

Thème 17: Problèmes d'ordonnancement

17.1 Introduction

De quoi s'agit-il ? Il s'agit de savoir planifier l'exécution de tâches qui ont une certaine durée, et qui ont entre elles des relations d'antériorité (par exemple, dans les révisions qu'il faut faire avant de passer un examen, il y a des chapitres qu'il faut revoir avant d'autres).

Exemple : L'entreprise Oméga a procédé à la définition d'un certain nombre de tâches à effectuer. On a rempli la colonne « antériorité » avec les tâches qui doivent être exécutées avant celle considérée. Une évaluation du temps de chaque tâche a également été proposée.

Tâche	Durée en semaines	Antériorité
A	3	
B	4	A
C	5	A
D	2	A
E	2	B, C
F	3	D

Proposer un agenda des différentes tâches, en indiquant le nombre de semaines minimum puis maximum à entrevoir avant la fin des différentes tâches.

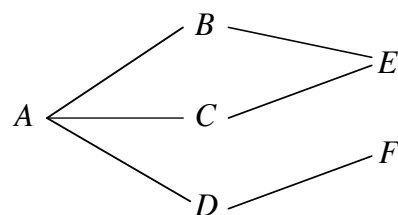
Il existe plusieurs algorithmes possibles pour résoudre les problèmes d'ordonnancement. Les deux plus fréquemment utilisées sont la méthode PERT (méthode américaine) et la méthode MPM (méthode française datant de 1960). Concentrons-nous sur cette dernière.

*Méthode française MPM
(Méthode Potentiel Métra)*

1) Le graphe de niveau

À partir du tableau, on réalise un premier graphe appelé **graphe de niveau** dont les sommets sont les tâches et qui permet de mettre en évidence les antériorités :

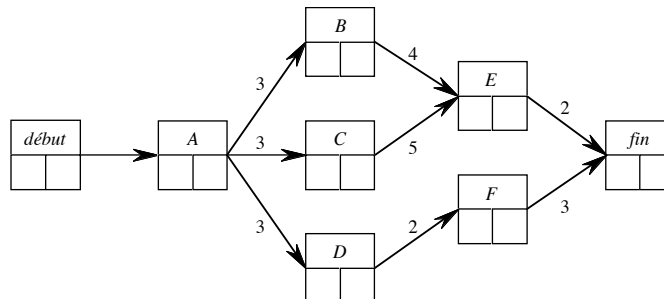
niveau 1 niveau 2 niveau 3



2) Le graphe orienté

On crée le **graphe orienté** dont les sommets sont les tâches ; on crée deux tâches fictives qui sont les tâches « début » et « fin » (sous-entendu « du processus »).

Les arcs sont les relations d'antériorité immédiate ; ils sont valués par la durée de la tâche source.



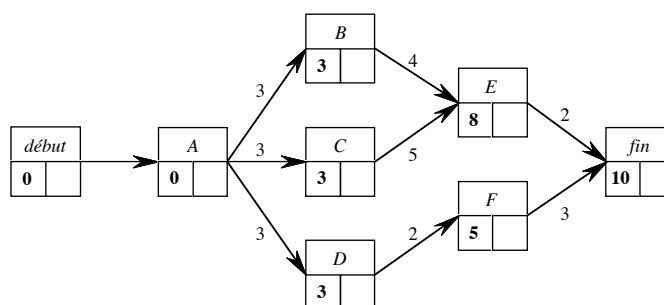
Chaque sommet comporte 3 zones qui contiennent respectivement :

Nom de la tâche	
Début au plus tôt	Début au plus tard

3) Dates « au plus tôt »

On traite les sommets par niveaux en partant du début.

Pour chaque sommet i on note la date t_i qui est la longueur du plus **long** chemin de la tâche initiale à la tâche i .



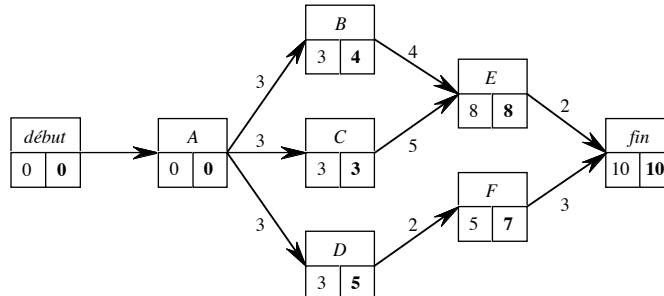
Le travail ne pourra donc pas être terminé avant 10 semaines.

La tâche E ne pourra pas commencer avant 8 semaines, la tâche F avant 5 semaines, etc.

4) Dates « au plus tard »

On traite les sommets en partant de la fin (en marquant **10** pour le sommet « fin »).

Pour chaque sommet on note la date t_i^* qui est la longueur du plus **court** chemin de la tâche i à la tâche « fin ».



Pour effectuer l'ensemble des tâches en 10 semaines, il faudra avoir commencé la tâche E au bout de 8 semaines, commencé la tâche F au bout de 7 semaines, etc.

Exercice 17.1 On considère un ensemble de tâches proposé dans le tableau ci-dessous :

Tâches	Antériorité	Durée (jours)
A	—	3
B	—	9
C	—	5
D	A	8
E	B	4
F	B	7
G	B	20
H	C, F	6
I	D, E	5

- Proposer le graphe de niveau.
- Proposer le graphe orienté.
- Compléter les dates *au plus tôt* et *au plus tard*.

Suite de l'exemple : 5) Tâches et chemins critiques

- Il y a des **tâches critiques**, celles pour lesquelles on a $t_i = t_i^*$:
la tâche E devra obligatoirement débuter durant la 8^e semaine (ni plus ni moins) pour que le processus soit achevé au bout des 10 semaines.
- Les tâches critiques définissent un ou plusieurs **chemins critiques** composés de tâches dont l'exécution ne doit connaître aucun retard pour que le projet soit achevé au plus tôt.

Par contre, il y a de la latitude pour les tâches qui ne sont pas critiques : la tâche F pourra être démarrée entre la semaine 5 et la semaine 7.

De même, il y a un chemin critique : $A - C - E - \text{fin}$ (il y a toujours un chemin critique dans un graphe MPM).

6) Marge totale

On appelle **marge totale** le retard maximum que peut avoir une tâche sans retarder la fin du projet (les tâches critiques n'ont pas de marge). On l'obtient en calculant $t_i^* - t_i$.

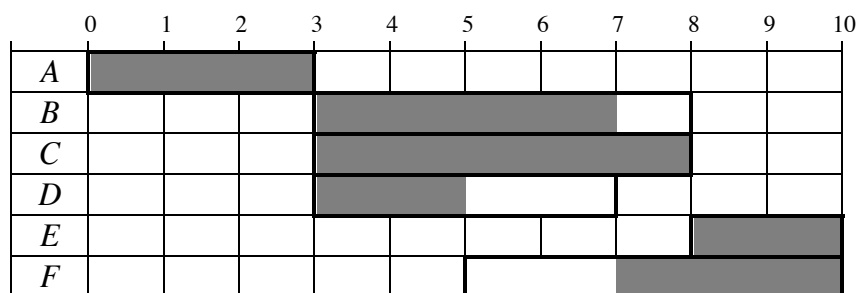
- Dans notre exemple, on obtient le tableau suivant :

Tâche	Marge totale
A	0
B	1
C	0
D	2
E	0
F	2

Exercice 17.2 Proposer le tableau des marges totales des tâches de l'exercice précédent.

Exemple fin : 7) Diagramme de Gantt

Il s'agira de représenter graphiquement le déroulement du projet ; les tâches à effectuer sur les plages à disposition durant les 10 semaines (numérotées de 0 à 9).



17.2 Divers exercices

Exercice 17.3 Proposer le diagramme de Gantt de la planification suivante :

Tâche	Durée en semaines	Antériorité
A	3	B
B	8	-
C	2	A, B, F
D	6	-
E	5	B, D
F	4	B

- Proposer le graphe de niveau.
- Proposer le graphe orienté.
- Compléter les dates *au plus tôt* et *au plus tard*.
- Déterminer les marges totales de chaque tâche.
- Proposer le diagramme de Gantt.

Exercice 17.4 La mise en exploitation d'un nouveau gisement minier demande la réalisation d'un certain nombre de tâches. Le tableau suivant représente ces différentes tâches avec leurs relations d'antériorité.

Tâche	Description	Durée (en jours)	Tâches antérieures
A	obtention d'un permis d'exploitation	120	-
B	établissement d'une piste de 6 km	180	A
C	transport et installation à pied d'œuvre de 2 sondeuses	3	B
D	création de bâtiments provisoires pour le bureau des plans, le logement des ouvriers sondeurs	30	B
E	goudronnage de la piste	60	B
F	adduction d'eau	90	D
G	campagne de sondage	240	C, D
H	forage et équipement de trois puits	180	E, F, G
I	transport et installation au fond du matériel d'exploitation	30	J, H
J	construction de bureaux et logements, ouvriers et ingénieurs	240	E, F, G
K	tracé et aménagement du fond	360	J, H
L	construction d'une laverie	240	J, H

- Déterminer les dates au plus tôt et au plus tard de chaque tâche.
- Déterminer le temps minimum de réalisation de l'ensemble.
- Proposer un chemin critique.
- Préciser les marges totales de chaque tâche.

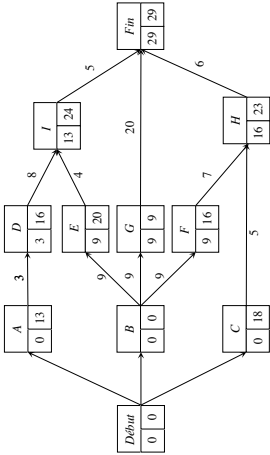
Exercice 17.5 Un producteur de cinéma est confronté au problème de planning de son prochain film selon les tâches suivantes :

Tâche	description	durée (j)	antériorités
<i>A</i>	écriture du scénario	30	-
<i>B</i>	choix et recrutement des comédiens	12	15 jours après le début de <i>A</i>
<i>C</i>	choix du lieu de tournage	8	20 jours après le début de <i>A</i>
<i>D</i>	découpage technique	4	<i>A</i> et <i>C</i> doivent être terminées
<i>E</i>	préparation des décors	7	<i>C</i> et <i>D</i> doivent être terminées
<i>F</i>	tournage des extérieurs	10	<i>A</i> , <i>B</i> , <i>C</i> et <i>D</i> doivent être terminées
<i>G</i>	tournage des intérieurs	12	<i>D</i> , <i>E</i> et <i>F</i> doivent être terminées
<i>H</i>	synchronisation	3	<i>F</i> et <i>G</i> doivent être terminées
<i>I</i>	montage	14	<i>H</i> doit être terminée
<i>J</i>	accompagnement sonore	7	ne peut commencer que 3 jours après le début de <i>I</i> et après la fin de <i>H</i>
<i>K</i>	mixage	6	<i>I</i> et <i>J</i> doivent être terminées
<i>L</i>	tirage de la copie zéro	1	ne peut commencer que 2 jours après la fin de <i>K</i>

- Déterminer les dates au plus tôt et les dates au plus tard de chaque tâche.
- Déterminer le temps minimum de réalisation de l'ensemble.
- Proposer un chemin critique.
- Préciser les marges totales de chaque tâche.

Quelques réponses : Thème 17

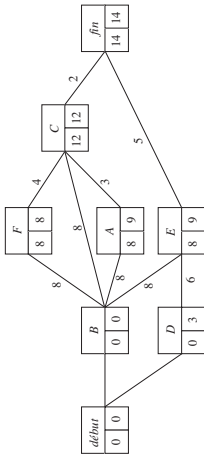
Exercice 17.1: a) Le graphe de niveau non proposé
b) et c) On obtient le graphe orienté complété:



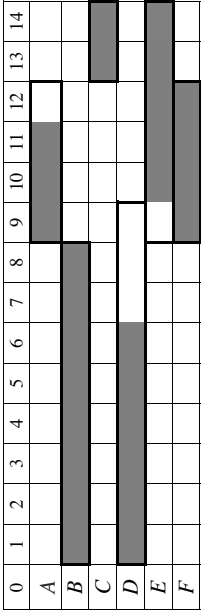
Exercice 17.2:

Tâches	Marges
A	13
B	0
C	18
D	13
E	11
F	7
G	0
H	7
I	11

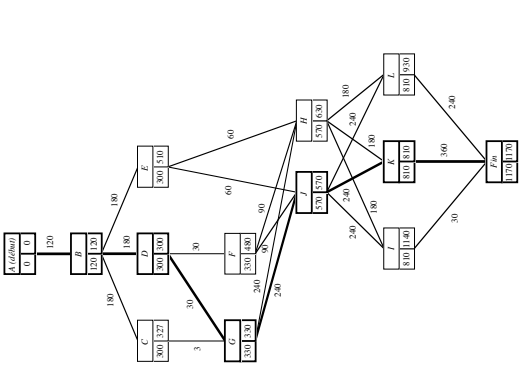
Exercice 17.3: Après avoir effectué le graphe orienté (de gauche à droite) :



On propose le diagramme de Gantt :



Exercice 17.4:



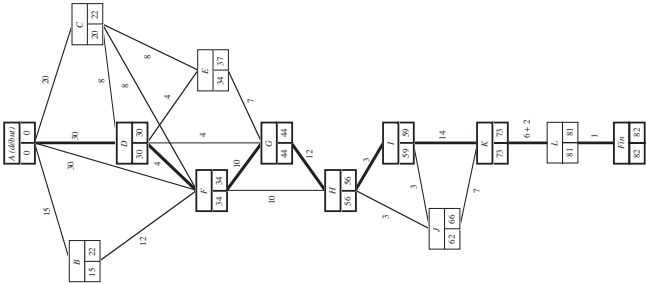
a) cf. ci-contre

b) 1170 jours

c) Mis en gras ci-contre

Tâche	Marge tot.
A	0
B	0
C	27
D	0
E	210
F	150
G	0
H	60
I	330
J	0
K	0
L	120

Exercice 17.5:



a) cf. ci-contre

b) 82 jours

c) Mis en gras ci-contre

Tâche	Marge tot.
A	0
B	7
C	2
D	0
E	3
F	0
G	0
H	0
I	0
J	4
K	0
L	0