Équations différentielles (GM3)

Hasnaa Zidani

LMI - INSA Rouen

2022/2023 - CM3

Systèmes linéaires autonomes

- Soit $A \in \mathbb{M}_{n,n}$ une matrice donnée
- On considère le système:

Equation différentielle(ED)

$$y'(t) = Ay(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

- Cas d'une matrice A diagonalisable dans $\mathbb{C}$: on peut calculer $e^{(t-t_0)A}$ et analyser le comportement asymptotique de $y(\cdot)$ à partir des valeurs propres de A (voir CM2).

Comment calculer l'exponentiel dans le cas général ?

- On considère une matrice A quelconque. Son polynôme caractéristique est de la forme

$$P_A(\lambda) = (-1)^n \prod_{j=1}^{r} (\lambda - \lambda_j)^{p_j}.$$

avec

$$p_1 + \cdots p_r = n$$
$$\lambda_1, \cdots, \lambda_r \in \mathbb{C} \qquad \text{valeurs propres de } A.$$

- **Sous-espace caractéristiques dans** $\mathbb{C}$:

$$\Gamma_{\lambda_j} = \mathtt{ker}(A - \lambda_j I)^{p_j}.$$

- Notons que $\Pi_{\lambda_j} \subset \Gamma_{\lambda_j}$, et les deux espaces coïncident lorsque A est diagonalisable
- On a: $\mathtt{dim}\ \Gamma_{\lambda_j} = p_j$, et

$$\mathbb{C}^n = \Gamma_1 \oplus \cdots \oplus \Gamma_r.$$

Théorème (Forme de Jordan)

Soit $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Il existe une matrice de passage $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que la matrice $J := P^{-1}AP$ soit de la forme (appelée forme de Jordan de A) :

$$J = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & B_{r-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & B_r \end{pmatrix}.$$

Dans cette représentation, les matrices B_i sont des blocs carrés de la forme :

$$B_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & \delta_i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \delta_i & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \ddots & \lambda_i & \delta_i \\ 0 & \cdots & \ddots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix} \qquad \text{avec } \delta_i \in \{0, 1\},$$

- La décomposition de Jordan permet d'identifier la matrice A à une matrice J diagonale par bloc

$$A = P \begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_r \end{pmatrix} P^{-1}.$$

- Sur chaque sous-espace Γ_{λ_j}, on a:

$$A_{|\Gamma_{\lambda_j}} = \lambda_j I_{|\Gamma_{\lambda_j}} + N_j,$$

où N_j est une matrice **nilpotente**, i.e $N_j^{p_j} = 0$.

Théorème (Calcul de l'exponentielle - Cas général)

$$e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{tB_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{tB_r} \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec

$$e^{tB_i} = e^{t\lambda_i} \left(I + tN_j + \cdots + \frac{t^{m_j-1}}{(m_j-1)!} N_j^{m_j-1} \right),$$

où $m_j \geq 1$ est le plus petit entier tel que $N_j^{m_j-1} = 0$.

- Rappelons que pour une matrice réelle $A \in \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, on a:

$$\lambda_j \in \mathbb{C} \text{ est valeur propre de } A \Longrightarrow \bar{\lambda}_j \text{ est aussi valeur propre de } A,$$

et

$$P_A(\lambda) = (-1)^n \prod_{j=1}^{s} (\lambda - \lambda_j)^{p_j} \prod_{j=s+1}^{q} [(\lambda - \lambda_j)(\lambda - \bar{\lambda}_j)]^{p_j},$$

avec $\lambda_j \in \mathbb{R}$ pour $j = 1, \cdots, s$

- On définit les ***sous-espaces caractéristiques réels*** de A par

$$V_j = \Gamma_{\lambda_j} \qquad \text{pour } 1 \leq j \leq s,$$
$$V_j = (\Gamma_{\lambda_j} \oplus \Gamma_{\bar{\lambda}_j}) \cap \mathbb{R}^n \qquad \text{pour } s+1 \leq j \leq q.$$

- D'après la décomposition des noyaux, on a

$$\mathbb{R}^n = V_1 \oplus \cdots \oplus V_q.$$

➤ Soit $y(0) \in \mathbb{R}^n$, donc $y(0)$ se décompose comme suit:

$$y(0) = \sum_{i=1}^{s} u_i + \sum_{i=s+1}^{q} (u_{i,1} + u_{i,2}),$$

où

$$\begin{array}{lll} & u_i \in \Gamma_{\lambda_i} & \text{pour } 1 \leq i \leq s, \\ \text{et} & u_{i,1} \in \Gamma_{\lambda_i},\ u_{i,2} \in \Gamma_{\bar{\lambda}_i} & \text{pour } s+1 \leq i \leq q. \end{array}$$

➤ L'unique solution de (ED) est donc donnée par

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{tA} y(0) \\ &= \sum_{j=1}^{s} e^{t\lambda_j} \sum_{k=0}^{m_j-1} \left(\frac{t^k}{k!} N_j^k \right) u_j \\ &\quad + \sum_{j=s+1}^{q} \left[e^{t\lambda_j} \sum_{k=0}^{m_j-1} \left(\frac{t^k}{k!} N_j^k \right) u_{j,1} + e^{t\bar{\lambda}_j} \sum_{k=0}^{m_j-1} \left(\frac{t^k}{k!} N_j^k \right) u_{j,2} \right] \end{aligned}$$

Théorème

Soit $A \in \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R}^n)$ une matrice **donnée***. Toute solution de (ED) s'écrit*

$$y(t) = \sum_{j=1}^{q} e^{t\alpha_j} \left(\sum_{k=0}^{m_j-1} t^k \left[\cos(t\beta_j) a_{j,k} + \sin(t\beta_j) b_{j,k} \right] \right)$$

où $\alpha_j = \mathfrak{Re}(\lambda_j)$ et $\beta_j = \mathfrak{Im}(\lambda_j)$ et $a_{j,k}, b_{j,k} \in V_j$.

➤ Pour calculer la solution de l'ED, il faut calculer les valeurs propre, déterminer la décomposition sous la forme de Jordan, calculer l'exponentielle de la matrice A et ensuite déterminer la solution par

$$y(t) = e^{tA} y_0.$$

➤ Le théorème donne la **forme générale de la solution** sans préciser les vecteurs $a_{j,k}$ et $b_{j,k}$.

➤ La forme générale va permettre d'analyser le comportement asymptotique des solutions: stabilité, instabilité (ou divergence), périodicité, etc.

◀ Dans la décomposition $\mathbb{R}^n = V_1 \oplus \cdots \oplus V_q$

$$y(t) = y_1(t) + \cdots + y_q(t) \qquad \text{avec}$$

$$\begin{cases} y_i(t) = e^{\lambda_i t} \displaystyle\sum_{k=0}^{m_i-1} t^k a_{i,k} & 1 \leq i \leq s, \\ y_i(t) = e^{\alpha_i t} \displaystyle\sum_{k=0}^{m_i-1} t^k \left[\cos(t\beta_i) a_{i,k} + \sin(t\beta_i) b_{i,k}\right] & s+1 \leq i \leq q, \end{cases}$$

où $\alpha_i = \mathfrak{Re}(\lambda_i)$ et $\beta_i = \mathfrak{Im}(\lambda_i)$ et $a_{i,k}, b_{i,k} \in V_i$

Théorème (Stabilité globale de y)

Si pour toute valeurs propre λ_i de A, on a $\mathfrak{Re}(\lambda_i) < 0$. Alors la solution de (ED) est stable,

$$\lim_{t \to +\infty} \|y(t)\| = 0.$$

La réciproque est aussi vraie: Si le système est stable alors toutes les valeurs propres de A ont une partie réelle strictement négative.

Théorème (Stabilité des composants de y)

Pour chaque $i = 1, \cdots q$

- *Si* $\alpha_i = \mathfrak{Re}(\lambda_i) < 0$, *alors* y_i *est stable, i.e.* $\lim_{t\to+\infty} \|y_i(t)\| = 0$.

- *Si* $\alpha_i = \mathfrak{Re}(\lambda_i) = 0$, *alors on a deux situations:*

  Si $m_i = 1$, *alors* y_i *est périodique et*

$$y_i(t) = \cos(t\beta_i)a_i + \sin(t\beta_i)b_i.$$

  Si $m_i > 1$, *alors* y_i *est instable et*

$$\lim_{t\to\pm\infty} \|y_i(t)\| = +\infty.$$

- *Si* $\alpha_i = \mathfrak{Re}(\lambda_i) > 0$, *alors* y_i *diverge, i.e.* $\lim_{t\to+\infty} \|y_i(t)\| = +\infty$, *et* y_i *émane de l'origine, i.e* $\lim_{t\to-\infty} \|y_i(t)\| = 0$.

On définit

- l'espace "stable" $E^s := \oplus_{\mathfrak{Re}(\lambda_i)<0}\Gamma_{\lambda_i} \cap \mathbb{R}^n$;
- l'espace "instable" $E^u := \oplus_{\mathfrak{Re}(\lambda_i)>0}\Gamma_{\lambda_i} \cap \mathbb{R}^n$;
- l'espace "borné"

$$E^c := \oplus_{\mathfrak{Re}(\lambda_i)=0}\Gamma_{\lambda_i} \cap \mathbb{R}^n;$$

Théorème

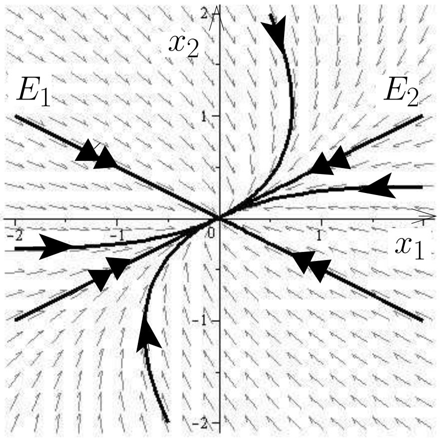
- $E^s = \{y(0) \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t\to+\infty} \|y(t)\| = 0\}$
- $E^u = \{y(0) \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t\to+\infty} \|y(t)\| = +\infty\}$
- $E^c = \Big\{y(0) \in \mathbb{R}^n \mid \exists C > 0 \;\; t.q. \;\; pour \;\; t \;\; assez\ grand$

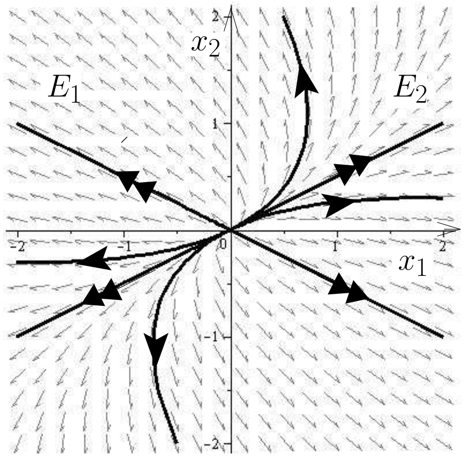
$$-C\|y(0)\| \leq \|y(t)\| \leq C|t|^n\|y(0)\|\Big\}$$

Cas $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$

Soit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ des valeurs propres de A. Donc λ_1 et λ_2 sont réelles ou complexes avec $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$.

- Cas 1: $\mathfrak{Re}(\lambda_1), \mathfrak{Re}(\lambda_2) \in]-\infty, 0[$
- Cas 2: $\mathfrak{Re}(\lambda_1), \mathfrak{Re}(\lambda_2) \in]0, +\infty[$



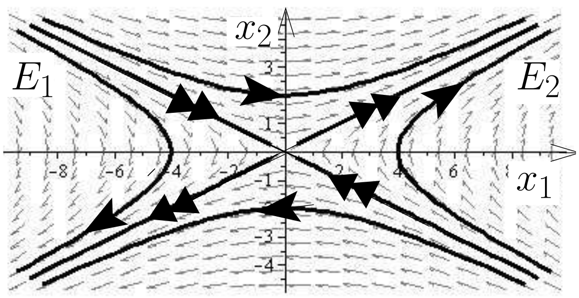


Cas 1: Nœud Stable $E^s = E_1 \oplus E_2 = \mathbb{R}^2$ Cas 2: Noeud instable $E^u = E_1 \oplus E_2 = \mathbb{R}^2$

Exemple: $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$

- Cas 3: $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$
- Cas 4: $\mathfrak{Re}(\lambda_1), \mathfrak{Re}(\lambda_2) = 0$ et $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 \in i\mathbb{R}^*$
- Autres cas: $\lambda_1 = 0$; ou $\lambda_1 = \lambda_2$ (voir TD4)

Cas 3: Point col $E^s = E_1, \quad E^u = E_2$



Cas 4: Périodique $E^c = \mathbb{R}^2$