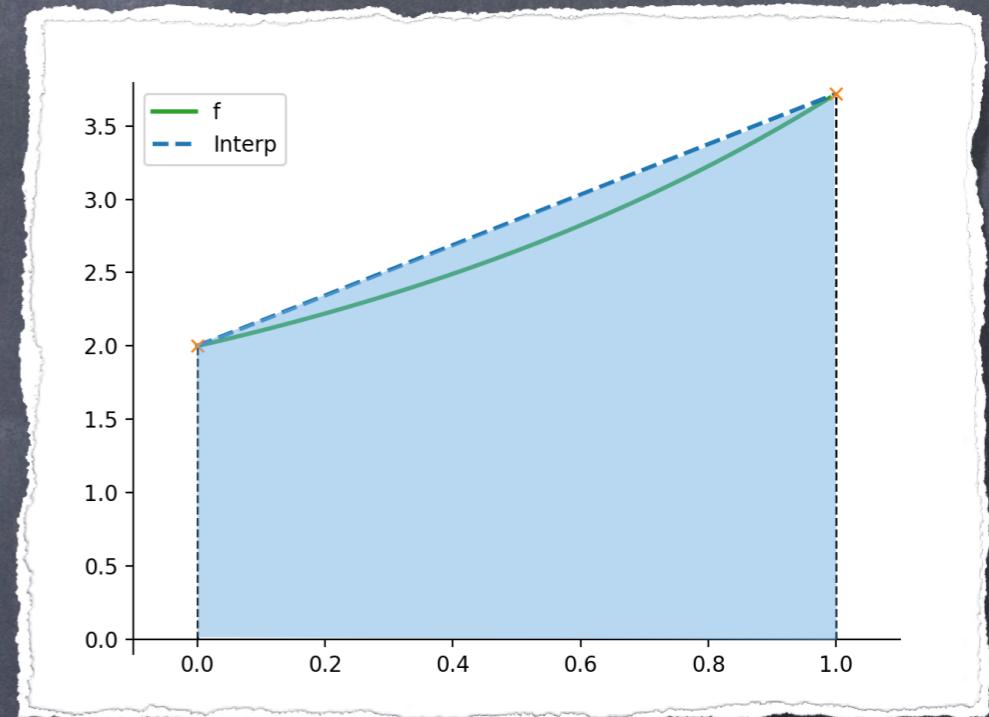
# I. a) Définition de la méthode

Méthodes de Newton-Côtes :

## ② Formule des trapèzes ( $n=1$ )

$$I = \frac{b-a}{2} \left( f(a) + f(b) \right) + R_1(f)$$

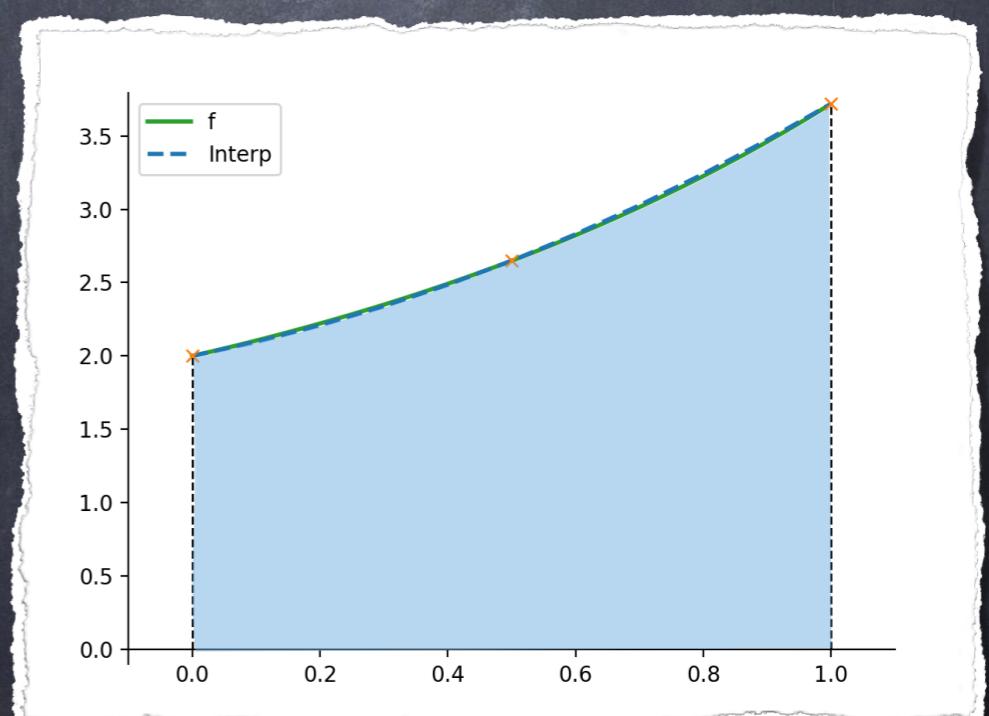
(détails au (vrai) tableau)



## ② Formule de Simpson ( $n=2$ )

$$I = \frac{b-a}{6} \left( f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) + R_2(f)$$

(détails au (vrai) tableau)



## I. b) Analyse de convergence

Forme générale des méthodes de Newton-Côtes :

$$I = \sum_{i=0}^n f(x_i) \omega_i + R_n f \quad \text{où} \quad \omega_i = \int_a^b L_i^n(x) dx$$

### 1.4 Proposition (cf TD)

Les poids  $\omega_i$  vérifient  $\omega_{n-i} = \omega_i$ .

## I. b) Analyse de convergence

Forme générale des méthodes de Newton-Côtes :

$$I = \sum_{i=0}^n f(x_i) \omega_i + R_n f \quad \text{où} \quad \omega_i = \int_a^b L_i^n(x) dx$$

### 1.4 Proposition (cf TD)

Les poids  $\omega_i$  vérifient  $\omega_{n-i} = \omega_i$ .

### 1.5 Corollaire

Les formules de Newton-Côtes sont exactes sur  $P_n$  si  $n$  est impair et sur  $P_{n+1}$  si  $n$  est pair.

Preuve : au (vrai) tableau !

## I. b) Analyse de convergence

### 1.6 Définition

Une formule de quadrature est dite convergente sur un espace de Banach  $V$  ssi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n f = 0 \quad \forall f \in V$$

### 1.6 Théorème (admis)

Une formule de quadrature est convergente ssi elle est

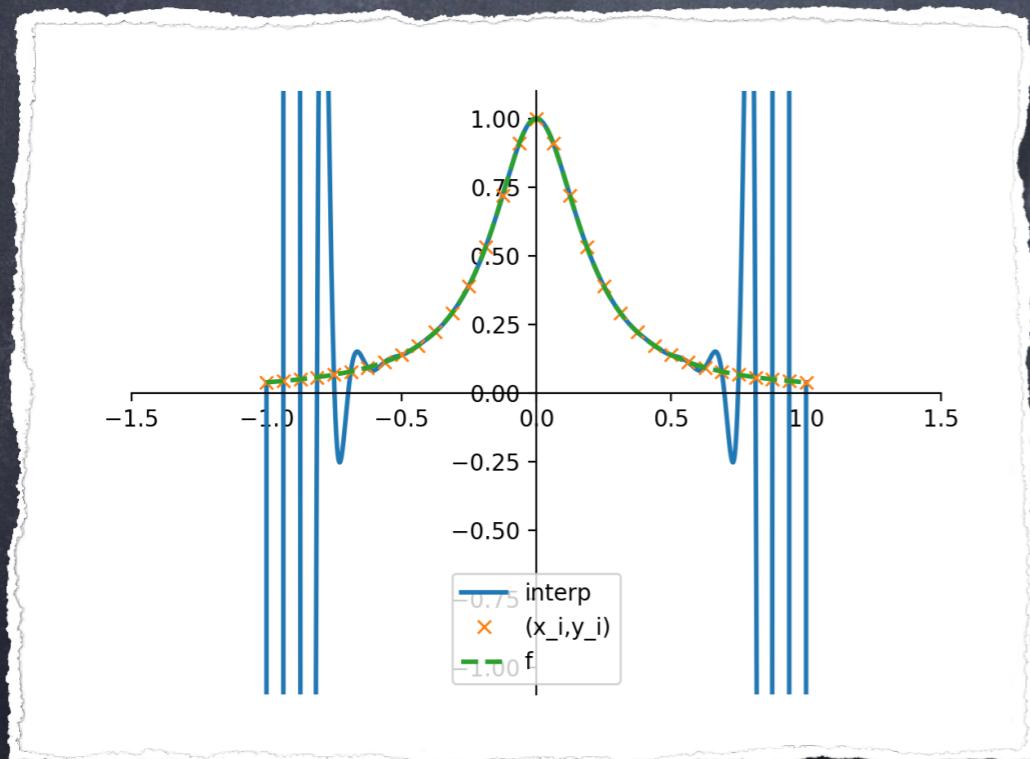
Ⓐ convergente sur  $W$  un sous espace dense de  $V$

Ⓑ stable, i.e.  $\exists M$  indépendant de  $n$  t.q.  $\sum_{i=0}^n |\omega_i| \leq M$

## I. b) Analyse de convergence

Méthodes de Newton-Côtes :

Par construction, ces formules sont convergentes sur  $\mathbb{P}$ .  
En revanche, elles ne sont pas stables, et donc non convergente !



On ne peut donc pas utiliser ces méthodes directement pour  $n$  grand !

Rappel du phénomène de Runge.

# Au programme (Chapitre 2)

Objectif :

Étant donné une fonction  $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ , on souhaite calculer numériquement l'intégrale

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

Plan :

I. Quadrature de Newton-Côtes

II. Quadrature de Gauss

a) Choix optimal des points

b) Analyse de convergence

III. Méthodes composites

IV. Quelques extensions

## II. a) Choix optimal des points

Idée :

À la différence des méthodes de N-C, nous allons chercher les positions optimales des points de quadrature.

## II. a) Choix optimal des points

Idée :

À la différence des méthodes de N-C, nous allons chercher les positions optimales des points de quadrature.

### 2.1 Théorème

Une méthode de quadrature est exacte sur  $\mathbb{P}_{2n+1}$ ssi

- ① les points vérifient  $\int_a^b x^j \prod_{i=0}^n (x-x_i) dx = 0 \quad \forall j \in \{0, \dots, n\}$
- ② les poids vérifient  $\omega_i = \int_a^b L_i^n(x) dx \quad \forall i \in \{0, \dots, n\}$

Preuve : au (vrai) tableau !

## II. a) Choix optimal des points

Idée :

À la différence des méthodes de N-C, nous allons chercher les positions optimales des points de quadrature.

### 2.1 Théorème

Une méthode de quadrature est exacte sur  $\mathbb{P}_{2n+1}$ ssi

- ① les points vérifient  $\int_a^b x^j \prod_{i=0}^n (x-x_i) dx = 0 \quad \forall j \in \{0, \dots, n\}$
- ② les poids vérifient  $\omega_i = \int_a^b L_i^n(x) dx \quad \forall i \in \{0, \dots, n\}$

Remarque : Si la formule est exacte sur  $\mathbb{P}_k$ ,  $k \geq n$ , alors les poids sont définis nécessairement comme ci-dessus. 14

## II. a) Choix optimal des points

Idée :

À la différence des méthodes de N-C, nous allons chercher les positions optimales des points de quadrature.

### 2.1 Théorème

Une méthode de quadrature est exacte sur  $\mathbb{P}_{2n+1}$ ssi

- ① les points vérifient  $\int_a^b x^j \prod_{i=0}^n (x-x_i) dx = 0 \quad \forall j \in \{0, \dots, n\}$
- ② les poids vérifient  $\omega_i = \int_a^b L_i^n(x) dx \quad \forall i \in \{0, \dots, n\}$

Remarque 2 : Une formule de quadrature ne peut pas être exacte sur  $\mathbb{P}_{2n+2}$ .

## II. a) Choix optimal des points

On se demande maintenant s'il existe des points vérifiant la relation précédente, et si oui, comment les déterminer.

## II. a) Choix optimal des points

On se demande maintenant s'il existe des points vérifiant la relation précédente, et si oui, comment les déterminer.

Un exemple de méthode de Gauss (point milieu) :

Prenons le cas  $n=0$ ,  $a = -1$  et  $b = 1$ . La condition précédente devient alors :

$$\int_{-1}^1 (x-x_1) dx = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$$

## II. a) Choix optimal des points

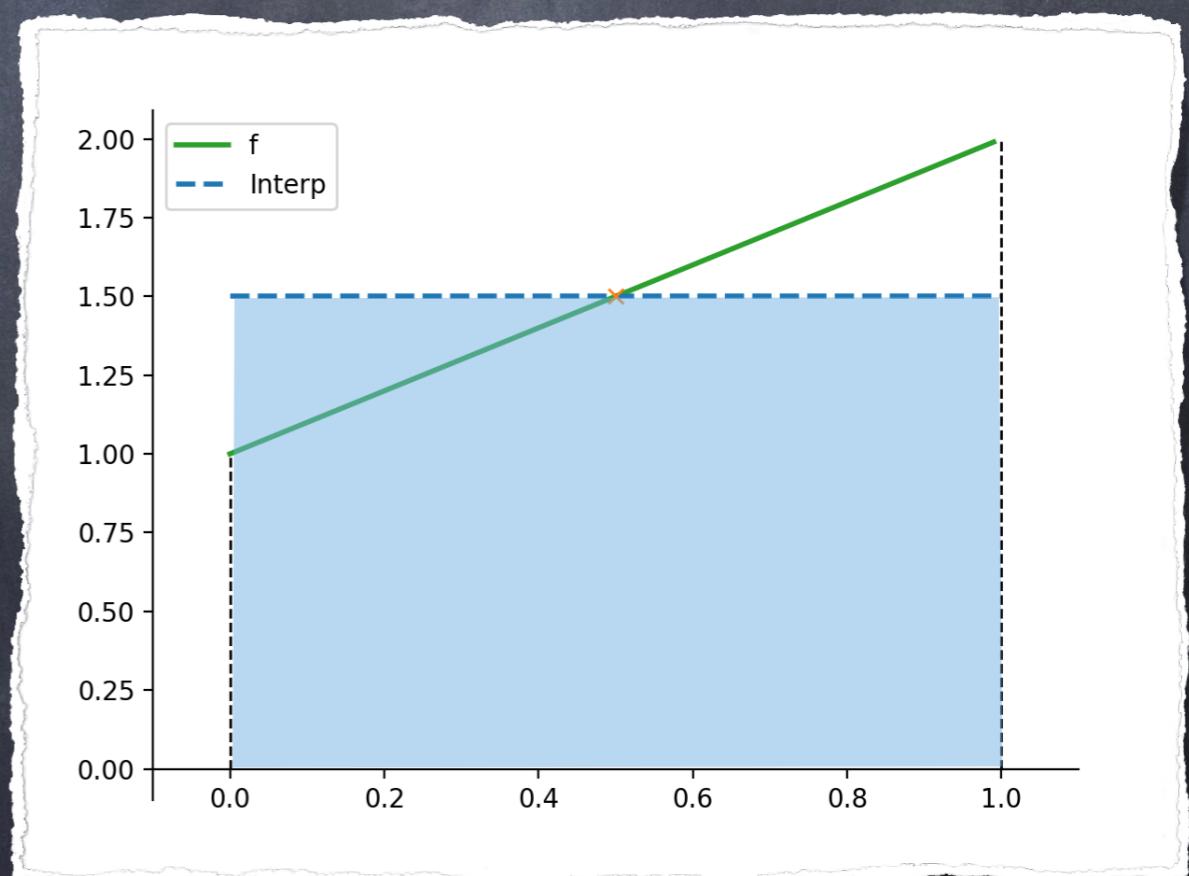
On se demande maintenant s'il existe des points vérifiant la relation précédente, et si oui, comment les déterminer.

Un exemple de méthode de Gauss (point milieu) :

Prenons le cas  $n=0$ ,  $a = -1$  et  $b = 1$ . La condition précédente devient alors :

$$\int_{-1}^1 (x-x_1) dx = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$$

Avec 1 point on construit une formule exacte sur  $\mathbb{P}_1$  !



## II. a) Choix optimal des points

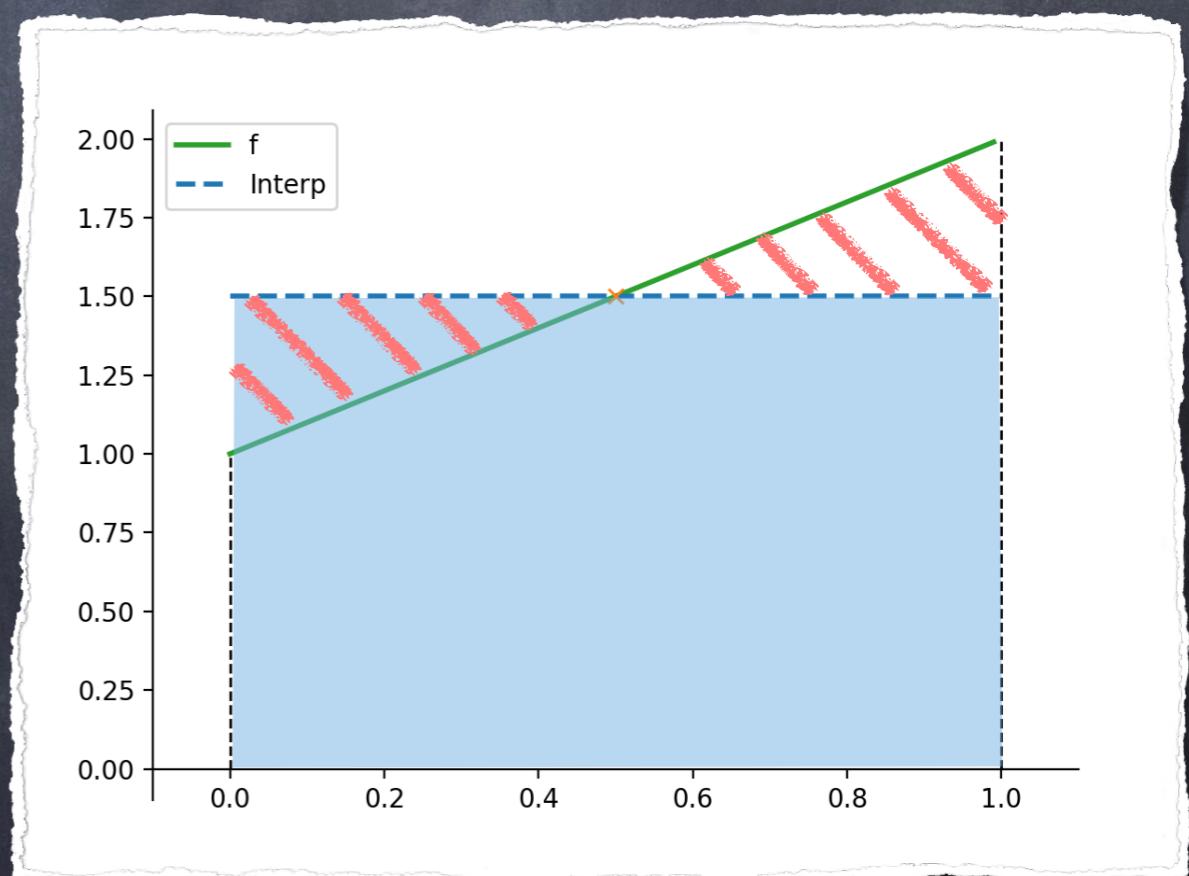
On se demande maintenant s'il existe des points vérifiant la relation précédente, et si oui, comment les déterminer.

Un exemple de méthode de Gauss (point milieu) :

Prenons le cas  $n=0$ ,  $a = -1$  et  $b = 1$ . La condition précédente devient alors :

$$\int_{-1}^1 (x-x_1) dx = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$$

Avec 1 point on construit une formule exacte sur  $\mathbb{P}_1$  !



## II. a) Choix optimal des points

On se demande maintenant s'il existe des points vérifiant la relation précédente, et si oui, comment les déterminer.

Trouver les points  $x_i$  t.q.  $\int_a^b x^j \prod_{i=0}^n (x-x_i) dx = 0 \quad \forall j \in \{0, \dots, n\}$

revient à trouver  $v_n \in \mathbb{P}_{n+1}$  t.q.  $v_n(x) = x^{n+1} + \dots$ , vérifiant

$$\int_a^b x^j v_n(x) dx = 0 \quad \forall j \in \{0, \dots, n\}$$

et ayant des racines réelles distinctes.

## II. a) Choix optimal des points

On se demande maintenant s'il existe des points vérifiant la relation précédente, et si oui, comment les déterminer.

Trouver les points  $x_i$  t.q.  $\int_a^b x^j \prod_{i=0}^n (x-x_i) dx = 0 \quad \forall j \in \{0, \dots, n\}$

revient à trouver  $v_n \in \mathbb{P}_{n+1}$  t.q.  $v_n(x) = x^{n+1} + \dots$ , vérifiant

$$\int_a^b x^j v_n(x) dx = 0 \quad \forall j \in \{0, \dots, n\}$$

et ayant des racines réelles distinctes.

Remarque :

Dans l'exemple précédent, nous avons  $v_0 = x$ .

## II. a) Choix optimal des points

### 2.2 Proposition

Il existe un unique polynôme de la forme  $v_n = x^{n+1} + \dots$  vérifiant :

$$\int_a^b x^j v_n(x) dx = 0 \quad \forall j \in \{0, \dots, n\}$$

Preuve : au (vrai) tableau !

## II. a) Choix optimal des points

### 2.2 Proposition

Il existe un unique polynôme de la forme  $v_n = x^{n+1} + \dots$  vérifiant :

$$\int_a^b x^j v_n(x) dx = 0 \quad \forall j \in \{0, \dots, n\}$$

### 2.3 Proposition

Les racines de  $v_n$  sont réelles, distinctes, dans l'intervalle  $[a,b]$  et symétriques par rapport à  $\frac{a+b}{2}$ .

Preuve : au (vrai) tableau !



## II. a) Choix optimal des points

Construction des  $v_n$  :

Les  $(v_n)_n$  forment une base de  $\mathbb{P}_{n+1}$  (en posant  $v_{-1} = 1$ ).

### 2.4 Proposition

La famille de polynôme  $(v_n)_n$  vérifie

$$\int_a^b v_j(x) v_n(x) dx = 0 \quad \forall j \in \{0, \dots, n-1\}$$

Preuve : au (vrai) tableau !



On dit qu'ils forment une famille de polynôme orthogonaux

## II. a) Choix optimal des points

Construction des  $v_n$  :

Les  $(v_n)_n$  forment une base de  $\mathbb{P}_{n+1}$  (en posant  $v_{-1} = 1$ ).

### 2.4 Proposition

La famille de polynôme  $(v_n)_n$  vérifie

$$\int_a^b v_j(x) v_n(x) dx = 0 \quad \forall j \in \{0, \dots, n-1\}$$

### 2.5 Théorème

La famille de polynôme  $(v_n)_n$  vérifie une relation de récurrence à trois termes :

$$v_{n+1}(x) = (x + A_n) v_n(x) - B_n v_{n-1}(x)$$

Preuve : au (vrai) tableau !

## II. a) Choix optimal des points

Construction des  $v_n$  :

Pour construire la famille des  $(v_n)_n$ , on peut utiliser la relation de récurrence :

$$v_{n+1}(x) = (x + A_n) v_n(x) - B_n v_{n-1}(x)$$

Ensuite, afin de déterminer les racines dans le cas général, il est utile d'utiliser le résultat suivant :

### 2.6 Théorème

Les racines de  $v_{n+1}$  entourent celles de  $v_n$ .

## II. a) Choix optimal des points

Construction des  $v_n$  :

Pour construire la famille des  $(v_n)_n$ , on peut utiliser la relation de récurrence :

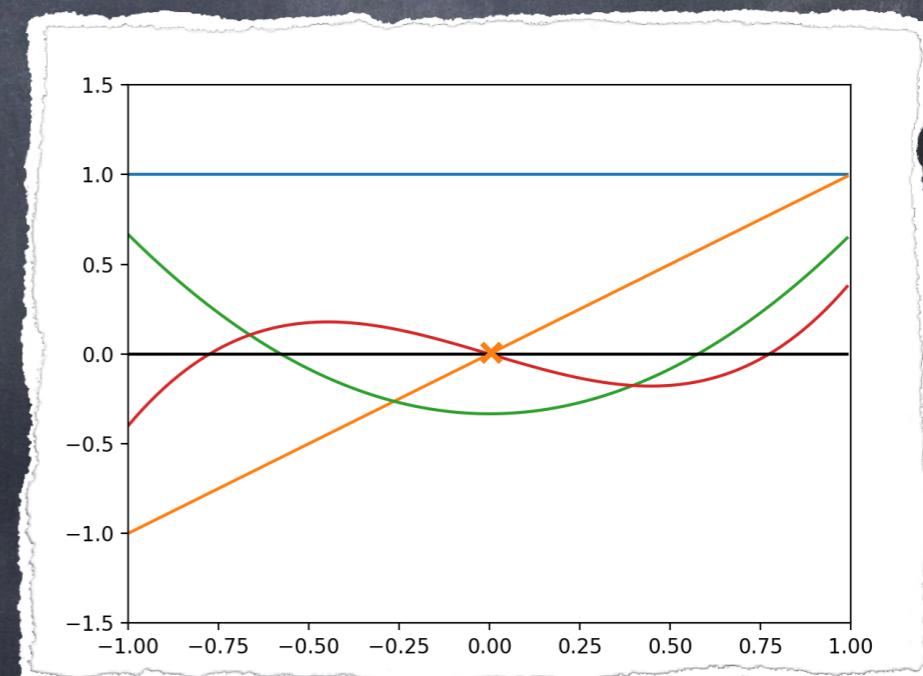
$$v_{n+1}(x) = (x + A_n) v_n(x) - B_n v_{n-1}(x)$$

Polynômes de Legendre ( $[a,b] = [-1,1]$ ) :

Dans ce cas, on obtient :

$$v_{-1} = 1 \quad v_0 = x$$

...



## II. a) Choix optimal des points

Construction des  $v_n$  :

Pour construire la famille des  $(v_n)_n$ , on peut utiliser la relation de récurrence :

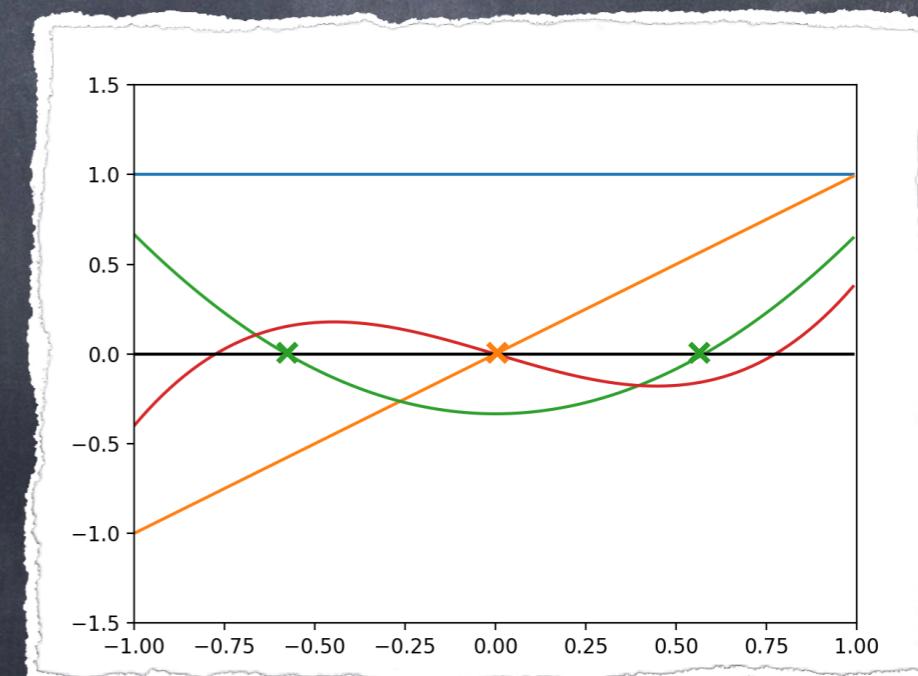
$$v_{n+1}(x) = (x + A_n) v_n(x) - B_n v_{n-1}(x)$$

Polynômes de Legendre ( $[a,b] = [-1,1]$ ) :

Dans ce cas, on obtient :

$$v_{-1} = 1 \quad v_0 = x \quad v_1 = x^2 - \frac{1}{3}$$

...



## II. a) Choix optimal des points

Construction des  $v_n$  :

Pour construire la famille des  $(v_n)_n$ , on peut utiliser la relation de récurrence :

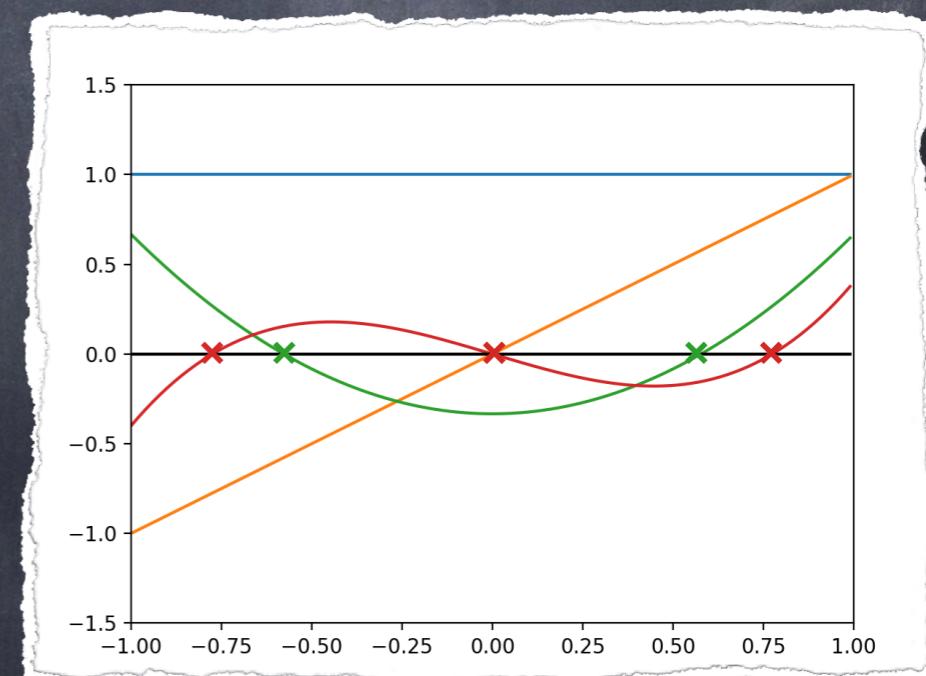
$$v_{n+1}(x) = (x + A_n) v_n(x) - B_n v_{n-1}(x)$$

Polynômes de Legendre ( $[a,b] = [-1,1]$ ) :

Dans ce cas, on obtient :

$$v_{-1} = 1 \quad v_0 = x \quad v_1 = x^2 - \frac{1}{3}$$

$$v_2 = x^3 - \frac{3}{5}x \quad \dots$$



## II. b) Analyse de convergence

### 2.7 Théorème

Les méthodes de Gauss sont stables et convergentes sur  $C^\infty([a,b])$ .

Preuve : au (vrai) tableau !

## II. b) Analyse de convergence

### 2.7 Théorème

Les méthodes de Gauss sont stables et convergentes sur  $C^\infty([a,b])$ .

### 2.8 Proposition

Si  $f$  est  $C^{2n+2}([a,b])$  alors on a :

$$R_n(f) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \int_a^b v_n^2(x) dx$$

Preuve : au (vrai) tableau !

## II. b) Analyse de convergence

Quelques remarques :

Les méthodes de Gauss sont convergentes, à la différence des méthodes de Newton-Côtes.

## II. b) Analyse de convergence

Quelques remarques :

Les méthodes de Gauss sont convergentes, à la différence des méthodes de Newton-Côtes.

Cependant, pour  $n$  grand, elles nécessitent le calcul d'un polynôme de haut degré et de ses racines, ce qui pose des difficultés...

## II. b) Analyse de convergence

Quelques remarques :

Les méthodes de Gauss sont convergentes, à la différence des méthodes de Newton-Côtes.

Cependant, pour  $n$  grand, elles nécessitent le calcul d'un polynôme de haut degré et de ses racines, ce qui pose des difficultés...

Notons enfin que la méthode se généralise au calcul d'intégrale de la forme :

$$I = \int_a^b f(x) w(x) dx$$

où  $w(x)$  est une fonction poids positive.

# Au programme (Chapitre 2)

Objectif :

Étant donné une fonction  $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ , on souhaite calculer numériquement l'intégrale

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

Plan :

I. Quadrature de Newton-Côtes

II. Quadrature de Gauss

III. Méthodes composites

a) Construction des formules

b) Analyse de convergence

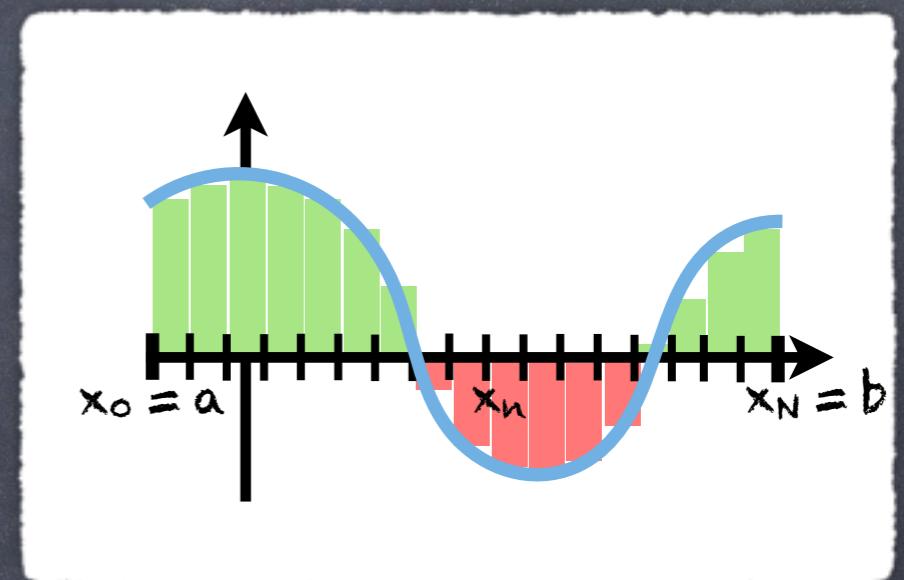
IV. Quelques extensions

### III. a) Construction des formules

Idée :

Revenons un peu en arrière en rappelant la construction de l'intégrale de Riemann :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N f(x_n) \frac{b-a}{N}$$

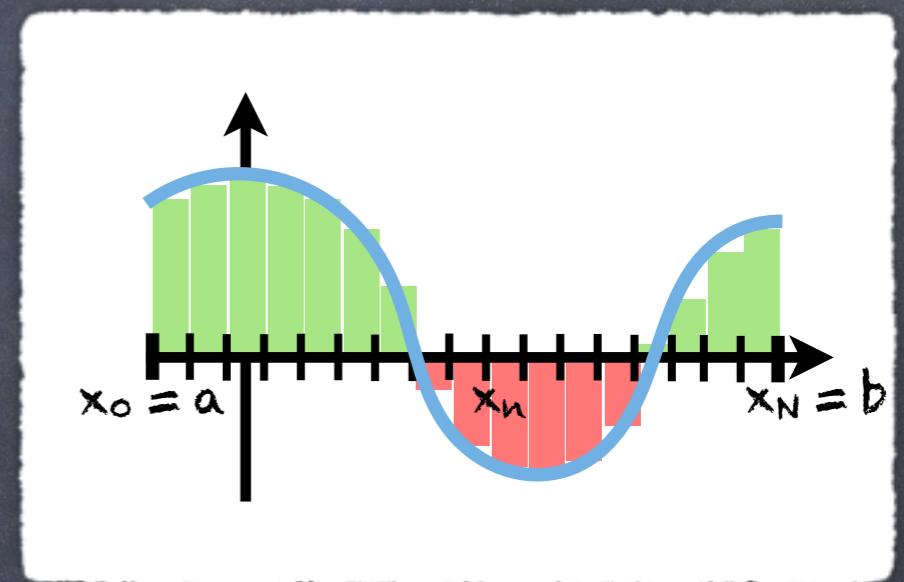


### III. a) Construction des formules

Idée :

Revenons un peu en arrière en rappelant la construction de l'intégrale de Riemann :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N f(x_n) \frac{b-a}{N}$$



Le principe des **méthodes composites** est alors de diviser l'intervalle  $[a,b]$  en  $p$  sous-intervalles  $[x_i, x_{i+1}]$  et d'appliquer une formule de quadrature « simple » sur chaque sous-intervalle  $[x_i, x_{i+1}]$ .

### III. a) Construction des formules

Méthodes composites :

Considérons une méthode de quadrature « simple » :

$$\int_{-1}^1 F(\hat{x}) d\hat{x} \simeq \sum_{i=0}^n F(\hat{x}_i) \omega_i$$

### III. a) Construction des formules

Méthodes composites :

Considérons une méthode de quadrature « simple » :

$$\int_{-1}^1 F(\hat{x}) d\hat{x} \simeq \sum_{i=0}^n F(\hat{x}_i) \omega_i$$

À l'aide de la relation de Chasles, on obtient facilement

$$I = \int_a^b f(x) dx = \sum_{j=0}^{p-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x) dx$$

### III. a) Construction des formules

Méthodes composites :

Considérons une méthode de quadrature « simple » :

$$\int_{-1}^1 F(\hat{x}) d\hat{x} \simeq \sum_{i=0}^n F(\hat{x}_i) \omega_i$$

À l'aide de la relation de Chasles, on obtient facilement

$$I = \int_a^b f(x) dx = \sum_{j=0}^{p-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x) dx$$

$$\hat{x} = 2 \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j} - 1$$

$$= \sum_{j=0}^{p-1} \frac{x_{j+1} - x_j}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{\hat{x} + 1}{2}(x_{j+1} - x_j) + x_j\right) d\hat{x}$$

### III. a) Construction des formules

Méthodes composites :

Considérons une méthode de quadrature « simple » :

$$\int_{-1}^1 F(\hat{x}) d\hat{x} \approx \sum_{i=0}^n F(\hat{x}_i) \omega_i$$

À l'aide de la **relation de Chasles**, on obtient facilement

$$I = \int_a^b f(x) dx = \sum_{j=0}^{p-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x) dx$$

$$\hat{x} = 2 \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j} - 1$$

$$= \sum_{j=0}^{p-1} \frac{x_{j+1} - x_j}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{\hat{x} + 1}{2}(x_{j+1} - x_j) + x_j\right) d\hat{x}$$

$$\approx \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{i=0}^n \frac{x_{j+1} - x_j}{2} \omega_i f(x_{i,j}) \quad \text{où } x_{i,j} = \frac{\hat{x}_i + 1}{2}(x_{j+1} - x_j) + x_j$$

### III. a) Construction des formules

Méthodes composites :

Considérons une méthode de quadrature « simple » :

$$\int_{-1}^1 F(\hat{x}) d\hat{x} \simeq \sum_{i=0}^n F(\hat{x}_i) \omega_i$$

La méthode composite associée est donnée par :

$$I = \int_a^b f(x) dx \simeq \underbrace{\sum_{j=0}^{p-1} \sum_{i=0}^n \frac{x_{j+1} - x_j}{2} \omega_i f(x_{i,j})}_{:= I_h}$$

$$\text{où } x_{i,j} = \frac{\hat{x}_i + 1}{2} (x_{j+1} - x_j) + x_j.$$

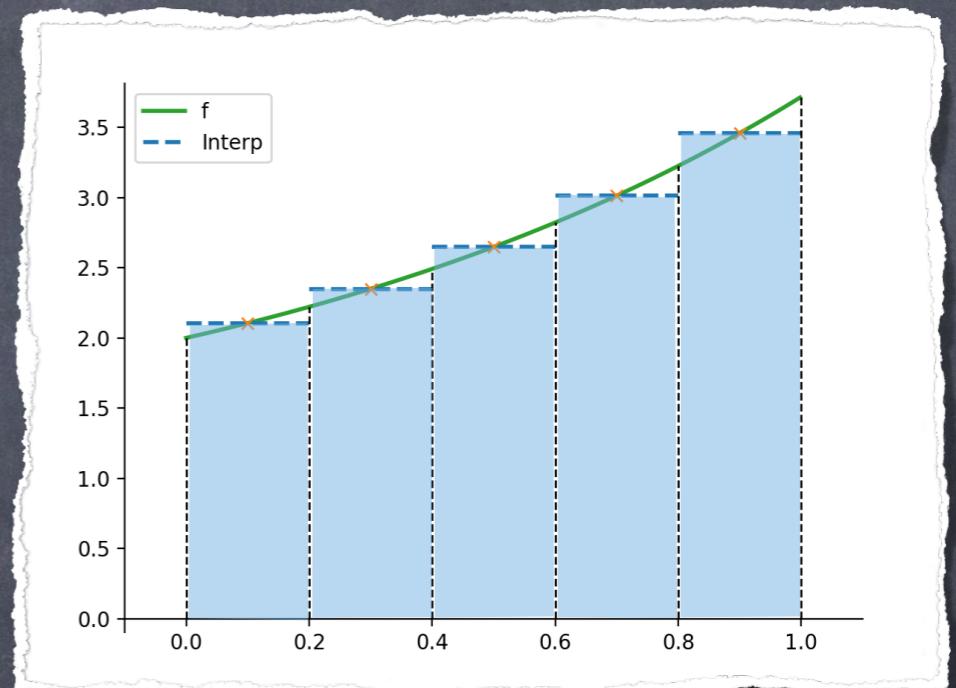
### III. a) Construction des formules

Méthodes composites (cas où  $x_{i+1} - x_i = h$ )

#### Formule du point milieu ( $n=0$ )

$$I_h = h \sum_{j=1}^{p-1} f\left(\frac{x_j + x_{j+1}}{2}\right)$$

(détails au (vrai) tableau)



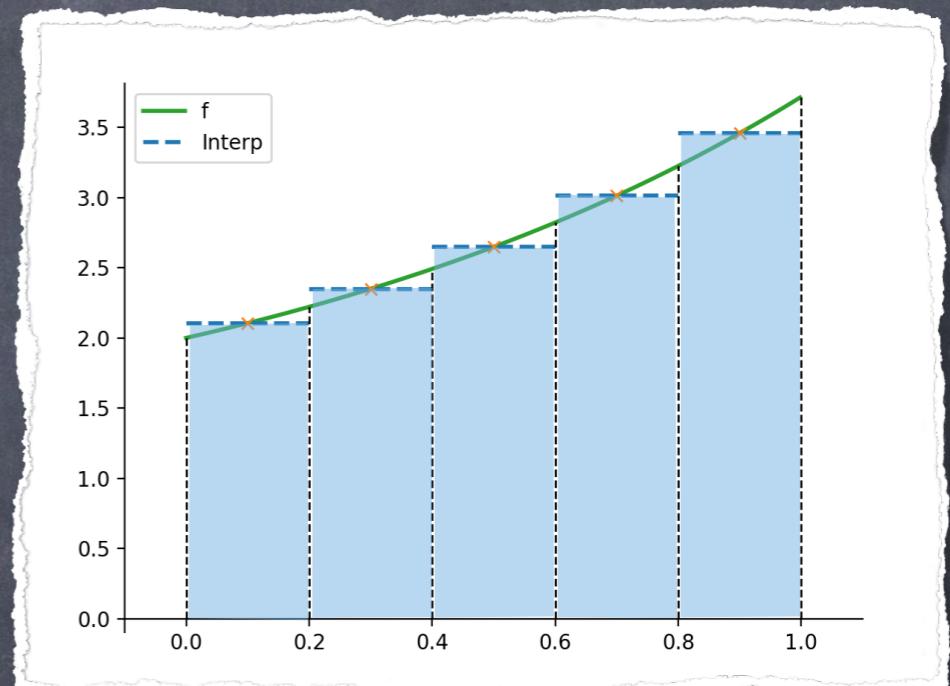
### III. a) Construction des formules

Méthodes composites (cas où  $x_{i+1} - x_i = h$ )

#### Formule du point milieu ( $n=0$ )

$$I_h = h \sum_{j=1}^{p-1} f\left(\frac{x_j + x_{j+1}}{2}\right)$$

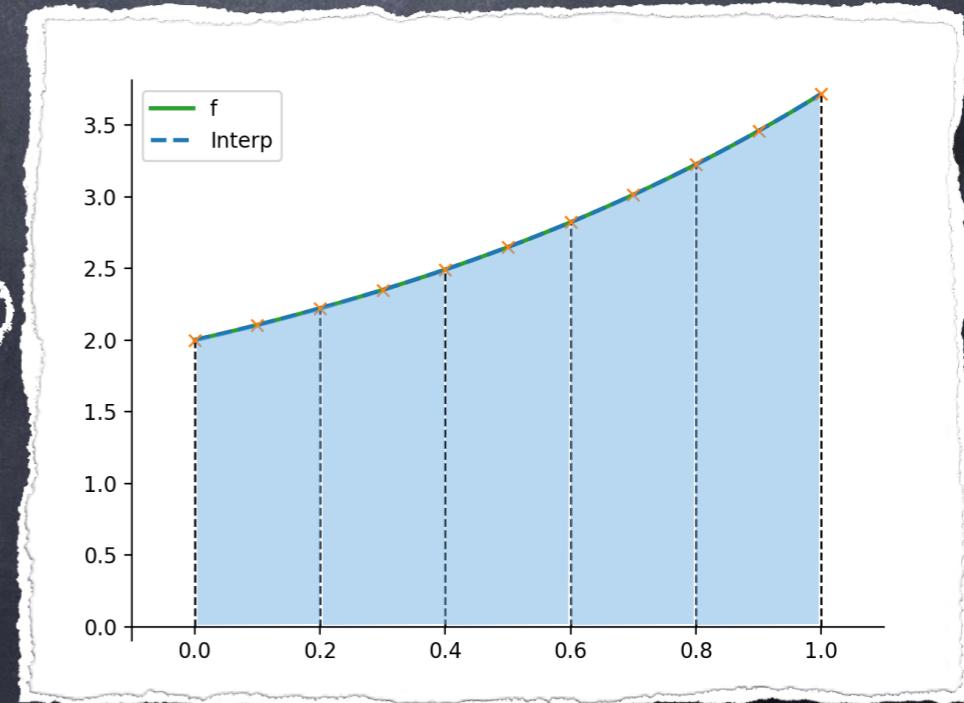
(détails au (vrai) tableau)



#### Formule de Simpson ( $n=2$ )

$$I_h = \frac{h}{6} \sum_{j=1}^{p-1} f(x_j) + 4f\left(\frac{x_j + x_{j+1}}{2}\right) + f(x_{j+1})$$

(détails au (vrai) tableau)



### III. b) Analyse de convergence

Pour simplifier, nous allons considérer dans la suite le cas  $x_{i+1} - x_i = h$ .

#### 3.1 Définition

Une formule de quadrature composite est d'ordre  $m$  ssi

$$| I - I_h | = O(h^m)$$

### III. b) Analyse de convergence

Pour simplifier, nous allons considérer dans la suite le cas  $x_{i+1} - x_i = h$ .

#### 3.1 Définition

Une formule de quadrature composite est d'ordre  $m$  ssi

$$|I - I_h| = O(h^m)$$

#### 3.2 Proposition

Si la méthode simple est exacte sur  $\mathbb{P}_k$ ,  $k \geq n$ , et  $f \in C^{k+1}$ , alors :

$$|I - I_h| = O(h^{k+1})$$

Preuve : au (vrai) tableau !



### III. b) Analyse de convergence

Pour simplifier, nous allons considérer dans la suite le cas  $x_{i+1} - x_i = h$ .

#### 3.1 Définition

Une formule de quadrature composite est d'ordre  $m$  ssi

$$|I - I_h| = O(h^m)$$

#### 3.2 Proposition

Si la méthode simple est exacte sur  $\mathbb{P}_k$ ,  $k \geq n$ , et  $f \in C^{k+1}$ , alors :

$$|I - I_h| = O(h^{k+1})$$

### III. b) Analyse de convergence

Pour simplifier, nous allons considérer dans la suite le cas  $x_{i+1} - x_i = h$ .

#### 3.1 Définition

Une formule de quadrature composite est d'ordre  $m$  ssi

$$|I - I_h| = O(h^m)$$

#### 3.2 Proposition

Si la méthode simple est exacte sur  $\mathbb{P}_k$ ,  $k \geq n$ , et  $f \in C^{k+1}$ , alors :

$$|I - I_h| = O(h^{k+1})$$

Remarque : Si la formule simple n'est pas exacte sur  $\mathbb{P}_{k+1}$ , alors la formule composite sera exactement d'ordre  $k+1$ .

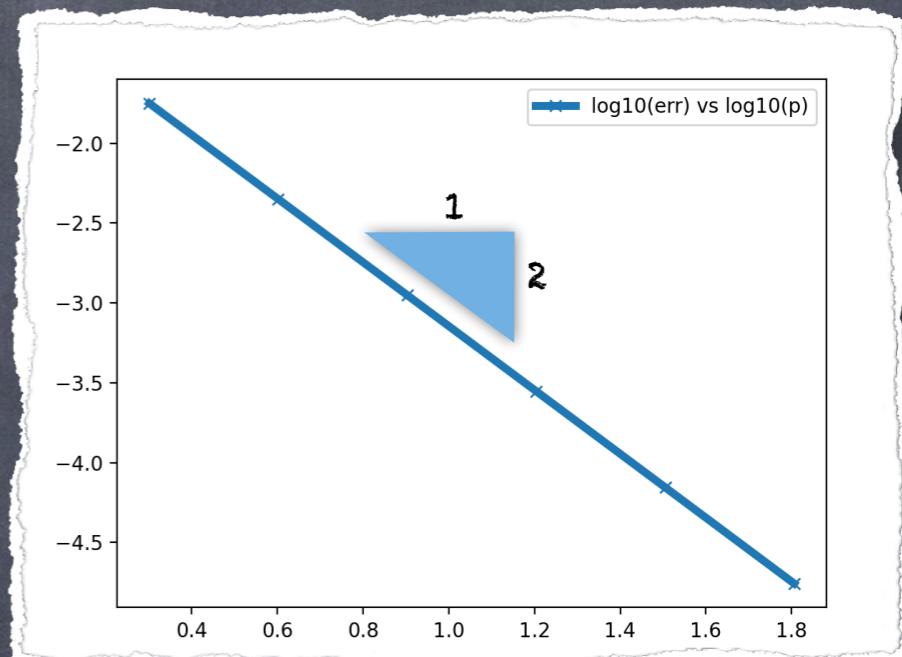
## III. b) Analyse de convergence

Illustration de la convergence :

### Formule du point milieu ( $n=0$ )

$$I_h = h \sum_{j=1}^{p-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$$

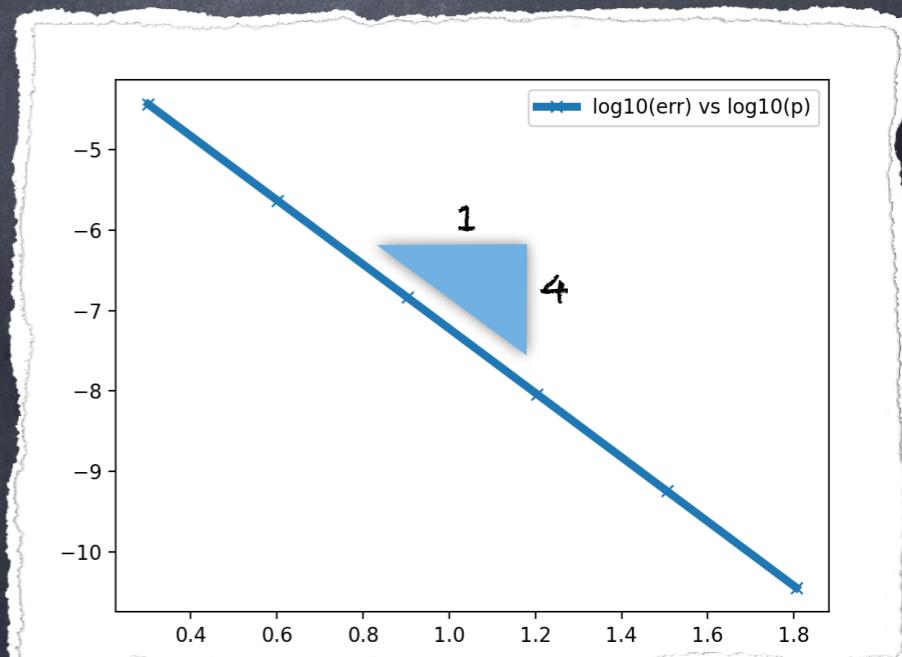
Exacte sur  $\mathbb{P}_1$



### Formule de Simpson ( $n=2$ )

$$I_h = \frac{h}{6} \sum_{j=1}^{p-1} f(x_i) + 4f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + f(x_{i+1})$$

Exacte sur  $\mathbb{P}_3$



### III. b) Analyse de convergence

Pour résumer :

Les méthodes composites sont stables et convergentes.  
Elles sont donc toujours préférées aux méthodes simples.

### III. b) Analyse de convergence

Pour résumer :

Les méthodes composites sont stables et convergentes.  
Elles sont donc toujours préférées aux méthodes simples.

Pour construire une méthode composite, on procèdera ainsi :

- ② On établit une formule simple sur  $[-1,1]$  (par exemple)
  - On choisit les points de quadrature  $x_i$

### III. b) Analyse de convergence

Pour résumer :

Les méthodes composites sont stables et convergentes.  
Elles sont donc toujours préférées aux méthodes simples.

Pour construire une méthode composite, on procèdera ainsi :

- ◎ On établit une formule simple sur  $[-1,1]$  (par exemple)
  - On choisit les points de quadrature  $x_i$
  - On calcule les poids associés  $\omega_i = \int_{-1}^1 L_i^n(x) dx$  ou en résolvant le système linéaire :

$$\sum_{i=0}^n \omega_i x_i^k = \int_{-1}^1 x^k dx, \quad k \in \{0, \dots, m\}$$

en cherchant  $m$  le plus grand possible.

### III. b) Analyse de convergence

Pour résumer :

Les méthodes **composites** sont stables et convergentes.  
Elles sont donc toujours préférées aux méthodes simples.

Pour construire une méthode composite, on procèdera ainsi :

① On établit une formule simple sur  $[-1,1]$

$$\int_{-1}^1 F(\hat{x}) d\hat{x} \simeq \sum_{i=0}^n F(\hat{x}_i) \omega_i$$

② On déduit la formule composite associée.

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{i=0}^n \frac{h}{2} \omega_i f(x_{i,j})$$

# Au programme (Chapitre 2)

Objectif :

Étant donné une fonction  $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ , on souhaite calculer numériquement l'intégrale

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

Plan :

I. Quadrature de Newton-Côtes

II. Quadrature de Gauss

III. Méthodes composites

IV. Quelques extensions

a) Quadrature d'Hermite

b) En dimension supérieure

## IV. a) Quadrature Hermite

On cherche à calculer numériquement

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

Dans les formules de quadratures présentées jusqu'ici, on utilisait uniquement des évaluations de  $f$ .

Si la fonction  $f$  est **dérivable**, une idée naturelle est alors d'utiliser également sa dérivée :

$$I = \sum_{i=0}^n \omega_i f(x_i) + \sum_{i=0}^n \omega'_i f'(x'_i) + R_n(f)$$

## IV. a) Quadrature Hermite

On cherche à calculer numériquement

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

Dans les formules de quadratures présentées jusqu'ici, on utilisait uniquement des évaluations de  $f$ .

Si la fonction  $f$  est **dérivable**, une idée naturelle est alors d'utiliser également sa dérivée :

$$I = \sum_{i=0}^n \omega_i f(x_i) + \sum_{i=0}^n \omega'_i f'(x'_i) + R_n(f)$$

**Remarque :** Il n'est pas obligatoire d'utiliser les mêmes points d'évaluation pour  $f$  et  $f'$ .

## IV. a) Quadrature Hermite

### 4.1 Définition

Une formule de quadrature d'Hermite est définie par :

$$I = \sum_{i=0}^n \omega_i f(x_i) + \sum_{i=0}^n \omega'_i f'(x'_i) + R_n(f)$$

### 4.2 Proposition

La méthode de quadrature est exacte au plus sur  $\mathbb{P}_{4n+3}$

Preuve : au (vrai) tableau !

## IV. a) Quadrature Hermite

### 4.1 Définition

Une formule de quadrature d'Hermite est définie par :

$$I = \sum_{i=0}^n \omega_i f(x_i) + \sum_{i=0}^n \omega'_i f'(x'_i) + R_n(f)$$

### 4.2 Proposition

La méthode de quadrature est exacte au plus sur  $\mathbb{P}_{4n+3}$

Remarque : Si on a  $x_i = x'_i$ , la formule est alors au plus exacte sur  $\mathbb{P}_{2n+2}$ .

Remarque 2 : Il n'est cependant pas évident de déterminer les points  $x_i$  et  $x'_i$  optimaux.

## IV. a) Quadrature Hermite

### 4.1 Définition

Une formule de quadrature d'Hermite est définie par :

$$I = \sum_{i=0}^n \omega_i f(x_i) + \sum_{i=0}^n \omega'_i f'(x'_i) + R_n(f)$$

Attention, lorsqu'on établie la formule de quadrature composite associé, il faut être vigilant à la dérivée  $f'$  !!

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{i=0}^n \frac{h}{2} \omega_i f(x_{i,j}) + \frac{h^2}{4} \omega'_0 f'(x'_{i,j})$$

(détails au (vrai) tableau)

## IV. a) Quadrature Hermite

Un exemple de quadrature d'Hermite ( $n=0$ )

Considérons le cas suivant  $I \approx \omega_0 f(x_0) + \omega'_0 f'(x'_0)$

Pour avoir une formule exacte sur  $\mathbb{P}_3$ , on doit prendre :

$$\omega_0 = 2 \quad x_0 = -\sqrt{\frac{1}{3+2\sqrt{3}}}$$

$$\omega'_0 = -2x_0 \quad x'_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}x_0$$

(détails au (vrai) tableau)

## IV. a) Quadrature Hermite

Un exemple de quadrature d'Hermite ( $n=0$ )

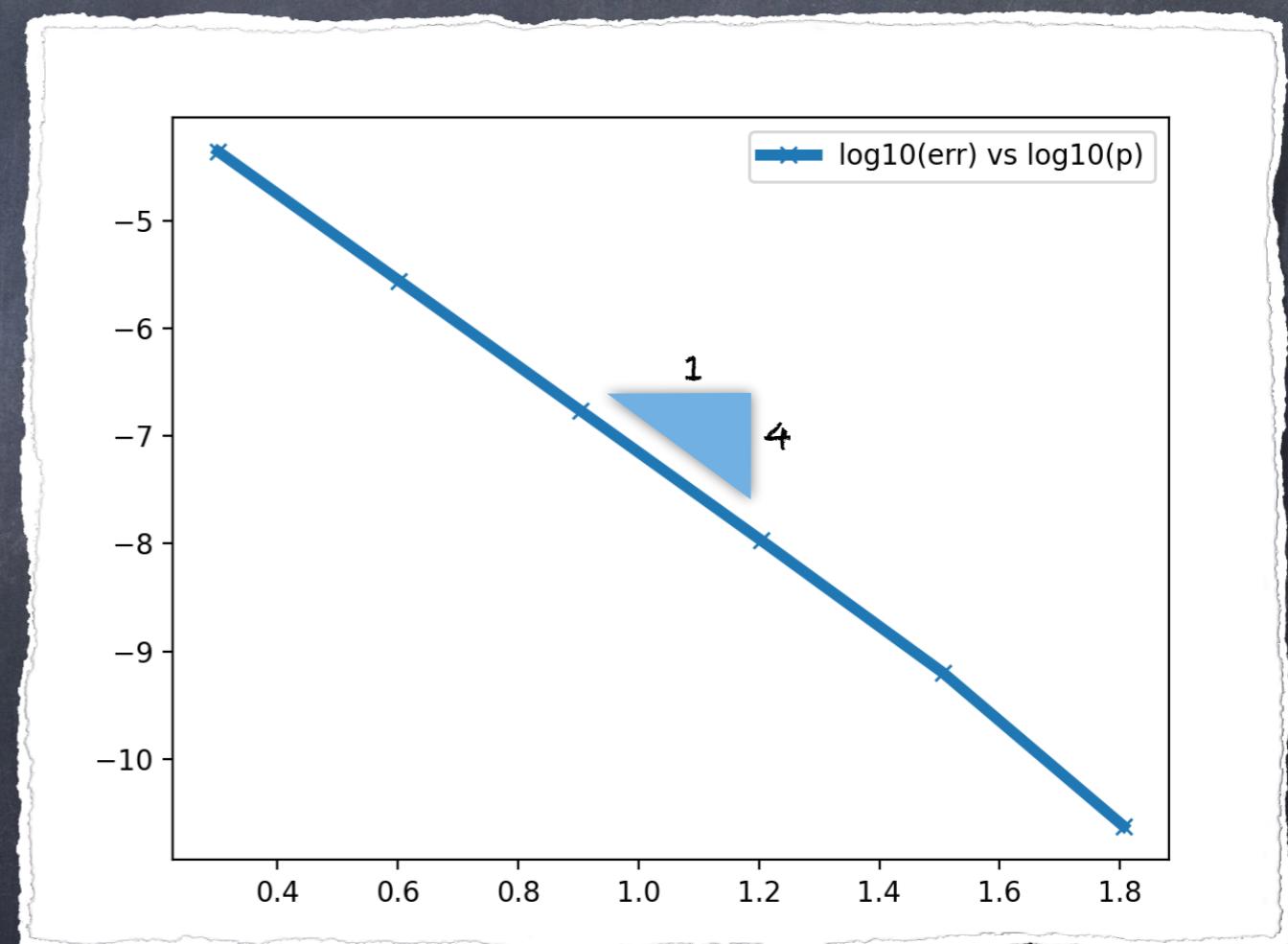
Considérons le cas suivant  $I \approx \omega_0 f(x_0) + \omega'_0 f'(x'_0)$

Pour avoir une formule exacte sur  $\mathbb{P}_3$ , on doit prendre :

$$\omega_0 = 2 \quad x_0 = -\sqrt{\frac{1}{3+2\sqrt{3}}}$$

$$\omega'_0 = -2x_0 \quad x'_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}x_0$$

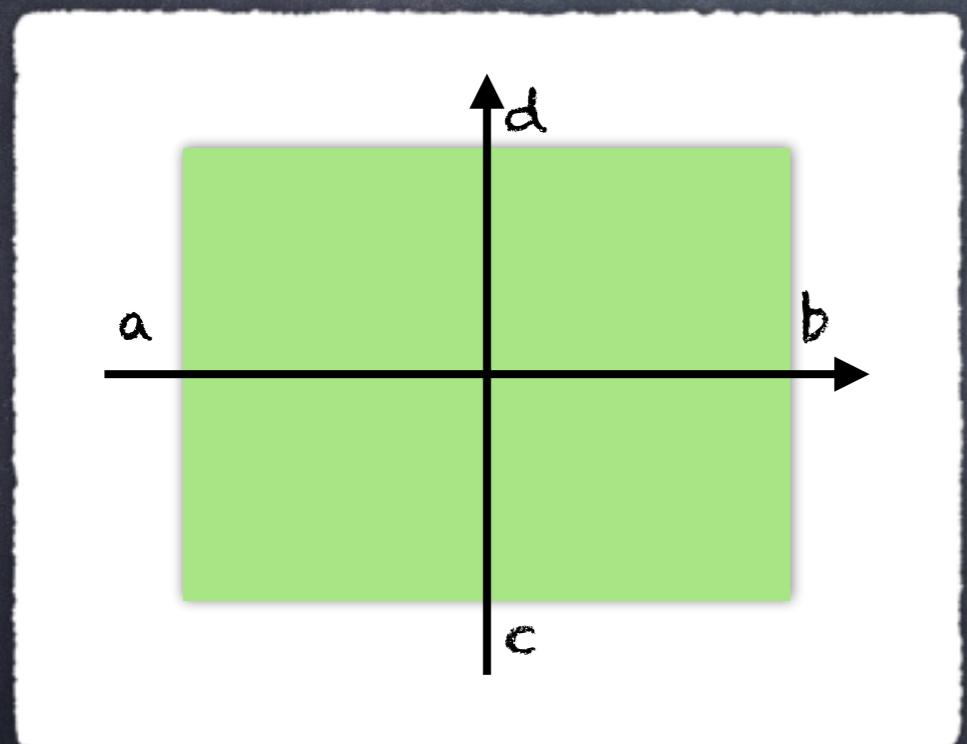
(détails au (vrai) tableau)



## IV. b) En dimension supérieure

Soit  $\Omega$  un sous domaine borné de  $\mathbb{R}^2$ .

Si  $\Omega$  est un **domaine cartésien**, i.e  $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ , il est alors facile de construire une formule de quadrature :

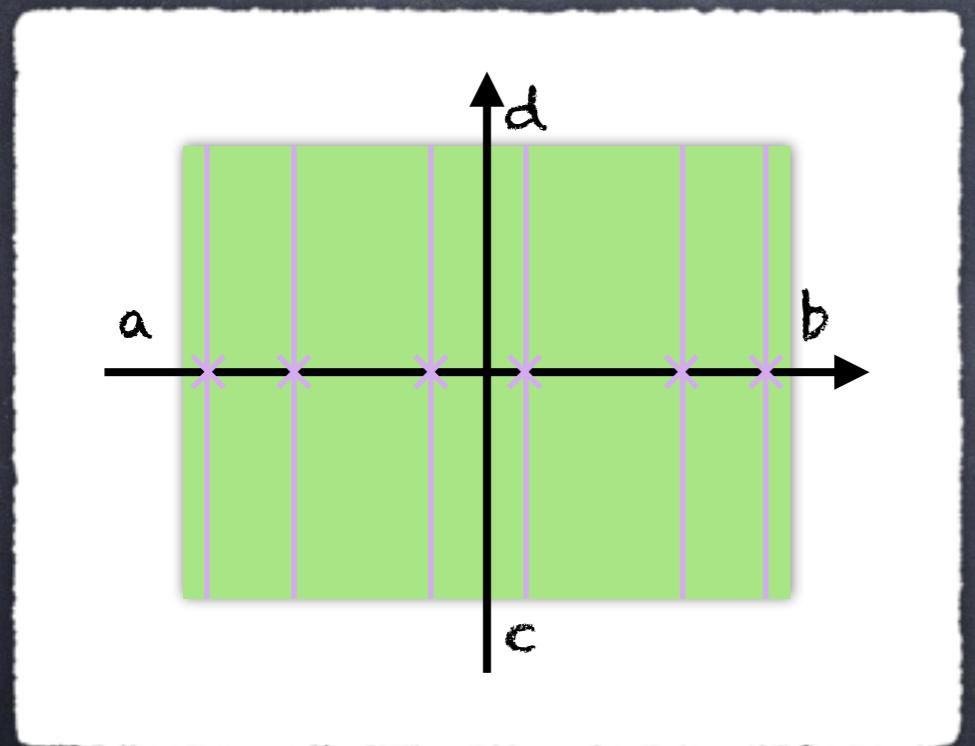


$$I = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy \, dx$$

## IV. b) En dimension supérieure

Soit  $\Omega$  un sous domaine borné de  $\mathbb{R}^2$ .

Si  $\Omega$  est un **domaine cartésien**, i.e  $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ , il est alors facile de construire une formule de quadrature :

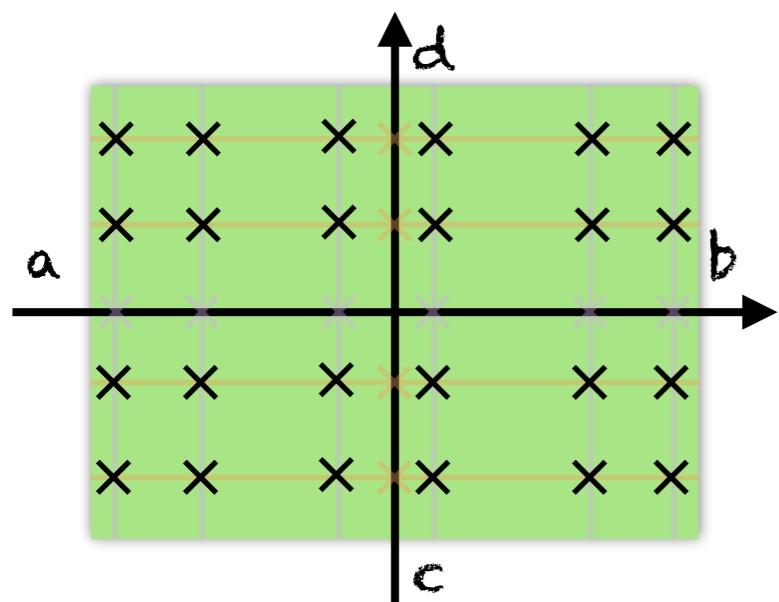


$$\begin{aligned} I &= \int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy \, dx \\ &\simeq \sum_{i=0}^n \omega_i \int_c^d f(x_i, y) \, dy \end{aligned}$$

## IV. b) En dimension supérieure

Soit  $\Omega$  un sous domaine borné de  $\mathbb{R}^2$ .

Si  $\Omega$  est un **domaine cartésien**, i.e  $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ , il est alors facile de construire une formule de quadrature :



$$I = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy \, dx$$

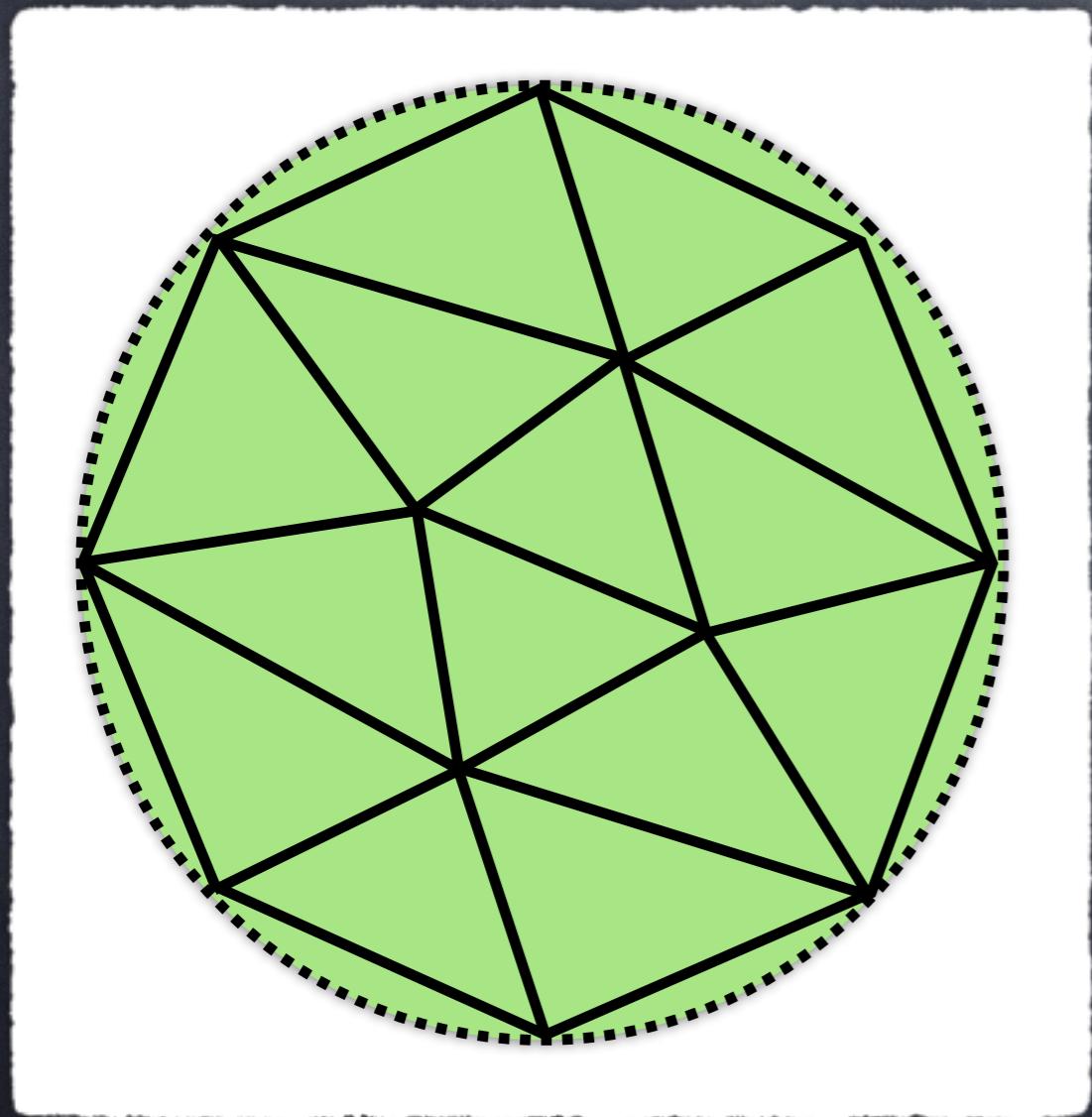
$$\simeq \sum_{i=0}^n \omega_i \int_c^d f(x_i, y) \, dy$$

$$\simeq \sum_{i=0}^n \omega_i \sum_{j=0}^n \omega'_j f(x_i, y_j)$$

## IV. b) En dimension supérieure

Soit  $\Omega$  un sous domaine borné de  $\mathbb{R}^2$ .

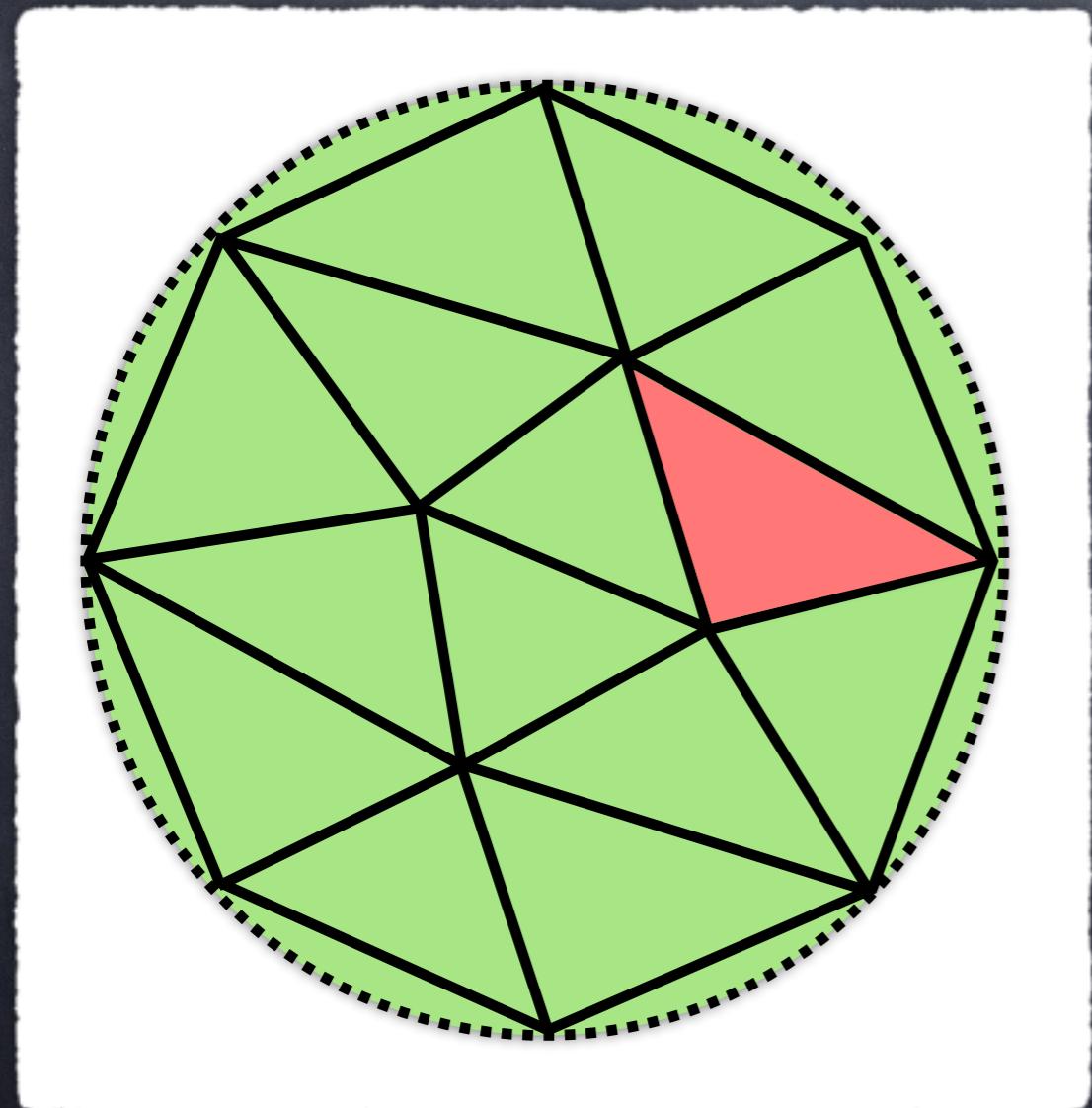
Dans le cas général, on doit mailler le domaine.



## IV. b) En dimension supérieure

Soit  $\Omega$  un sous domaine borné de  $\mathbb{R}^2$ .

Dans le cas général, on doit mailler le domaine.



On applique ensuite une formule de quadrature « simple » sur chaque triangle.

La difficulté est alors d'établir une formule sur un triangle de référence.

# Plan détaillé du chapitre 2

Plan :

## I. Quadrature de Newton-Côtes

- a) Définition de la méthode
- b) Analyse de convergence

## II. Quadrature de Gauss

- a) Choix optimal des points
- b) Analyse de convergence

## III. Méthodes composites

- a) Construction des formules
- b) Analyse de convergence

## IV. Quelques extensions