Exemple: *Série de Fourier*

$$x(t) = cos 2\pi f_0 t$$
$$x(t) = \frac{1}{2}e^{2\pi j f_0 t} + \frac{1}{2}e^{-2\pi j f_0 t}$$
$$\xrightarrow{TF} \quad X(f) = \frac{1}{2}\delta(f-f_0) + \frac{1}{2}\delta(f+f_0)$$

Nous avons deux raies d'amplitude $\frac{1}{2}$ en $f = f_0$ et $f = -f_0$.

1*ère méthode*: *formule d'Euler*

$$y(t) = x(t)\cos 2\pi f_m t$$

$$y(t) = (\tfrac{1}{2}e^{2\pi j f_0 t} + \tfrac{1}{2}e^{-2\pi j f_0 t})(\tfrac{1}{2}e^{2\pi j f_m t} + \tfrac{1}{2}e^{-2\pi j f_m t})$$
$$y(t) = \tfrac{1}{4}e^{2\pi j(f_0+f_m)t} + \tfrac{1}{4}e^{2\pi j(f_0-f_m)t} + \tfrac{1}{4}e^{-2\pi j(f_0-f_m)t} + \tfrac{1}{4}e^{-2\pi j(f_0+f_m)t}$$

$$\xrightarrow{TF} \quad Y(f) = \tfrac{1}{4}\delta(f-(f_0+f_m)) + \tfrac{1}{4}\delta(f-(f_0-f_m)) + \tfrac{1}{4}\delta(f+(f_0-f_m)) + \tfrac{1}{4}\delta(f+(f_0+f_m))$$

Nous avons 4 raies d'amplitude $\frac{1}{4}$ en $f = (f_0+f_m)$, $f = (f_0-f_m)$, $f = -(f_0-f_m)$ et $f = -(f_0+f_m)$.

$$z(t) = y(t)\cos 2\pi f_m t$$
$$z(t) = (\tfrac{1}{4}e^{2\pi j(f_0+f_m)t} + \tfrac{1}{4}e^{2\pi j(f_0-f_m)t} + \tfrac{1}{4}e^{-2\pi j(f_0-f_m)t} + \tfrac{1}{4}e^{-2\pi j(f_0+f_m)t})(\tfrac{1}{2}e^{2\pi j f_m t} + \tfrac{1}{2}e^{-2\pi j f_m t})$$
$$z(t) = \tfrac{1}{8}(e^{2\pi j(f_0+2f_m)t} + e^{2\pi j f_0 t} + e^{-2\pi j(f_0-2f_m)t} + e^{-2\pi j f_0 t} + e^{2\pi j f_0 t} + e^{2\pi j(f_0-2f_m)t} + e^{-2\pi j f_0 t} + e^{-2\pi j(f_0+2f_m)t}$$
$$z(t) = \tfrac{1}{8}(e^{2\pi j(f_0+2f_m)t} + e^{-2\pi j(f_0-2f_m)t} + e^{2\pi j(f_0-2f_m)t} + e^{-2\pi j(f_0+2f_m)t}) + \tfrac{1}{4}(e^{2\pi j f_0 t} + e^{-2\pi j f_0 t})$$
$$\rightarrow \quad Z(f) = \{\tfrac{1}{8}[\delta(f-(f_0+2f_m)) + \delta(f+(f_0-2f_m)) + \delta(f-(f_0-2f_m)) + \delta(f+(f_0+2f_m)] + \tfrac{1}{4}[\delta(f-f_0) + \tfrac{1}{2}\delta(f+f_0)]\}$$

Nous avons 4 raies d'amplitude $\frac{1}{8}$ en $f = (f_0+2f_m)$, $f = -(f_0-2f_m)$, $f = (f_0-2f_m)$ et $f = -(f_0+2f_m)$, ainsi que deux raies d'amplitude $\frac{1}{4}$ en $f = f_0$ et $f = -f_0$.

2*ème méthode*: *Dirac + convolution*

$$\delta(t) * \delta(t) = \delta(t) \qquad \delta(t) * \delta(t-a) = \delta(t-a)$$
$$\delta(t-a) * \delta(t-b) = \delta(t+a-b)$$

$$X(f) = \tfrac{1}{2}\delta(f-f_0) + \tfrac{1}{2}\delta(f+f_0)$$

$$\cos 2\pi f_m t \quad \xrightarrow{TF} \quad \tfrac{1}{2}\delta(f-f_m) + \tfrac{1}{2}\delta(f+f_m)$$

$$Y(f) = [\tfrac{1}{2}\delta(f-f_0) + \tfrac{1}{2}\delta(f+f_0)] \ * [\tfrac{1}{2}\delta(f-f_m) + \tfrac{1}{2}\delta(f+f_m)]$$
$$= \tfrac{1}{4}[\delta(f+f_0-f_m) + \delta(f+f_0+f_m) + \delta(f-f_0-f_m) + \delta(f-f_0+f_m)]$$

Nous retrouvons bien nos quatres raies d'amplitude $\frac{1}{4}$ en $f_0 \pm f_m$ et $\pm f_0 \pm f_m$.

$$Z(f) = [\tfrac{1}{2}\delta(f-f_m) + \tfrac{1}{2}\delta(f+f_m)] \ * \tfrac{1}{4}[\delta(f+f_0-f_m) + \delta(f+f_0+f_m) + \delta(f-f_0-f_m) + \delta(f-f_0+f_m)]$$
$$= \tfrac{1}{8}[\delta(f+f_0) + \delta(f+f_0+2f_m) + \delta(f-f_0) + \delta(f-f_0+2f_m) + \delta(f+f_0-2f_m) + \delta(f+f_0) + \delta(f-f_0-2f_m) + \delta(f-f_0)]$$
$$= \tfrac{1}{8}[2\delta(f+f_0) + \delta(f+f_0+2f_m) + 2\delta(f-f_0) + \delta(f-f_0+2f_m) + \delta(f+f_0-2f_m) + \delta(f-f_0-2f_m)]$$

Remarques:

- Il y a symétrie de la position des raies par rapport à l'axe des ordonnées.

Si vous avez une raie en $+f_0$, vous devez avoir également une raie en $-f_0$.

- Il y a symétrie de la position des raies par rapport à une fréquence.

Si vous avez $f_0 + f_m$, alors vous devez avoir $f_0 - f_m$.

Comme il y a symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, alors vous devez avoir une raie en $-(f_0 + f_m)$ et en $-(f_0 - f_m)$.