Convolution

Le produit de convolution de 2 signaux $x(t)$ et $y(t)$ est donné par

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau$$

En faisant le chgt de variable $\theta = t - \tau$ on a

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\theta) y(\theta) d\theta$$

- Le produit de convolution est associatif et commutatif.
- La dirac est l'élément neutre de la convolution.

$$x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) x(t-\tau) d\tau = x(t)$$

Transformé de Fourier inverse

$$x(t) \xrightarrow{TF} X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2\pi j f t} dt$$

$$\downarrow TF^{-1}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{-2\pi j f t} df = x(t)$$

La transformé de Fourier d'un produit de convolution est le produit des transformés de Fourier.

$$x(t) * y(t) \xrightarrow{TF} X(f) Y(f)$$

Le transformé de Fourier des produits de signal est la convolution des transformé de Fourier :

$$x(t) y(t) \xrightarrow{TF} X(f) * Y(f)$$

Corrélation

1) Inter-corrélation

L'intercorrélation de 2 signaux $x(t)$ et $y(t)$ est donné par la fonction

conjugué

$$R_{xy}(t) = x(t) * y^*(-t)$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, y^*(\tau - t)\, d\tau$$
$$\xrightarrow{TF} X(f)\, Y^*(f)$$

2) Auto-corrélation

La corrélation d'un signal (auto-corrélation) est la fonction

$$R_x(t) = x(t)\, x^*(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, x^*(\tau - t)\, d\tau$$

On parle également de degrés de similitude entre $x(t)$ et $x(\tau - t)$

$$\rightarrow R_x(t) = x(t)\, x^*(-t) \xrightarrow{TF} S_x(f) = |X(f)|^2$$

$S_x(f)$ est appelée densité spectrale d'énergie

$$|X(f)|^2 \xrightarrow{TF^{-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 e^{2\pi j f t}\, df = R_x(t)$$

On a donc

$$\begin{cases} R_x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, x(\tau - t)\, d\tau & \text{par déf} \\ R_x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 e^{2\pi j f t}\, df & \text{par transformé F inverse.} \end{cases}$$

On évalue alors en 0 :

$$\begin{cases} R_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, x^*(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)|^2\, d\tau \\ R_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2\, df \end{cases}$$

Nous avons alors le théorème de Parseval

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)|^2\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2\, df$$

$\Rightarrow$ passage du domaine temporel au domaine fréquentiel, aucune perte d'énergie. et réciproquement.

Exemple (Application du théorème de Parseval)

Soit $f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\text{sinc } Bt)^2\, dt$

Rappel
$$\text{rect}_T(t) \xrightarrow{TF} 2T \text{ sinc}(2Tf)$$
$$2T \text{ sinc}(2Tt) \xrightarrow{TF} \text{Rect}_T(f)$$

Ainsi $\text{sinc}(Bt) \xrightarrow{TF} \frac{1}{B} \text{rect}_{\frac{B}{2}}(f)$

Par le théorème de Parseval :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\text{sinc } Bt)^2\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{B} \text{rect}_{\frac{B}{2}}(f)\right)^2 df$$
$$= \frac{1}{B^2} \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} df = \frac{1}{B}$$

Exemple (Corrélation)

$$x(t) = rect_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leq T \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$R_x(t) = x(t) * x^*(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, x(\tau - t)\, d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} rect_T(\tau)\, rect(\tau - t)\, d\tau$$

$$= \int_{-T}^{T} rect_T(\tau - t)\, d\tau$$

Or $rect_T(\tau - t) = 1 \iff |\tau - t| \leq T$

$\iff -T \leq \tau - t \leq T \quad (*)$

$\iff t - T \leq \tau \leq T + t$

Donc

$$R_x(t) = \int_{\max(-T,\, t-T)}^{\min(T,\, t+T)} d\tau$$

<u>si $t < 0$</u>

$$R_x(t) = \int_{-T}^{T+t} d\tau = 2T + t$$

<u>si $t \geq 0$</u>

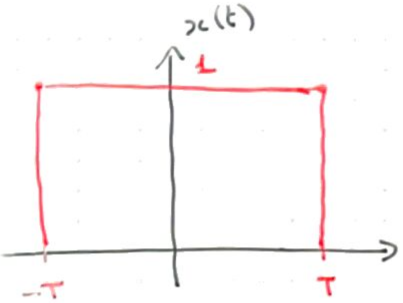
$$R_x(t) = \int_{t-T}^{T} d\tau = 2T - t$$

De plus, par $(*)$ $-\tau - T \leq -t \leq T - \tau \iff \tau - T \leq t \leq T + \tau$

et $-T \leq \tau \leq T$

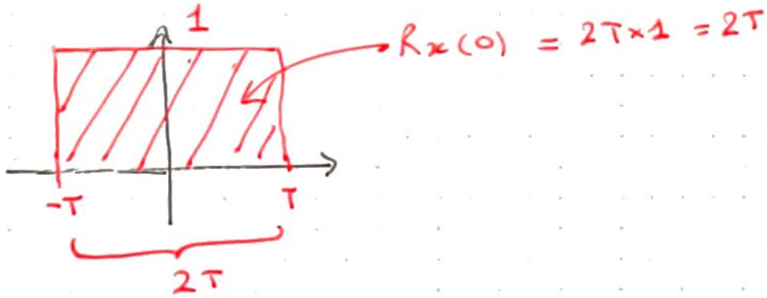
Donc $-2T \leq t \leq 2T$

Ainsi $R_x(t) = (2T - |t|)\, rect_{2T}(t)$



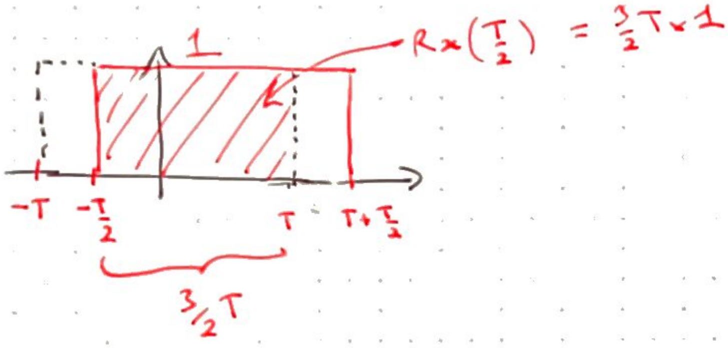
<u>décalage 0</u>

$$R_x(0) = 2T\,\mathrm{rect}_{2T}(0) = 2T$$



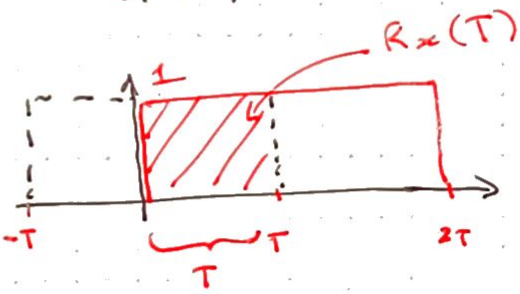
<u>décalage $t = \frac{T}{2}$</u>

$$R_x\left(\frac{T}{2}\right) = \left(2T - \frac{T}{2}\right)\mathrm{rect}_{2T}\left(T/2\right) = \frac{3}{2}T$$



<u>décalage $t = T$</u>

$$R_x(T) = (2T - T)\,\mathrm{rect}_{2T}(T) = T$$



<u>décalage $t = 2T$</u>

$$R_x(2T) = 0$$