INSA Département GM : TP quadrature et équation d'Helmholtz
(A. Tonnoir 2022-2023)

Dans ce TP, on se propose d'étudier plusieurs méthodes de quadrature pour évaluer numériquement une intégrale. Dans une première partie, nous nous intéresserons à l'implémentation de ces méthodes et à illustrer leurs propriétés de convergence. Dans une seconde partie, nous nous intéressons à l'utilisation de ces formules pour résoudre l'équation d'Helmholtz dans un demi-plan homogène. Cela permettra notamment d'illustrer le phénomène d'interférence.

Pour le **30 avril (2023)**, vous déposerez sur moodle **vos codes et votre rapport au format pdf** dans un dossier **.zip**. Dans vos rapports, n'incluez pas vos codes Python, ne recopiez pas le contenu du TP (les questions ou commentaires) et rédigez (si possible) vos rapports en latex (vous pouvez utiliser Lyx). Enfin, je vous invite à faire preuve d'esprit critique et de curiosité. N'hésitez pas à tester des nouvelles choses, même non demandées dans dans le TP !

Intégrale d'une fonction f

Dans cette première partie, nous allons chercher à calculer numériquement :

$$I \;=\; \int_a^b f(x)dx$$

où f est une fonction continue donnée. Pour ce faire, on se propose d'utiliser et comparer les formules de quadrature suivante : la formule des trapèzes, la formules de Gauss(-Legendre) à deux points et la *formule d'Hermite* :

$$\int_{-1}^{1} f(\hat{x})d\hat{x} \simeq A_0 f(0) + B_{-1}f'(-1) + B_1 f'(1)$$

(Théorie)

1. Sur la méthode d'Hermite :
   a) Déterminer A_0, B_{-1} et B_1 pour que la formule soit exacte sur $\mathbb{P}_k$ avec k le plus grand possible.
   b) Déduire l'ordre de la méthode d'Hermite.
2. a) En posant $h = \frac{b-a}{p}$ avec $p \in \mathbb{N}^*$ le nombre d'intervalle, rappeler les formules composites associées aux trois méthodes.
   b) Expliquer comment les implémenter efficacement.

(Code)

1. a) Compléter dans le fichier *algo.py* les fonctions *quadTrap*, *quadGauss* et *quadHerm* implémentant les trois méthodes de quadrature (composites) considérée.
   b) Dans le fichier *data.py*, compléter la fonction f pour implémenter $f(x) = \cos(2k\pi x)$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ fixé dans la fonction ainsi que la dérivée df.
   c) Exécuter le programme et tester différentes valeurs de p (le nombre d'intervalles) et de k.
2. Dans la partie II du fichier *main.py*, compléter la solution exacte du calcul de I en considérant $a = 0$, $b = 0.75$ et $f(x) = \cos(2k\pi x)$. Tester l'analyse de convergence (attention, la valeur de k devra être la même dans *main.py* et *data.py*). Commenter les résultats.

Ondes et équation d'Helmholtz

Dans cette deuxième partie du TP, nous nous intéresserons au problème suivant : calculer la solution de l'équation d'Helmholtz

$$\left| \begin{array}{lll} -\Delta u - (\omega^2 + i\varepsilon)u = 0 & \text{dans} & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \\ u = \delta(x, y - y_0) & \text{sur} & \{0\} \times \mathbb{R}, \end{array} \right.$$

où δ est la masse de Dirac en $(0, 0)$, ω la pulsation (fréquence de l'onde) et $\varepsilon \geq 0$ (généralement petit) représente l'atténuation du milieu. La Dirac représente une source ponctuelle positionné en y_0. À l'aide de la transformée de Fourier, on peut montrer que

$$u^0(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi(y-y_0)} e^{i\sqrt{\omega^2 + i\varepsilon - \xi^2}} d\xi, \quad \forall x > 0, y \in \mathbb{R}.$$

L'idée sera donc de calculer cette intégrale à l'aide d'une formule de quadrature en différentes valeurs de (x, y). Comme les bornes sont infinis, il faudra par contre restreindre l'intégrale entre $[-T, T]$.

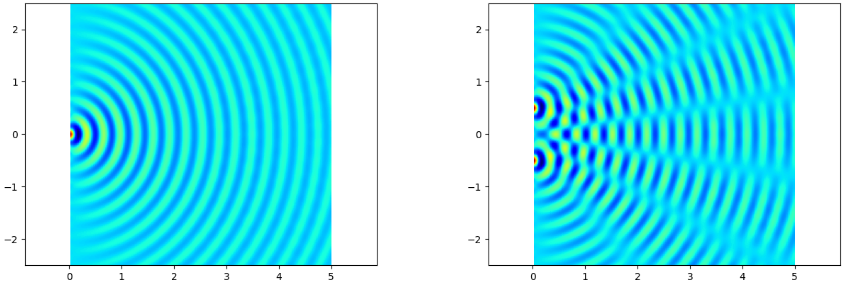

FIGURE 1 – Exemple de résultats à obtenir : à gauche, une source ponctuelle, à droite, deux sources ponctuelles.

(Théorie)

1. Pour tout $x > 0$ fixé, justifier qu'on tronque l'intégrale à $T > \omega$. Essayer de donner une estimation d'erreur.
2. Montrer que pour tout $x > 0$ ($y \in \mathbb{R}$) et $\varepsilon > 0$, la fonction u est C^∞.
3. **(Bonus)** Démontrer la formule intégrale obtenue ci-dessus et généraliser là au cas d'une donnée $u = f$ sur $\{x = 0\} \times \mathbb{R}$.

(Code)

1. Dans la partie III du fichier *main.py*, compléter la *lambda* fonction *myf* correspondant à l'intégrande ainsi que la dérivée *mydf*.
2. Tester les différentes méthodes de quadrature et différents choix de paramètre pour le calcul de u dans le demi-plan (pulsation ω, nombre d'intervalle p, l'absorption ε...).
3. a) Dans le cas où on a deux sources ponctuelles en y_0 et y_1, la solution s'exprime simplement comme $u^0 + u^1$. Modifier le programme *main.py* pour pouvoir traiter ce cas et commenter les résultats.

   b) **(Bonus)** Dans le cas où on a une donnée du type $u = f$ sur $\{x = 0\} \times \mathbb{R}$, implémenter la méthode pour représenter la solution. Illustrer le phénomène de diffraction par une fente plus ou moins mince.

Quelques remarques de conclusion

Au travers de ce TP, nous avons pu voir une application du calcul numérique d'intégrale pour résoudre une EDP (l'équation d'Helmholtz). La technique présentée ici, via la transformée de Fourier, fonctionne bien car le milieu est homogène et sans obstacle. Dans le cas de domaine plus complexe, on peut généraliser certaines idées et cela conduit à la méthode dite des équations intégrales. Sur l'aspect historique, soulignons que la transformée de Fourier (comme les séries) a été introduite par J. Fourier pour résoudre une EDP, celle de la chaleur. C'est un outil fondamentale de l'analyse comme vous avez pu le voir en analyse fonctionnelle notamment.

Ce TP a aussi été l'occasion de découvrir l'équation d'Helmholtz. Cette équation, issue de l'équation de d'Alembert, décrit la propagation d'une onde en régime dit harmonique (i.e. périodique en temps). La résolution de cette équation intervient dans de nombreuses applications comme le sonar, le Controle Non Destructif par ondes ultra-sonores, la prospection en géophysique ou même en météorologie.

Pour finir, mentionnons que le calcul de l'intégrale u^0 pour de grande valeur de x conduit à une intégrale très oscillante. Pour palier cette difficulté, une technique consiste à exploiter la méthode de la phase stationnaire pour calculer plus efficacement l'intégrale.