Chapitre 16

Arithmétique d'intervalles

1 Définition des opérations

Les variables sont représentées par des intervalles, notées de la manière suivante :

$$[\alpha] = [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}] = \{x \in \mathbb{R}, \underline{\alpha} \leq x \leq \overline{\alpha}\} \text{ intervalle réel borné.}$$

L'ensemble de ces intervalles est noté $I(\mathbb{R})$:

$$I(\mathbb{R}) = \left\{[\underline{\alpha}, \overline{\alpha}], (\underline{\alpha}, \overline{\alpha}) \in \mathbb{R}^2, \underline{\alpha} \leq \overline{\alpha}\right\}$$

Notation : L'intervalle $[\alpha]$ avec $\underline{\alpha} = \overline{\alpha}$ est noté α (égal au nombre $\underline{\alpha}$).

2 Opérations binaires

Soit $\Diamond \in \{+, -, \times, /\}$, $(\alpha, \beta) \in I(\mathbb{R})^2$
$\alpha \Diamond \beta = \{x \Diamond y, (x, y) \in \alpha \times \beta\}$
On a :
$[\alpha] + [\beta] = \left[\underline{\alpha} + \underline{\beta}, \overline{\alpha} + \overline{\beta}\right]$
$[\alpha]$ - $[\beta] = \left[\underline{\alpha} - \overline{\beta}, \overline{\alpha} - \underline{\beta}\right]$
$[\alpha] \times [\beta] = \left[\min\left(\underline{\alpha}\underline{\beta}, \overline{\alpha}\overline{\beta}, \underline{\alpha}\overline{\beta}, \overline{\alpha}\underline{\beta}\right), \max\left(\underline{\alpha}\underline{\beta}, \overline{\alpha}\overline{\beta}, \underline{\alpha}\overline{\beta}, \overline{\alpha}\underline{\beta}\right)\right]$
$[\alpha] \ / \ [\beta] = [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}] \times \left[\frac{1}{\overline{\beta}}, \frac{1}{\underline{\beta}}\right]$ si $0 \notin [\beta]$

exemple : $[-1, 2] \times [5, 8] = [-8, 16]$, $[-1, 2] \ / \ [5, 8] = \left[-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right]$

3 Opérations unaires

Soit f fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit la fonction d'intervalles f de $I(\mathbb{R})$ dans $I(\mathbb{R})$ par $f([\alpha]) = \{f(x), x \in [\alpha]\}$.

Cas particulier : $1/[x] = \{1/x, x \in [\alpha]\}$
Si $0 \notin [x]$ alors $1/[x] = \left[\frac{1}{\overline{x}}, \frac{1}{\underline{x}}\right]$
Si $0 \in [x]$ on étend la définition de l'intervalle en rajoutant les bornes $\pm\infty$.
Pour la fonction puissance d'exposant 2 on écrit $[x]^2 = \left\{x^2, x \in [x]\right\}, \neq [x] \times [x] = \prod_{i=1}^{2} [x]$

exemple : $[-1, 1]^2 = [0, 1]$ alors que $[-1, 1] \times [-1, 1] = [-1, 1]$

$\cos[x] = \{\cos x, x \in [x]\}$
$\exp[x] = \{e^x, x \in [x]\} = \left[e^{\underline{x}}, e^{\overline{x}}\right]$

4 Monotonie pour l'inclusion de l'évaluation d'une fonction d'intervalles

Si $[\alpha_j] \subset [\beta_j] \quad j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$ et f continue sur un pavé telle que $f([\alpha_1],$ $[\alpha_2],\ \cdots,\ [\alpha_n])$ et $f([\beta_1],\ [\beta_2],\ \cdots,\ [\beta_n])$ soient définies
alors $f([\alpha_1],\ [\alpha_2],\ \cdots,\ [\alpha_n]) \subset f([\beta_1],\ [\beta_2],\ \cdots,\ [\beta_n])$

Sous les hypothèses précédentes en prenant $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in [\beta_1] \times [\beta_2] \times \cdots \times [\beta_n]$ on a $f(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in f([\beta_1],\ [\beta_2],\ \cdots,\ [\beta_n])$

Remarque :
La multiplication dans $I(\mathbb{R})$ n'est pas distributive par rapport à l'addition. On a la sous-distributivité :

$$[\alpha] \times ([\beta] + [\gamma]) \subseteq [\alpha] \times [\beta] + [\alpha] \times [\gamma]$$

exemple : $[-1,0] \times ([-1,1] + [2,4]) = [-1,0] \times [1,5] = [-5,0] \subset [-1,0] \times [-1,1] + [-1,0] \times [2,4] = [-1,1] + [-4,0] = [-5,1]$

Remarque :
On étend les définitions à des vecteurs d'intervalles, matrices d'intervalles et matrices symétriques d'intervalles notés $I(\mathbb{R})^n$, $\mathcal{M}_n(I(\mathbb{R}))$, $\mathcal{S}_n(I(\mathbb{R}))$ par abus de langage car la non-distributivité entraîne la perte de la structure d'espace vectoriel sur $I(\mathbb{R})$.

Soit la matrice symétrique d'intervalles $[A] = \begin{pmatrix} [-4,-2] & [-2,3] \\ [-2,3] & \left[1, \frac{5}{4}\right] \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_n(I(\mathbb{R}))$
On a $[A] = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}), \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} [-4,-2] \\ [-2,3] \\ \left[1, \frac{5}{4}\right] \end{pmatrix} \right\}$

car une matrice symétrique d'intervalles n'a comme éléments que des matrices symétriques.