Équations différentielles (GM3)

Hasnaa Zidani

LMI - INSA Rouen

2022/2023 - CM1

https://moodle.insa-rouen.fr/course/view.php?id=**1464**

Systèmes linéaires autonomes

- Soit $A \in \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ (ou $A \in \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{C})$) une matrice donnée
- On considère le système:

Equation différentielle(ED)

$$y'(t) = Ay(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

- On cherche une solution $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ qui vérifie (ED) pour tout $t \in \mathbb{R}$.
- Dans le cas $n = 1$, la solution de (ED), qui vérifie $y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}$, est donnée par:

$$y(t) = e^{A(t-t_0)}y_0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Exponentielle de matrices ($n \geq 1$)

Définition

Soit $A \in \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ (ou $A \in \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{C})$) une matrice donnée.
On appelle *exponentielle de* A, la matrice définie par:

$$\mathtt{exp} A = e^A := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

✏ Il est facile de vérifier que:

$$\mathtt{exp} : \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}),$$

$$\text{et} \qquad \mathtt{exp} : \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{C}).$$

Quelques propriétés de l'exponentielle d'une matrice - 1/2

Proposition

Soit $A \in \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ (ou $A \in \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{C})$) une matrice donnée.

(i) Soit $P \in \mathbb{M}_{n,n}$ une matrice inversible. On a

$$Pe^A P^{-1} = e^{PAP^{-1}}.$$

(ii) L'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{M}_{n,n}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a:

$$f'(t) = Ae^{tA} = e^{tA}A.$$

Preuve. Il suffit d'utiliser la définition de l'exponentielle (voir TD2)

Quelques propriétés de l'exponentielle d'une matrice - 2/2

Soit $A, B \in \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{C})$.

- Si A et B commutent, alors

$$e^{A+B} = e^A e^B.$$

  Cette égalité n'est plus vraie si les matrices A et B ne commutent pas !

- La matrice e^A est toujours inversible et on a

$$\left(e^A\right)^{-1} = e^{-A}.$$

Théorème

Soit $A \in \mathbb{M}_{n,n}$ une matrice donnée. L'unique solution de l'équation

$$y'(t) = Ay(t), \quad y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}^n,$$

est $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ définie par:

$$y(t) = e^{(t-t_0)A} y_0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Matrices diagonalisables dans $\mathbb{C}$

- **Polynôme caractéristique**:

$$P_A(\lambda) = \mathtt{det}(\lambda I - A)$$

- Dans $\mathbb{C}$, on peut toujours décomposer $P_A(\lambda)$ en produit de n monômes

$$P_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{p_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{p_r}$$

  où

$$\begin{array}{ll} p_1 + \cdots p_r = n & \\ \lambda_1, \cdots, \lambda_r & \text{valeurs propres de } A. \end{array}$$

  $P_A(\lambda)$ est toujours scindé sur $\mathbb{C}$ mais ne l'est pas nécessairement sur $\mathbb{R}$.

- **Sous-espace propre dans** $\mathbb{C}$:

$$\Pi_{\lambda_j} = \mathtt{ker}_{\mathbb{C}}(A - \lambda_j I).$$

  Pour tout $u \in \Pi_{\lambda_j}$, on a $Au = \lambda_j u \in \Pi_{\lambda_j}$.

Matrices diagonalisables dans $\mathbb{C}$

- A est diagonalisable (dans $\mathbb{C}$)

  $\Longleftrightarrow$ il existe une base de $\mathbb{C}^n$ formée de vecteurs propres de A

  $\Longleftrightarrow \dim \Pi_{\lambda_j} = p_j$ pour $j = 1, \cdots r$

  $\Longleftrightarrow \mathbb{C}^n = \Pi_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \Pi_{\lambda_r}$

  L'écriture $\mathbb{C}^n = \Pi_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \Pi_{\lambda_r}$ signifie que pour tout $v \in \mathbb{C}^n$, il existe un unique $(v_1, \cdots, v_r) \in \Pi_{\lambda_1} \times \cdots \times \Pi_{\lambda_r}$ tel que

$$v = v_1 + \cdots + v_r.$$

Calcul de l'exponentielle - cas de matrices diagonalisables

Soit $A \in \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{C}^n)$ une matrice donnée. Si

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r \end{pmatrix} P^{-1} \qquad P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}),$$

Alors

$$e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{t\lambda_r} \end{pmatrix} P^{-1} \qquad P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$

Cas de matrices diagonalisables dans $\mathbb{C}$

- Soit $A \in \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ une matrice **diagonalisable dans** $\mathbb{C}$
- On considère le système (ED)

$$y'(t) = Ay(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Théorème (Forme des solutions dans $\mathbb{C}^n$)

Toute solution de (ED) dans $\mathbb{C}^n$ s'écrit

$$y(t) = \sum_{i=1}^{r} e^{t\lambda_j} u_j, \quad \textit{avec} \quad u_j \in \Pi_{\lambda_j}$$

Preuve Dans la décomposition

$$\mathbb{C} = \Pi_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \Pi_{\lambda_r},$$

si $y(0) = u_1 + \cdots u_r$, alors

$$y(t) = e^{At} y(0) = e^{t\lambda_1} u_1 + \cdots e^{t\lambda_r} u_r$$

Cas de matrices diagonalisables dans $\mathbb{C}$

- Soit $A \in \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice **diagonalisable dans** $\mathbb{C}$

$$P_A(\lambda) = \prod_{j=1}^{s}(\lambda - \lambda_j)^{p_j} \prod_{j=s+1}^{q} [(\lambda - \lambda_j)(\lambda - \bar{\lambda}_j)]^{p_j},$$

avec $\lambda_j \in \mathbb{R}$ pour $j = 1, \cdots, s$

- Le polynôme $P_A(\lambda)$ admet des racines dans $\mathbb{C}$ (et pas nécessairement dans $\mathbb{R}$). Du fait que la matrice A est réelle, on a:

$$\lambda_j \in \mathbb{C} \text{ est valeur propre de } A \Longrightarrow \bar{\lambda}_j \text{ est aussi valeur propre de } A$$

- Chaque valeur propre λ_j est associée à un espace propre $\Pi_{\lambda_j} \subset \mathbb{C}^n$.

- On définit les ***sous-espaces caractéristiques réels*** de A par

$$V_j = \Pi_{\lambda_j} \qquad \text{pour } 1 \leq j \leq s,$$
$$V_j = (\Pi_{\lambda_j} \oplus \Pi_{\bar{\lambda}_j}) \cap \mathbb{R}^n \quad \text{pour } s+1 \leq j \leq q.$$

- D'après la décomposition des espaces propres dans $\mathbb{C}^n$, on a

$$\mathbb{R}^n = V_1 \oplus \cdots \oplus V_q.$$

Cas de matrices diagonalisables dans $\mathbb{C}$

Équation différentielle (ED) dans $\mathbb{R}^n$

$$y'(t) = Ay(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

- Soit $y(0) \in \mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$, donc $y(0)$ se décompose comme suit:

$$y(0) = \sum_{i=1}^{s} u_i + \sum_{i=s+1}^{q} (u_{i,1} + u_{i,2}),$$

où

$$u_i \in \Pi_{\lambda_i} \qquad \text{pour } 1 \leq i \leq s,$$
$$\text{et} \quad u_{i,1} \in \Pi_{\lambda_i},\ u_{i,2} \in \Pi_{\bar{\lambda}_i} \quad \text{pour } s+1 \leq i \leq q.$$

- L'unique solution de (ED) est donc donnée par

$$y(t) = e^{tA}y(0) = \sum_{j=1}^{s} e^{t\lambda_i} u_i + \sum_{j=s+1}^{q} (e^{t\lambda_j} u_{j,1} + e^{t\bar{\lambda}_j} u_{j,2})$$

Cas de matrices diagonalisables dans $\mathbb{C}$

- Si A est une matrice réelle et $y(0) \in \mathbb{R}^n$. Alors, $y(t) \in \mathbb{R}^n$:

$$y(t) = e^{tA}y(0) = \sum_{j=1}^{s} \underbrace{e^{t\lambda_j}u_j}_{\in V_j} + \sum_{j=s+1}^{q} \underbrace{(e^{t\lambda_j}u_{j,1} + e^{t\bar{\lambda}_j}u_{j,2})}_{\in V_j}.$$

Théorème

Soit $A \in \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}^n)$ une matrice **diagonalisable dans** $\mathbb{C}$. *Toute solution de (ED) dans $\mathbb{R}^n$ s'écrit*

$$y(t) = \sum_{j=1}^{q} e^{t\alpha_j}\left[\cos(t\beta_j)a_j + \sin(t\beta_j)b_j\right]$$

où $\alpha_j = \mathfrak{Re}(\lambda_j)$ et $\beta_j = \mathfrak{Im}(\lambda_j)$ et $a_j, b_j \in V_j$.

- Le théorème donne la forme générale de la solution. Le calcul des vecteurs a_j et b_j dépend des valeurs de λ_j et de la décomposition de $y(0)$.

Cas de matrices diagonalisables dans $\mathbb{C}$

- Le théorème précédent donne la forme générale de la solution de (ED). Si le calcul des vecteurs a_i et b_i n'est pas explicite, on peut tout de même utiliser la forme de la solution pour prédire son comportement en "temps long"

- Dans la décomposition $\mathbb{R}^n = V_1 \oplus \cdots \oplus V_q$

$$y(t) = y_1(t) + \cdots + y_q(t) \qquad \text{avec}$$

$$\begin{cases} y_i(t) = e^{\lambda_i t}v_i & 1 \leq i \leq s, \\ y_i(t) = e^{\alpha_i t}\left[\cos(t\beta_i)a_i + \sin(t\beta_i)b_i\right] & s+1 \leq i \leq q, \end{cases}$$

où $\alpha_i = \mathfrak{Re}(\lambda_i)$ et $\beta_i = \mathfrak{Im}(\lambda_i)$ et $a_i, b_i \in V_i$

Cas de matrices diagonalisables dans $\mathbb{C}$ - Comportement asymptotique - 1/2

Théorème

Pour tout $i = 1, \cdots q$
- *Si* $\alpha_i = \mathfrak{Re}(\lambda_i) < 0$*, alors* y_i *est stable, i.e.*

$$\lim_{t \to +\infty} \|y_i(t)\| = 0.$$

- *Si* $\alpha_i = \mathfrak{Re}(\lambda_i) = 0$*, alors* y_i *est périodique et*

$$y_i(t) = \cos(t\beta_i)a_i + \sin(t\beta_i)b_i.$$

- *Si* $\alpha_i = \mathfrak{Re}(\lambda_i) > 0$*, alors* y_i *diverge, i.e.*

$$\lim_{t \to +\infty} \|y_i(t)\| = +\infty,$$

et y_i *émane de l'origine, i.e*

$$\lim_{t \to -\infty} \|y_i(t)\| = 0.$$

Cas de matrices diagonalisable dans $\mathbb{C}$ - Comportement asymptotique - 2/2

Un conséquence au théorème précédent est la suivante:

Théorème

(i) Si $\mathfrak{Re}(\lambda_i) < 0$ *pour toute valeurs propre* λ_i *de* A*, alors la solution de (ED) est stable, ie*

$$\lim_{t \to +\infty} \|y(t)\| = 0.$$

(ii) Si $\mathfrak{Re}(\lambda_i) \leq 0$ *pour toute valeurs propre* λ_i *de* A*, alors la solution de (ED) est bornée.*