



**TECHNIQUES
DE L'INGÉNIEUR**

Réf. : **AF146 V1**

Date de publication :
10 octobre 2006

Distributions - Applications

Cet article est issu de : **Sciences fondamentales | Mathématiques**

par **Michel DOISY**

Résumé Cet article propose trois types d'applications de distributions dans l'espace, celles que manipule essentiellement l'ingénieur. La formule de Stokes permet de démontrer la formule des sauts, autorisant à dériver une fonction qui présente une discontinuité le long d'une surface. Les espaces de Sobolev rendent possible l'écriture des équations aux dérivées partielles sous une formulation variationnelle. La dernière application présente l'utilisation des distributions en théorie du signal.

Abstract

Pour toute question :
Service Relation clientèle
Techniques de l'Ingénieur
Immeuble Pleyad 1
39, boulevard Ornano
93288 Saint-Denis Cedex

Par mail :
infos.clients@teching.com
Par téléphone :
00 33 (0)1 53 35 20 20

Document téléchargé le : **23/12/2022**

Pour le compte : **7200035676 - insa rouen normandie // 195.220.135.37**

© Techniques de l'Ingénieur | tous droits réservés

Distributions

Applications

par **Michel DOISY**

*Maître de conférences en mathématiques
École nationale supérieure d'électrotechnique, d'électronique, d'informatique,
d'hydraulique et des télécommunications (ENSEEHT)
Institut national polytechnique de Toulouse*

1. Les trois types d'applications proposés	AF 146 — 2
2. Formule des sauts dans l'espace \mathbb{R}^n	— 2
2.1 Formule de Stokes et formule de Green.....	— 2
2.2 Formules des sauts dans l'espace.....	— 5
3. Espaces de Sobolev	— 6
3.1 Espace de Sobolev $H^1(\Omega)$	— 6
3.2 Espaces de Sobolev $H^m(\Omega)$ avec m entier	— 8
4. Formulation variationnelle des problèmes aux limites elliptiques.....	— 9
4.1 Problème de Dirichlet.....	— 9
4.2 Problème de Neumann	— 9
4.3 Théorème de Lax-Milgram.....	— 10
5. Application aux processus stationnaires du second ordre.....	— 11
5.1 Rappel sur les processus stationnaires du second ordre.....	— 11
5.2 Secteur.....	— 12
5.3 Processus des télégraphistes ou <i>flip flop</i>	— 13
5.4 Processus NRZ (Non Retour à Zéro)	— 13
5.5 Processus PAM (<i>Pulse Amplitude Modulation</i>)	— 13
5.6 Biphase.....	— 14
5.7 Processus PAM généralisé.....	— 15
Références bibliographiques	— 16

Ce dossier fait suite aux deux exposés précédents sur le sujet [AF 144] et [AF 145] qui visaient à introduire les notions de base de la **théorie des distributions**. Il présente quelques applications fondamentales de cette théorie dans les domaines de l'Ingénieur.

On a vu, déjà, dans le dossier **Convolution et transformée de Fourier** [AF 145] comment l'écriture de l'opérateur de dérivation comme un produit de convolution, soit :

$$T^{(n)} = \delta^{(n)} * T$$

permet de ramener la résolution d'une équation différentielle à la recherche d'un **inverse** de l'opérateur de dérivation (**solution de Green**) dans une algèbre de convolution convenable. En quelque sorte, on **algébrise** le problème ! C'est très élégant et astucieux, sans résoudre toutes les difficultés.

Nous développons ici d'autres applications dans trois directions.

Nous espérons avoir donné au travers de ces trois exposés ([AF 144] [AF 145] ainsi que le présent texte), les connaissances de base sur les distributions et une idée des applications possibles. La théorie des distributions est une belle mécanique, qui s'appuie sur des espaces fonctionnels complexes. Pour maîtriser l'outil, il faut avoir une idée de ses fondements : c'est là la difficulté d'écrire sur le sujet !

1. Les trois types d'applications proposés

■ Comme nous l'avons signalé en début de [AF 144], le physicien ou l'ingénieur manipule essentiellement des distributions dans l'espace \mathbb{R}^n . Or, pour faire du calcul intégral dans \mathbb{R}^n , il est absolument essentiel – tout comme dans \mathbb{R} – d'avoir à sa disposition une formule d'intégration par parties.

Dans une première partie, nous montrons comment l'on obtient celle-ci dans \mathbb{R}^n grâce à la **formule de Stokes**, formule qui exige de définir soigneusement les notions de **normale extérieure**, de **bord**, de **mesures de surface**. La formule d'intégration par parties dans \mathbb{R}^n nous permet de démontrer une formule des sauts qui autorise à dériver, au sens des distributions, une fonction qui présente des discontinuités le long d'une surface. La **condition de Rankine-Hugoniot** que l'on doit adjoindre dans la formulation classique, pour décrire la conservation du flux à l'endroit d'un choc, s'introduit très naturellement dans cette écriture au sens des distributions. Nous rappelons aussi, dans un premier paragraphe, comment la formule de Stokes permet d'obtenir la formule de Green, si importante pour la suite.

■ La deuxième partie traite des **espaces de Sobolev** et de la **formulation variationnelle des équations aux dérivées partielles** (EDP).

Ces espaces permettent d'écrire les EDP sous une forme **faible**, dite formulation variationnelle, qui permet de rechercher les solutions dans des espaces beaucoup « plus gros », constitués de fonctions moins régulières que les fonctions de classe \mathcal{C}^n . Nous illustrons cette théorie difficile par deux exemples classiques : le **problème de Dirichlet** et le **problème de Neumann**, en tentant, à travers eux, de faire comprendre les idées générales. Là encore, l'écriture des EDP en termes de distributions permet d'algébriser le problème sous la forme suivante :

$$\text{trouver } u \in V \text{ tel que } a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V$$

avec V espace vectoriel,
 a forme bilinéaire,
 L forme linéaire.

Ce qui est remarquable est que – sous certaines hypothèses sur ces trois éléments V , a et L – on a un théorème d'existence et d'unicité : c'est le **théorème de Lax-Milgram**. Ainsi, en se plaçant dans les espaces de Sobolev convenables, les problèmes de Dirichlet et de Neumann admettent une solution unique.

Nous renvoyons alors aux articles de P. Spitéri (cf. [AF 503], [AF 504] et [AF 505] référence [6]) pour la mise en œuvre des méthodes numériques de recherche de cette solution.

La dernière facette de ce problème – qui donne d'ailleurs son nom à la méthode – est son équivalence avec un problème de minimisation d'une fonctionnelle quadratique, problème classique en calcul des variations.

Ces divers aspects montrent la richesse mathématique de cette formulation des EDP. Il est clair que, dans ce dossier, nous ne faisons que survoler cet immense territoire, en essayant de faire ressortir les idées fondamentales. Le lecteur souhaitait approfondir le sujet est renvoyé aux grands classiques que sont les ouvrages de J.L. Lions [5]. Il peut aussi consulter avec profit l'excellent ouvrage de J.M. Bony [1] plus accessible et néanmoins très complet.

■ La dernière partie est peut être plus surprenante ! Elle porte sur l'utilisation des distributions en théorie du signal.

Les processus aléatoires du second ordre stationnaires sont largement utilisés pour la modélisation des signaux aléatoires [4]. Ils sont caractérisés par une fonction dite **fonction d'autocorrélation** qui admet une représentation spectrale, qu'il est essentiel d'identifier. On montrera comment l'utilisation d'un calcul de transformée de Fourier (cf. [AF 145]), au sens des distributions, permet de le faire aisément et de façon quasi mécanique, grâce aux propriétés opératoires des distributions.

2. Formule des sauts dans l'espace \mathbb{R}^n

Rappelons que pour une fonction \mathcal{C}^1 par morceaux, on a démontré (cf. [AF 144 § 5.1]) la formule de dérivation au sens des distributions appelée **formule des sauts** :

si on note s_i pour $i = 1, \dots, n$ les sauts de f aux points a_1, a_2, \dots, a_n , on a :

$$[f]' = [f'] + \sum_{i=1}^n s_i \delta_{a_i}$$

qui se démontrait simplement grâce à la formule d'intégrations par parties. On cherche à avoir l'analogue dans \mathbb{R}^n et, pour cela, il faut utiliser la **formule de Stokes**.

2.1 Formule de Stokes et formule de Green

Ces deux formules fondamentales dans les applications sont souvent très mal comprises. Elles font intervenir deux notions essentielles – celles de normale extérieure et de mesure de surface – que nous allons définir aussi soigneusement et simplement que possible. Le lecteur est renvoyé à [1] pour un traitement très complet de ces notions de calcul différentiel. Nous procédons par étapes en commençant par la notion de **graphe** d'une application de \mathbb{R}^{n-1} dans \mathbb{R} .

Définition 1

Un sous-ensemble Γ de \mathbb{R}^n est un graphe de classe \mathcal{C}^1 et de dimension $n-1$, s'il existe un ouvert V de \mathbb{R}^{n-1} et une application φ de classe \mathcal{C}^1 de V dans \mathbb{R} tels que, dans un système de coordonnées convenablement choisi, l'ensemble Γ s'écrive :

$$\Gamma = \{(x, \varphi(x)) / x \in V\}$$

Si $x_0 = (x_{0,1}, \dots, x_{0,n-1})$ est un point de V , la différentiabilité en x_0 s'écrit :

$$\varphi(x_0 + h) = \varphi(x_0) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x_0) h_i + \|h\| \varepsilon(h)$$

avec $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$

$$\text{et } \|h\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} h_i^2}.$$

Alors le plan H d'équation :

$$x_n = \varphi(x_0) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x_0)(x_i - x_{0,i})$$

est le plan tangent à Γ en $(x_0, \varphi(x_0))$.

En posant, pour simplifier les écritures :

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

puisque $\nabla \varphi(x_0) = (\partial_1 \varphi(x_0), \dots, \partial_{n-1} \varphi(x_0))$ le gradient de φ en x_0 , les deux **vecteurs unitaires normaux** à Γ en $(x_0, \varphi(x_0))$ sont :

$$\vec{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla \varphi(x_0)\|^2}} \begin{pmatrix} \partial_1 \varphi(x_0) \\ \vdots \\ \partial_{n-1} \varphi(x_0) \\ -1 \end{pmatrix}$$

et

$$\vec{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla \varphi(x_0)\|^2}} \begin{pmatrix} \partial_1 \varphi(x_0) \\ \vdots \\ \partial_{n-1} \varphi(x_0) \\ +1 \end{pmatrix}$$

Soit maintenant f une fonction positive définie sur Γ .

On définit son **intégrale de surface** sur Γ par la formule suivante :

$$\int_{\Gamma} f(x) \, d\sigma(x) = \int_V f(x', \varphi(x')) \sqrt{1 + \|\nabla \varphi(x')\|^2} \, dx'$$

Il n'est peut-être pas inutile de rappeler d'où vient cette définition en adoptant une approche géométrique. Si x' parcourt un petit domaine K autour de x_0 et contenu dans V , la portion de surface S_K , associée sur Γ , peut être approchée par la portion correspondante T_K du plan tangent H (figure 1).

On a :

$$\text{mes}(K) = \text{mes}(T_K) |\cos \theta|$$

En utilisant les vecteurs :

$$\vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

et \vec{n}_0 , orthogonaux respectivement à K et à T_K , on a :

$$\vec{e}_n \cdot \vec{n}_0 = \cos \theta = \frac{-1}{\sqrt{1 + \|\nabla \varphi(x_0)\|^2}}$$

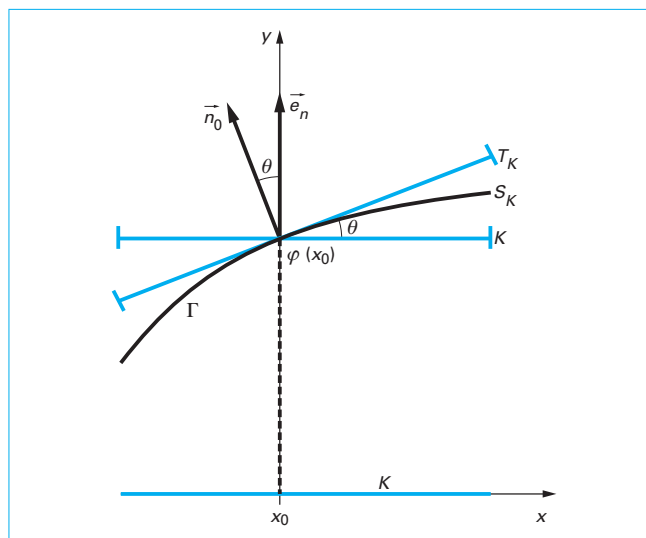


Figure 1 – Définition géométrique d'une intégrale de surface

On en déduit :

$$\text{mes}(T_K) = \sqrt{1 + \|\nabla \varphi(x_0)\|^2} \text{mes}(K)$$

On obtient ainsi la formule de transformation de l'élément de volume autour de x_0 , d'où la définition générale de l'intégration d'une fonction sur la surface du graphe Γ .

Cette notion de graphe est loin d'être suffisante pour décrire les surfaces dans \mathbb{R}^n . Ainsi, l'ensemble des points d'une sphère dans \mathbb{R}^3 ne pourra pas être défini comme le graphe d'une fonction : on ne pourra le faire que « par morceaux ».

Définition 2

On appelle hypersurface de classe \mathcal{C}^1 un sous-ensemble Σ de \mathbb{R}^n tel que, pour tout m de Σ , il existe un voisinage ouvert \mathcal{O} de m dans \mathbb{R}^n de sorte que $\Sigma \cap \mathcal{O}$ soit un graphe de classe \mathcal{C}^1 .

Donc, localement, chaque morceau de Σ peut être décrit comme le graphe d'une fonction de classe \mathcal{C}^1 . Il est assez facile de se convaincre que l'intégrale sur une telle **hypersurface** s'obtiendra en intégrant sur chacun des graphes, selon la formule précédente, puis en sommant ces termes [1].

Nous aurons également besoin, dans la suite, de définir des ouverts **réguliers**, dont la frontière a de « bonnes propriétés ». Nous commençons par la définition suivante.

Définition 3

Soit \mathcal{O} un ouvert de \mathbb{R}^{n-1} , $]a, b[$ un intervalle ouvert de \mathbb{R} et φ une application \mathcal{C}^∞ définie sur \mathcal{O} et à valeurs dans $]a, b[$. L'ensemble :

$$\Omega = \{x = (x', x_n) \in \mathcal{O} \times]a, b[\mid x_n > \varphi(x')\}$$

est appelé un **surgraphe**.

On notera

$$\partial \Omega = \{x = (x', x_n) \in \mathcal{O} \times]a, b[\mid x_n = \varphi(x')\}$$

et

$$\tilde{\Omega} = \{x = (x', x_n) \in \mathcal{O} \times]a, b[\mid x_n \geq \varphi(x')\}$$

respectivement la frontière et l'adhérence de Ω prises dans le cylindre $\partial \times]a, b[$. La **normale extérieure unitaire** en un point $(x', \varphi(x'))$

est alors le vecteur \vec{v} défini par :

$$\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla \varphi(x')\|^2}} \begin{pmatrix} \partial_1 \varphi(x') \\ \vdots \\ \partial_{n-1} \varphi(x') \\ -1 \end{pmatrix}$$

Un **ouvert régulier** de classe \mathcal{C}^∞ est un ouvert qui, dans un voisinage de chacun de ses points frontières, peut se définir comme un surgraphe.

Définition 4

Un ouvert Ω de \mathbb{R}^n est dit régulier de classe \mathcal{C}^∞ si, pour tout point m de sa frontière $\partial\Omega$, on peut trouver ϖ un ouvert de \mathbb{R}^{n-1} , $]a, b[$ un intervalle ouvert de \mathbb{R} et φ une application \mathcal{C}^∞ définie sur ϖ et à valeurs dans $]a, b[$ telles que :

$$\Omega \cap (\varpi \times]a, b[) = \{x \in \varpi \times]a, b[\mid x_n > \varphi(x')\}$$

En particulier $\partial\Omega$ est une hypersurface de classe \mathcal{C}^∞ et, de plus, Ω est **situé localement du même côté de sa frontière**, ce qui est très utile pour définir sans ambiguïté la normale extérieure.

Dans les formules de Stokes et de Green, on a besoin de préciser le comportement des fonctions sur la frontière $\partial\Omega$. Par exemple, si f est dérivable dans l'ouvert Ω et définie continue sur $\bar{\Omega}$, comment va-t-on traduire qu'elle est dérivable **jusqu'au bord** ?

Proposition 1

Soit Ω un ouvert borné régulier, un entier $m = 0, 1, \dots, \infty$ et f une fonction continue sur $\bar{\Omega}$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est de classe \mathcal{C}^m dans Ω et les dérivées de f jusqu'à l'ordre m se prolongent continûment sur $\bar{\Omega}$;
2. il existe une fonction \tilde{f} appartenant à $\mathcal{C}^m(\mathbb{R}^n)$ et qui coïncide avec f sur $\bar{\Omega}$.

On dit alors que f est de classe \mathcal{C}^m jusqu'au bord et l'on écrit : $f \in \mathcal{C}^m(\bar{\Omega})$.

Nous sommes maintenant en mesure de donner la **formule de Stokes**.

Théorème 1 – Formule de Stokes

Soit Ω un ouvert borné régulier et \mathbb{X} un champ de vecteurs défini sur $\bar{\Omega}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{X} : \quad \bar{\Omega} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x = (x_1, \dots, x_n) &\rightarrow \mathbb{X}(x) = (X_1(x), \dots, X_n(x)) \end{aligned}$$

On suppose que les composantes de \mathbb{X} appartiennent à $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$. On a alors :

$$\int_{\partial\Omega} \mathbb{X} \cdot \vec{v} \, d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbb{X}) \, dx$$

avec $\operatorname{div}(\mathbb{X}) = \partial_1 X_1 + \dots + \partial_n X_n$
 $\mathbb{X} \cdot \vec{v}$ produit scalaire en un point du bord de \mathbb{X} et de la normale extérieure unitaire en ce point.

On peut étendre ce résultat au cas où l'ouvert est régulier et pas nécessairement borné, en supposant que les composantes du champ de vecteurs sont à support compact. Remarquons aussi que, si l'on appelle Ω' le complémentaire de Ω dans \mathbb{R}^n , Ω' est encore un ouvert régulier non borné et de frontière compacte. Voilà l'une des **formules d'intégration par parties** que l'on peut déduire de la formule de Stokes.

Corollaire 1 – Formule d'intégration par parties

Soit Ω un ouvert borné régulier et f et g deux fonctions appartenant à $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$. On a :

$$\int_{\Omega} g(x) \partial_i f(x) \, dx = \int_{\partial\Omega} f(x) g(x) \cos(\vec{v}, \vec{e}_i) \, d\sigma(x) - \int_{\Omega} f(x) \partial_i g(x) \, dx \quad (1)$$

avec $v_i = \cos(\vec{v}, \vec{e}_i)$ composantes du vecteur normal extérieur unitaire au point x .

En effet, il suffit d'appliquer la formule de Stokes au champ de vecteurs :

$$\begin{aligned} \mathbb{X} : \quad \bar{\Omega} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\rightarrow \mathbb{X}(x) = f(x)g(x)\vec{e}_i \end{aligned}$$

Terminons ce paragraphe par deux formules importantes pour la suite et que nous appellerons **formules de Green**.

Corollaire 2

Soit Ω un ouvert borné régulier et u et v deux fonctions appartenant à $\mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$.

On note Δv le Laplacien de la fonction v , soit $\Delta v = \sum_i \partial_i^2 v$

où, comme précédemment, $\partial_i^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$.

On a alors :

$$\int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + u \Delta v) \, dx = \int_{\partial\Omega} u (\nabla v \cdot \vec{v}) \, d\sigma \quad (2)$$

et la forme symétrique qui s'en déduit :

$$\int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) \, dx = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial \vec{v}} - v \frac{\partial u}{\partial \vec{v}} \right) d\sigma \quad (3)$$

avec $\frac{\partial v}{\partial \vec{v}} = \nabla v \cdot \vec{v}$.

La première formule s'obtient en appliquant la formule de Stokes au champ de vecteurs :

$$\mathbb{X} = u \nabla v = (u \partial_1 v, \dots, u \partial_n v)$$

Un calcul élémentaire donne :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(u \nabla v) = \nabla u \cdot \nabla v + u \Delta v \\ \text{et } \mathbb{X} \cdot \vec{v} = (u \nabla v) \cdot \vec{v} = u (\nabla v \cdot \vec{v}) \end{cases}$$

2.2 Formules des sauts dans l'espace

Comme annoncé, nous pouvons maintenant démontrer la formule des sauts dans \mathbb{R}^n et en donner une application à la recherche d'une solution d'une équation aux dérivées partielles présentant une discontinuité le long d'une hypersurface.

Théorème 2

Soit Ω un ouvert borné régulier, Ω' son complémentaire et soit une fonction f définie sur \mathbb{R}^n tout entier et telle que ses restrictions à Ω et Ω' soient dans $\mathcal{C}^1(\Omega)$ et $\mathcal{C}^1(\Omega')$. Pour x appartenant à la frontière $\partial\Omega$, on note f_{int} et f_{ext} les prolongements par continuité de $f|_{\Omega}$ et $f|_{\Omega'}$ respectivement (ce qui correspond aux limites à droite et à gauche dans le cas unidimensionnel). Alors la dérivée partielle selon x_i ($i = 1, \dots, n$) de f au sens des distributions de f s'écrit :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + [f_{\text{ext}} - f_{\text{int}}] \cos(\vec{\nu}, \vec{e}_i) d\sigma$$

où $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ est la dérivée usuelle de f hors de $\partial\Omega$ et où le second terme est la distribution de simple couche ou distribution superficielle (cf. [AF 144 § 2.4.5]) sur $\partial\Omega$ de densité la fonction $[f_{\text{ext}} - f_{\text{int}}] \cos(\vec{\nu}, \vec{e}_i)$ par rapport à la mesure de surface $d\sigma$, $\vec{\nu}$ étant la normale extérieure à $\partial\Omega$.

Rappelons que la notation $[f]$ du membre de droite signifie que, dans ce terme, nous regardons f comme la distribution régulière (cf. [AF 144 § 2.4.3]) associée à la fonction.

Preuve. ♦ Soit φ une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Nous pouvons appliquer la formule d'intégration par parties (1) au produit par φ du prolongement de f dans Ω et au produit par φ du prolongement de f dans Ω' . Dans cette écriture, il faut prendre garde au fait que les normales extérieures sont de sens opposé entre les deux termes. On a :

$$\int_{\Omega} \varphi \partial_i f dx = \int_{\partial\Omega} f_{\text{int}} \varphi \cos(\vec{\nu}, \vec{e}_i) d\sigma - \int_{\Omega} \partial_i \varphi f dx$$

et

$$\int_{\Omega'} \varphi \partial_i f dx = - \int_{\partial\Omega} f_{\text{ext}} \varphi \cos(\vec{\nu}, \vec{e}_i) d\sigma - \int_{\Omega'} \partial_i \varphi f dx$$

La frontière d'un ouvert régulier est une hypersurface, elle-même constituée de portions de graphe : il est facile d'en déduire qu'une telle hypersurface est **négligeable** pour la mesure de Lebesgue de \mathbb{R}^n . Ainsi, en sommant les deux termes précédents, on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi \partial_i f dx = - \int_{\partial\Omega} [f_{\text{ext}} - f_{\text{int}}] \varphi \cos(\vec{\nu}, \vec{e}_i) d\sigma - \int_{\mathbb{R}^n} \partial_i \varphi f dx$$

En termes de distributions :

$$1. \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \partial_i f dx \text{ est l'action de la distribution régulière } \frac{\partial f}{\partial x_i}, \text{ dérivée}$$

partielle usuelle de f hors de $\partial\Omega$, soit $\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi \rangle$;

$$2. - \int_{\mathbb{R}^n} \partial_i \varphi f dx \text{ est, par définition, l'action sur } \varphi \text{ de la dérivée}$$

partielle au sens des distributions de f soit $\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi \rangle$.

Finalement, on a :

$$\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi \rangle = - \int_{\partial\Omega} [f_{\text{ext}} - f_{\text{int}}] \varphi \cos(\vec{\nu}, \vec{e}_i) d\sigma + \langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

ce qui est le résultat annoncé. ♦

Voici un cas particulier important pour les applications.

L'ensemble $B =]a, b[$ est un cylindre de \mathbb{R}^n avec ϖ ouvert de \mathbb{R}^{n-1} , Φ est une application de classe \mathcal{C}^∞ de ϖ dans $]a, b[$. En appelant B_1 et B_2 les deux ouverts :

$$B_1 = \{(x', x_n) \in \varpi \times]a, b[\mid x_n < \Phi(x')\}$$

et

$$B_2 = \{(x', x_n) \in \varpi \times]a, b[\mid x_n > \Phi(x')\}$$

et, en considérant une fonction f définie dans \mathbb{R}^n et appartenant à $\mathcal{C}^1(\overline{B_1})$ et à $\mathcal{C}^1(\overline{B_2})$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + [f_{\text{ext}} - f_{\text{int}}] \cos(\vec{\nu}, \vec{e}_i) d\sigma$$

Soit à résoudre, dans un tel domaine, une équation de conservation du type :

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + \text{div}[F(u(t, x))] = 0$$

avec u fonction continue de \mathbb{R}^{n+1} dans \mathbb{R} ,
 F fonction de classe \mathcal{C}^∞ de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^n .

Cette équation s'écrit donc :

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [F_i(u(t, x))] = 0$$

Si la fonction inconnue u est suffisamment régulière **en espace**, c'est-à-dire comme fonction de x , on peut développer ce dernier terme et avoir la forme équivalente suivante :

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u(t, x)}{\partial x_i} F'_i(u(t, x)) = 0$$

Par contre, si l'on cherche une solution présentant une discontinuité le long de l'hypersurface Σ définie par $x_n = \Phi(x')$, ce qui est souvent le cas en mécanique des fluides (ondes de choc), on doit conserver la première forme de l'équation différentielle dit « forme conservative » et traiter cette équation au sens des distributions, grâce à la formule précédente. On traduit alors que les deux facteurs – dérivée au sens ordinaire en dehors de Σ et distribution de simple couche sur Σ – sont nuls.

En dehors de Σ , on peut écrire l'équation différentielle sous la forme développée précédente :

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial u(t, x)}{\partial x_i} F_i'(u(t, x)) = 0$$

Sur Σ , on adjoint la condition de nullité de la densité de simple couche, soit :

$$[u_{\text{ext}}(t, x) - u_{\text{int}}(t, x)]v_0 + \sum_{i=1}^n [F_i(u_{\text{ext}}(t, x)) - F_i(u_{\text{int}}(t, x))]v_i = 0$$

avec $v_0 = \cos(\vec{v}, \vec{e}_0)$ et $v_i = \cos(\vec{v}, \vec{e}_i)$ ($i = 1, \dots, n$) les composantes temporelles et spatiales du vecteur normal à Σ .

C'est la **condition de Rankine-Hugoniot** qu'il faut adjoindre dans la formulation classique pour décrire la conservation du flux à l'endroit du choc, condition qui apparaît naturellement dans la résolution des équations au sens des distributions.

3. Espaces de Sobolev

3.1 Espace de Sobolev $H^1(\Omega)$

Ces espaces jouent un rôle fondamental dans la résolution des équations aux dérivées partielles (EDP) comme nous le verrons en détail dans le paragraphe suivant. Leur définition s'appuie sur la notion de dérivée au sens des distributions et l'espace $\mathcal{L}^2(\Omega)$ (Ω ouvert de \mathbb{R}^n) des fonctions de carré intégrable y joue un rôle central. Rappelons que :

$$\mathcal{L}^2(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ tel que } \int_{\Omega} |u|^2 dx < \infty \right\}$$

ensemble que l'on munit du produit scalaire noté ici :

$$(u, v)_{0,\Omega} = \int_{\Omega} uv dx$$

et de la norme :

$$\|u\|_{0,\Omega} = \left(\int_{\Omega} u^2 dx \right)^{1/2}$$

Rappelons aussi qu'une fonction de $\mathcal{L}^2(\Omega)$ définit une distribution régulière (cf. [AF 144 § 2.4.3]) notée $[f]$ ou f (ce que nous ferons maintenant assez systématiquement). On montre que l'application :

$$f \in \mathcal{L}^2(\Omega) \rightarrow [f] \in \mathcal{D}'(\Omega)$$

est **injective**, ce qui permet d'identifier $\mathcal{L}^2(\Omega)$ à un sous-espace de $\mathcal{D}'(\Omega)$ soit :

$$\mathcal{L}^2(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$$

Nota : on montre d'ailleurs que cette injection est continue par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Soit alors une fonction $v \in \mathcal{L}^2(\Omega)$. On peut définir sa dérivée par rapport à x_i au sens des distributions $\frac{\partial v}{\partial x_i}$. En général, la distribution

$\frac{\partial v}{\partial x_i}$ n'a aucune raison d'être elle-même une distribution régulière

définie par une fonction de $\mathcal{L}^2(\Omega)$.

Exemple : soit Ω un ouvert de \mathbb{R} contenant l'intervalle fermé borné $[a, b]$ et soit v la fonction $\mathbb{I}_{[a, b]}$. On a $v = \mathbb{I}_{[a, b]} \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ et on sait dériver v au sens des distributions (cf. [AF 144 § 5.1]) :

$$\frac{dv}{dx} = \delta_b - \delta_a$$

Or on a montré (cf. [AF 144 § 2.4.3]) que les distributions de Dirac n'étaient pas des distributions régulières.

A contrario, voici comment est défini l'**espace de Sobolev d'ordre 1** sur Ω .

Définition 5

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . On appelle espace de Sobolev d'ordre 1 sur Ω , l'espace noté $H^1(\Omega)$ défini par :

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \in \mathcal{L}^2(\Omega) \text{ tel que } \frac{\partial v}{\partial x_i} \in \mathcal{L}^2(\Omega) \quad \forall i = 1, \dots, n \right\}$$

On munit $H^1(\Omega)$ du produit scalaire :

$$(u, v)_{1,\Omega} = \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} + uv \right) dx$$

et de la norme associée :

$$\|u\|_{1,\Omega}^2 = \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 + u^2 \right) dx$$

L'espace $H^1(\Omega)$ muni de cette norme est un espace de Hilbert.

En résumé, une fonction de $H^1(\Omega)$ est une fonction de $\mathcal{L}^2(\Omega)$ dont la dérivée au sens des distributions est elle-même une (distribution définie par une) fonction de $\mathcal{L}^2(\Omega)$.

Nous allons maintenant chercher à construire le sous-espace de $H^1(\Omega)$ des fonctions nulles sur la frontière $\partial\Omega$ avec, en tête, les conditions de bord que l'on rencontre dans les équations aux dérivées partielles (problème de Dirichlet, par exemple). La difficulté est alors la suivante : pour un ouvert régulier Ω , sa frontière $\partial\Omega$ est un **ensemble négligeable** de \mathbb{R}^n et une fonction peut prendre **n'importe quelle valeur** sur un tel ensemble sans rien changer aux propriétés de cette fonction qui s'expriment en termes d'intégrales.

Cela n'a donc a priori aucun sens de parler de la valeur au bord d'une fonction de $H^1(\Omega)$!

L'une des façons de contourner cette difficulté serait d'essayer de montrer que, dans la classe de v (c'est-à-dire toutes les fonctions égales à v presque partout), il existe au moins un et donc un seul représentant **continu**. En utilisant ce représentant particulier de la classe, on pourra **donner un sens** au comportement de v au bord.

Nota : deux fonctions continues égales presque partout sont nécessairement égales partout.

Par exemple dans \mathbb{R} , prenons $\Omega =]a, b[$ intervalle ouvert borné et soit v une fonction de $H^1(\Omega)$. Posons :

$$w(x) = \int_a^x \frac{dv}{dx}(\xi) d\xi$$

Par hypothèse $\frac{dv}{dx}(\xi)$ est une fonction de carré intégrable sur $]a, b[$, donc aussi intégrable sur $]a, b[$ et la fonction w est parfaitement définie par la formule précédente. Par le théorème de convergence dominée par exemple, on montre facilement que w est une fonction *continue* de x sur $]a, b[$. Vérifions que la dérivée de w au sens des distributions est $\frac{dv}{dx}$. On a (cf. [AF 144 § 5]) :

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{dw}{dx}, \varphi \right\rangle &= - \left\langle w, \varphi' \right\rangle = - \int_a^b w(x) \varphi'(x) dx \\ &= - \int_a^b \left[\int_a^x \frac{dv}{dx}(\xi) d\xi \right] \varphi'(x) dx\end{aligned}$$

Grâce aux hypothèses sur les fonctions, l'inversion des intégrales est justifiée (théorème de Fubini) et donc :

$$\left\langle \frac{dw}{dx}, \varphi \right\rangle = - \int_a^b \frac{dv}{dx}(\xi) \left[\int_\xi^b \varphi'(x) dx \right] d\xi$$

Comme la fonction φ est à support compact dans $]a, b[$, on a $\varphi(b) = 0$ et donc :

$$\left\langle \frac{dw}{dx}, \varphi \right\rangle = - \int_a^b \frac{dv}{dx}(\xi) [-\varphi(\xi)] d\xi = \int_a^b \frac{dv}{dx}(\xi) \varphi(\xi) d\xi \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

ce qui traduit l'égalité :

$$\frac{dw}{dx} = \frac{dv}{dx} \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega)$$

On en déduit alors (cf. [AF 144 § 5.3]) que les deux distributions v et w diffèrent d'une constante, ou encore :

$$v(x) = w(x) + c \text{ presque partout}$$

avec w continue.

Conclusion : toute fonction $v \in H^1([a, b])$ est égale presque partout à une fonction continue $\theta(x) (= w(x) + c)$ de sorte que le comportement de v en a et b peut être défini par les valeurs de $\theta(a)$ et $\theta(b)$.

Nous allons étendre ce raisonnement à \mathbb{R}^n , ce qui malheureusement se fait de façon moins directe ! On ne peut pas, comme précédemment, construire explicitement un représentant continu de la classe de v . On va passer par la notion d'**application trace** et – comme souvent dans ces espaces – par un prolongement par continuité.

Nous avons déjà introduit la notion de fonction f de classe \mathcal{C}^m jusqu'au bord de Ω .

Définition 6

De la même façon, nous définirons $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ comme l'ensemble des restrictions à Ω des fonctions v indéfiniment dérivables à support compact dans \mathbb{R}^n et $H^1(\bar{\Omega})$ comme l'ensemble des restrictions à Ω des fonctions de $H^1(\mathbb{R}^n)$.

La continuité des fonctions de $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ permet de définir sans ambiguïté l'application trace :

$$\begin{aligned}\gamma_0 : \mathcal{D}(\bar{\Omega}) &\rightarrow \mathcal{C}^0(\partial\Omega) \\ \varphi &\rightarrow \gamma_0(\varphi) = \varphi|_{\partial\Omega} \text{ restriction de } \varphi \text{ à } \partial\Omega\end{aligned}$$

On a alors le résultat suivant.

Théorème 3 – Théorème trace

On suppose que Ω est un ouvert borné régulier. Alors :

1. $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$,
2. l'application γ_0 précédente se prolonge par continuité en :

$$\begin{aligned}\gamma_0 : H^1(\Omega) &\rightarrow \mathcal{L}^2(\partial\Omega) \\ v &\rightarrow \gamma_0(v)\end{aligned}$$

la mesure sur $\partial\Omega$ étant la mesure de surface $d\sigma$. L'application γ_0 est appelée application trace et sa valeur $\gamma_0(v)$ sur une fonction de $H^1(\Omega)$ est appelée la trace de v sur $\partial\Omega$. Ainsi la valeur d'une fonction v de $H^1(\Omega)$ sur $\partial\Omega$ sera, par définition :

$$v|_{\partial\Omega} = \gamma_0(v)$$

Comme annoncé, on s'intéresse aux fonctions dont la trace sur $\partial\Omega$ est nulle (condition de bord pour les équations aux dérivées partielles) :

$$\{v \in H^1(\Omega) \text{ tel que } \gamma_0(v) = 0\}$$

On a une caractérisation simple de cet ensemble. Rappelons que :

$$\mathcal{D}(\Omega) \subset H^1(\Omega) \subset \mathcal{L}^2(\Omega)$$

Définition 7

On désigne par $H_0^1(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.

Proposition 2

Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, on a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dense dans $H^1(\mathbb{R}^n)$ et donc $H_0^1(\mathbb{R}^n) = H^1(\mathbb{R}^n)$.

Par contre, si Ω est un ouvert borné régulier, on a :

$$H_0^1(\Omega) \subsetneq H^1(\Omega)$$

Pour v dans $H_0^1(\Omega)$, alors $\gamma_0(v) = 0$. En effet, pour φ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, on a $\gamma_0(\varphi) = 0$ et, par passage à la limite, $\gamma_0(v) = 0$ pour v limite dans $H_0^1(\Omega)$ de fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$. Par contre, la démonstration de la réciproque est plus délicate.

Théorème 4

Si Ω est un ouvert borné régulier alors :

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \text{ tel que } \gamma_0(v) = 0\}$$

Dans l'espace $H^1(\Omega)$, une formule d'intégration par parties, du type de celle que nous avons mentionné précédemment pour des fonctions beaucoup plus régulières (1), subsiste. Il est bien entendu essentiel, dans cette formule, d'avoir pu définir la valeur des fonctions sur le bord $\partial\Omega$.

Proposition 3

Si Ω est un ouvert borné régulier et u et v deux fonctions de $H^1(\Omega)$, on a :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} u v \nu_i d\sigma \quad (4)$$

avec $\nu_i = \cos(\vec{\nu}, \vec{e}_i)$ composantes du vecteur normal extérieur unitaire au point x .

Le résultat suivant est d'une importance pratique considérable dans les calculs.

Proposition 4 – Inégalité de Poincaré

Si Ω est un ouvert borné, il existe une constante $C(\Omega) > 0$ finie telle que :

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) \quad \|v\|_{0,\Omega} \leq C(\Omega) \left(\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{1/2}$$

On peut donner une caractérisation de l'espace $H^1(\mathbb{R}^n)$ à l'aide de la transformée de Fourier. Rappelons que, pour v dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$, on sait définir [3] sa transformée de Fourier \hat{v} qui est une fonction (en réalité une classe de fonctions) de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ et que l'application :

$$v \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow \hat{v} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$$

est une isométrie. On a la caractérisation suivante.

Proposition 5

L'espace $H^1(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble :

$$H^1(\mathbb{R}^n) = \{ v \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n) \text{ tel que } (1 + 4\pi^2 \xi^2)^{1/2} \hat{v}(\xi) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n) \}$$

On a l'expression suivante de la norme de $H^1(\mathbb{R}^n)$:

$$\|v\|_{1,\mathbb{R}^n} = \|(1 + 4\pi^2 \xi^2)^{1/2} \hat{v}\|_{0,\mathbb{R}^n}$$

$$\text{avec } \|\xi\|^2 = \sum_{j=1}^n |\xi_j|^2.$$

L'idée de la démonstration est la suivante : supposons que l'on puisse écrire la transformée de Fourier de v sous la forme intégrale classique :

$$\hat{v}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2i\pi \langle \xi, x \rangle} v(x) dx$$

et que l'on ait les « bonnes propriétés » de dérivation (c'est le cas, par exemple, si $v \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n)$ (cf. [AF 145 § 3.1]), alors :

$$\widehat{\frac{\partial v}{\partial x_j}}(\xi) = (-2i\pi \xi_j) \hat{v}(\xi) \quad j = 1, \dots, n$$

On a :

$$\|v\|_{1,\mathbb{R}^n}^2 = \|v\|_{0,\mathbb{R}^n}^2 + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{0,\mathbb{R}^n}^2$$

Comme la transformée de Fourier de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ est une isométrie :

$$\|v\|_{1,\mathbb{R}^n}^2 = \|\hat{v}\|_{0,\mathbb{R}^n}^2 + \sum_{i=1}^n \left\| \widehat{\frac{\partial v}{\partial x_i}} \right\|_{0,\mathbb{R}^n}^2$$

qui s'écrit, d'après la formule de dérivation précédente :

$$\|v\|_{1,\mathbb{R}^n}^2 = \|v\|_{0,\mathbb{R}^n}^2 + \sum_{i=1}^n \|(-2i\pi \xi_i) \hat{v}\|_{0,\mathbb{R}^n}^2 = \|(1 + 4\pi^2 \xi^2)^{1/2} \hat{v}\|_{0,\mathbb{R}^n}^2$$

3.2 Espaces de Sobolev $H^m(\Omega)$ avec m entier

On peut généraliser ce qui précède.

Définition 8

Pour m entier ($m \geq 1$), on définit l'espace $H^m(\Omega)$ en posant :

$$H^m(\Omega) = \{ v \in \mathcal{L}^2(\Omega) \text{ tel que } \partial^\alpha v \in \mathcal{L}^2(\Omega) \text{ pour } |\alpha| \leq m \}$$

si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est un multi-indice de longueur $|\alpha| = \sum_i \alpha_i$ et

$$\text{où } \partial^\alpha v = \frac{\partial^\alpha v}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \text{ et } \partial^0 v = v.$$

On munit $H^m(\Omega)$ du produit scalaire :

$$(u, v)_{m,\Omega} = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha u \partial^\alpha v dx$$

et de la norme :

$$\|v\|_{m,\Omega} = (v, v)_{m,\Omega}^{1/2} = \left(\int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} |\partial^\alpha v|^2 dx \right)^{1/2}$$

Alors l'espace $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Considérons plus particulièrement l'espace $H^2(\Omega)$. On a clairement :

$$H^2(\Omega) \subset H^1(\Omega)$$

(et, plus généralement, les espaces $H^m(\Omega)$ sont emboîtés). Pour une fonction v de $H^2(\Omega)$, on peut donc définir sa trace $\gamma_0(v)$ sur le bord $\partial\Omega$ de Ω qui appartient à $\mathcal{L}^2(\partial\Omega)$. Mais, comme pour v dans $H^2(\Omega)$, on a

à $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ dans $H^1(\Omega)$, on peut aussi définir la valeur aux bords de

$\gamma_0\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)$ qui est un élément de $\mathcal{L}^2(\partial\Omega)$. Enfin si $\vec{\nu}$ est un vecteur

normal à $\partial\Omega$ au point $x \in \partial\Omega$, on peut définir sans ambiguïté la valeur de **dérivée normale** le long de $\partial\Omega$ comme l'élément de $\mathcal{L}^2(\partial\Omega)$:

$$\gamma_1(v) = \frac{\partial v}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} \Big|_{\partial\Omega} \nu_i$$

On en déduit une formule de Green particulièrement importante pour la suite, entre les espaces $H^2(\Omega)$ et $H^1(\Omega)$.

Proposition 6 – Formule de Green entre $H^2(\Omega)$ et $H^1(\Omega)$

Soit Ω un ouvert borné régulier et soit u une fonction de $H^2(\Omega)$ et v une fonction de $H^1(\Omega)$. On a la formule suivante :

$$-\int_{\Omega} \Delta u v dx = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \nu} v d\sigma \quad (5)$$

avec ν vecteur normal extérieur unitaire au point x .

Preuve. ♦ Comme u est dans $H^2(\Omega)$, on a $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ dans $H^1(\Omega)$ et on peut utiliser la formule d'intégration par parties (4) dans $H^1(\Omega)$ soit :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} v \, dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v \nu_i \, d\sigma$$

En sommant et en utilisant la définition précédente de dérivée le long de $\partial\Omega$, on obtient la formule annoncée. ♦

La caractérisation des éléments de $H^m(\mathbb{R}^n)$ à partir de la transformée de Fourier dans \mathcal{L}^2 se généralise.

Proposition 7

L'espace $H^m(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble :

$$H^m(\mathbb{R}^n) = \{ v \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n) \text{ tel que } (1 + 4\pi^2 \xi^2)^{m/2} \hat{v}(\xi) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n) \}$$

la norme $H^m(\mathbb{R}^n)$ étant :

$$\|v\|_{m,\mathbb{R}^n} = \|(1 + 4\pi^2 \|\xi\|^2)^{m/2} \hat{v}\|_{0,\mathbb{R}^n}$$

Notons que c'est cette caractérisation qui permet le plus aisément d'introduire les espaces de Sobolev d'exposant quelconque $H^s(\mathbb{R}^n)$ pour s dans \mathbb{R} [1].

4. Formulation variationnelle des problèmes aux limites elliptiques

Dans ce paragraphe, nous montrons comment les espaces de Sobolev introduits interviennent dans la résolution des équations aux dérivées partielles aux limites elliptiques. Nous nous contenterons d'illustrer ce propos par les deux problèmes classiques que sont le problème de Dirichlet et le problème de Neumann pour un ouvert borné régulier Ω de \mathbb{R}^n .

4.1 Problème de Dirichlet

Le problème de Dirichlet dans un disque D ouvert de \mathbb{C} est le suivant : trouver une fonction u de classe \mathcal{C}^2 dans D , continue dans \bar{D} et telle que :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \text{ dans } D \\ u|_{\partial D} = u_0 \end{cases}$$

Dans \mathbb{C} , il peut être résolu par la théorie des fonctions holomorphes. Par contre, sa résolution pour un ouvert de \mathbb{R}^n est plus délicate et oblige à reformuler le problème sous **forme variationnelle**.

Soit donc, pour Ω un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^n et f une fonction de $\mathcal{L}^2(\Omega)$, à chercher une fonction u définie dans Ω vérifiant :

$$-\Delta u = f \text{ dans } \Omega \quad (6)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \quad (7)$$

Supposons que u soit dans $H^2(\Omega)$ (ce qui est beaucoup moins contraignant que d'être \mathcal{C}^2 !). Multiplions (6) par une *fonction test* v de $H_0^1(\Omega)$ et intégrons sur Ω soit :

$$- \int_{\Omega} \Delta u v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx$$

Alors, par la formule de Green (5) entre $H^2(\Omega)$ et $H^1(\Omega)$:

$$- \int_{\Omega} \Delta u v \, dx = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \nu} v \, d\sigma$$

Comme v est dans $H_0^1(\Omega)$, on a $v|_{\partial\Omega} = 0$. On en déduit :

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) \quad \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad (8)$$

De plus, comme u est dans $H^2(\Omega)$, contenu dans $H^1(\Omega)$, la condition $u|_{\partial\Omega} = 0$ se traduit naturellement par :

$$u \in H_0^1(\Omega) \quad (9)$$

Le problème initial, sous forme classique, défini par les conditions (6) et (7) est maintenant défini par les deux conditions (8) et (9). Inversement, supposons u dans $H_0^1(\Omega)$ solution du problème défini par les conditions (8) et (9) et admettons de plus que u est aussi dans $H^2(\Omega)$. En appliquant de nouveau la formule de Green (5), on a :

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx = - \int_{\Omega} \Delta u v \, dx$$

puisque v est nul sur $\partial\Omega$ et donc :

$$- \int_{\Omega} \Delta u v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Comme l'espace $H_0^1(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$, on peut en déduire que :

$$-\Delta u = f \text{ presque partout}$$

et donc que u est solution de (6) et (7).

Nota : rappelons que l'on a les inclusions $\mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega) \subset \mathcal{L}^2(\Omega)$ et que $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$.

Finalement, avec quelques précautions, les deux problèmes apparaissent comme équivalents.

Sous sa forme définie par (8) et (9), on dit que l'on traite le problème de Dirichlet sous sa **forme variationnelle**. Nous expliquerons plus loin l'origine de cette dénomination.

4.2 Problème de Neumann

On considère le problème analogue suivant : soit f une fonction de $\mathcal{L}^2(\Omega)$, trouver une fonction u définie dans Ω vérifiant

$$-\Delta u + u = f \text{ dans } \Omega \quad (10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} = 0 \quad (11)$$

Supposons ici u prise dans $H^1(\Omega)$ et multiplions (10) par une fonction test v de $H^1(\Omega)$. Par la formule de Green :

$$-\int_{\Omega} \Delta u v \, dx = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \nu} v \, d\sigma$$

et ici, grâce à la condition (11), on en déduit que :

$$\forall v \in H^1(\Omega) \quad \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx + \int_{\Omega} u v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad (12)$$

Le problème devient donc, trouver :

$$u \in H^1(\Omega) \quad (13)$$

tel que l'on ait (12). Et, comme précédemment, on montre que, moyennant les bonnes hypothèses, les deux problèmes sont équivalents. Cette dernière forme est la **forme variationnelle du problème de Neumann**.

On perçoit bien ici comment le problème sous sa forme classique, à savoir la recherche d'une **fonction** est transformé en la recherche d'un **opérateur** par l'introduction des fonctions tests choisies dans l'espace convenable. C'est ce qui a présidé à la définition même des distributions. Et cela permet de relâcher fortement les hypothèses imposées à la solution cherchée et donc de se placer dans des espaces de fonctions beaucoup plus gros. La contrepartie est que cela ne peut se faire qu'au prix de l'introduction d'espaces fonctionnels complexes. On voit aussi, dans les calculs qui précèdent, combien la définition correcte de ces espaces et de la notion de valeur sur le bord, est importante. On pourrait bien entendu associer, aux différents espaces introduits $H^1(\Omega)$, $H^m(\Omega)$, $H^p(\Omega)$, les espaces de distributions correspondants par dualité (espace des formes linéaires continues sur ces espaces munis d'une topologie convenablement choisie [1] et traduire les conditions précédentes (8) et (12) en termes de ces distributions. Nous préférons conserver les écritures explicites afin de ne pas alourdir cet exposé d'espaces fonctionnels compliqués et aussi parce que c'est généralement sous cette forme que les formulations variationnelles sont développées dans la littérature. Un autre point remarquable est que les problèmes variationnels peuvent être formalisés de façon abstraite et admettre une solution très générale.

4.3 Théorème de Lax-Milgram

Dans le problème de Dirichlet, posons :

$$\begin{cases} a(u, v) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx \\ \text{et } L(v) = \int_{\Omega} f v \, dx \end{cases}$$

et dans le problème de Neumann :

$$\begin{cases} a(u, v) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx + \int_{\Omega} u v \, dx \\ \text{et } L(v) = \int_{\Omega} f v \, dx \end{cases}$$

Dans chacun de ces cas et en se plaçant dans l'espace fonctionnel adapté au problème, noté V , on a à résoudre :

$$\text{trouver } u \in V \text{ tel que } a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V \quad (14)$$

Avec des hypothèses sur V , a et L , on montre en toute généralité que ce problème (14) a une **solution unique**. Cela assurera donc l'existence et l'unicité de la solution des problèmes variationnels de Dirichlet et de Neumann.

Théorème 5 – Théorème de Lax-Milgram

Soit :

- V un espace de Hilbert sur \mathbb{R} muni de la norme $\|\cdot\|$;
- a une forme bilinéaire :

$$\begin{aligned} V \times V &\rightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\rightarrow a(u, v) \end{aligned}$$

continue sur V , c'est-à-dire qui vérifie

$\exists M$ constante positive finie telle que

$$\forall (u, v) \in V \times V \quad |a(u, v)| \leq M \|u\| \|v\|$$

- L une forme linéaire continue sur V .

On suppose de plus que la forme bilinéaire a est V -elliptique, c'est-à-dire qu'il existe une constante $\alpha > 0$ et finie telle que :

$$\forall v \in V \quad a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2$$

Alors le problème :

$$\text{trouver } u \in V \text{ tel que } a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V \quad (15)$$

admet une solution unique.

Pour le problème de Dirichlet, Ω étant toujours supposé être un ouvert régulier, on a $V = H_0^1(\Omega)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{1,\Omega}$. Il est facile de voir que a et L sont continues. Le caractère $H_0^1(\Omega)$ -elliptique de a s'obtient grâce à l'inégalité de Poincaré. En effet, on a pour v dans $H_0^1(\Omega)$:

$$a(v, v) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 \, dx \geq \frac{1}{C(\Omega)^2} \|v\|_{0,\Omega}^2$$

et donc :

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 \, dx + \frac{1}{C(\Omega)^2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 \, dx \geq \frac{1}{C(\Omega)^2} \|v\|_{1,\Omega}^2$$

d'où finalement :

$$a(v, v) \geq \frac{1}{1 + C(\Omega)^2} \|v\|_{1,\Omega}^2$$

D'après le théorème de Lax-Milgram, il existe une fonction u dans $H_0^1(\Omega)$ unique vérifiant :

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) \quad \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad (16)$$

Dans le problème de Neumann, l'espace V est ici $V = H^1(\Omega)$ muni de sa norme $\|\cdot\|_{1,\Omega}$, la forme bilinéaire a est clairement $H^1(\Omega)$ -elliptique puisque ici $a(v, v) = \|v\|_{1,\Omega}^2$.

La conclusion découle du théorème de Lax-Milgram : pour le problème de Neumann, il existe une fonction u unique dans $H^1(\Omega)$ telle que :

$$\forall v \in H^1(\Omega) \quad \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx + \int_{\Omega} u v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad (17)$$

Terminons cette partie en indiquant l'origine de la terminologie employée de **formulation variationnelle**. C'est l'occasion de mettre en évidence un autre aspect des problèmes traités.

Supposons que la forme $a(u, v)$ soit **symétrique**, ce qui est le cas dans les deux exemples traités. On introduit la **fonctionnelle quadratique** :

$$J(v) = \frac{1}{2} a(u, v) - L(v) \quad \forall v \in V$$

et considérons le **problème de minimisation** suivant :

$$\text{trouver } u \in V \text{ tel que } J(u) = \min_{v \in V} J(v) \quad (18)$$

On a alors le remarquable résultat suivant.

Théorème 6

On suppose que la forme bilinéaire a est symétrique et V -elliptique. Alors le problème de minimisation (18) admet une solution unique qui n'est autre que la solution du problème (14).

Preuve. ♦ Soit u solution du problème (14) et $w \in V$. On a :

$$\begin{aligned} J(u+w) &= \frac{1}{2} a(u+w, u+w) - L(u+w) \\ &= \frac{1}{2} a(u, u) - L(u) + [a(u, w) - L(w)] + \frac{1}{2} a(w, w) \end{aligned}$$

Comme u est solution de (14), on a :

$$J(u+w) = J(u) + \frac{1}{2} a(w, w)$$

D'après la propriété de V -ellipticité :

$$J(u+w) \geq J(u) + \frac{\alpha}{2} \|w\|^2$$

Ainsi pour tout $w \neq 0$, on a :

$$J(u+w) > J(u)$$

ce qui démontre le résultat. ♦

Conclusion : Sous les hypothèses du théorème, la résolution du problème (14) correspond à un problème de minimisation d'une fonctionnelle quadratique qui est la formulation abstraite habituelle des problèmes de calcul des variations. C'est ce qui explique la terminologie employée de **formulation variationnelle**.

Un mot pour finir sur la détermination **pratique** de la solution d'un problème variationnel de type :

$$\text{trouver } u \in V \text{ tel que } a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V \quad (19)$$

Avec les bonnes hypothèses, on a obtenu l'existence et l'unicité de la solution mais, dans les applications, il reste à **construire** celle-ci. L'une des méthodes est celle des **éléments finis** que nous évoquerons brièvement, renvoyant le lecteur aux dossiers de la collection de P. Spitéri [6], qui traitent de cette recherche pratique des solutions par des méthodes numériques.

L'idée est de commencer à chercher la solution dans un sous-espace de **dimension finie** V_n de V soit :

$$\text{trouver } u \in V_n \text{ tel que } a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V_n \quad (20)$$

Supposons que le sous-espace V_n de dimension n admette comme base la famille de fonctions $\{\varphi_j\}_{j=1, \dots, n}$. En décomposant u

dans cette base, soit $u = \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j$ le problème se ramène à la résolution du système linéaire :

$$\text{trouver les } \{\alpha_j\}_{j=1, \dots, n} \text{ tels que } \sum_{j=1}^n \alpha_j a(\varphi_j, \varphi_i) = L(\varphi_i) \quad \forall i = 1, \dots, n$$

La résolution sera d'autant plus simple que la matrice A des coefficients $a(\varphi_j, \varphi_i)$ sera plus **creuse** ou aura une **structure bande**. Ainsi, le choix du sous-espace V_n puis de la base dans V_n joueront un rôle crucial dans la rapidité et la précision du traitement numérique du problème.

5. Application aux processus stationnaires du second ordre

Nous traitons dans cette partie, une **application des distributions à l'étude de certains signaux aléatoires**. Cette méthode – sans doute insuffisamment utilisée dans la pratique – peut être très utile dans l'analyse spectrale des signaux aléatoires. Dans un premier temps, nous rappelons brièvement les principales propriétés de la **fonction d'autocorrélation** d'un processus stationnaire du second ordre [4]. Puis nous montrerons, sur quelques exemples de processus intervenant en théorie du signal, comment les propriétés des distributions peuvent être utilisées.

5.1 Rappel sur les processus stationnaires du second ordre

Un processus aléatoire du second ordre défini sur \mathbb{R} est une famille $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ de variables aléatoires (v.a. en abrégé) à valeurs complexes, définie sur un même espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et de carré intégrable soit $X_t \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, ce qui se traduit par :

$$\mathbb{E}(|X_t|^2) = \int_{\Omega} |X_t(\omega)|^2 d\mathbb{P}(\omega) < \infty \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

le symbole \mathbb{E} désignant l'espérance.

Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'espace $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, les quantités :

$$K(t, \tau) = \mathbb{E}(X_t \overline{X_{t-\tau}})$$

existent pour tout t et tout τ de \mathbb{R} . On dit alors que le processus $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ est stationnaire au sens large si, et seulement si :

- 1. $\mathbb{E}(X_t) = m \quad \forall t \in \mathbb{R}$;
- 2. $K(t, \tau) = K(\tau) \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \forall \tau \in \mathbb{R}$, donc est indépendant de t (c'est ce qui traduit l'idée de stationnarité).

On en déduit alors facilement que :

$$\begin{cases} \mathbb{E}(X_t \overline{X_s}) = K(t-s) \\ \text{et } \text{cov}(X_t, X_s) = K(t-s) - |m|^2 \end{cases}$$

L'étude de ces processus repose entièrement sur les propriétés de la fonction K appelée **fonction d'autocorrélation** du processus. On a très facilement les propriétés suivantes.

Proposition 8

La fonction d'autocorrélation K d'un processus stationnaire du second ordre vérifie :

1. $|K(\tau)| \leq K(0) \quad \forall \tau \in \mathbb{R}$ avec $K(0) = E(|X_t|^2) \quad \forall t \in \mathbb{R}$;
2. La fonction K est à symétrie hermitienne, c'est-à-dire $K(-\tau) = \overline{K(\tau)} \quad \forall \tau \in \mathbb{R}$. En particulier si le signal est à valeurs réelles, la fonction d'autocorrélation est paire ;
3. On a :

$$\|X_t - X_{t-\tau}\|_2^2 = 2[K(0) - \operatorname{Re} K(\tau)] = 2\operatorname{Re}[K(0) - K(\tau)]$$

4. La fonction K est une fonction de type positif, c'est-à-dire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall t_1, \dots, t_n \text{ dans } \mathbb{R} \quad \forall a_1, \dots, a_n \text{ dans } \mathbb{C} \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i \overline{a_j} K(t_j - t_i) \geq 0 \end{array} \right.$$

Cette propriété est d'une grande importance dans l'étude spectrale d'un signal stationnaire grâce au théorème de Bochner.

Théorème 7 – Théorème de Bochner

Si g fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{C} est une fonction de type positif, continue en 0 et telle que $g(0) = 1$ alors g est la fonction caractéristique d'une unique probabilité sur \mathbb{R} , c'est-à-dire que :

$$g(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} d\mathbb{P}(x)$$

Ainsi une telle fonction g admet une **représentation spectrale** unique.

Pour la fonction d'autocorrélation K , sa continuité est liée à la **continuité en moyenne quadratique** du processus $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ et elle sera en général vérifiée.

Nota : cette continuité en moyenne quadratique est beaucoup moins contraignante qu'une continuité trajectorielle qui, elle, sera généralement mise en défaut.

La quantité $K(0)$ est finie et positive donc, en remplaçant la probabilité \mathbb{P} par une mesure positive finie \mathbb{S} de masse totale $K(0)$, on obtient une représentation spectrale de K . On adopte dans ce qui suit une écriture **en fréquence** avec l'introduction d'un facteur $2\pi f$ plutôt que l'écriture **en pulsation** de l'énoncé du théorème de Bochner. On utilise à dessein la variable f pour rappeler que l'on travaille dans l'espace des fréquences.

Proposition 9

On appelle spectre de puissance d'un processus stationnaire du second ordre la mesure positive finie notée \mathbb{S} ou $d\mathbb{S}$ telle que :

$$K(\tau) = \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi f\tau} d\mathbb{S}(f) \quad \forall \tau \in \mathbb{R}$$

Les propriétés spectrales du signal sont contenues dans la mesure \mathbb{S} . Grâce au théorème de décomposition de Lebesgue d'une mesure positive sur \mathbb{R} , on sait que la mesure \mathbb{S} se décompose en la somme de trois mesures :

$$\mathbb{S} = \mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2 + \mathbb{S}_3$$

- \mathbb{S}_1 est une **mesure absolument continue** par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} , donc admet une densité qui est une fonction positive et intégrable soit :

$$\mathbb{S}_1(A) = \int_A s_1(f) df$$

- \mathbb{S}_2 est une **mesure discrète** associée aux sauts de la fonction

$$S(x) = \int_{-\infty}^x d\mathbb{S}(f) \text{ et donc est de la forme :}$$

$$\mathbb{S}_2 = \sum_k a_k \delta_{f_k}$$

avec $a_k = \lim_{h \rightarrow 0^+} |S(f_k + h) - S(f_k)|$ et δ_{f_k} mesure de Dirac en f_k .

- \mathbb{S}_3 est une **mesure diffuse** qui n'interviendra pas dans les processus que nous traiterons.

Grâce à cette décomposition, la fonction $K(\tau)$ s'écrit :

$$K(\tau) = \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi f\tau} s_1(f) df + \sum_k a_k e^{2i\pi f_k \tau} = K_1(\tau) + K_2(\tau)$$

La mesure (écrite sous forme infinitésimale) $d\mathbb{S}_1(f) = s_1(f) df$ est appelée **spectre à bandes** et $s_1(f)$ est la densité du spectre à

bandes. La mesure $d\mathbb{S}_2(f) = \sum_k a_k \delta_{f_k}(df)$ est appelée le **spectre de raies** du processus. L'étude des propriétés spectrales du processus passe par la connaissance de $s_1(f)$ et des couples (a_k, f_k) .

Du point de vue analytique, la fonction $K_1(\tau)$ apparaît comme la transformée de Fourier inverse d'une fonction intégrable donc est une fonction continue, tendant vers 0 à l'infini [3]. De plus, si la fonction $K_1(\tau)$ est intégrable, on peut en déduire $s_1(f)$ par transformée de Fourier directe soit :

$$s_1(f) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi f\tau} K_1(\tau) d\tau \quad \forall f \in \mathbb{R}$$

L'analyse des composants du deuxième facteur $K_2(\tau)$ est souvent plus délicate ! L'utilisation des distributions peut fournir une simplification précieuse. En effet $K_2(\tau)$ se présente comme une série de Fourier généralisée, pouvant faire apparaître plusieurs périodicités et il n'est pas toujours facile de retrouver les coefficients de Fourier correspondant. Par contre, si l'on se souvient qu'au sens des distributions (cf. [AF 145 § 3.5]) :

$$[e^{2i\pi f\tau}] = \delta_{f_k}$$

on a formellement :

$$\sum_k a_k \delta_{f_k} = [\widehat{K_2}] \text{ au sens des distributions}$$

Comme, d'autre part, la transformée de Fourier d'une fonction de \mathcal{L}^1 est la même au sens des fonctions et au sens des distributions (cf. [AF 145 § 3.4]), on peut également obtenir $s_1(f)$ de cette façon.

Conclusion : la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation $K(\tau)$ au sens des distributions permet de retrouver les propriétés spectrales du processus $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}}$:

$$[\widehat{K}] = s_1(f) \text{ (spectre à bandes)} + \sum_k a_k \delta_{f_k} \text{ (spectre de raies)}$$

Nous traitons dans ce qui suit un certain nombre d'exemples pour illustrer cette technique.

5.2 Secteur

Pour modéliser le secteur de fréquence f_0 comme processus stationnaire, en plus de l'amplitude aléatoire A , on utilise une phase

aléatoire Φ indépendante de A et uniformément répartie dans $[0, 2\pi[$. On obtient alors la modélisation par le processus :

$$X_t = A \cos(2\pi f_0 t + \Phi) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

C'est alors un processus stationnaire du second ordre (si $A \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$) de moyenne nulle, soit $\mathbb{E}(X_t) = 0$ pour tout t , et de fonction d'autocorrélation :

$$K(\tau) = \frac{m_A^2 + \sigma_A^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau)$$

si $m_A = \mathbb{E}(A)$ et $\sigma_A^2 = \text{var}(A)$.

Ici $K(\tau)$ se réduit à sa composante périodique $K_2(\tau)$ et comme :

$$|\cos(2\pi f_0 \tau)| = \frac{1}{2} |e^{-2i\pi f_0 \tau} + e^{+2i\pi f_0 \tau}| = \frac{1}{2} (\delta_{-f_0} + \delta_{+f_0})$$

on a :

$$dS = dS_2 = \frac{1}{4} (m_A^2 + \sigma_A^2) (\delta_{-f_0} + \delta_{+f_0})$$

Le spectre de raies est constitué de deux raies d'amplitude $\frac{1}{4} (m_A^2 + \sigma_A^2)$ en $-f_0$ et f_0 .

5.3 Processus des télégraphistes ou flip flop

Soit $\{T_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ un **processus de Poisson** sur \mathbb{R} d'intensité $\lambda > 0$. On convient d'indexer les instants d'arrivée du processus de Poisson grâce à la convention :

$$-\infty < \dots < T_{-1} < T_0 \leq 0 < T_1 < \dots < +\infty$$

Soit A une variable aléatoire **indépendante** du processus $\{T_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ et valant ± 1 avec probabilité $1/2$. On définit alors le processus $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ de la façon suivante :

- 1. $X_0 = A$;
- 2. X_t est constant sur les intervalles $[T_n, T_{n+1}[$ pour tout n dans \mathbb{Z} ;
- 3. si $X_t = \varepsilon$ avec $\varepsilon = \pm 1$ sur $[T_n, T_{n+1}[$, alors $X_t = -\varepsilon$ sur $[T_{n+1}, T_{n+2}[$ et $[T_{n-1}, T_n[$.

Il est facile de vérifier que l'on a un processus stationnaire du second ordre centré, soit $\mathbb{E}(X_t) = 0$ pour tout t , et de fonction d'autocorrélation :

$$K(\tau) = e^{-2\lambda|\tau|} \quad \forall \tau \in \mathbb{R}$$

Ici $K(\tau)$ se réduit à sa composante intégrable $K_1(\tau)$ et on obtient facilement la densité du spectre à bandes par transformée de Fourier :

$$s_1(f) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\tau f} K(\tau) d\tau = \frac{\lambda}{\lambda^2 + \pi^2 f^2} \quad \forall f \in \mathbb{R}$$

5.4 Processus NRZ (Non Retour à Zéro)

Ici, on considère une suite $\{A_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de variables aléatoires indépendantes, de même loi :

$$\begin{cases} \mathbb{P}(A_n = 1) = p \\ \mathbb{P}(A_n = 0) = 1 - p = q \end{cases}$$

avec p dans $[0, 1]$.

Pour un réel t , on note :

$$\begin{cases} \bar{t} \text{ la partie entière de } t \\ \underline{t} \text{ la partie fractionnaire de } t \end{cases}$$

de sorte que :

$$t = \bar{t} + \underline{t} \text{ avec } \bar{t} \in \mathbb{Z} \text{ et } \underline{t} \in [0, 1[$$

On définit le processus $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ en posant :

$$X_t = A_n \text{ pour } t \in [n, n+1[$$

ou encore :

$$X_t = A_{\bar{t}} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Le processus ainsi défini n'est pas stationnaire puisque :

$$\mathbb{E}(X_{1/4} X_{3/4}) = \mathbb{E}(A_0^2) = \mathbb{E}(A_0) = p$$

alors que :

$$\mathbb{E}(X_{3/4} X_{5/4}) = \mathbb{E}(A_0 A_1) = p^2.$$

On le stationnarise en introduisant, comme pour le secteur, une phase aléatoire Φ uniformément répartie dans $[0, 1]$ et indépendante de la suite $\{A_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$. On définit alors le processus :

$$X_t = A_{\bar{t} + \Phi} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Grâce à un calcul d'**espérance conditionnelle**, on montre que $\mathbb{E}(X_t) = p$ et que :

$$K(\tau) = p^2 + p(1-p)\Lambda_1(\tau)$$

avec $\Lambda_1(\tau)$ fonction triangle :

$$\begin{cases} \Lambda_1(\tau) = (1 - |\tau|) \text{ pour } |\tau| \leq 1 \\ \Lambda_1(\tau) = 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$$

La partie spectre à bandes est $K_1(\tau) = p(1-p)\Lambda_1(\tau)$ et la partie périodique est la constante $K_2(\tau) = p^2$, ce que l'on voit en l'écrivant $p^2 = e^{2i\pi 0 \tau}$! Ou encore, comme $[\bar{1}] = \delta$ (cf. [AF 145 § 3.5]), on a :

$$[\widehat{K}] = p^2 \delta + p(1-p) \widehat{\Lambda}_1$$

avec :

$$\widehat{\Lambda}_1(f) = \text{sinc}(\pi f)^2$$

Finalement :

$$dS(f) = p^2 \delta(df) + p(1-p) |\text{sinc}(\pi f)^2| df$$

5.5 Processus PAM (Pulse Amplitude Modulation)

On considère la fonction f suivante :

$$\begin{cases} f(t) = 1 \text{ si } t \in [0, h] \\ f(t) = 0 \text{ si } t \in]h, 1] \\ \text{avec } h \in]0, 1/2[\end{cases}$$

Soit $\{A_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi :

$$\begin{cases} \mathbb{P}(A_n = 1) = p \\ \mathbb{P}(A_n = -1) = 1 - p = q \end{cases}$$

On considère le processus :

$$X_t = A_{\lfloor t \rfloor} f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

avec les mêmes notations que précédemment.

Ce processus n'est pas stationnaire puisque, pour t dans $[0, 1]$, on a :

$$\bar{t} = 0 \text{ et } \underline{t} = t$$

$$\text{donc : } X_t = A_0 f(t) \text{ et } \mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(A_0) f(t) = (2p - 1) f(t),$$

qui dépend de t . On le stationnarise en introduisant une phase aléatoire comme dans les exemples précédents. Soit Φ une variable aléatoire réelle v.a.r. uniformément répartie dans $[0, 1]$ et indépendante de la suite $\{A_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$. On considère le processus :

$$Y_t = X_{t+\Phi} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Ce processus est alors stationnaire et sa fonction d'autocorrélation peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} K(\tau) &= h[1 - (2p - 1)^2] \Lambda_h(\tau) + h(2p - 1)^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Lambda_h(\tau - k) \quad \forall \tau \in \mathbb{R} \\ &= K_1(\tau) + K_2(\tau) \end{aligned}$$

avec $\Lambda_h(\tau)$ fonction triangle :

$$\begin{cases} \Lambda_h(\tau) = \left(1 - \frac{|\tau|}{h}\right) \text{ pour } |\tau| \leq h \\ \Lambda_h(\tau) = 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$$

Pour le premier terme, un calcul classique de transformée de Fourier (ou une table) donne :

$$\widehat{\Lambda_h}(f) = h \sin_c(\pi f h)^2$$

Le second terme apparaît comme une fonction périodique de période 1. Plutôt que de chercher ses coefficients de Fourier, un calcul au sens des distributions donne le résultat très directement.

On notera \mathcal{F} la transformée de Fourier dans le calcul formel qui suit. On a (cf. [AF 145 § 3.4]) :

$$\mathcal{F}\left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} \Lambda_h(\tau - k)\right] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}[\Lambda_h(\tau - k)]$$

La translation dans la fonction se traduit sur la transformée de Fourier par une multiplication par l'exponentielle (cf. [AF 145 § 3.4]) :

$$\mathcal{F}\left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} \Lambda_h(\tau - k)\right] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-2i\pi f k} \mathcal{F}[\Lambda_h(\tau)]$$

$\mathcal{F}[\Lambda_h(\tau)]$ se calcule au sens des fonctions soit $\mathcal{F}[\Lambda_h(\tau)](f) = \widehat{\Lambda_h}(f)$. On a alors :

$$\mathcal{F}\left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} \Lambda_h(\tau - k)\right] = \widehat{\Lambda_h}(f) \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-2i\pi f k}$$

On utilise alors la décomposition en série du Fourier du peigne de Dirac (cf. [AF 145 § 3.5] avec $a = 1$) :

$$\Delta = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{2i\pi k x}$$

et donc

$$\mathcal{F}\left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} \Lambda_h(\tau - k)\right] = \widehat{\Lambda_h}(f) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k$$

La distribution de Dirac δ_k agit en prenant la valeur de la fonction en k (cf. [AF 144 § 2.4.1]) :

$$\widehat{\Lambda_h}(f) \delta_k = \widehat{\Lambda_h}(k) \delta_k$$

Finalement :

$$\begin{aligned} dS_2 &= (2p - 1)^2 h^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sin_c(\pi k h)^2 \delta_k \\ &= (2p - 1)^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \frac{\sin^2(\pi k h)}{\pi^2 k^2} \delta_k + h^2 (2p - 1)^2 \delta \end{aligned}$$

En résumé, la mesure spectrale de ce processus s'écrit :

$$dS(f) = h \sin_c(\pi f h)^2 df + (2p - 1)^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \frac{\sin^2(\pi k h)}{\pi^2 k^2} \delta_k + h^2 (2p - 1)^2 \delta$$

5.6 Biphase

C'est un processus assez analogue au précédent. On considère ici la fonction f suivante :

$$\begin{cases} f(t) = 1 \text{ si } t \in]0, 1/2[\\ f(t) = -1 \text{ si } t \in]1/2, 1[\end{cases}$$

et $\{A_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi :

$$\begin{cases} \mathbb{P}(A_n = 0) = p \\ \mathbb{P}(A_n = -1) = 1 - p = q \end{cases}$$

On considère le processus :

$$X_t = A_{\lfloor t \rfloor} f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

puis le processus stationnarisé :

$$Y_t = X_{t+\Phi} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

toujours avec les mêmes hypothèses sur la v.a.r. Φ .

La fonction d'autocorrélation du processus $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ admet l'expression suivante :

$$\begin{cases} \text{si } \tau \geq 1 & K(\tau) = (2p - 1)^2 (1 - 4\underline{\tau}) \text{ si } \underline{\tau} \in]0, 1/2[\\ & K(\tau) = (2p - 1)^2 (4\underline{\tau} - 3) \text{ si } \underline{\tau} \in]1/2, 1[\\ \text{si } \tau \in]1/2, 1[& K(\tau) = (\tau - 1) + (2p - 1)^2 (3\tau - 2) \\ \text{si } \tau \in]0, 1/2[& K(\tau) = 1 - 3\tau + (2p - 1)^2 (-\tau) \\ & \text{avec } K(-\tau) = K(\tau) \end{cases}$$

La partie périodique – en réalité 1-périodique – correspond au terme :

$$\begin{cases} K(\tau) = (2p - 1)^2 (1 - 4\underline{\tau}) \text{ si } \underline{\tau} \in]0, 1/2[\\ K(\tau) = (2p - 1)^2 (4\underline{\tau} - 3) \text{ si } \underline{\tau} \in]1/2, 1[\end{cases}$$

En introduisant la fonction :

$$\begin{cases} g(\tau) = (2p-1)^2(1+4\tau) \text{ si } \tau \in [-1/2, 0] \\ g(\tau) = (2p-1)^2(1-4\tau) \text{ si } \tau \in [0, 1/2] \end{cases}$$

cette partie périodique s'écrit :

$$K_2(\tau) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(\tau - k)$$

Notons qu'alors la partie intégrable définie pour $\tau \in [-1, 1]$ devient :

$$\begin{cases} K_1(\tau) = 1 - 3\tau + (2p-1)^2(-\tau) - (2p-1)^2(1-4\tau) \text{ si } \tau \in [0, 1/2] \\ \quad = (1-3\tau)[1 - (2p-1)^2] \text{ si } \tau \in [0, 1/2] \\ K_1(\tau) = (\tau-1) + (2p-1)^2(3\tau-1) - (2p-1)^2(4\tau-3) \text{ si } \tau \in]1/2, 1[\\ \quad = (\tau-1)[1 - (2p-1)^2] \text{ si } \tau \in]1/2, 1[\end{cases}$$

avec toujours $K_1(-\tau) = K_1(\tau)$

La densité du spectre à bandes s'obtient par transformée de Fourier :

$$s_1(f) = \int_{-1}^1 K_1(\tau) e^{-2i\pi f\tau} d\tau$$

soit :

$$s_1(f) = [1 - (2p-1)^2] \frac{\sin^4(\pi f/2)}{(\pi f/2)^2}$$

La partie périodique $K_2(\tau) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(\tau - k)$ s'obtient par le même argument que dans l'exemple précédent :

$$\mathcal{F}\left[\sum_{k \in \mathbb{Z}} g(\tau - k)\right] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{g}(k) \delta_k$$

Il suffit alors de calculer $\hat{g}(f)$ pour en déduire le spectre de raies. On montre facilement que :

$$\begin{cases} \hat{g}(k) = 2(2p-1)^2 \frac{(1+(-1)^k)}{\pi^2 k^2} \text{ pour } k \neq 0 \\ \hat{g}(k) = 0 \text{ pour } k = 0 \end{cases}$$

5.7 Processus PAM généralisé

Pour finir, on considère la situation très générale suivante. Soit $\{A_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite de v.a. à valeurs complexes de carré intégrable et stationnaire au sens large, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \mathbb{E}(A_n) = m_A \quad \forall n \in \mathbb{Z} \\ \mathbb{E}(A_n \overline{A_m}) = \gamma(n-m) \quad \forall n, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Soit g une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{C} telle que :

$$\int_{\mathbb{R}} |g(t)| dt < \infty \text{ et } \int_{\mathbb{R}} |g(t)|^2 dt < \infty$$

et enfin, soit un réel positif T (période). On considère le signal :

$$X_t = \sum_{n \in \mathbb{Z}} A_n g(t - nT) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

que l'on stationnarise en posant :

$$Y_t = \sum_{n \in \mathbb{Z}} A_n g(t - nT - \Phi) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

avec la v.a.r. Φ uniformément répartie dans $[0, T]$ et indépendante de la suite $\{A_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

Remarque : la série définissant Y_t est prise au sens de $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et converge dans cet espace. Il suffit en effet de vérifier que la série suivante :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}|A_n|^2 |g(t - nT - \Phi)|^2 < \infty$$

converge. Grâce à l'indépendance entre Φ et la suite $\{A_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, ce terme vaut :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}|A_n|^2 \mathbb{E}|g(t - nT - \Phi)|^2$$

On a $\mathbb{E}|A_n|^2 = \gamma(0)$ pour tout n et :

$$\mathbb{E}|g(t - nT - \Phi)|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |g(t - nT - u)|^2 du$$

puisque Φ suit la loi uniforme sur $[0, T]$. Par le changement de variable $v = t - nT - u$

$$\mathbb{E}|g(t - nT - \Phi)|^2 = \frac{1}{T} \int_{t-(n+1)T}^{t-nT} |g(v)|^2 dv$$

Les intervalles $[t - (n+1)T, t - nT]$ forment un recouvrement de \mathbb{R} quand n parcourt \mathbb{Z} de sorte que :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}|A_n|^2 |g(t - nT - \Phi)|^2 = \gamma(0) \frac{1}{T} \int_{\mathbb{R}} |g(v)|^2 dv < \infty$$

grâce aux hypothèses. De plus, cette convergence dans $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ assure (grâce au lemme de Loeve) les interversions entre somme de séries et espérance, que nous ferons systématiquement dans les calculs qui suivent.

Grâce à un calcul absolument identique au précédent, on montre que :

$$\mathbb{E}(Y_t) = m_A \frac{1}{T} \int_{\mathbb{R}} g(v) dv \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Pour la fonction d'autocorrélation, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_t \overline{Y_{t-\tau}}) &= \mathbb{E}\left[\sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} A_n \overline{A_{n+j}} g(t - nT - \Phi) \overline{g(t - \tau - (n+j)T - \Phi)}\right] \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}(A_n \overline{A_{n+j}}) \mathbb{E}[g(t - nT - \Phi) \overline{g(t - \tau - (n+j)T - \Phi)}] \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \gamma(-j) \mathbb{E}[g(t - nT - \Phi) \overline{g(t - \tau - (n+j)T - \Phi)}] \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \gamma(-j) \frac{1}{T} \int_{\mathbb{R}} g(v) \overline{g(v - \tau - jT)} dv \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \gamma(j) \frac{1}{T} \int_{\mathbb{R}} g(v) \overline{g(v - \tau + jT)} dv \end{aligned}$$

Finalement, on obtient la fonction d'autocorrélation suivante :

$$K(\tau) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \gamma(j) \frac{1}{T} \int_{\mathbb{R}} g(v) \bar{g}(v - \tau + jT) dv$$

La forme du spectre va dépendre des hypothèses sur les $\gamma(j)$.
Supposons tout d'abord que :

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\gamma(j)| < \infty \quad (21)$$

Grâce à la formule de Parseval-Plancherel [3], en posant :

$$\phi(v) = g(v - \tau + jT)$$

on a :

$$\int_{\mathbb{R}} g(v) \bar{g}(v - \tau + jT) dv = \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(w) \bar{\hat{g}}(w) dw$$

En utilisant les propriétés de la transformée de Fourier par rapport à la translation, on a :

$$\hat{\phi}(w) = \hat{g}(w) e^{-2i\pi(\tau - jT)w}$$

soit :

$$\int_{\mathbb{R}} g(v) \bar{g}(v - \tau + jT) dv = \int_{\mathbb{R}} |\hat{g}(w)|^2 e^{-2i\pi\tau w} e^{2i\pi jTw} dw$$

On a donc :

$$\begin{aligned} K(\tau) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \gamma(j) \frac{1}{T} \left[\int_{\mathbb{R}} |\hat{g}(w)|^2 e^{-2i\pi\tau w} e^{2i\pi jTw} dw \right] \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{T} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \gamma(j) e^{2i\pi jTw} \right] |\hat{g}(w)|^2 e^{-2i\pi\tau w} dw \end{aligned}$$

Grâce à la condition (21), la fonction :

$$f(w) = \frac{1}{T} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \gamma(j) e^{2i\pi jTw} |\hat{g}(w)|^2$$

est **intégrable** :

$$K(\tau) = K_1(\tau) = \int_{\mathbb{R}} f(w) e^{-2i\pi\tau w} dw$$

et le spectre à bandes a pour densité la fonction $f(w)$.

On va supposer maintenant que la condition sur les A_n porte sur les covariances. On a

$$\text{cov}(A_n, A_{n+j}) = R(j) = \gamma(j) - |m_A|^2$$

soit :

$$\gamma(j) = R(j) + |m_A|^2 \quad \forall j \in \mathbb{Z}$$

Supposons donc que :

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |R(j)| < \infty \quad (22)$$

Dans ce cas, la forme du spectre change. En effet, la fonction $f(w)$ n'est plus intégrable et on doit **décomposer** la fonction $K(\tau)$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} K(\tau) &= \frac{1}{T} \sum_{j \in \mathbb{Z}} R(j) \int_{\mathbb{R}} g(v) \bar{g}(v - \tau + jT) dv + \\ &\quad \frac{|m_A|^2}{T} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} g(v) \bar{g}(v - \tau + jT) dv \end{aligned}$$

Le premier facteur se traite comme précédemment et donne le spectre à bandes analogue à f en remplaçant $\gamma(j)$ par $R(j)$. Le second facteur, qui est T -périodique, va introduire un spectre de raies. Posons :

$$p(\tau) = \int_{\mathbb{R}} g(v) \bar{g}(v - \tau) dv$$

Alors ce second terme s'écrit :

$$\frac{|m_A|^2}{T} \sum_{j \in \mathbb{Z}} p(\tau - jT)$$

En prenant sa transformée de Fourier au sens des distributions comme on l'a fait dans les exemples précédents, on en déduit que celle-ci s'écrit :

$$\frac{|m_A|^2}{T} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \hat{p}\left(\frac{j}{T}\right) \delta_{\frac{j}{T}}$$

Pour calculer simplement $\hat{p}\left(\frac{j}{T}\right)$, on peut remarquer que :

$$p = g * \bar{g}_\sigma$$

avec $g_\sigma(x) = g(-x)$, symbole $*$ étant celui du produit de convolution.

La transformée de Fourier de la fonction p est alors [3] :

$$\hat{p}(w) = \hat{g}(w) \cdot \hat{\bar{g}}_\sigma(w) = \widehat{g(w)} \cdot \bar{\hat{g}}(w) = |\hat{g}(w)|^2$$

Finalement, le spectre de raies s'écrit :

$$dS_2 = \frac{|m_A|^2}{T} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| \hat{g}\left(\frac{j}{T}\right) \right|^2 \delta_{\frac{j}{T}}$$

Références bibliographiques

- [1] BONY (J.M.). – *Cours d'analyse. Théorie des distributions et analyse de Fourier*. Édition de l'École polytechnique – Paris (2001).
- [2] BREZIS (H.). – *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*. Dunod – Paris (1983).
- [3] GASQUET (C.) et WITOMSKI (P.). – *Analyse de Fourier et applications. Filtrage – Calcul*

- numérique – Ondelettes*. 354 p., Masson – Paris (1990).
- [4] LACAZE (B.). – *Processus aléatoires pour les communications numériques*. Collection Traitement du Signal – Hermès Science (2000).
- [5] LIONS (J.L.). – *Quelques méthodes de la résolution de problèmes aux limites non linéaires*. Dunod – Paris (1969).

Dans les Techniques de l'Ingénieur

- [6] SPITÉRI (P.). – *Méthode des éléments finis*. [AF 503], [AF 504], [AF 505]. Base documentaire « Mathématiques pour l'ingénieur » (2002).

Gagnez du temps et sécurisez vos projets en utilisant une source actualisée et fiable



RÉDIGÉE ET VALIDÉE
PAR DES EXPERTS




MISE À JOUR
PERMANENTE



100 % COMPATIBLE
SUR TOUS SUPPORTS
NUMÉRIQUES



SERVICES INCLUS
DANS CHAQUE OFFRE

- + de 340 000 utilisateurs chaque mois
- + de 10 000 articles de référence et fiches pratiques
- Des Quiz interactifs pour valider la compréhension 

SERVICES ET OUTILS PRATIQUES



Questions aux experts*

Les meilleurs experts techniques et scientifiques vous répondent



Articles Découverte

La possibilité de consulter des articles en dehors de votre offre



Dictionnaire technique multilingue

45 000 termes en français, anglais, espagnol et allemand



Archives

Technologies anciennes et versions antérieures des articles



Info parution

Recevez par email toutes les nouveautés de vos ressources documentaires

*Questions aux experts est un service réservé aux entreprises, non proposé dans les offres écoles, universités ou pour tout autre organisme de formation.

Les offres Techniques de l'Ingénieur



INNOVATION

- Éco-conception et innovation responsable
- Nanosciences et nanotechnologies
- Innovations technologiques
- Management et ingénierie de l'innovation
- Smart city – Ville intelligente



MATÉRIAUX

- Bois et papiers
- Verres et céramiques
- Textiles
- Corrosion – Vieillessement
- Études et propriétés des métaux
- Mise en forme des métaux et fonderie
- Matériaux fonctionnels. Matériaux biosourcés
- Traitements des métaux
- Élaboration et recyclage des métaux
- Plastiques et composites



MÉCANIQUE

- Frottement, usure et lubrification
- Fonctions et composants mécaniques
- Travail des matériaux – Assemblage
- Machines hydrauliques, aérodynamiques et thermiques
- Fabrication additive – Impression 3D



ENVIRONNEMENT – SÉCURITÉ

- Sécurité et gestion des risques
- Environnement
- Génie écologique
- Technologies de l'eau
- Bruit et vibrations
- Métier : Responsable risque chimique
- Métier : Responsable environnement



ÉNERGIES

- Hydrogène
- Ressources énergétiques et stockage
- Froid industriel
- Physique énergétique
- Thermique industrielle
- Génie nucléaire
- Conversion de l'énergie électrique
- Réseaux électriques et applications



GÉNIE INDUSTRIEL

- Industrie du futur
- Management industriel
- Conception et production
- Logistique
- Métier : Responsable qualité
- Emballages
- Maintenance
- Traçabilité
- Métier : Responsable bureau d'étude / conception



ÉLECTRONIQUE – PHOTONIQUE

- Electronique
- Technologies radars et applications
- Optique – Photonique



TECHNOLOGIES DE L'INFORMATION

- Sécurité des systèmes d'information
- Réseaux Télécommunications
- Le traitement du signal et ses applications
- Technologies logicielles – Architectures des systèmes
- Sécurité des systèmes d'information



AUTOMATIQUE – ROBOTIQUE

- Automatique et ingénierie système
- Robotique



INGÉNIERIE DES TRANSPORTS

- Véhicule et mobilité du futur
- Systèmes aéronautiques et spatiaux
- Systèmes ferroviaires
- Transport fluvial et maritime



MESURES – ANALYSES

- Instrumentation et méthodes de mesure
- Mesures et tests électroniques
- Mesures mécaniques et dimensionnelles
- Qualité et sécurité au laboratoire
- Mesures physiques
- Techniques d'analyse
- Contrôle non destructif



PROCÉDÉS CHIMIE – BIO – AGRO

- Formulation
- Bioprocédés et bioproductions
- Chimie verte
- Opérations unitaires. Génie de la réaction chimique
- Agroalimentaire



SCIENCES FONDAMENTALES

- Mathématiques
- Physique Chimie
- Constantes physico-chimiques
- Caractérisation et propriétés de la matière



BIOMÉDICAL – PHARMA

- Technologies biomédicales
- Médicaments et produits pharmaceutiques



CONSTRUCTION ET TRAVAUX PUBLICS

- Droit et organisation générale de la construction
- La construction responsable
- Les superstructures du bâtiment
- Le second œuvre et l'équipement du bâtiment
- Vieillessement, pathologies et réhabilitation du bâtiment
- Travaux publics et infrastructures
- Mécanique des sols et géotechnique
- Préparer la construction
- L'enveloppe du bâtiment
- Le second œuvre et les lots techniques