Cours 11 – Test de comparaison de 2 variances
Test d'égalité de deux moyennes dans le cas apparié.

Eya ZOUGAR *

Institut National des Sciences appliqués-INSA

Génie mathématiques GM3
Wednesday 12$^{\text{th}}$ April, 2023

INSTITUT NATIONAL
DES SCIENCES
APPLIQUÉES
ROUEN NORMANDIE

*Basé sur le cours de Bruno PORTIER

Introduction.

Le programme du jour :

- P-value
- Test d'égalité de 2 moyennes dans le cas apparié.
- le test de comparaison de deux variances dans le cadre de deux échantillons gaussiens indépendants ;
- le test de normalité de Shapiro-Wilk.

1. La *p*-value.

En pratique et avec l'utilisation de plus en plus généralisée d'un logiciel, on utilise plus facilement la probabilité critique encore appelée *p*-value, qui est systématiquement fournie par les logiciels.

On conclut alors sur le test de la manière suivante :

- si *p*-value $\geq \alpha$, alors on accepte H_0 ;
- si *p*-value $< \alpha$, alors on rejette H_0 au risque α.

En statistique, la p-valeur est la probabilité d'obtenir les résultats observés d'un test, en supposant que l'hypothèse nulle est correcte.

Remarque: La valeur-p n'est pas la probabilité que l'hypothèse de test soit vraie. La valeur-p indique dans quelle mesure les données sont conformes à l'hypothèse de test et à ses hypothèses.

Les valeurs P sont calculées à l'aide de tableaux de valeurs P ou de logiciels statistiques par exemple R.

1. La p-value.

Remarque. L'expression de la p-value est compliquée car dépendant de la loi de la statistique de test et de la forme de la région de rejet.

- Dans le cas d'une statistique de test à valeurs positives, la p-value est la probabilité que la statistique Z dépasse sous H_0 la valeur z, c'est à dire

$$p\text{-value} = \mathbb{P}_{H_0}\left[Z > z\right]$$

- Pour un test unilatéral à droite:

$$p\text{-value} = \mathbb{P}_{H_0}\left[Z > z\right]$$

- Pour un test unilatéral à gauche:

$$p\text{-value} = \mathbb{P}_{H_0}\left[Z < z\right]$$

- Pour un test bilatéral,

$$p\text{-value} = 2\min\left(\mathbb{P}_{H_0}\left[Z > z\right], \mathbb{P}_{H_0}\left[Z < z\right]\right)$$

- Dans le cas particulier d'une fonction de densité de X paire, on peut simplement écrire:

$$p\text{-value} = 2\mathbb{P}_{H_0}\left[Z > |z|\right]$$

1.1 Exemple sur le lancer d'une pièce.

Pour vérifier que la pièce n'est pas truquée, on test au risque 5%,

$$H_0 : \text{"}\, p = 0,5 \text{"} \quad \text{contre} \quad H_1 : \text{"}\, p \neq 0,5 \text{"}$$

1. Puisque les var. a. $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ sont iid de même loi de Bernouilli de paramètre p, alors $Z = \sum_{j=1}^{10} X_j$ suit une loi binomiale $B(10, p)$.
2. Sous H_0, le paramètre p est égal à $1/2$. Donc sous H_0, Z suit une loi $B(10, 1/2)$.
3. Les quantiles à 0,025 et 0,975 d'une $B(10, 1/2)$ sont respectivement 2 et 8. La zone de rejet de H_0 au risque 5% est donc de la forme $ZR_{H_0} = \{0, 1\} \bigcup \{9, 10\}$.
4. Nous avons observé 9 faces, donc la valeur de la statistique de test Z sur les donnée est égale à $z_{obs} = 9$
5. • Puisque $z_{obs} \in ZR_{H_0}$, on rejette H_0 au risque de 5%. On considère donc que la pièce n'est pas équilibrée ou truquée.
   • La valeur P est calculée avec R par: 0,02148 qui est inférieure à 5% : on rejette donc H_0.

2. Test d'égalité de 2 variances.
2.1. Le cadre théorique.

On dispose de deux échantillons de mesures : $x_1, x_2, \dots, x_p$ qui sont p mesures indépendantes d'une variable quantitative X et $y_1, y_2, \dots, y_q$ qui sont q mesures indépendantes d'une variable quantitative Y.

2. Test d'égalité de 2 variances.
2.1. Le cadre théorique.

On dispose de deux échantillons de mesures : $x_1, x_2, \ldots, x_p$ qui sont p mesures indépendantes d'une variable quantitative X et $y_1, y_2, \ldots, y_q$ qui sont q mesures indépendantes d'une variable quantitative Y.

On fait les hypothèses fondamentales suivantes:

2. Test d'égalité de 2 variances.
2.1. Le cadre théorique.

On dispose de deux échantillons de mesures : $x_1, x_2, \ldots, x_p$ qui sont p mesures indépendantes d'une variable quantitative X et $y_1, y_2, \ldots, y_q$ qui sont q mesures indépendantes d'une variable quantitative Y.

On fait les hypothèses fondamentales suivantes:

- Les données $x_1, x_2, \ldots, x_p$ sont les réalisations des variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_p$ indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$;

2. Test d'égalité de 2 variances.
2.1. Le cadre théorique.

On dispose de deux échantillons de mesures : $x_1, x_2, \dots, x_p$ qui sont p mesures indépendantes d'une variable quantitative X et $y_1, y_2, \dots, y_q$ qui sont q mesures indépendantes d'une variable quantitative Y.

On fait les hypothèses fondamentales suivantes:

- Les données $x_1, x_2, \dots, x_p$ sont les réalisations des variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_p$ indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$;
- Les données $y_1, y_2, \dots, y_q$ sont les réalisations des variables aléatoires $Y_1, Y_2, \dots, Y_q$ indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$;

2. Test d'égalité de 2 variances.
2.1. Le cadre théorique.

On dispose de deux échantillons de mesures : $x_1, x_2, \ldots, x_p$ qui sont p mesures indépendantes d'une variable quantitative X et $y_1, y_2, \ldots, y_q$ qui sont q mesures indépendantes d'une variable quantitative Y.

On fait les hypothèses fondamentales suivantes:

- Les données $x_1, x_2, \ldots, x_p$ sont les réalisations des variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_p$ indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$;
- Les données $y_1, y_2, \ldots, y_q$ sont les réalisations des variables aléatoires $Y_1, Y_2, \ldots, Y_q$ indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$;
- **Les deux échantillons de variables aléatoires sont indépendants.**

2. Test d'égalité de 2 variances.
2.1. Le cadre théorique.

On dispose de deux échantillons de mesures : $x_1, x_2, \ldots, x_p$ qui sont p mesures indépendantes d'une variable quantitative X et $y_1, y_2, \ldots, y_q$ qui sont q mesures indépendantes d'une variable quantitative Y.

On fait les hypothèses fondamentales suivantes:

- Les données $x_1, x_2, \ldots, x_p$ sont les réalisations des variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_p$ indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$;
- Les données $y_1, y_2, \ldots, y_q$ sont les réalisations des variables aléatoires $Y_1, Y_2, \ldots, Y_q$ indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$;
- **Les deux échantillons de variables aléatoires sont indépendants.**

On souhaite tester au risque α l'hypothèse nulle

$$H_0 : \ll \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \gg$$

contre l'hypothèse alternative

$$H_1 : \ll \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \gg$$

2.2. Comment choisir la statistique de test ?

Pour tester H_0 contre H_1 au risque α, il nous faut choisir une statistique de test.

De quoi disposons-nous ?

2.2. Comment choisir la statistique de test ?

Pour tester H_0 contre H_1 au risque α, il nous faut choisir une statistique de test.

De quoi disposons-nous ?

On sait estimer les variances σ_1^2 et σ_2^2 par les estimateurs respectifs suivants:

$$S_X^2 = \frac{1}{p-1} \sum_{j=1}^{p} \left(X_j - \overline{X}_p\right)^2 \quad \text{et} \quad S_Y^2 = \frac{1}{q-1} \sum_{j=1}^{q} \left(Y_j - \overline{Y}_q\right)^2$$

2.2. Comment choisir la statistique de test ?

Pour tester H_0 contre H_1 au risque α, il nous faut choisir une statistique de test.

De quoi disposons-nous ?

On sait estimer les variances σ_1^2 et σ_2^2 par les estimateurs respectifs suivants:

$$S_X^2 = \frac{1}{p-1} \sum_{j=1}^{p} \left(X_j - \overline{X}_p\right)^2 \quad \text{et} \quad S_Y^2 = \frac{1}{q-1} \sum_{j=1}^{q} \left(Y_j - \overline{Y}_q\right)^2$$

On peut démontrer le résultat clé suivant:

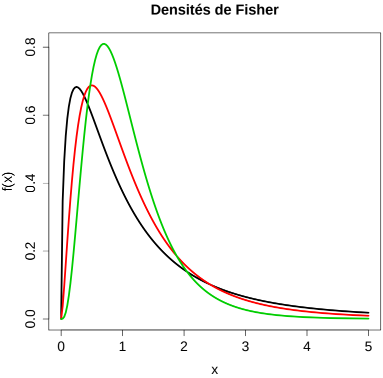
Clé ?

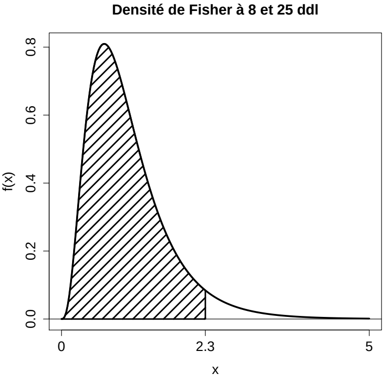
$$\frac{\sigma_2^2\, S_X^2}{\sigma_1^2\, S_Y^2} \sim F(p-1, q-1) \text{ (Loi de Fisher)}$$

2.3. Rappel sur la loi de Fisher.

On appelle loi de Fisher à p et q degrés de liberté le rapport de 2 khi-deux indépendants à p et q degrés de liberté respectivement.

Plus précisément, si $U \sim \chi^2_p$ et $V \sim \chi^2_q$ avec U et V indépendantes, alors $Z = (U/p)/(V/q)$ suit une loi de Fisher à p et q ddl et on note $Z \sim F(p, q)$.





2.4. Preuve du résultat clé.

La preuve est immédiate en utilisant le principe de construction d'une loi de Fisher et le fait que, puisque les deux échantillons sont gaussiens et indépendants, alors:

2.4. Preuve du résultat clé.

La preuve est immédiate en utilisant le principe de construction d'une loi de Fisher et le fait que, puisque les deux échantillons sont gaussiens et indépendants, alors:

- $\dfrac{(p-1)S_X^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2_{p-1}$;

2.4. Preuve du résultat clé.

La preuve est immédiate en utilisant le principe de construction d'une loi de Fisher et le fait que, puisque les deux échantillons sont gaussiens et indépendants, alors:

- $\dfrac{(p-1)S_X^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2_{p-1}$;
- $\dfrac{(q-1)S_Y^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2_{q-1}$;

2.4. Preuve du résultat clé.

La preuve est immédiate en utilisant le principe de construction d'une loi de Fisher et le fait que, puisque les deux échantillons sont gaussiens et indépendants, alors:

- $\dfrac{(p-1)S_X^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2_{p-1}$;
- $\dfrac{(q-1)S_Y^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2_{q-1}$;
- S_X^2 et S_Y^2 sont indépendants.

2.4. Preuve du résultat clé.

La preuve est immédiate en utilisant le principe de construction d'une loi de Fisher et le fait que, puisque les deux échantillons sont gaussiens et indépendants, alors:

- $\dfrac{(p-1)S_X^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2_{p-1}$;
- $\dfrac{(q-1)S_Y^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2_{q-1}$;
- S_X^2 et S_Y^2 sont indépendants.

On déduit alors que:

$$\frac{\dfrac{(p-1)S_X^2}{\sigma_1^2}\Big/(p-1)}{\dfrac{(q-1)S_Y^2}{\sigma_2^2}\Big/(q-1)} = \frac{\sigma_2^2\, S_X^2}{\sigma_1^2\, S_Y^2} \sim F(p-1, q-1)$$

2.5. Choix de la statistique de test.

On sait que pour tous réels positifs σ_1^2 et σ_2^2,

$$\frac{\sigma_2^2\, S_X^2}{\sigma_1^2\, S_Y^2} \sim F(p-1, q-1)$$

2.5. Choix de la statistique de test.

On sait que pour tous réels positifs σ_1^2 et σ_2^2,

$$\frac{\sigma_2^2 \, S_X^2}{\sigma_1^2 \, S_Y^2} \sim F(p-1, q-1)$$

Sous H_0, les variances théoriques σ_1^2 et σ_2^2 sont égales.

2.5. Choix de la statistique de test.

On sait que pour tous réels positifs σ_1^2 et σ_2^2,

$$\frac{\sigma_2^2\, S_X^2}{\sigma_1^2\, S_Y^2} \ \sim \ F(p-1, q-1)$$

Sous H_0, les variances théoriques σ_1^2 et σ_2^2 sont égales.

Donc, sous H_0, la variable Z définie par $Z = \dfrac{S_X^2}{S_Y^2}$ suit une loi de Fisher à $(p-1)$ et $(q-1)$ ddl, et on note $Z \underset{H_0}{\sim} F(p-1, q-1)$.

2.5. Choix de la statistique de test.

On sait que pour tous réels positifs σ_1^2 et σ_2^2,

$$\frac{\sigma_2^2\, S_X^2}{\sigma_1^2\, S_Y^2} \;\sim\; F(p-1, q-1)$$

Sous H_0, les variances théoriques σ_1^2 et σ_2^2 sont égales.

Donc, sous H_0, la variable Z définie par $Z = \frac{S_X^2}{S_Y^2}$ suit une loi de Fisher à $(p-1)$ et $(q-1)$ ddl, et on note $Z \underset{H_0}{\sim} F(p-1, q-1)$.

En revanche, sous H_1, Z ne suit plus une loi de Fisher, puisque on a la décomposition suivante :

$$Z = \underbrace{\frac{\sigma_2^2\, S_X^2}{\sigma_1^2\, S_Y^2}}_{\sim F(p-1,q-1)} \times \underbrace{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}}_{\neq 1 \text{ sous } H_1}$$

2.5. Choix de la statistique de test.

On sait que pour tous réels positifs σ_1^2 et σ_2^2,

$$\frac{\sigma_2^2\, S_X^2}{\sigma_1^2\, S_Y^2} \;\sim\; F(p-1, q-1)$$

Sous H_0, les variances théoriques σ_1^2 et σ_2^2 sont égales.

Donc, sous H_0, la variable Z définie par $Z = \frac{S_X^2}{S_Y^2}$ suit une loi de Fisher à $(p-1)$ et $(q-1)$ ddl, et on note $Z \underset{H_0}{\sim} F(p-1, q-1)$.

En revanche, sous H_1, Z ne suit plus une loi de Fisher, puisque on a la décomposition suivante :

$$Z = \underbrace{\frac{\sigma_2^2\, S_X^2}{\sigma_1^2\, S_Y^2}}_{\sim F(p-1,q-1)} \times \underbrace{\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}}_{\neq 1 \text{ sous } H_1}$$

Pour ces raisons, Z est une statistique de test admissible.

2.6. Construction de la zone de rejet.

Ici, compte-tenu de la forme de la statistique de test et de l'hypothèse alternative, nous allons rejeter l'hypothèse nulle lorsque la valeur de la statistique de test correspondra aux valeurs les moins probables d'une loi de Fisher à $(p-1)$ et $(q-1)$ ddl, petites ou grandes.

2.6. Construction de la zone de rejet.

Ici, compte-tenu de la forme de la statistique de test et de l'hypothèse alternative, nous allons rejeter l'hypothèse nulle lorsque la valeur de la statistique de test correspondra aux valeurs les moins probables d'une loi de Fisher à $(p-1)$ et $(q-1)$ ddl, petites ou grandes.

La région de rejet de l'hypothèse nulle au risque α sera donc de la forme $\{Z < f_1\} \bigcup \{Z > f_2\}$ avec

$$\mathbb{P}\left[\{Z < f_1\} \bigcup \{Z > f_2\}\right] = \alpha$$

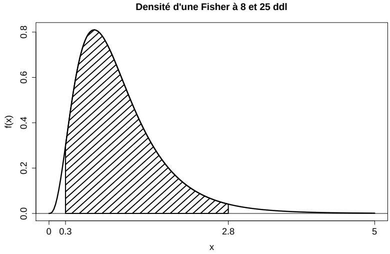
2.6. Construction de la zone de rejet.

Ici, compte-tenu de la forme de la statistique de test et de l'hypothèse alternative, nous allons rejeter l'hypothèse nulle lorsque la valeur de la statistique de test correspondra aux valeurs les moins probables d'une loi de Fisher à $(p-1)$ et $(q-1)$ ddl, petites ou grandes.

La région de rejet de l'hypothèse nulle au risque α sera donc de la forme $\{Z < f_1\} \bigcup \{Z > f_2\}$ avec

$$\mathbb{P}\left[\{Z < f_1\} \bigcup \{Z > f_2\}\right] = \alpha$$

où $f_1 = f_{\alpha/2}$ et $f_2 = f_{1-\alpha/2}$ sont respectivement les quantiles d'ordre $\alpha/2$ et $1-\alpha/2$ d'une loi de Fisher à $(p-1)$ et $(q-1)$ ddl.



2.7. Construction du test de Fisher

Donc, pour tester au risque α l'hypothèse nulle

$$H_0 : \ll \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \gg$$

contre l'hypothèse alternative

$$H_1 : \ll \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \gg$$

On utilise la statistique de test $Z = \dfrac{S_X^2}{S_Y^2} \underset{H_0}{\sim} F(p-1, q-1)$.

2.7. Construction du test de Fisher

Donc, pour tester au risque α l'hypothèse nulle

$$H_0 : \ll \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \gg$$

contre l'hypothèse alternative

$$H_1 : \ll \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \gg$$

On utilise la statistique de test $Z = \dfrac{S_X^2}{S_Y^2} \underset{H_0}{\sim} F(p-1, q-1)$.

Puis, on calcule $z_{obs} = \dfrac{s_X^2}{s_Y^2}$ et on adopte la stratégie suivante:

- Si $f_{\alpha/2} \leq z_{obs} \leq f_{1-\alpha/2}$, alors on ne peut pas rejeter l'hypothèse nulle H_0 selon laquelle les 2 variances sont égales.
- Sinon, on rejette l'hypothèse nulle H_0 au risque α, et on considère que les 2 variances sont significativement différentes.

2.8. Lien entre test et intervalle de confiance.

2.8. Lien entre test et intervalle de confiance.

Tester au risque α l'hypothèse nulle H_0 : « $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ » contre H_1 : « $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ », est en fait équivalent à étudier l'appartenance de 1 à l'intervalle de confiance du paramètre σ_1^2/σ_2^2 au niveau de confiance $(1-\alpha)$. Plus 1 est éloigné des bornes de cet intervalle, plus le test sera significatif.

2.8. Lien entre test et intervalle de confiance.

Tester au risque α l'hypothèse nulle H_0 : $\ll \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \gg$ contre H_1 : $\ll \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \gg$, est en fait équivalent à étudier l'appartenance de 1 à l'intervalle de confiance du paramètre σ_1^2/σ_2^2 au niveau de confiance $(1-\alpha)$. Plus 1 est éloigné des bornes de cet intervalle, plus le test sera significatif.

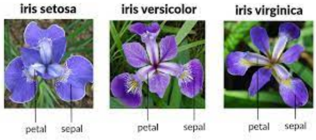
En effet, on a l'équivalence suivante :

$$
\begin{aligned}
f_{\alpha/2} \leq z_{obs} \leq f_{1-\alpha/2} \quad & \Longleftrightarrow \quad f_{\alpha/2} \leq \frac{s_X^2}{s_Y^2} \leq f_{1-\alpha/2} \\
& \Longleftrightarrow \quad \frac{s_X^2}{s_Y^2 \, f_{1-\alpha/2}} \leq 1 \leq \frac{s_X^2}{s_Y^2 \, f_{\alpha/2}} \\
& \Longleftrightarrow \quad 1 \in \mathrm{IC}_{1-\alpha}(\sigma_1^2/\sigma_2^2)
\end{aligned}
$$

Ainsi, on peut conclure sur le test en regardant si 1 appartient ou non à l'intervalle de confiance.

3. Exemple : Les Iris de Fisher.
3.1. Le jeu de données.

"Les iris de Fisher" sont des données fameuses collectées par Edgar Enderson, et proposées en 1933 par le statisticien Ronald Aylmer Fisher comme données de référence pour l'analyse discriminante et la classification.
Il s'agit de reconnaître le type d'iris (*setosa*, *virginica* et *versicolore*) à partir seulement de la longueur et de la largeur de ses pétales et sépales.



Le jeu de données est constitué de 150 individus (50 fleurs de chaque type) et 5 variables :
1. Sepal.Length (en mm) **2.** Sepal.Width (en mm) **3.** Petal.Length (en mm) **4.** Petal.Width (en mm) **5.** Species : *setosa*, *virginica* et *versicolore*.

3.2.1 Le problème.

On s'intéresse ici à la variable `Sepal.Length` pour les variétés d'iris `Virginica` et `Versicolor`.

On a déja montré que la longueur moyenne des sépales diffère d'une variété d'iris à l'autre.

3.2.1 Le problème.

On s'intéresse ici à la variable `Sepal.Length` pour les variétés d'iris `Virginica` et `Versicolor`.

On a déja montré que la longueur moyenne des sépales diffère d'une variété d'iris à l'autre.

On notera $x_1, x_2, \ldots, x_{50}$ les longueurs des sépales des iris de la variété `Virginica` et $y_1, y_2, \ldots, y_{50}$ celles de la variété `Versicolor`.

Le tableau ci-dessous regroupe les statistiques de base de chacune des séries de mesures.

	Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.	Std
Virginica	4.90	5.60	5.90	5.94	6.30	7.00	0.52
Versicolor	4.90	6.23	6.50	6.59	6.90	7.90	0.64

3.2.1 Le problème.

On s'intéresse ici à la variable `Sepal.Length` pour les variétés d'iris `Virginica` et `Versicolor`.

On a déja montré que la longueur moyenne des sépales diffère d'une variété d'iris à l'autre.

On notera $x_1, x_2, \ldots, x_{50}$ les longueurs des sépales des iris de la variété `Virginica` et $y_1, y_2, \ldots, y_{50}$ celles de la variété `Versicolor`.

Le tableau ci-dessous regroupe les statistiques de base de chacune des séries de mesures.

	Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.	Std
Virginica	4.90	5.60	5.90	5.94	6.30	7.00	0.52
Versicolor	4.90	6.23	6.50	6.59	6.90	7.90	0.64

L'hypothése: Les deux échantillons ont la méme variance.

3.2.1 Le problème.

On s'intéresse ici à la variable `Sepal.Length` pour les variétés d'iris `Virginica` et `Versicolor`.

On a déja montré que la longueur moyenne des sépales diffère d'une variété d'iris à l'autre.

On notera $x_1, x_2, \ldots, x_{50}$ les longueurs des sépales des iris de la variété `Virginica` et $y_1, y_2, \ldots, y_{50}$ celles de la variété `Versicolor`.

Le tableau ci-dessous regroupe les statistiques de base de chacune des séries de mesures.

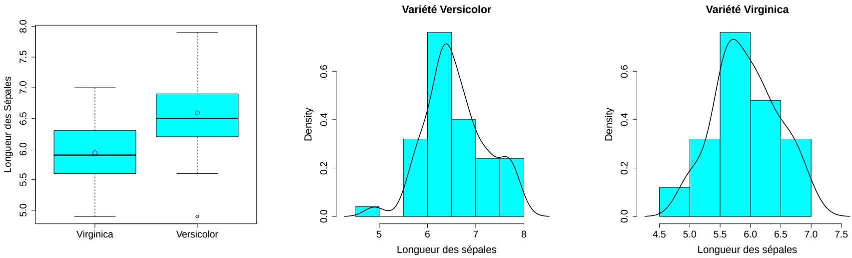
	Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.	Std
Virginica	4.90	5.60	5.90	5.94	6.30	7.00	0.52
Versicolor	4.90	6.23	6.50	6.59	6.90	7.90	0.64

L'hypothése: Les deux échantillons ont la méme variance.

On souhaite confirmer cela à l'aide d'un test de Fisher au risque 5%.

3.2.2 Vérification empirique des hypothèses.

On trouvera ci-dessous les boîtes à moustaches des 2 séries de mesures ainsi que les histogrammes en fréquences.
Que pensez-vous des hypothèses introduites ?



3.3. Illustration sur les données des Iris de Fisher.

On suppose donc ici que les variables aléatoires (X_j) sont de loi $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ et que les variables aléatoires (Y_j) sont de loi $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$.

3.3. Illustration sur les données des Iris de Fisher.

On suppose donc ici que les variables aléatoires (X_j) sont de loi $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ et que les variables aléatoires (Y_j) sont de loi $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$.

On veut tester au risque 5% l'hypothèse nulle

$$H_0 : \ll \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \gg \iff H_0 : \ll \sigma_1^2/\sigma_2^2 = 1 \gg$$

contre

$$H_1 : \ll \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \gg \iff H_1 : \ll \sigma_1^2/\sigma_2^2 \neq 1 \gg$$

3.3. Illustration sur les données des Iris de Fisher.

On suppose donc ici que les variables aléatoires (X_j) sont de loi $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ et que les variables aléatoires (Y_j) sont de loi $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$.

On veut tester au risque 5% l'hypothèse nulle

$$H_0 : \ll \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \gg \Longleftrightarrow H_0 : \ll \sigma_1^2/\sigma_2^2 = 1 \gg$$

contre

$$H_1 : \ll \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \gg \Longleftrightarrow H_1 : \ll \sigma_1^2/\sigma_2^2 \neq 1 \gg$$

On utilise pour cela la statistique de Fisher $\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{S_X^2}}{\mathbf{S_Y^2}}$ qui sous H_0 suit **une loi de Fisher à 49 et 49 ddl**.

3.3. Illustration sur les données des Iris de Fisher.

On suppose donc ici que les variables aléatoires (X_j) sont de loi $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ et que les variables aléatoires (Y_j) sont de loi $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$.

On veut tester au risque 5% l'hypothèse nulle

$$H_0 : \ll \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \gg \Longleftrightarrow H_0 : \ll \sigma_1^2/\sigma_2^2 = 1 \gg$$

contre

$$H_1 : \ll \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \gg \Longleftrightarrow H_1 : \ll \sigma_1^2/\sigma_2^2 \neq 1 \gg$$

On utilise pour cela la statistique de Fisher $\mathbf{Z} = \dfrac{\mathbf{S_X^2}}{\mathbf{S_Y^2}}$ qui sous H_0 suit **une loi de Fisher à 49 et 49 ddl**.

La zone de rejet est définie par :

$$ZR = \{Z < f_1\} \bigcup \{Z > f_2\} = \{Z < 0,57\} \bigcup \{Z > 1,76\}$$

avec f_1 est le quantile d'ordre $1 - \frac{\alpha}{2}$ et f_2 est le quantile d'ordre $\frac{\alpha}{2}$ pour loi de Fisher à 49 et 49 ddl.

3.3. Illustration sur les données des Iris de Fisher.

La valeur z_{obs} de Z sur les données est, en reprenant les valeurs du tableau des statistiques de base, égale à :

$$z_{obs} = (0,52/0,64)^2 = 0,66.$$

3.3. Illustration sur les données des Iris de Fisher.

La valeur z_{obs} de Z sur les données est, en reprenant les valeurs du tableau des statistiques de base, égale à :

$$z_{obs} = (0,52/0,64)^2 = 0,66.$$

Conclusions: Puisque z_{obs} n'est pas dans la zone de rejet, on ne peut

rejeter l'hypothèse selon laquelle les variances sont bien égales.

L'hypothèse que nous avions introduite pour réaliser le test de comparaison de moyennes était bien fondée.

3.4. Avec le logiciel R.

Avec le logiciel R, on utilise l'instruction :

```
var.test(Sepal.Length ~Species, data=iris[51:150,])
```

On obtient alors le résultat suivant :

```
^^IF test to compare two variances

data:  Sepal.Length by Species
F = 0.65893, num df = 49, denom df = 49, p-value =
0.1478
alternative hypothesis: true ratio of variances is not equal to 1
95 percent confidence interval:
0.3739 1.1612
sample estimates:
ratio of variances   0.6589276
# Quantiles à 0,025 et 0,975 d'une F(49,49)
> qf(c(0.025,0.975), 49, 49)
[1] 0.57  1.76
```

On peut constater que la *p*-value du test est supérieure à 5% et que 1 appartient à l'intervalle de confiance du rapport σ_1^2/σ_2^2 au niveau de confiance 95%, ce qui conduit à ne pas rejeter l'égalité des 2 variances.

3.5. Test unilatéral.

Il est aussi possible de mettre en oeuvre un test unilatéral. On peut en effet tester au risque α :

- H_0 : $\ll \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \gg$ contre H_1 : $\ll \sigma_1^2 < \sigma_2^2 \gg$;
- ou bien H_0 : $\ll \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \gg$ contre H_1 : $\ll \sigma_1^2 > \sigma_2^2 \gg$.

La statistique de test reste inchangée, mais les zones de rejet sont alors définies respectivement par :

- $\{Z < f_\alpha\}$;
- $\{Z > f_{1-\alpha}\}$;

où f_α et $f_{1-\alpha}$ désignent respectivement les quantiles d'ordre α et $(1-\alpha)$ d'une loi de Fisher à $p-1$ et $q-1$ ddl.

4. Test d'égalité de 2 moyennes dans le cas apparié.
4.1. Le cadre et le problème.

On dispose d'une série de n données appariées

$$(x_{1,1}, x_{1,2}), (x_{2,1}, x_{2,2}), \dots, (x_{n,1}, x_{n,2})$$

Rque: On parle de données appariées (ou par paire) quand on mesure deux fois la même variable sur le même individu (au sens statistique du terme).

Par exemple: Une glycémie chez un patient avant et après une prise orale de glucose.

But: On souhaite comparer les moyennes des deux échantillons (les moyennes des deux séries unidimensionnelles $(x_{j,1})$ et $(x_{j,2})$), afin de mettre en évidence ou non une différence significative.

4. Test d'égalité de 2 moyennes dans le cas apparié.
4.1. Le cadre et le problème.

Rque: Dans ce contexte de données appariées, **les 2 échantillons de données ne sont pas indépendants** et l'utilisation du test de Student vu précédemment serait sans fondement.

Nous allons donc travailler sur les différences $d_1 = x_{1,1} - x_{1,2}, \ldots, d_n = x_{n,1} - x_{n,2}$, et nous nous ramènerons au problème du test de conformité d'une moyenne.

4.2. Le modèle probabiliste.

On fait les hypothèses suivantes:

4.2. Le modèle probabiliste.

On fait les hypothèses suivantes:

- Les données $(x_{j,1})$ sont n réalisations indépendantes d'une variable aléatoire X_1, d'espérance μ_1 et de variance finie ;

4.2. Le modèle probabiliste.

On fait les hypothèses suivantes:

- Les données $(x_{j,1})$ sont n réalisations indépendantes d'une variable aléatoire X_1, d'espérance μ_1 et de variance finie ;
- les données $(x_{j,2})$ sont n réalisations indépendantes d'une variable aléatoire X_2, d'espérance μ_2 et de variance finie ;

4.2. Le modèle probabiliste.

On fait les hypothèses suivantes:

- Les données $(x_{j,1})$ sont n réalisations indépendantes d'une variable aléatoire X_1, d'espérance μ_1 et de variance finie ;
- les données $(x_{j,2})$ sont n réalisations indépendantes d'une variable aléatoire X_2, d'espérance μ_2 et de variance finie ;
- Ici, on ne supposera pas que les variables X_1 et X_2 sont indépendantes.

4.2. Le modèle probabiliste.

On fait les hypothèses suivantes:

- Les données $(x_{j,1})$ sont n réalisations indépendantes d'une variable aléatoire X_1, d'espérance μ_1 et de variance finie ;
- les données $(x_{j,2})$ sont n réalisations indépendantes d'une variable aléatoire X_2, d'espérance μ_2 et de variance finie ;
- Ici, on ne supposera pas que les variables X_1 et X_2 sont indépendantes.

Dans ce contexte de données appariées, il n'est pas nécessaire de supposer la normalité des variables X_1 et X_2.

4.3. Le problème.

On souhaite comparer les moyennes théoriques μ_1 et μ_2, c'est à dire tester au risque α, l'hypothèse nulle

4.3. Le problème.

On souhaite comparer les moyennes théoriques μ_1 et μ_2, c'est à dire tester au risque α, l'hypothèse nulle

$$H_0 : \ll \mu_1 = \mu_2 \gg$$

4.3. Le problème.

On souhaite comparer les moyennes théoriques μ_1 et μ_2, c'est à dire tester au risque α, l'hypothèse nulle

$$H_0 : \ll \mu_1 = \mu_2 \gg$$

contre l'hypothèse alternative

$$H_1 : \ll \mu_1 \neq \mu_2 \gg$$

4.3. Le problème.

On souhaite comparer les moyennes théoriques μ_1 et μ_2, c'est à dire tester au risque α, l'hypothèse nulle

$$H_0 : \ll \mu_1 = \mu_2 \gg$$

contre l'hypothèse alternative

$$H_1 : \ll \mu_1 \neq \mu_2 \gg$$

L'hypothèse fondamentale dans ce cadre, va porter sur la variable différence $D = X_1 - X_2$, que nous allons supposer gaussienne.

4.3. Le problème.

On souhaite comparer les moyennes théoriques μ_1 et μ_2, c'est à dire tester au risque α, l'hypothèse nulle

$$H_0 : \ll \mu_1 = \mu_2 \gg$$

contre l'hypothèse alternative

$$H_1 : \ll \mu_1 \neq \mu_2 \gg$$

L'hypothèse fondamentale dans ce cadre, va porter sur la variable différence $D = X_1 - X_2$, que nous allons supposer gaussienne.

Plus précisément, nous allons suposer que les données $(d_j = x_{j,1} - x_{j,2})_{1 \leq j \leq n}$ sont en fait les réalisations de n variables aléatoires $D_1, D_2, \ldots, D_n$ indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(\mu_1 - \mu_2\,,\,\sigma^2)$.

4.4. Le résultat clé.

4.4. Le résultat clé.

En utilisant les résultats du cours portant sur l'estimation des paramètres d'un échantillon gaussien, on déduit immédiatement que :

4.4. Le résultat clé.

En utilisant les résultats du cours portant sur l'estimation des paramètres d'un échantillon gaussien, on déduit immédiatement que :

$$\frac{\sqrt{n}\left(\overline{D}_n - (\mu_1 - \mu_2)\right)}{S} \sim T_{n-1}$$

avec

$$\overline{D}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} D_j \quad \text{et} \quad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(D_j - \overline{D}_n)^2$$

4.4. Le résultat clé.

En utilisant les résultats du cours portant sur l'estimation des paramètres d'un échantillon gaussien, on déduit immédiatement que :

$$\frac{\sqrt{n}\left(\overline{D}_n - (\mu_1 - \mu_2)\right)}{S} \sim T_{n-1}$$

avec

$$\overline{D}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} D_j \quad \text{et} \quad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(D_j - \overline{D}_n)^2$$

Ainsi, pour tester l'égalité des moyennes théoriques μ_1 et μ_2, on peut mettre en oeuvre le test de Student pour la conformité d'une moyenne.

4.5. construction du test.

Ainsi, pour tester au risque α l'hypothèse nulle H_0 : "$\mu_1 = \mu_2$" contre l'hypothèse alternative H_1 : "$\mu_1 \neq \mu_2$", dans le cas de données appariées,

4.5. construction du test.

Ainsi, pour tester au risque α l'hypothèse nulle H_0 : "$\mu_1 = \mu_2$" contre l'hypothèse alternative H_1 : "$\mu_1 \neq \mu_2$", dans le cas de données appariées,

- On utilise la statistique de test $Z = \dfrac{\sqrt{n}\,\overline{D}_n}{S} \underset{H_0}{\sim} T_{n-1}$.

4.5. construction du test.

Ainsi, pour tester au risque α l'hypothèse nulle H_0 : "$\mu_1 = \mu_2$" contre l'hypothèse alternative H_1 : "$\mu_1 \neq \mu_2$", dans le cas de données appariées,

• On utilise la statistique de test $Z = \dfrac{\sqrt{n}\,\overline{D}_n}{S} \underset{H_0}{\sim} T_{n-1}$.

• La zone de rejet est de la forme $\left\{|Z| > t_{n-1,1-\alpha/2}\right\}$ où $t_{n-1,1-\alpha/2}$ est le quantile d'ordre $(1-\alpha/2)$ de la loi de Student à $n-1$ ddl.

4.5. construction du test.

Ainsi, pour tester au risque α l'hypothèse nulle H_0 : "$\mu_1 = \mu_2$" contre l'hypothèse alternative H_1 : "$\mu_1 \neq \mu_2$", dans le cas de données appariées,

• On utilise la statistique de test $Z = \dfrac{\sqrt{n}\,\overline{D}_n}{S} \underset{H_0}{\sim} T_{n-1}$.

• La zone de rejet est de la forme $\left\{|Z| > t_{n-1,1-\alpha/2}\right\}$ où $t_{n-1,1-\alpha/2}$ est le quantile d'ordre $(1-\alpha/2)$ de la loi de Student à $n-1$ ddl.

• On calcule alors la valeur z_{obs} de Z sur les données:

$$z_{obs} = \frac{\sqrt{n}(\overline{x}_n^{(1)} - \overline{x}_n^{(2)})}{s} \text{ avec } \overline{x}_n^{(1)} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_{j,1} \text{ et } \overline{x}_n^{(2)} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_{j,2}$$

4.5. construction du test.

Ainsi, pour tester au risque α l'hypothèse nulle H_0 : "$\mu_1 = \mu_2$" contre l'hypothèse alternative H_1 : "$\mu_1 \neq \mu_2$", dans le cas de données appariées,

• On utilise la statistique de test $Z = \dfrac{\sqrt{n}\,\overline{D}_n}{S} \underset{H_0}{\sim} T_{n-1}$.

• La zone de rejet est de la forme $\left\{|Z| > t_{n-1,1-\alpha/2}\right\}$ où $t_{n-1,1-\alpha/2}$ est le quantile d'ordre $(1-\alpha/2)$ de la loi de Student à $n-1$ ddl.

• On calcule alors la valeur z_{obs} de Z sur les données:

$$z_{obs} = \frac{\sqrt{n}(\overline{x}_n^{(1)} - \overline{x}_n^{(2)})}{s} \text{ avec } \overline{x}_n^{(1)} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_{j,1} \text{ et } \overline{x}_n^{(2)} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_{j,2}$$

• Si $|z_{obs}| \leq t_{n-1,1-\alpha/2}$, alors on ne peut pas rejeter l'hypothèse nulle H_0 et on considère que les moyennes observées ne sont pas significativement différentes.
Sinon, on rejette l'hypothèse nulle H_0 au risque α, et on considère que les 2 moyennes sont significativement différentes.

4.6. Remarque entre test et IC.

On peut là encore faire le lien entre le test au risque α de la nullité du paramètre $\mu_1 - \mu_2$ et l'appartenance de 0 à l'intervalle de confiance au niveau de confiance $(1-\alpha)$ du paramètre $(\mu_1 - \mu_2)$.

4.6. Remarque entre test et IC.

On peut là encore faire le lien entre le test au risque α de la nullité du paramètre $\mu_1 - \mu_2$ et l'appartenance de 0 à l'intervalle de confiance au niveau de confiance $(1 - \alpha)$ du paramètre $(\mu_1 - \mu_2)$.

En effet, on peut conclure au non rejet de l'hypothèse nulle H_0 lorsque 0 appartient à l'intervalle de confiance,
et au rejet de l'hypothèse nulle, au risque α, lorsque 0 n'appartient pas à l'intervalle de confiance du paramètre $(\mu_1 - \mu_2)$ au niveau de confiance $(1 - \alpha)$.

5. Tests non-paramétriques de normalité.
5.1. Introduction.

On considère n données réelles $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qui sont les mesures d'une variable quantitative.

5. Tests non-paramétriques de normalité.
5.1. Introduction.

On considère n données réelles $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qui sont les mesures d'une variable quantitative.

On fait l'hypothèse fondamentale que ces données sont en fait des réalisations indépendantes d'une variable aléatoire X.

Test: On veut savoir si X est une variable gaussienne autrement dit si les données sont issues d'une population distribuée selon une loi normale.

On veut donc tester l'hypothèse nulle

5. Tests non-paramétriques de normalité.
5.1. Introduction.

On considère n données réelles $x_1, x_2, \dots, x_n$ qui sont les mesures d'une variable quantitative.

On fait l'hypothèse fondamentale que ces données sont en fait des réalisations indépendantes d'une variable aléatoire X.

Test: On veut savoir si X est une variable gaussienne autrement dit si les données sont issues d'une population distribuée selon une loi normale.

On veut donc tester l'hypothèse nulle

$$H_0 : \ll \text{La loi de la variable } X \text{ est gaussienne} \gg$$

5. Tests non-paramétriques de normalité.
5.1. Introduction.

On considère n données réelles $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qui sont les mesures d'une variable quantitative.

On fait l'hypothèse fondamentale que ces données sont en fait des réalisations indépendantes d'une variable aléatoire X.

Test: On veut savoir si X est une variable gaussienne autrement dit si les données sont issues d'une population distribuée selon une loi normale.

On veut donc tester l'hypothèse nulle

$$H_0 : \ll \text{La loi de la variable } X \text{ est gaussienne} \gg$$

contre l'hypothèse alternative

$$H_1 : \ll \text{La loi de la variable } X \text{ n'est pas gaussienne} \gg .$$

5. Tests non-paramétriques de normalité.
5.1. Introduction.

On considère n données réelles $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qui sont les mesures d'une variable quantitative.

On fait l'hypothèse fondamentale que ces données sont en fait des réalisations indépendantes d'une variable aléatoire X.

Test: On veut savoir si X est une variable gaussienne autrement dit si les données sont issues d'une population distribuée selon une loi normale.

On veut donc tester l'hypothèse nulle

$$H_0 : \ll \text{La loi de la variable } X \text{ est gaussienne} \gg$$

contre l'hypothèse alternative

$$H_1 : \ll \text{La loi de la variable } X \text{ n'est pas gaussienne} \gg.$$

Il existe de nombreux tests de normalité, parmi lesquels le test de Shapiro-Wilk (1965) qui est certainement le plus puissant pour de petites tailles d'échantillon.

5.2. Le test de Shapiro-Wilk.

La statistique de test W du test de Shapiro-Wilk compare les quantiles empiriques des données centrées réduites aux quantiles théoriques de la gaussienne.

Plus la valeur de W sur les données est élevée, plus l'adéquation à la loi normale est vraisemblable.

En pratique, on utilise la valeur de la p-value pour décider. Pour un test au risque α, on adopte la stratégie suivante :

- si p-value $\geq \alpha$, alors on ne peut rejeter l'hypothèse H_0, selon laquelle les données sont distribuées selon une loi normale,
- sinon, on rejette au risque α l'hypothèse nulle H_0 de normalité de l'échantillon.

5.3. Mise en oeuvre du test de Shapiro-Wilk sur "Les Iris de Fisher".

On reprend l'exemple des Iris de Fisher. On peut vérifier le caractère gaussien des données à l'aide du test de Shapiro-Wilk.

```
# Variété  Virginica
> shapiro.test(iris$Sepal.Length[51:100])
^^IShapiro-Wilk normality test
data:  iris$Sepal.Length[51:100]
W = 0.97784, p-value = 0.4647

# Variété Versicolor
> shapiro.test(iris$Sepal.Length[101:150])
^^IShapiro-Wilk normality test
data:  iris$Sepal.Length[101:150]
W = 0.97118, p-value = 0.2583
```

L'hypothèse de normalité que nous avions faite sur les données pour la mise en œuvre du test de comparaison de moyennes n'était pas infondée.

Exemple:
0. Présentation du problème et des données.

Dans le cadre d'une étude relative à l'alimentation du mouton, on a comparé trois méthodes d'analyse des matières fécales par spectrométrie. A cette fin, on a soumis 30 échantillons de matières fécales aux différentes méthodes d'analyse (Duculot, 1974).

Le fichier `Mouton_data.csv` contient les résultats obtenus pour les teneurs en lutécium radioactif, utilisé comme traceur, les teneurs étant exprimées en microgrammes par gramme de cendres.

Nous ne considérons ici que les résultats des deux premières méthodes d'analyse.

1. Statistiques de base.

On trouve dans le tableau ci-dessous les statistiques de base des deux séries de mesures.

On constate que les moyennes et les écarts-types des deux séries sont légèrement différents. Il est cependant difficile de dire si cette différence est significative.

Méthode	Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.	std
M1	96.00	116.00	123.00	120.83	127.00	153.00	13.34
M2	93.00	116.25	120.50	119.33	128.00	150.00	13.32

Table: Statistiques de base.

2. Quel test statistique peut-on mettre en oeuvre pour savoir si les deux premières méthodes d'analyse sont comparables ?
2.1. Choix du test statistique.

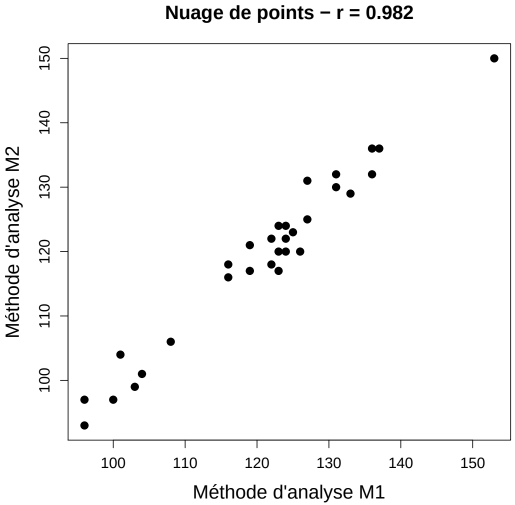
2. Quel test statistique peut-on mettre en oeuvre pour savoir si les deux premières méthodes d'analyse sont comparables ?
2.1. Choix du test statistique.

Dans une telle situation, les observations relatives aux différentes méthodes d'analyse ne sont bien sûr pas indépendantes les unes des autres, puisqu'elles concernent les 30 mêmes prélèvements de matières fécales.

Pour comparer les deux premières méthodes, il s'impose donc d'effectuer un test de Student par paires, et non pas un test de Student classique, relatif aux échantillons indépendants.

2.2. Etude de la corrélation entre les 2 séries de mesures.

On peut constater dans le graphique ci-dessous que les deux séries de mesures sont fortement corrélées linéairement.



3. Introduire le modèle probabiliste adapté à ce problème.

Pour mettre en oeuvre le test de comparaison de deux moyennes dans le cas de données appariées, on va supposer que :

- Pour tout $j = 1, 2, \ldots, 30$, la donnée $d_j = x_{j,1} - x_{j,2}$ est une réalisation d'une variable aléatoire D_j ;
- les variables aléatoires $D_1, D_2, \ldots, D_{30}$ sont indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Pour savoir si les deux méthodes d'analyse sont comparables, on testera l'hypothèse nulle H_0 : $\ll \mu = 0 \gg$ contre l'hypothèse alternative H_1 : $\ll \mu \neq 0 \gg$.

4. Quelle(s) hypothèse(s) posée(s) sur les données est-il possible de vérifier ?

On peut vérifier, à l'aide du test de Shapiro-Wilk, la normalité des données $(d_j)_{1 \leq j \leq 30}$.

L'utilisation de la fonction `shapiro.test` du logiciel R appliquée aux données `M1-M2` donne le résultat suivant :

```
^^IShapiro-Wilk normality test

data:  M1 - M2
W = 0.96511, p-value = 0.4153
```

Puisque la p-value du test est supérieure à 5%, on ne peut pas rejeter l'hypothèse selon laquelle les données (d_j) sont distribuées selon une loi normale.

5. Mise en oeuvre du test de comparaison de 2 moyennes.
5.1. Le code R.

Pour savoir si les deux méthodes d'analyse sont comparables, on utilise, avec le logiciel R, les instruction suivantes :

```
> t.test(M1-M2,m=0)

^^IOne Sample t-test
data:  M1 - M2
t = 3.2311, df = 29, p-value = 0.003065
alternative hypothesis: true mean is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 0.550526 2.449474
sample estimates:
mean of x
      1.5

> qt(0.975, 29)
[1] 2.04523
```

5.2. Conclusion sur le test.

Puisque la p-value du test est inférieure à 5%, ou que $|z_{obs}| > 2,045$, on rejette H_0 au risque 5% et on considère que les 2 méthodes d'analyse ne sont pas équivalentes.

La différence entre les deux premières méthodes d'analyse s'avère donc hautement significative, bien que les écarts observés soient relativement peu importants.

On constatera de plus que 0 n'appartient pas à l'intervalle de confiance à 95%.

6. Ce que l'on obtiendrait avec le test de Student classique.

La mise en oeuvre du test de Student classique (cas des données non appariées) donne les résultats suivants :

```
t.test(M1,M2,var.equal=TRUE)

^^ITwo Sample t-test
data:  M1 and M2
t = 0.43584, df = 58, p-value = 0.6646
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -5.389118  8.389118
sample estimates:
mean of x mean of y
 120.8333  119.3333
```

On constate que 0 appartient à l'intervalle de confiance à 95%, mais surtout que la magnitude de cet intervalle est très grande. Le fait que les données sont fortement corrélées n'a pas été pris en compte dans l'estimation de la variance.