Energie - Puissance- Convolution - Corrélation

x(t) est un signal déterministe à TC.

Energie (*totale*) $$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

Puissance (*moyenne totale*) $$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$$

Un signal d'énergie finie est de puissance nulle.
Les signaux périodiques sont de puissance finie.

Convolution

Le produit de convolution de deux signaux $x(t)$ et $y(t)$ est donné par l'expression:

$$x(t) * y(t) = \int x(\tau)y(t-\tau)d\tau$$

En faisant le changement de variable $\theta = t - \tau$ nous obtenons $x(t) * y(t) = \int x(t-\theta)y(\theta)d\theta$

Le produit de convolution est *commutatif* $x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$
De même, le produit de convolution est associatif.

La dirac est l'élément neutre de la convolution.
$x(t) * \delta(t) = \delta(t) * x(t) = \int \delta(\tau)x(t-\tau)d\tau = x(t)$

Réponse en fréquence d'un produit de convolution

$x(t) \xrightarrow{TF} X(f) \qquad y(t) \xrightarrow{TF} Y(f)$

$x(t) * y(t) \xrightarrow{TF} A = \int [\int x(\tau)y(t-\tau)d\tau] e^{-2jft} dt$

On pose $\theta = t - \tau$

$A = \int\int x(\tau)y(\theta)e^{-2jf(\theta+\tau)}d\tau d\theta = \int x(\tau)e^{-2jf\tau}d\tau \int y(\theta)e^{-2jf\theta}d\theta$

$$x(t) * y(t) \xrightarrow{TF} X(f)Y(f)$$

La TF d'un produit de convolution est le produit des TF.

Considérons le produit de convolution $X(f) * Y(f) = \int X(\varphi)Y(f-\varphi)d\varphi$.

$X(f) * Y(f) \xrightarrow{(TF)^{-1}} B = \int [\int X(\varphi)Y(f-\varphi)d\varphi] e^{2jft} df$

On pose $\theta = f - \varphi$

$B = \int\int X(\varphi)Y(\theta)e^{2j(\theta+\varphi)t}d\varphi d\theta = x(t)y(t)$

$$x(t)y(t) \xrightarrow{TF} X(f) * Y(f)$$

Corrélation

La *corrélation* d'un signal $x(t)$ (on dit alors *auto-corrélation*) la fonction $R_x(t)$ telle que:
$R_x(t) = x(t) * x^*(-t) = \int x(\tau)x^*(\tau - t)d\tau$
On parle également de *degré de ressemblance* entre $x(t)$ et $x(\tau - t)$.

$$R_x(t) = x(t) * x^*(-t) \xrightarrow{TF} S_x(f) = |X(f)|^2$$

Nous avons:

$$R_x(t) = \int |X(f)|^2 e^{2\pi jft} df$$

D'où:

$$R_x(0) = \int |X(f)|^2 df$$

$S_x(f)$ est appelée *Densité Spectrale d'Energie*.

D'après sa définition, nous avons:

$$R_x(0) = \int x(\tau) x^*(\tau) d\tau = \int |x(t)|^2 dt$$

Nous avons alors le *théorème de Parseval*:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

Il y a *conservation de l'énergie* lorsque l'on passe du domaine temporel au domaine fréquentiel et réciproquement.