$$x_k \quad \overset{TZ}{\rightarrow} \quad X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k z^{-k} \qquad z \in \mathbb{C}$$

La fonction $X(z)$ converge sur un domaine appelé *Région de Convergence* (*RDC*).

$$\left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k z^{-k}\right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x_k||z|^{-k}$$

$\rightarrow \qquad \left|\sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k}\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |x_k||z|^{-k}$

Cette somme converge à l'extérieur d'un cercle de rayon r_1.

$\rightarrow \qquad \left|\sum_{k=-\infty}^{-1} x_k z^{-k}\right| \leq \sum_{k=-\infty}^{-1} |x_k||z|^{-k}$

Cette somme converge à l'intérieur d'un cercle de rayon r_2.

Ainsi, $X(z)$ converge dans le plan complexe, sur un anneau limité par deux cercles de rayons r_1 et r_2.

$$X(z) \qquad \text{associé à la RDC : } |r_1| < |z| < |r_2|$$

Il est absolument nécessaire d'identifier la RDC.

Nous allons voir maintenant deux signaux totalement différents qui ont la même TZ mais qui se distinguent par leurs RDC.

Exemple: $\quad x_k = a^k u_k \qquad y_k = -a^k u_{-k-1}$

$\rightarrow \qquad x_k = a^k u_k = \begin{cases} a^k & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$

Ce signal est causal.

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (az^{-1})^k$$

Nous avons une série géométrique de raison (az^{-1}). Celle-ci converge si $|az^{-1}| < 1$.

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (az^{-1})^k = \frac{1}{1-az^{-1}} \qquad |z| > |a|$$

Il en résulte que $r_2 = \infty$.

$\rightarrow \qquad y_k = -a^k u_{-k-1} = \begin{cases} 0 & k \geq 0 \\ -a^k & k \leq -1 \end{cases}$

Ce signal est anti-causal.

$Y(z) = -\sum_{k=-\infty}^{-1} a^k z^{-k} = -\sum_{k=1}^{\infty} a^{-k} z^k = -\sum_{k=0}^{\infty} (a^{-1}z)^k + 1$

Nous avons une série géométrique de raison $(a^{-1}z)$. Celle-ci converge si $|a^{-1}z| < 1$.

$Y(z) = \frac{-1}{1-a^{-1}z} + 1 \qquad |z| < |a|$

$Y(z) = \frac{-1+(1-a^{-1}z)}{1-a^{-1}z} = \frac{-a^{-1}z}{1-a^{-1}z} = \frac{-a^{-1}z}{a^{-1}z(az^{-1}-1)} = \frac{1}{1-az^{-1}}$

$$Y(z) = -\sum_{k=-\infty}^{-1} a^k z^{-k} = \frac{1}{1-az^{-1}} \qquad |z| < |a|$$

Il en résulte que $r_1 = 0$.

Nous voyons donc que c'est par la RDC que nous pouvons distinguer x_k de y_k.

Remarques:

$\rightarrow X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k z^{-k}$ est appelée TZ *bi-latérale*.

$\rightarrow X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k}$ est appelée TZ *mono-latérale*.

$\rightarrow X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k} = x_0 + x_1 z^{-1} + x_2 z^{-2} + ... + x_K z^{-k} + ...$
s'exprime en fonction de la variable z^{-1} et converge si $|z| > |r_1|$.
$\rightarrow X(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} x_k z^{-k} = ... + x_{-k} z^k + ... + x_{-2} z^2 + x_{-1} z$
s'exprime en fonction de la variable z et converge si $|z| < |r_2|$.

propriétés

$x_k \quad \overset{TZ}{\rightarrow} \quad X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k z^{-k} \qquad z \in D_x \, (r_x^1 < | \; z \; | < r_x^2)$
$y_k \quad \overset{TZ}{\rightarrow} \quad Y(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k z^{-k} \qquad z \in D_y (r_y^1 < | \; z \; | < r_y^2)$

- *linéarité*: $\alpha x_k + \beta y_k \quad \overset{TZ}{\rightarrow} \quad \alpha X(z) + \beta Y(z) \qquad z \in D_x \cap D_y$
- *inversion dans le temps*: $w_k = x_{-k}$

$W(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} w_k z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{-k} z^{-k}$

$l = -k \qquad W(z) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x_l z^l$

$x_{-k} \quad \overset{TZ}{\rightarrow} \quad X(\frac{1}{z}) \qquad \frac{1}{r_x^2} < | \; z \; | < \frac{1}{r_x^1}$

- *conjugaison*: $X^*(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k^* (z *)^{-k}$

$\rightarrow c_k = x_k^* \qquad C(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k^* z^{-k}$

$x_k^* \overset{TZ}{\rightarrow} \quad X^*(z^*) \qquad D_x$

$\rightarrow d_k = x_{-k}^* \qquad D(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{-k}^* z^{-k}$

$l = -k \qquad D(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_l^* z^l$

$x_{-k}^* \quad \overset{TZ}{\rightarrow} \quad X^*(\frac{1}{z^*}) \qquad \frac{1}{r_x^2} < | \; z \; | < \frac{1}{r_x^1}$

x_k réel $\qquad \Leftrightarrow X(z) = X^*(z^*)$

- *décalage temporel*:

$\rightarrow p_k \overset{\Delta}{=} x_{k-m} \qquad (m > 0) \qquad P(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{k-m} z^{-k}$

$l = k - m \qquad P(z) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x_l z^{-(l+m)} = z^{-m} X(z)$

$\rightarrow q_k \overset{\Delta}{=} x_{k+m} \qquad (m > 0) \qquad Q(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q_k z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{k+m} z^{-k}$

$l = k + m \qquad Q(z) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x_l z^{-(l-m)} = z^m X(z)$

$***$*Utilisation de la TZ monolatérale* $X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k}$

$\rightarrow r_k \overset{\Delta}{=} x_{k-m} \qquad (m > 0) \qquad R(z) = \sum_{k=0}^{\infty} r_k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} x_{k-m} z^{-k}$

$l = k - m \qquad R(z) = \sum_{l=-m}^{\infty} x_l z^{-(l+m)} = z^{-m} [\sum_{l=-m}^{-1} x_l z^{-l} + \sum_{l=0}^{\infty} x_l z^{-l}]$

$$R(z) = z^{-m}X(z) + \sum_{l=-m}^{-1} x_l z^{-(l+m)}$$

Si le signal est causal, le terme de la somme est nul.

$\rightarrow s_k \stackrel{\Delta}{=} x_{k+m} \qquad (m > 0) \qquad S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} x_{k+m} z^{-k}$

$l = k + m \qquad S(z) = \sum_{l=m}^{\infty} x_l z^{-(l-m)} = z^m[\sum_{l=0}^{\infty} x_l z^{-l} - \sum_{l=0}^{m-1} x_l z^{-l}]$

$$R(z) = z^m X(z) - \sum_{l=0}^{m-1} x_l z^{-(l-m)}$$

- *convolution*:

$x_k * y_k \quad \xrightarrow{TZ} \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} (x_k * y_k) z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m y_{k-m}) z^{-k}$

$l = k - m \quad \sum_{l=-\infty}^{\infty} (\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m y_l) z^{-(l+m)} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} (\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_m z^{-m}) y_l z^{-l}$

$$x_k * y_k \quad \xrightarrow{TZ} \quad X(z)Y(z) \qquad D_x \cap D_y$$

Il en résulte que:

$$R_{xy}(k) = x_k * y^*_{-k} \quad \xrightarrow{TZ} \quad X(z)Y^*(\tfrac{1}{z^*})$$

- *dérivée de* $X(z)$ $\qquad kx_k \quad \xrightarrow{TZ} \quad -z\frac{dX(z)}{dz}$

$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k z^{-k} \qquad \frac{dX(z)}{dz} = -\sum_{k=-\infty}^{\infty} kx_k z^{-k-1} = -z^{-1}\sum_{k=-\infty}^{\infty} kx_k z^{-k}$

$y_k = kx_k \quad \xrightarrow{TZ} \quad Y(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} kx_k z^{-k} = -z\frac{dX(z)}{dz}$

Exemples de TZ A CONNAITRE:

- *impulsion unité*: $\delta_k \quad \xrightarrow{TZ} \quad 1 \qquad \forall z$
- *échelon unité*: $u_k \quad \xrightarrow{TZ} \quad U(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \qquad |\ z\ | > 1$
- *exponentielle causale*: $a^k u_k \quad \xrightarrow{TZ} \quad \frac{1}{1-az^{-1}} \qquad |\ z\ | > |\ a\ |$
- *exponentielle anticausale*: $-a^k u_{-k-1} \quad \xrightarrow{TZ} \quad \frac{1}{1-az^{-1}} \qquad |\ z\ | < |\ a\ |$