

MMSN

# Analyse numérique 2

Chapitre 3 :

Résolution numérique d'EDO

Cours 10-11-12-13-14

GM 3 Année 2022 - 2023

Contact : A. Tonnoir

antoine.tonnoir@insa-rouen.fr

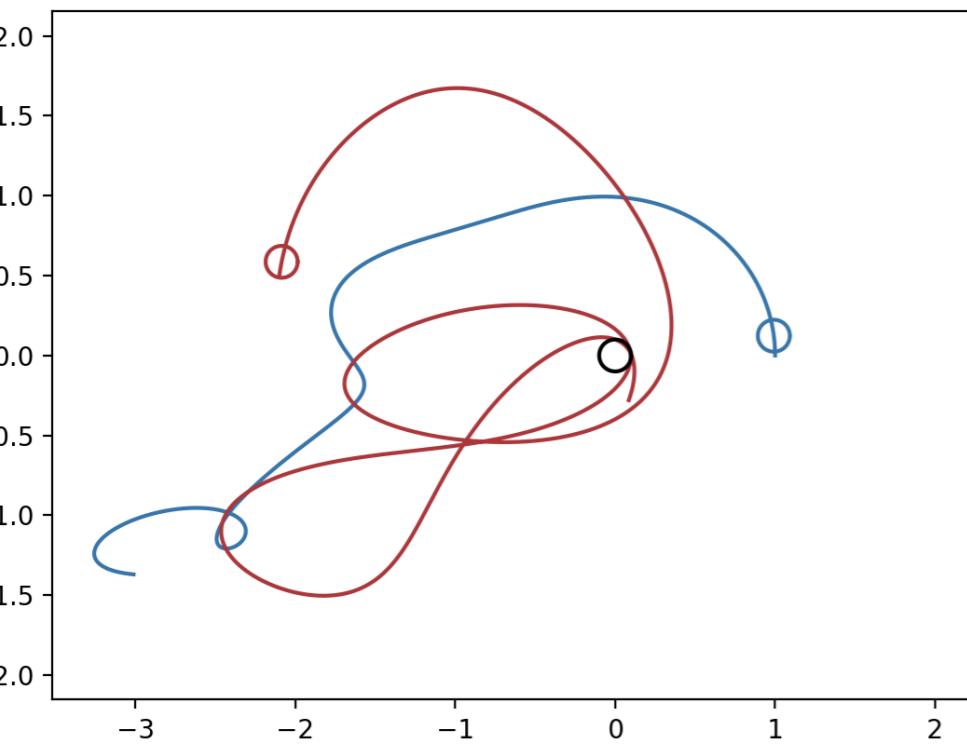
# Au programme (Chapitre 3)

Objectif :

Étant donné  $t_0 \in [a, b]$ , déterminer numériquement la solution d'un système d'EDO :  $\begin{cases} \underline{y}'(t) = \underline{f}(t, \underline{y}(t)), & t \in [a, b] \\ \underline{y}(t_0) = \underline{y}_0 \end{cases}$

Exemples d'application : ☺ Mécanique (céleste)

$$m\underline{x}''(t) = \underline{F}$$



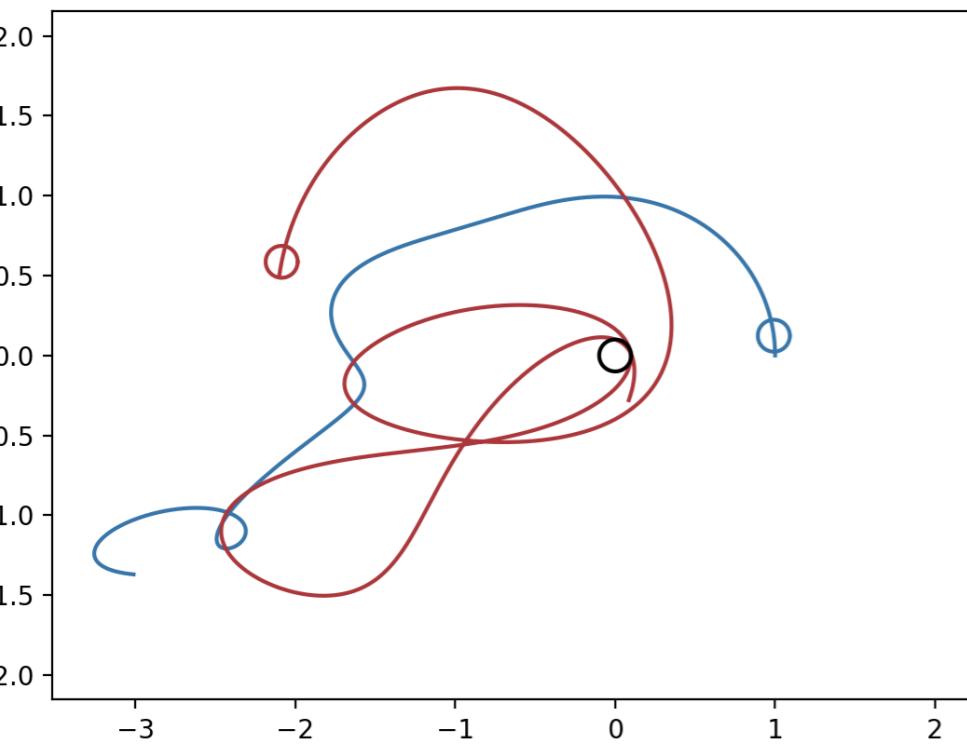
# Au programme (Chapitre 3)

Objectif :

Étant donné  $t_0 \in [a, b]$ , déterminer numériquement la solution d'un système d'EDO :  $\begin{cases} \underline{y}'(t) = \underline{f}(t, \underline{y}(t)), & t \in [a, b] \\ \underline{y}(t_0) = \underline{y}_0 \end{cases}$

Exemples d'application : ☺ Mécanique (céleste)

$$m\underline{x}''(t) = \underline{F}$$

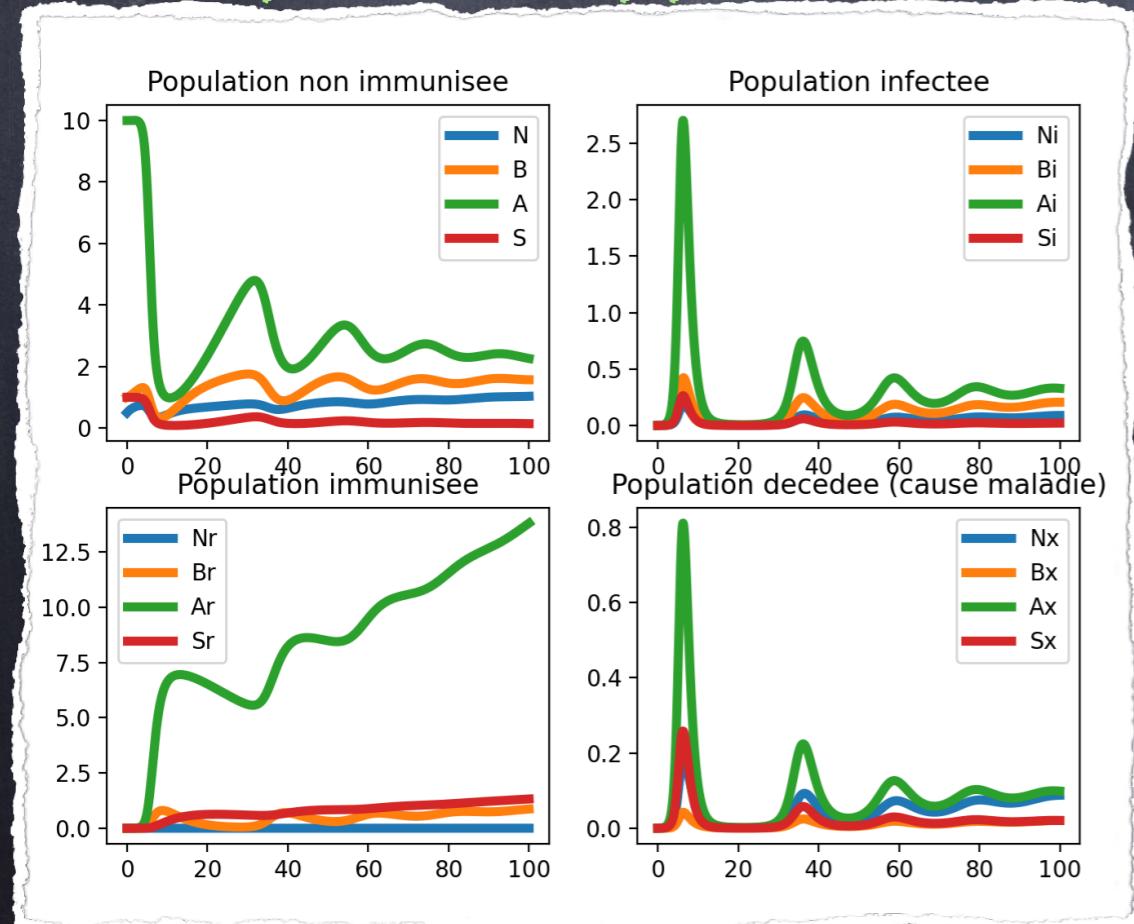


# Au programme (Chapitre 3)

Objectif :

Étant donné  $t_0 \in [a, b]$ , déterminer numériquement la solution d'un système d'EDO :  $\begin{cases} \underline{y}'(t) = \underline{f}(t, \underline{y}(t)), & t \in [a, b] \\ \underline{y}(t_0) = \underline{y}_0 \end{cases}$

Exemples d'application : ☺ Mécanique



☺ Modèle en épidémiologie

$$\begin{bmatrix} S' \\ I \\ R' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta SI \\ \beta SI - \gamma I \\ \gamma I \end{bmatrix}$$

# Au programme (Chapitre 3)

Objectif :

Étant donné  $t_0 \in [a, b]$ , déterminer numériquement la solution d'un système d'EDO :  $\begin{cases} \underline{y}'(t) = \underline{f}(t, \underline{y}(t)), & t \in [a, b] \\ \underline{y}(t_0) = \underline{y}_0 \end{cases}$

Plan :

I. Le théorème de Cauchy-Lipschitz

II. Les méthodes à 1-pas

III. Les méthodes multi-pas

IV. Quelques extensions

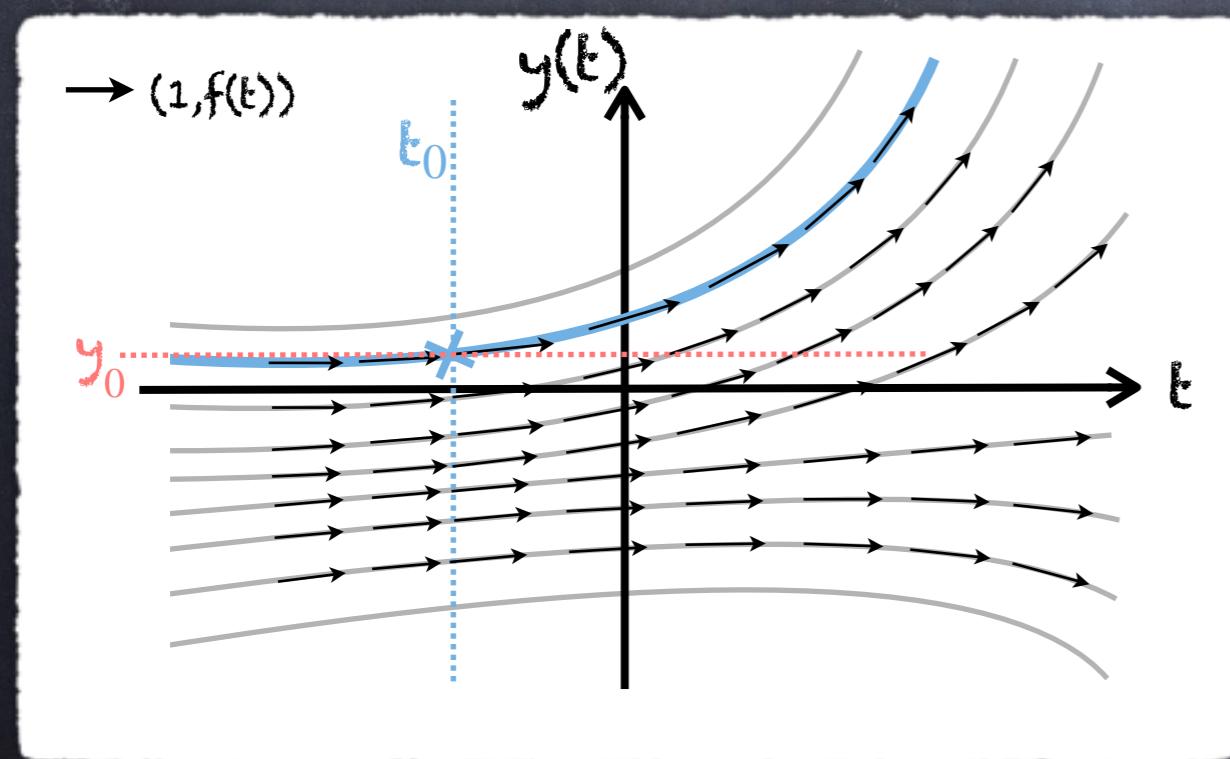
# I. Le théorème de Cauchy-Lipschitz

## 1.1 Définition (pb. de Cauchy)

Étant donné  $t_0 \in [a, b]$ ,  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction continue, trouver  $\underline{y}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction  $C^1$  t.q.

$$\begin{cases} \underline{y}'(t) = \underline{f}(t, \underline{y}(t)), & t \in [a, b] \\ \underline{y}(t_0) = \underline{y}_0 \end{cases}$$

Illustration dans le cas  $n=1$  :



# I. Le théorème de Cauchy-Lipschitz

## 1.1 Définition (pb. de Cauchy)

Étant donné  $t_0 \in [a, b]$ ,  $\underline{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction continue, trouver  $\underline{y} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction  $C^1$  t.q.

$$\begin{cases} \underline{y}'(t) = \underline{f}(t, \underline{y}(t)), & t \in [a, b] \\ \underline{y}(t_0) = \underline{y}_0 \end{cases}$$

## 1.3 Définition (Fonction Lipschitz)

On dit qu'une fonction  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est (globalement) Lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable s'il existe  $L > 0$  t.q. :

$$\forall t \in [a, b], \forall (\underline{y}, \underline{z}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \|\underline{f}(t, \underline{y}) - \underline{f}(t, \underline{z})\| \leq L \|\underline{y} - \underline{z}\|$$

# I. Le théorème de Cauchy-Lipschitz

## 1.3 Théorème (de Cauchy-Lipschitz)

Si  $f$  est continue et Lipschitzienne par rapport à sa 2ème variable alors le problème de Cauchy admet une unique solution.

(Rappel de la) Preuve (dans le cas  $n=1$ ) :

Point de départ :  $y$  sol. ssi  $y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$

Unicité : Soient  $y_1$  et  $y_2$  deux solutions du problème de Cauchy, alors on a :

$$\left| y_1(t) - y_2(t) \right| \leq \int_{t_0}^t \left| f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s)) \right| ds$$

# I. Le théorème de Cauchy-Lipschitz

## 1.3 Théorème (de Cauchy-Lipschitz)

Si  $f$  est continue et Lipschitzienne par rapport à sa 2ème variable alors le problème de Cauchy admet une unique solution.

(Rappel de la) Preuve (dans le cas  $n=1$ ) :

Point de départ :  $y$  sol. ssi  $y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$

Unicité : Soient  $y_1$  et  $y_2$  deux solutions du problème de Cauchy, alors on a :

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leq L \int_{t_0}^t |y_1(s) - y_2(s)| ds$$

# I. Le théorème de Cauchy-Lipschitz

Suite de la preuve :

Unicité : Soient  $y_1$  et  $y_2$  deux solutions du problème de Cauchy, alors on a :

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leq L \int_{t_0}^t |y_1(s) - y_2(s)| ds$$

## 1.3 Lemme de Grönwall (admis)

Soient  $\Phi$  et  $\Psi$  de  $[t_0, t] \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continues et positives vérifiant :

$$\Phi(t) \leq K + L \int_{t_0}^t \Psi(s)\Phi(s) ds \quad \text{alors} \quad \Phi(t) \leq K e^{L \int_{t_0}^t \Psi(s) ds}$$

# I. Le théorème de Cauchy-Lipschitz

Suite de la preuve :

Unicité : Soient  $y_1$  et  $y_2$  deux solutions du problème de Cauchy, alors on a :

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leq L \int_{t_0}^t |y_1(s) - y_2(s)| ds$$

## 1.3 Lemme de Grönwall (admis)

Soient  $\Phi$  et  $\Psi$  de  $[t_0, t] \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continues et positives vérifiant :

$$\Phi(t) \leq K + L \int_{t_0}^t \Psi(s)\Phi(s) ds \quad \text{alors} \quad \Phi(t) \leq K e^{L \int_{t_0}^t \Psi(s) ds}$$

$$\Rightarrow |y_1(t) - y_2(t)| \leq 0 \Rightarrow y_1 = y_2$$

# I. Le théorème de Cauchy-Lipschitz

Suite de la preuve :

Existence :  $y$  sol. ssi  $y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$

On voit alors le problème de Cauchy comme une équation de point fixe

$$\mathcal{L}y = y$$

où l'opérateur  $\mathcal{L} : B(a, b) = (C^0[a, b], \|\cdot\|_\infty) \rightarrow B(a, b)$ .

Remarque : On rappelle que  $B$  est un espace de Banach.

# I. Le théorème de Cauchy-Lipschitz

Suite de la preuve :

Existence :  $y$  sol. ssi  $y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$

On voit alors le problème de Cauchy comme une équation de point fixe

$$\mathcal{L}y = y$$

où l'opérateur  $\mathcal{L} : \mathcal{B}(a, b) = (C^0[a, b], \|\cdot\|_\infty) \rightarrow \mathcal{B}(a, b)$ .

$$\text{Or, on a : } \|\mathcal{L}y_1 - \mathcal{L}y_2\|_{L^\infty(a, b)} \leq \sup_{t \in [a, b]} \int_{t_0}^t |f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))| ds$$

$$\leq \sup_{s \in [a, b]} L \int_{t_0}^t |y_1(s) - y_2(s)| ds$$

# I. Le théorème de Cauchy-Lipschitz

Suite de la preuve :

Existence :  $y$  sol. ssi  $y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$

On voit alors le problème de Cauchy comme une équation de point fixe

$$\mathcal{L}y = y$$

où l'opérateur  $\mathcal{L} : \mathcal{B}(a, b) = (C^0[a, b], \|\cdot\|_\infty) \rightarrow \mathcal{B}(a, b)$ .

$$\begin{aligned} \text{Or, on a : } \|\mathcal{L}y_1 - \mathcal{L}y_2\|_{L^\infty(a, b)} &\leq \sup_{t \in [a, b]} \int_{t_0}^t |f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))| ds \\ &\leq L(b-a) \|y_1 - y_2\|_{L^\infty(a, b)} \end{aligned}$$

# I. Le théorème de Cauchy-Lipschitz

Suite de la preuve :

Existence :  $y$  sol. ssi  $y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$

On voit alors le problème de Cauchy comme une équation de point fixe

$$\mathcal{L}y = y$$

où l'opérateur  $\mathcal{L} : B(a, b) = (C^0[a, b], \|\cdot\|_\infty) \rightarrow B(a, b)$ .

Or, on a :  $\|\mathcal{L}y_1 - \mathcal{L}y_2\|_{L^\infty(a, b)} \leq L(b-a) \|y_1 - y_2\|_{L^\infty(a, b)}$

Si  $L(b-a) < 1$ , on a alors une contraction, et on en déduit qu'il existe une unique solution en appliquant le Thm. de point fixe.

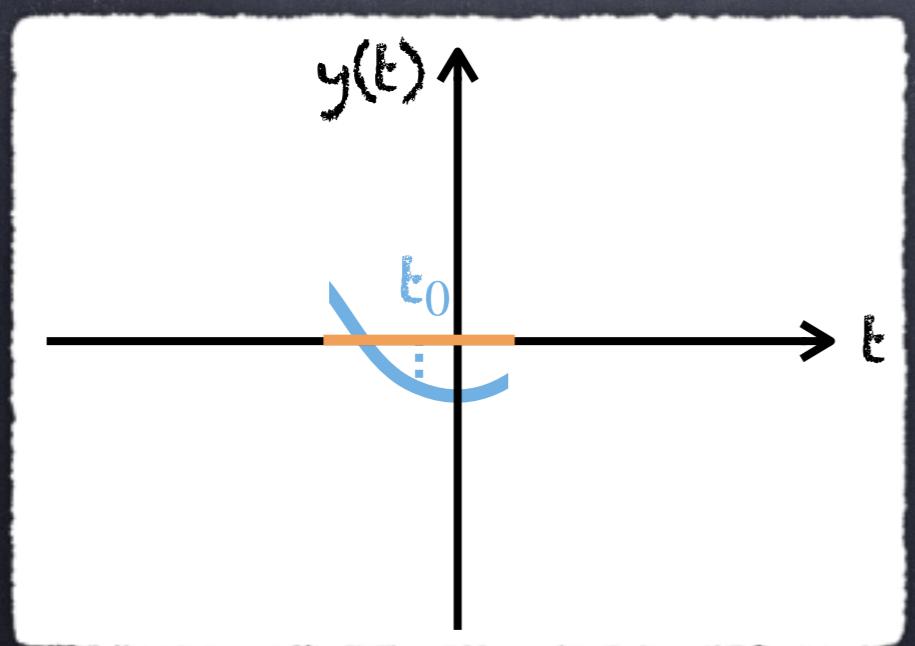
# I. Le théorème de Cauchy-Lipschitz

Suite de la preuve :

Existence :  $y$  sol. ssi  $y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$

On voit alors le problème de Cauchy comme une équation de point fixe  $\mathcal{L}y = y$  où l'opérateur  $\mathcal{L} : \mathcal{B}(a, b) = (\mathcal{C}^0[a, b], \|\cdot\|_\infty) \rightarrow \mathcal{B}(a, b)$ .

Si  $L(b - a) > 1$ , l'idée est alors d'appliquer la même méthode sur un intervalle  $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$  avec  $2\varepsilon L < 1$ .



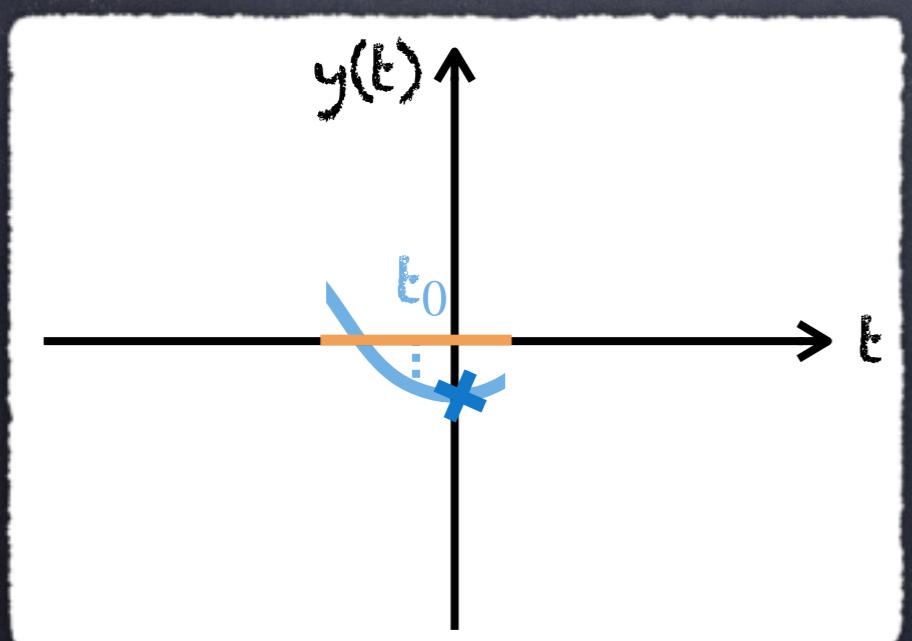
# I. Le théorème de Cauchy-Lipschitz

Suite de la preuve :

Existence :  $y$  sol. ssi  $y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$

On voit alors le problème de Cauchy comme une équation de point fixe  $\mathcal{L}y = y$  où l'opérateur  $\mathcal{L} : B(a, b) = (C^0[a, b], \|\cdot\|_\infty) \rightarrow B(a, b)$ .

Si  $L(b-a) > 1$ , l'idée est alors d'appliquer la même méthode sur un intervalle  $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$  avec  $2\varepsilon L < 1$ .



On applique le même résultat sur  $[t_0, t_0 + 2\varepsilon]$  avec comme condition de Cauchy  $y^1(t_0 + \frac{\varepsilon}{2}) = y(t_0 + \frac{\varepsilon}{2})$  pour construire  $y_1$ .

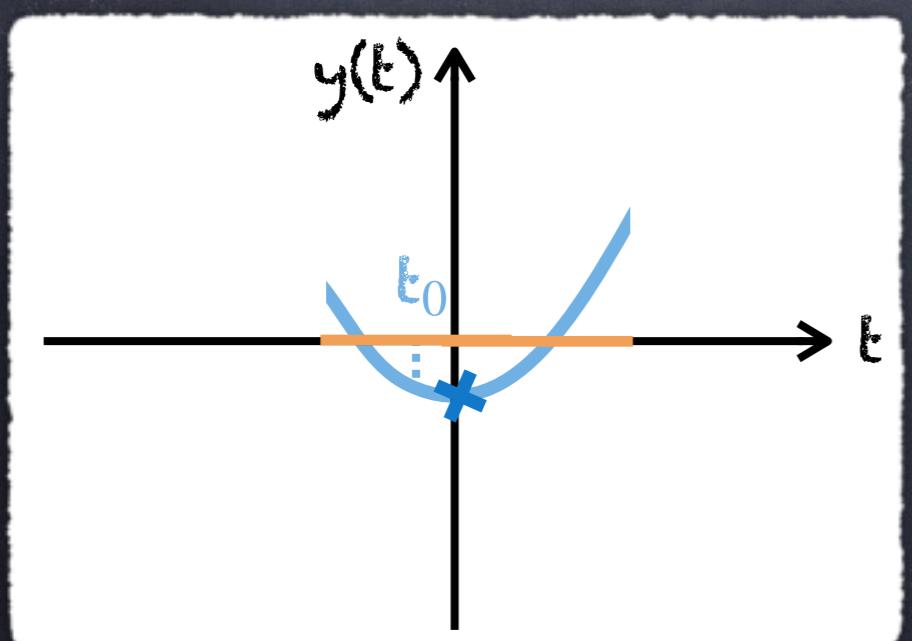
# I. Le théorème de Cauchy-Lipschitz

Suite de la preuve :

Existence :  $y$  sol. ssi  $y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$

On voit alors le problème de Cauchy comme une équation de point fixe  $\mathcal{L}y = y$  où l'opérateur  $\mathcal{L} : B(a, b) = (C^0[a, b], \|\cdot\|_\infty) \rightarrow B(a, b)$ .

Si  $L(b-a) > 1$ , l'idée est alors d'appliquer la même méthode sur un intervalle  $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$  avec  $2\varepsilon L < 1$ .



On applique le même résultat sur  $[t_0, t_0 + 2\varepsilon]$  avec comme condition de Cauchy  $y^1(t_0 + \frac{\varepsilon}{2}) = y(t_0 + \frac{\varepsilon}{2})$  pour construire  $y_1$ .

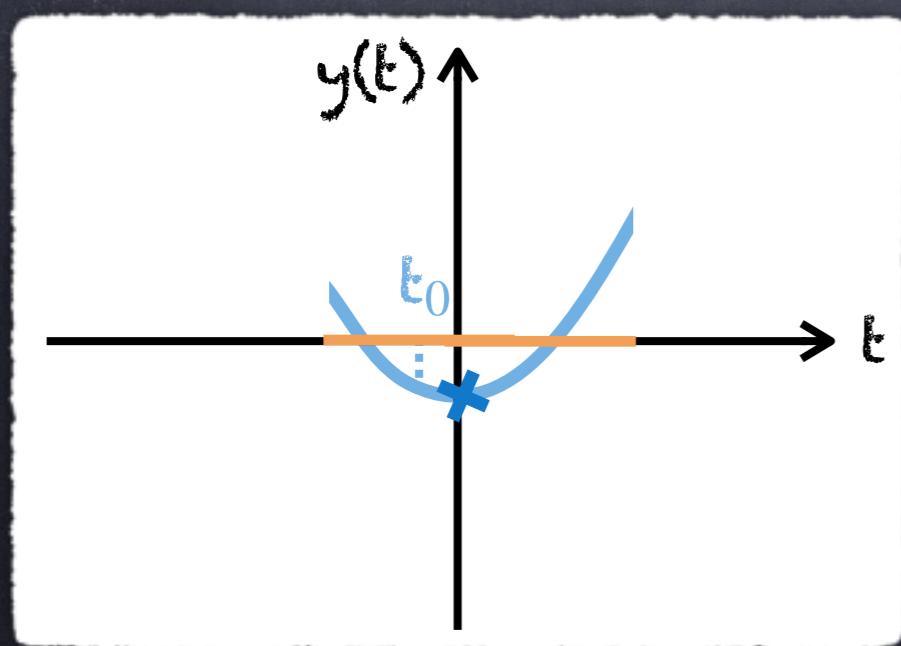
# I. Le théorème de Cauchy-Lipschitz

Suite de la preuve :

Existence :  $y$  sol. ssi  $y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$

On voit alors le problème de Cauchy comme une équation de point fixe  $\mathcal{L}y = y$  où l'opérateur  $\mathcal{L} : \mathcal{B}(a, b) = (\mathcal{C}^0[a, b], \|\cdot\|_\infty) \rightarrow \mathcal{B}(a, b)$ .

Si  $L(b - a) > 1$ , l'idée est alors d'appliquer la même méthode sur un intervalle  $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$  avec  $2\varepsilon L < 1$ .



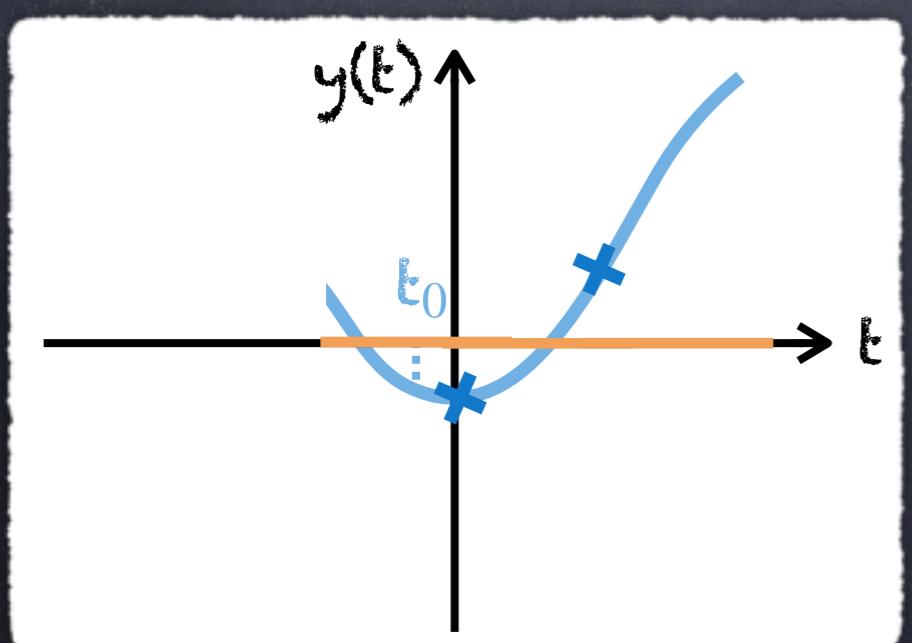
# I. Le théorème de Cauchy-Lipschitz

Suite de la preuve :

Existence :  $y$  sol. ssi  $y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$

On voit alors le problème de Cauchy comme une équation de point fixe  $\mathcal{L}y = y$  où l'opérateur  $\mathcal{L} : \mathcal{B}(a, b) = (\mathcal{C}^0[a, b], \|\cdot\|_\infty) \rightarrow \mathcal{B}(a, b)$ .

Si  $L(b - a) > 1$ , l'idée est alors d'appliquer la même méthode sur un intervalle  $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$  avec  $2\varepsilon L < 1$ .



Et ainsi de suite :  $y^2(t_0 + \frac{3\varepsilon}{2}) = y^1(t_0 + \frac{3\varepsilon}{2})$

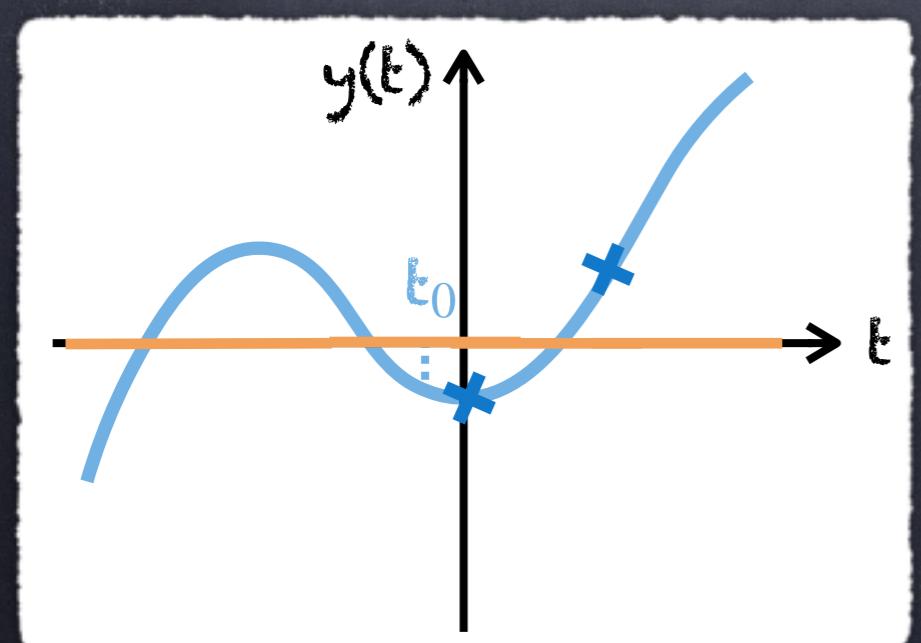
# I. Le théorème de Cauchy-Lipschitz

Suite de la preuve :

Existence :  $y$  sol. ssi  $y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$

On voit alors le problème de Cauchy comme une équation de point fixe  $\mathcal{L}y = y$  où l'opérateur  $\mathcal{L} : \mathcal{B}(a, b) = (\mathcal{C}^0[a, b], \|\cdot\|_\infty) \rightarrow \mathcal{B}(a, b)$ .

Si  $L(b-a) > 1$ , l'idée est alors d'appliquer la même méthode sur un intervalle  $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$  avec  $2\varepsilon L < 1$ .



Et ainsi de suite :  $y^2(t_0 + \frac{3\varepsilon}{2}) = y^1(t_0 + \frac{3\varepsilon}{2})$

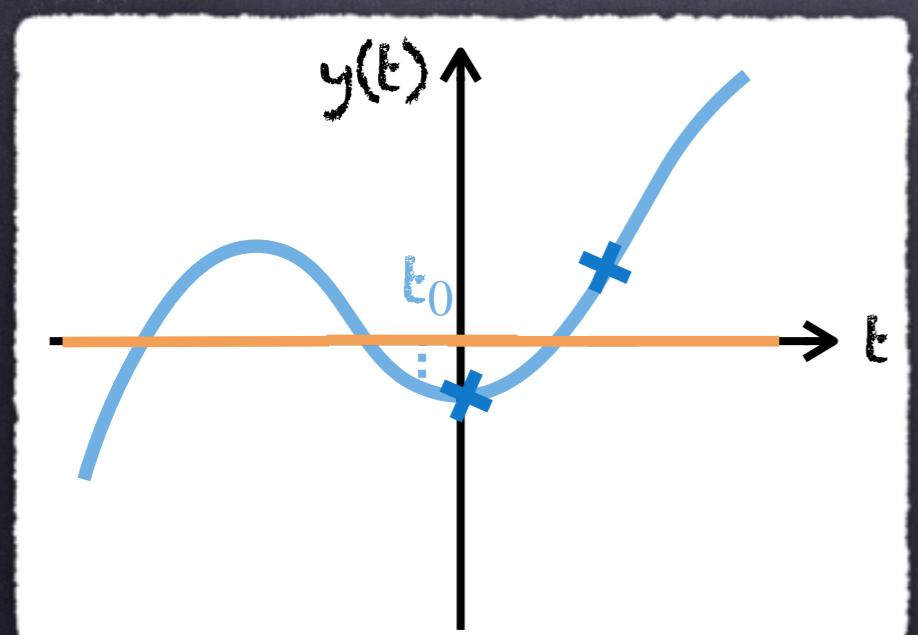
# I. Le théorème de Cauchy-Lipschitz

Suite de la preuve :

Existence :  $y$  sol. ssi  $y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$

On voit alors le problème de Cauchy comme une équation de point fixe  $\mathcal{L}y = y$  où l'opérateur  $\mathcal{L} : \mathcal{B}(a, b) = (\mathcal{C}^0[a, b], \|\cdot\|_\infty) \rightarrow \mathcal{B}(a, b)$ .

Si  $L(b-a) > 1$ , l'idée est alors d'appliquer la même méthode sur un intervalle  $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$  avec  $2\varepsilon L < 1$ .



Et ainsi de suite :  $y^2(t_0 + \frac{3\varepsilon}{2}) = y^1(t_0 + \frac{3\varepsilon}{2})$

Remarque : La solution étant unique sur  $[a, b]$ , on déduit aisément que  $y^1 = y^2 = \dots = y$ .

# I. Le théorème de Cauchy-Lipschitz

## 1.3 Théorème (de Cauchy-Lipschitz)

Si  $f$  est continue et Lipschitzienne par rapport à sa 2ème variable alors le problème de Cauchy admet une unique solution.

Remarques :

- ① En appliquant la démarche de prolongement précédente, on peut construire une solution sur  $\mathbb{R}$
- ② Si  $f$  n'est que localement Lip. (i.e. La constante  $L$  dépend de  $y_0$ ) alors il existe une unique solution locale (maximale).

# Au programme (Chapitre 3)

Objectif :

Étant donné  $t_0 \in [a, b]$ , déterminer numériquement la solution d'un système d'EDO :  $\begin{cases} \underline{y}'(t) = \underline{f}(t, \underline{y}(t)), & t \in [a, b] \\ \underline{y}(t_0) = \underline{y}_0 \end{cases}$

Plan :

I. Le théorème de Cauchy-Lipschitz

II. Les méthodes à 1-pas

a) Définition et analyse

b) Les méthodes de Runge Kutta

III. Les méthodes multi-pas

IV. Quelques extensions

## II. a) Définition et analyse

Dans la suite de ce chapitre, on considérera que  $f$  est Lipschitzienne, ce qui nous garantit qu'il existe une unique solution globale.

Pour rappel,  $\underline{y}$  est solution ssi :  $\underline{y}(t) = \underline{y}(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, \underline{y}(s)) ds$

Considérons la discrétisation  $t_i = t_0 + i\Delta t$ , t.q.  $t_N = T$ , alors

$$\underline{y}(t_{i+1}) = \underline{y}(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(s, \underline{y}(s)) ds$$

## II. a) Définition et analyse

Dans la suite de ce chapitre, on considérera que  $f$  est Lipschitzienne, ce qui nous garantit qu'il existe une unique solution globale.

Pour rappel,  $\underline{y}$  est solution ssi :  $\underline{y}(t) = \underline{y}(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, \underline{y}(s)) ds$

Considérons la discréttisation  $t_i = t_0 + i\Delta t$ , t.q.  $t_N = T$ , alors

$$\underline{y}(t_{i+1}) = \underline{y}(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(s, \underline{y}(s)) ds$$

Idée : Appliquer une formule de quadrature pour calculer  $\underline{y}_i$  un approximation de  $\underline{y}(t_i)$ .

## II. a) Définition et analyse

Dans la suite de ce chapitre, on considérera que  $f$  est Lipschitzienne, ce qui nous garantit qu'il existe une unique solution globale.

Pour rappel,  $\underline{y}$  est solution ssi :  $\underline{y}(t) = \underline{y}(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, \underline{y}(s)) ds$

Considérons la discréttisation  $t_i = t_0 + i\Delta t$ , t.q.  $t_N = T$ , alors

$$\underline{y}(t_{i+1}) = \underline{y}(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(s, \underline{y}(s)) ds$$

Idée : Appliquer une formule de quadrature pour calculer  $\underline{y}_i$  un approximation de  $\underline{y}(t_i)$ .

Remarque :

Avec une méthode numérique, on ne détermine pas (une approximation de) la solution pour tout instant  $t$ .

## II. a) Définition et analyse

Dans la suite de ce chapitre, on considérera que  $f$  est Lipschitzienne, ce qui nous garantit qu'il existe une unique solution globale.

Pour rappel,  $\underline{y}$  est solution ssi :  $\underline{y}(t) = \underline{y}(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, \underline{y}(s)) ds$

Considérons la discréttisation  $t_i = t_0 + i\Delta t$ , t.q.  $t_N = T$ , alors

$$\underline{y}(t_{i+1}) = \underline{y}(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(s, \underline{y}(s)) ds$$

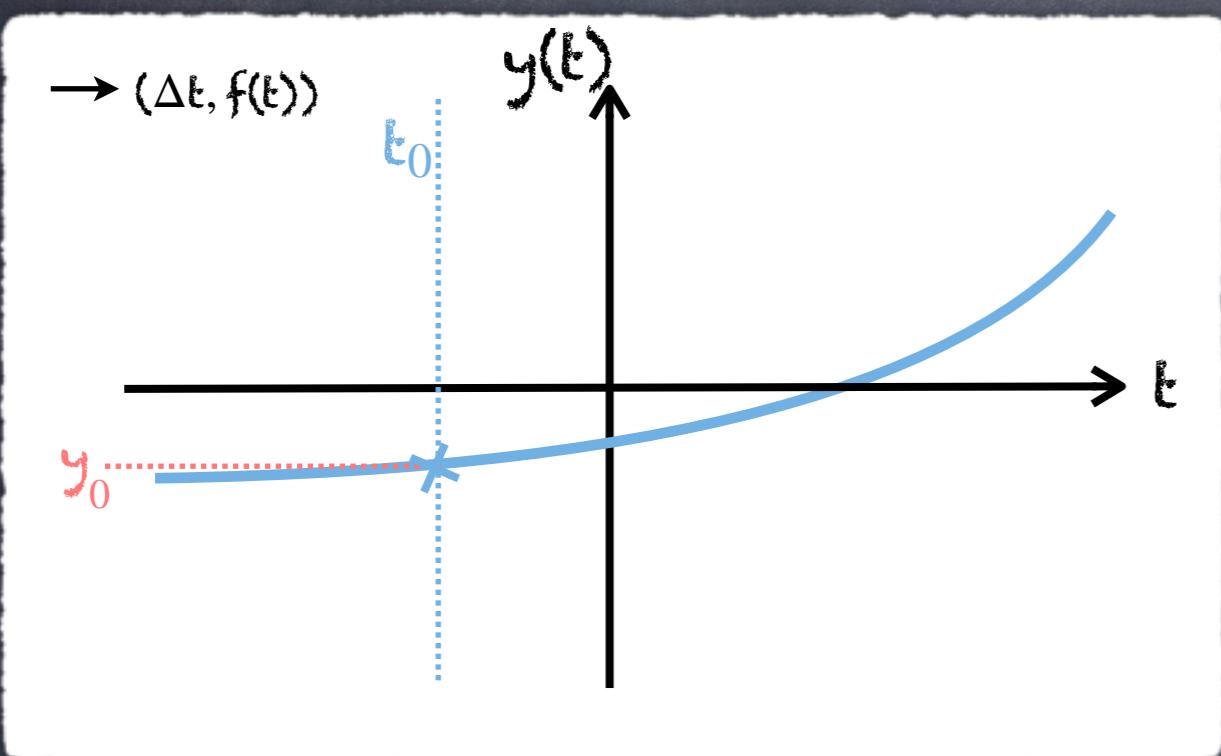
Idée : Appliquer une formule de quadrature pour calculer  $\underline{y}_i$  un approximation de  $\underline{y}(t_i)$ .

❶ Méthode à 1-pas : Calculer  $\underline{y}_{-i+1}$  à partir de  $\underline{y}_{-i}$ .

❷ Méthode multi-pas : Calculer  $\underline{y}_{-i+1}$  avec  $\underline{y}_{-i}, \underline{y}_{-i-1}, \dots, \underline{y}_{-i-r}$ .

## II. a) Définition et analyse

Un premier exemple : La méthode d'Euler



Approcher l'intégrale

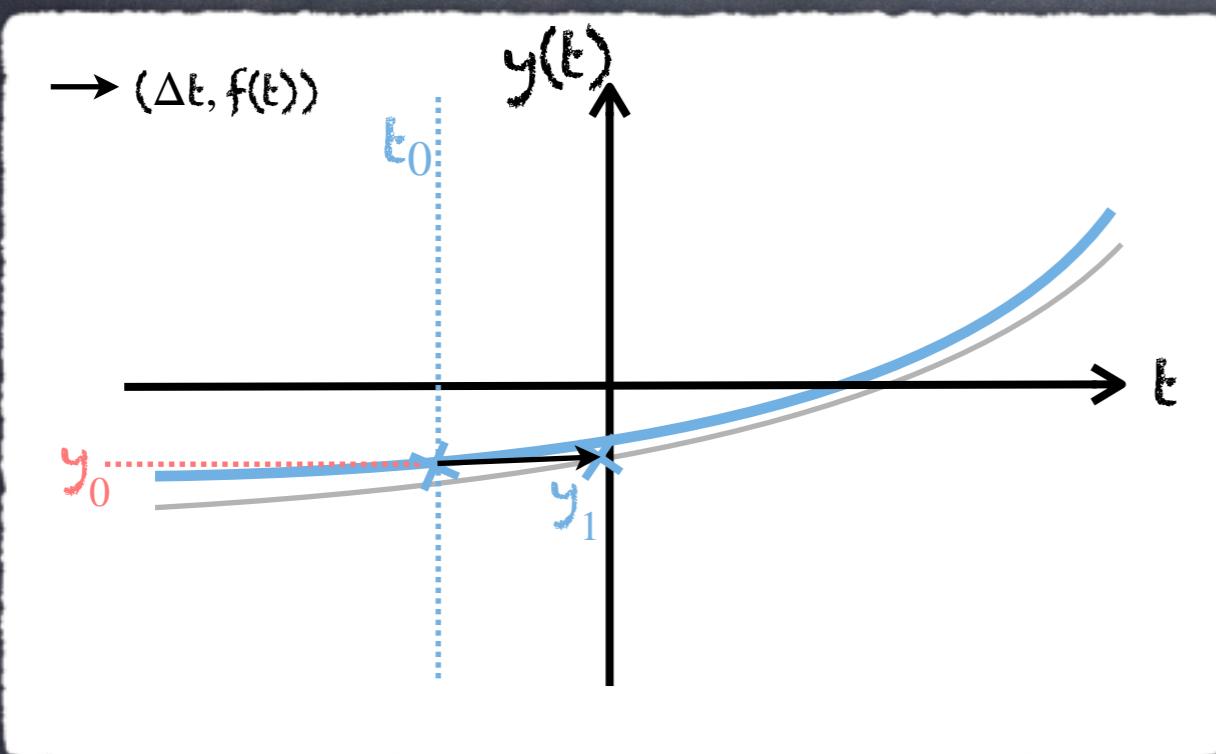
$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(s, y(s)) ds$$

par la formule :

$$y_{i+1} = y_i + \Delta t f(t_i, y_i)$$

## II. a) Définition et analyse

Un premier exemple : La méthode d'Euler



Approcher l'intégrale

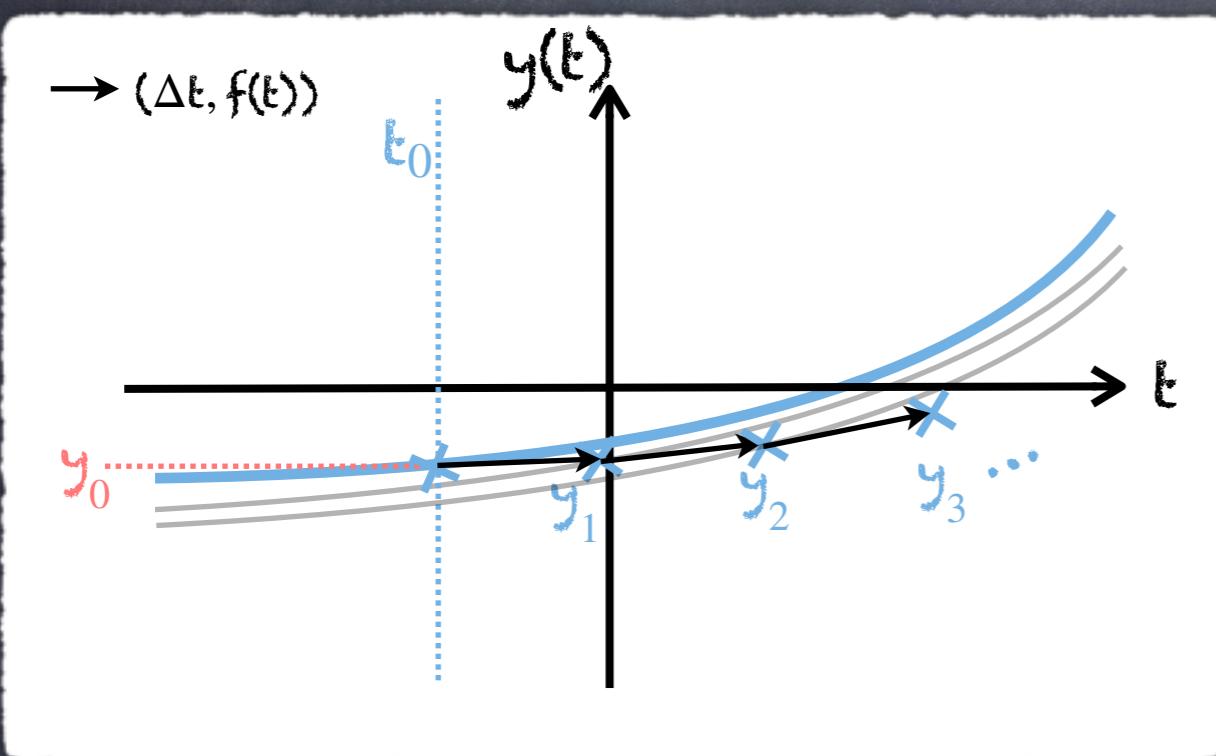
$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(s, y(s)) ds$$

par la formule :

$$y_{i+1} = y_i + \Delta t f(t_i, y_i)$$

## II. a) Définition et analyse

Un premier exemple : La méthode d'Euler



Approcher l'intégrale

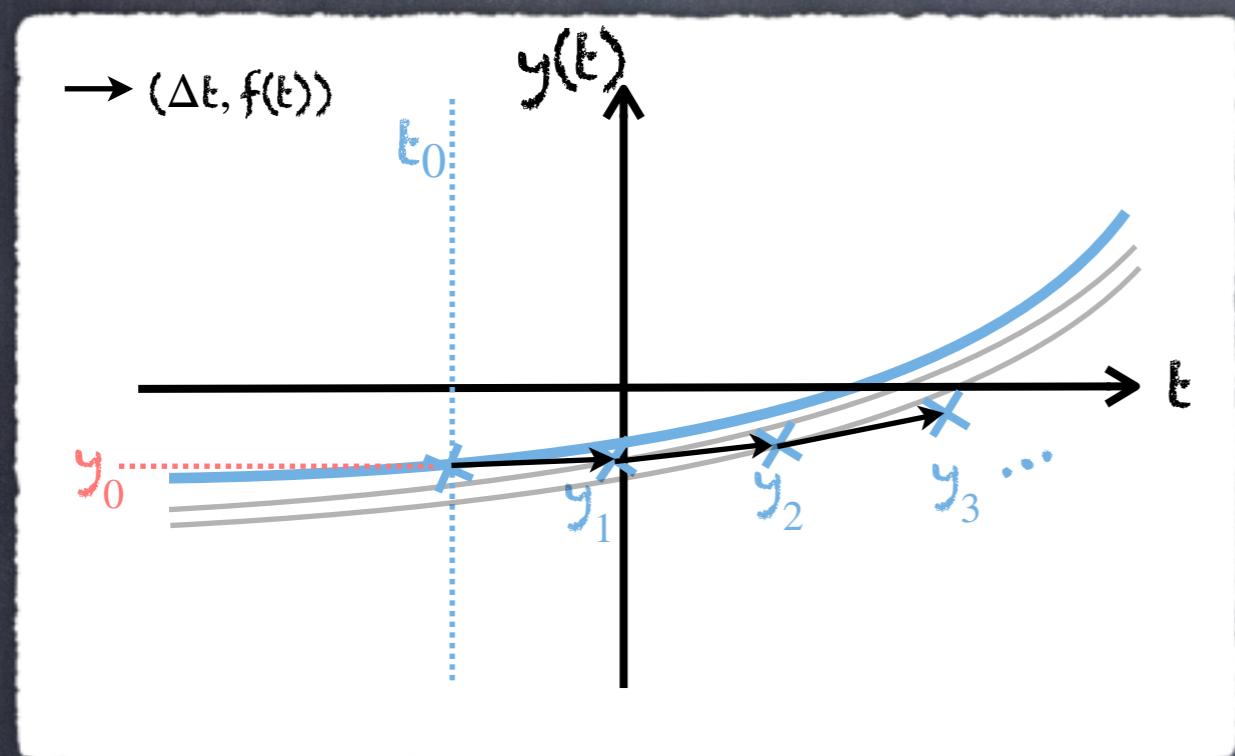
$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(s, y(s)) ds$$

par la formule :

$$\underline{y}_{i+1} = \underline{y}_i + \Delta t \underline{f}(t_i, \underline{y}_i)$$

## II. a) Définition et analyse

Un premier exemple : La méthode d'Euler



Approcher l'intégrale

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(s, y(s)) ds$$

par la formule :

$$y_{i+1} = y_i + \Delta t f(t_i, y_i)$$

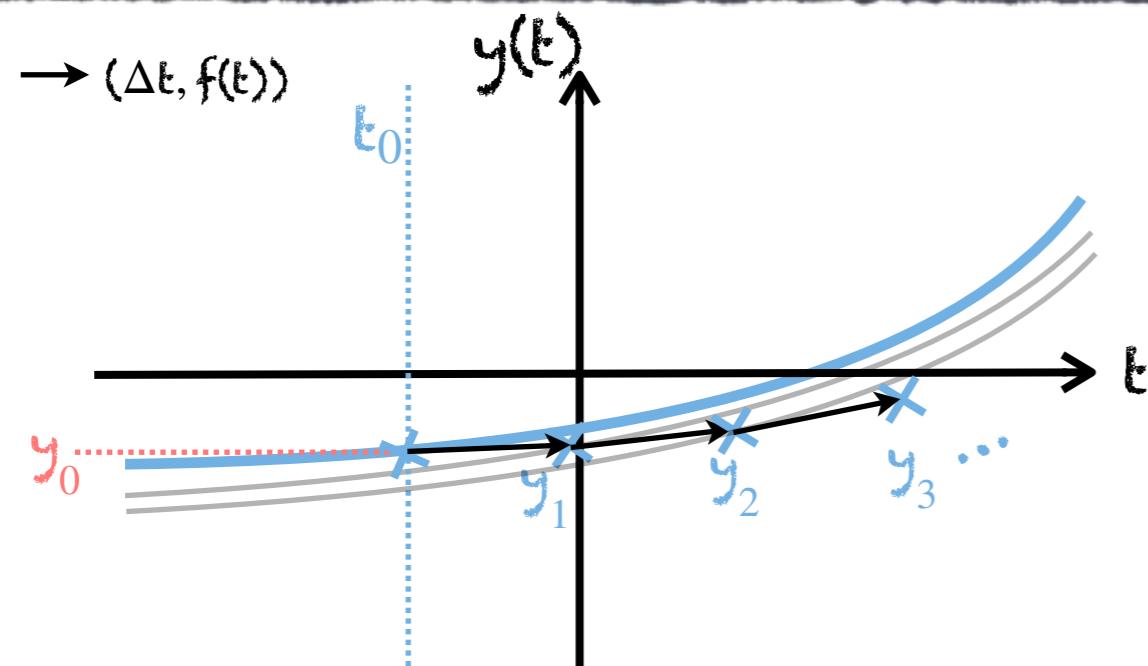
Les questions naturelles qui se posent alors sont :

ⓐ Si  $\Delta t \rightarrow 0$ , a t'on  $y_i \rightarrow y(t_i)$  ? (Convergence)

ⓑ Peut-on concevoir des schémas plus précis ?

## II. a) Définition et analyse

Un premier exemple : La méthode d'Euler



Approcher l'intégrale

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(s, y(s)) ds$$

par la formule :

$$\underline{y}_{-i+1} = \underline{y}_i + \Delta t \underline{f}(t_i, \underline{y}_i)$$

Remarque :

En choisissant la formule de quadrature

$$\underline{y}_{-i+1} = \underline{y}_i + \Delta t \underline{f}(t_{i+1}, \underline{y}_{-i+1})$$

on déduit le schéma d'Euler implicite.

## II. a) Définition et analyse

### 2.1 Définition (méthode à 1-pas)

Soit  $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction continue. On définit une méthode à 1 pas par la relation suivante :

$$\underline{y}_{-i+1} = \underline{y}_{-i} + \Delta t_i \underline{\Phi}(t_i, \underline{y}_{-i}, \Delta t_i)$$

## II. a) Définition et analyse

### 2.1 Définition (méthode à 1-pas)

Soit  $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction continue. On définit une méthode à 1 pas par la relation suivante :

$$\underline{y}_{-i+1} = \underline{y}_{-i} + \Delta t_i \underline{\Phi}(t_i, \underline{y}_{-i}, \Delta t_i)$$

Remarques :

- ② La méthode d'Euler correspond à  $\underline{\Phi}(t, \underline{y}, \Delta t) = \underline{f}(t, \underline{y})$ .

## II. a) Définition et analyse

### 2.1 Définition (méthode à 1-pas)

Soit  $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction continue. On définit une méthode à 1 pas par la relation suivante :

$$\underline{y}_{-i+1} = \underline{y}_{-i} + \Delta t_i \underline{\Phi}(t_i, \underline{y}_{-i}, \Delta t_i)$$

Remarques :

- ① La méthode d'Euler correspond à  $\underline{\Phi}(t, \underline{y}, \Delta t) = \underline{f}(t, \underline{y})$ .
- ② Le pas de discréétisation  $\Delta t_i$  peut a priori varier d'une itération à l'autre

## II. a) Définition et analyse

### 2.1 Définition (méthode à 1-pas)

Soit  $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction continue. On définit une méthode à 1 pas par la relation suivante :

$$\underline{\underline{y}}_{-i+1} = \underline{\underline{y}}_{-i} + \Delta t_i \underline{\underline{\Phi}}(\underline{\underline{t}}_i, \underline{\underline{y}}_{-i}, \Delta t_i)$$

Remarques :

- ① La méthode d'Euler correspond à  $\underline{\underline{\Phi}}(\underline{\underline{t}}, \underline{\underline{y}}, \Delta t) = \underline{\underline{f}}(\underline{\underline{t}}, \underline{\underline{y}})$ .
- ② Le pas de discréttisation  $\Delta t_i$  peut a priori varier d'une itération à l'autre
- ③ Le choix de la fonction  $\underline{\underline{\Phi}}$  est déterminant dans la qualité de la méthode numérique.

## II. a) Définition et analyse

### 2.1 Définition (méthode à 1-pas)

Soit  $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction continue. On définit une méthode à 1 pas par la relation suivante :

$$\underline{y}_{-i+1} = \underline{y}_{-i} + \Delta t_i \underline{\Phi}(\underline{t}_i, \underline{y}_{-i}, \Delta t_i)$$

### 2.2 Définition (consistance)

Une méthode à 1-pas est dite **consistante** ssi l'erreur

$$\underline{\varepsilon}_i = \underline{y}(\underline{t}_{i+1}) - \underline{y}(\underline{t}_i) - \Delta t_i \underline{\Phi}(\underline{t}_i, \underline{y}(\underline{t}_i), \Delta t_i)$$

vérifie  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{N-1} \|\underline{\varepsilon}_i\| = 0$ , où  $\underline{y}$  est la solution du pb de Cauchy.

Remarque : On rappelle que la solution approchée  $\underline{y}_{-i} \neq \underline{y}(\underline{t}_i)$ .

## II. a) Définition et analyse

### 2.3 Définition (stabilité)

Soient  $\tilde{\varepsilon}_i$  une suite de perturbation et la suite  $\underline{z}_i$  définie par :

$$\underline{z}_{i+1} = \underline{z}_i + \Delta t_i \Phi(t_i, \underline{z}_i, \Delta t_i) + \tilde{\varepsilon}_i$$

La méthode à 1-pas est dite **stable** ssi  $\exists M > 0$  t.q.

$$\max_{0 \leq i \leq N} \|\underline{z}_i - \underline{y}_i\| \leq M \left( \|\underline{z}_0 - \underline{y}_0\| + \sum_{i=0}^{N-1} \|\tilde{\varepsilon}_i\| \right)$$

## II. a) Définition et analyse

### 2.4 Définition (convergence)

Une méthode est dite **convergente** ssi

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \max_{0 \leq i \leq N} \left\| \underline{y}(t_i) - \underline{y}_i \right\| = 0 \quad \text{où} \quad \Delta t = \max_{0 \leq i \leq N-1} \Delta t_i$$

## II. a) Définition et analyse

### 2.4 Définition (convergence)

Une méthode est dite **convergente** ssi

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \max_{0 \leq i \leq N} \|y(t_i) - y_i\| = 0 \quad \text{où} \quad \Delta t = \max_{0 \leq i \leq N-1} \Delta t_i$$

### 2.5 Théorème

Si la méthode à 1-pas est stable et consistante, alors elle est convergente.

Preuve : au (vrai) tableau !

## II. a) Définition et analyse

### 2.4 Définition (convergence)

Une méthode est dite **convergente** ssi

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \max_{0 \leq i \leq N} \|y(t_i) - y_i\| = 0 \quad \text{où} \quad \Delta t = \max_{0 \leq i \leq N-1} \Delta t_i$$

### 2.5 Théorème

Si la méthode à 1-pas est stable et consistante, alors elle est convergente.

Remarque :

Ce résultat est important car il nous donne la démarche à suivre. Pour montrer la convergence, on montrera que la méthode est consistante et stable.

## II. a) Définition et analyse

### 2.4 Définition (convergence)

Une méthode est dite **convergente** ssi

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \max_{0 \leq i \leq N} \|y(t_i) - y_i\| = 0 \quad \text{où} \quad \Delta t = \max_{0 \leq i \leq N-1} \Delta t_i$$

### 2.5 Théorème

Si la méthode à 1-pas est stable et consistante, alors elle est convergente.

Remarque 2 :

Notons également que SANS connaître la solution exacte, on pourra justifier que la solution approchée est proche de la solution exacte grâce à la notion de convergence.

## II. a) Définition et analyse

Voyons maintenant des théorèmes pratiques pour prouver la consistance et la stabilité d'une méthode à 1-pas.

### 2.6 Proposition

Une méthode est consistante ssi  $\underline{\Phi(t, y(t), h)}|_{h=0} = \underline{f(t, y(t))}$

Preuve : au (vrai) tableau !

## II. a) Définition et analyse

Voyons maintenant des théorèmes pratiques pour prouver la consistance et la stabilité d'une méthode à 1-pas.

### 2.6 Proposition

Une méthode est consistante ssi  $\underline{\Phi}(t, y(t), h) \Big|_{h=0} = \underline{f}(t, y(t))$

### 2.7 Proposition

Si la fonction  $\underline{\Phi} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est Lipschitzienne par rapport à sa 2ème variable, alors la méthode est stable.

Preuve : au (vrai) tableau !

## II. a) Définition et analyse

### 2.8 Définition (ordre)

Une méthode à 1-pas est d'ordre p ssi il existe une constante K indépendante de  $\Delta t$  t.q. :

$$\sum_{i=0}^{N-1} \|\underline{\varepsilon}_i\| \leq K \Delta t^p \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{N-1} \|\underline{\varepsilon}_i\| = O(\Delta t^p)$$

## II. a) Définition et analyse

### 2.8 Définition (ordre)

Une méthode à 1-pas est d'ordre p ssi il existe une constante K indépendante de  $\Delta t$  t.q. :

$$\sum_{i=0}^{N-1} \|\underline{\varepsilon}_i\| \leq K \Delta t^p \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{N-1} \|\underline{\varepsilon}_i\| = O(\Delta t^p)$$

Remarque :

Une méthode d'ordre 1 au moins est consistante.

## II. a) Définition et analyse

### 2.8 Définition (ordre)

Une méthode à 1-pas est d'ordre  $p$  ssi il existe une constante  $K$  indépendante de  $\Delta t$  t.q. :

$$\sum_{i=0}^{N-1} \|\underline{\varepsilon}_i\| \leq K \Delta t^p \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{N-1} \|\underline{\varepsilon}_i\| = O(\Delta t^p)$$

### 2.9 Corollaire (direct du Thm. 2.5)

Si une méthode est stable et d'ordre  $p$ , alors

$$\max_{0 \leq i \leq N} \|\underline{y}(t_i) - \underline{y}_i\| = O(\Delta t^p)$$

## II. a) Définition et analyse

### 2.10 Théorème (ordre)

Si  $\underline{f}$  est de classe  $C^p$  par rapport à ses 2 variables, et  $\Phi$  de classe  $C^p$  par rapport à sa dernière variable, alors la méthode est d'ordre p ssi :

$$\frac{1}{j+1} \frac{d^j}{dt^j} \underline{f}(t, y(t)) = \frac{\partial^j}{\partial \Delta t^j} \underline{\Phi}(t, y(t), \Delta t) \Big|_{\Delta t=0} \quad \forall j \in \{0, \dots, p-1\}$$

Preuve : au (vrai) tableau !

## II. a) Définition et analyse

Retour sur La méthode d'Euler

$$\text{Schéma d'Euler : } \underline{y}_{i+1} = \underline{y}_i + \Delta t \underline{f}(t_i, \underline{y}_i)$$

La méthode est convergente et d'ordre 1  
(détails au (vrai) tableau)

## II. a) Définition et analyse

Retour sur La méthode d'Euler

$$\text{Schéma d'Euler : } \underline{y}_{i+1} = \underline{y}_i + \Delta t \underline{f}(t_i, \underline{y}_i)$$

La méthode est convergente et d'ordre 1  
(détails au (vrai) tableau)

Exemple :

Appliquons ce schéma au pb :

$$\begin{cases} y'(t) = y(t), & t \in [0, T] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

pour lequel la sol. exacte est connue :  $y(t) = e^t$ .

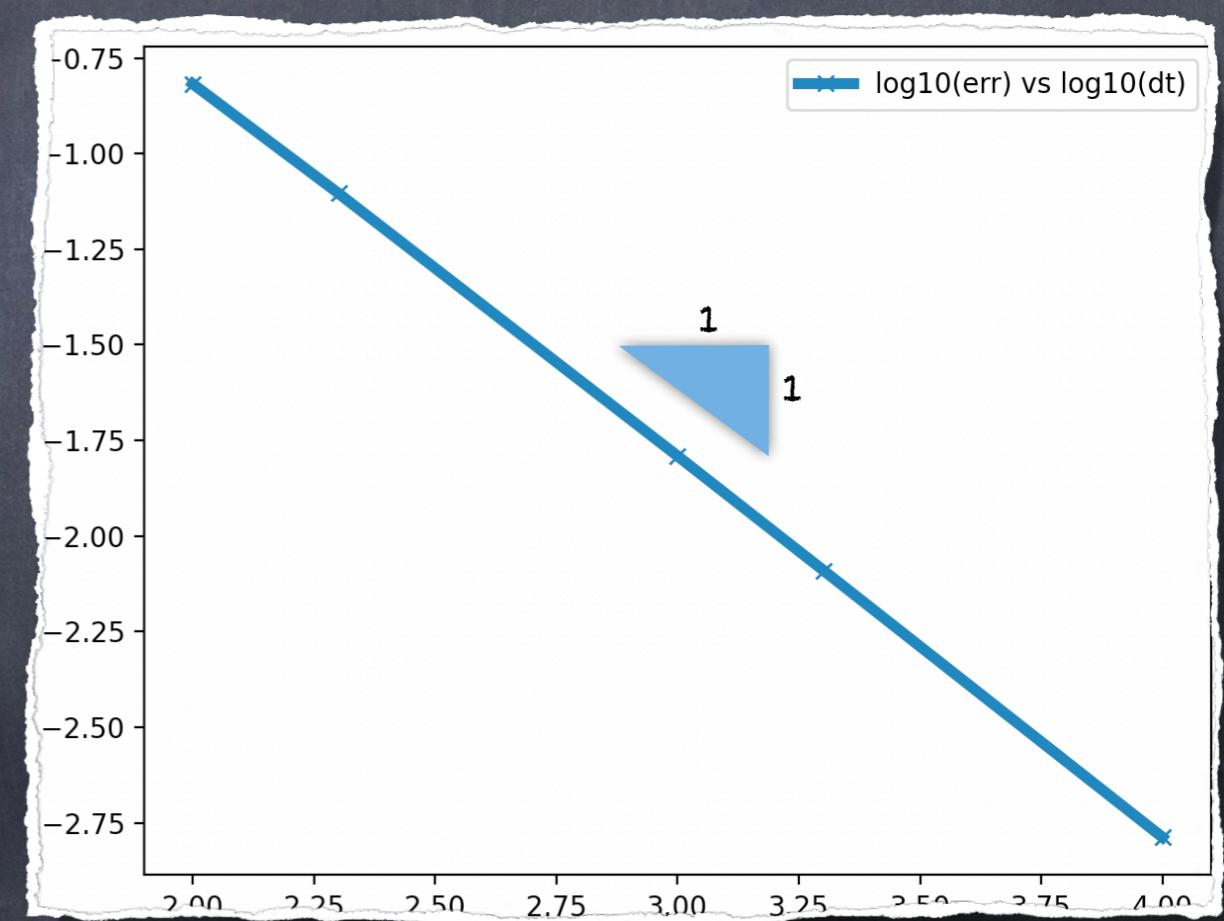


Illustration ordre  
convergence

## II. a) Définition et analyse

Retour sur La méthode d'Euler

$$\text{Schéma d'Euler : } \underline{y}_{i+1} = \underline{y}_i + \Delta t \underline{f}(t_i, \underline{y}_i)$$

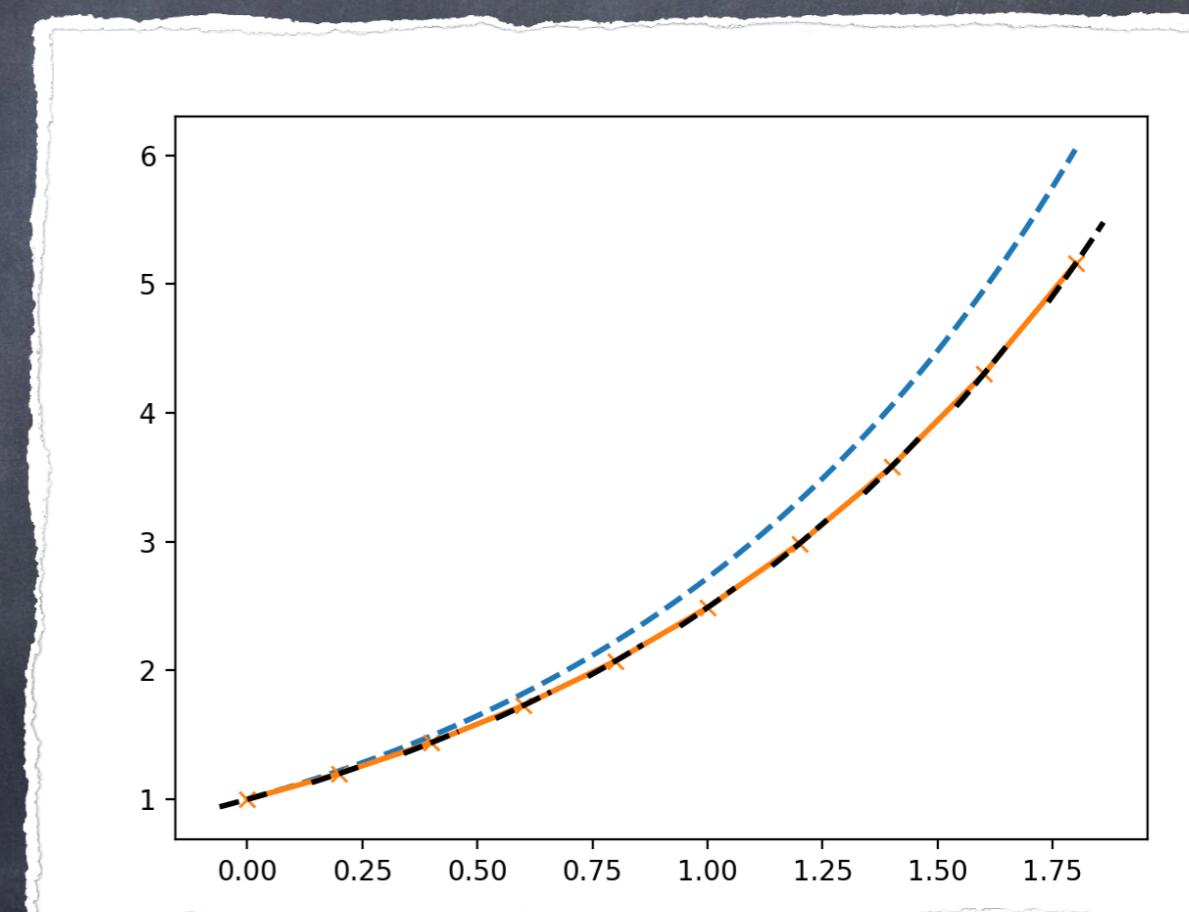
La méthode est convergente et d'ordre 1  
(détails au (vrai) tableau)

Exemple :

Appliquons ce schéma au pb :

$$\begin{cases} y'(t) = y(t), & t \in [0, T] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

pour lequel la sol. exacte est connue :  $y(t) = e^t$ .



$$\Delta t = \{0.2, 0.1, \dots, 0.0125\}$$

## II. a) Définition et analyse

Retour sur La méthode d'Euler

$$\text{Schéma d'Euler : } \underline{y}_{i+1} = \underline{y}_i + \Delta t \underline{f}(t_i, \underline{y}_i)$$

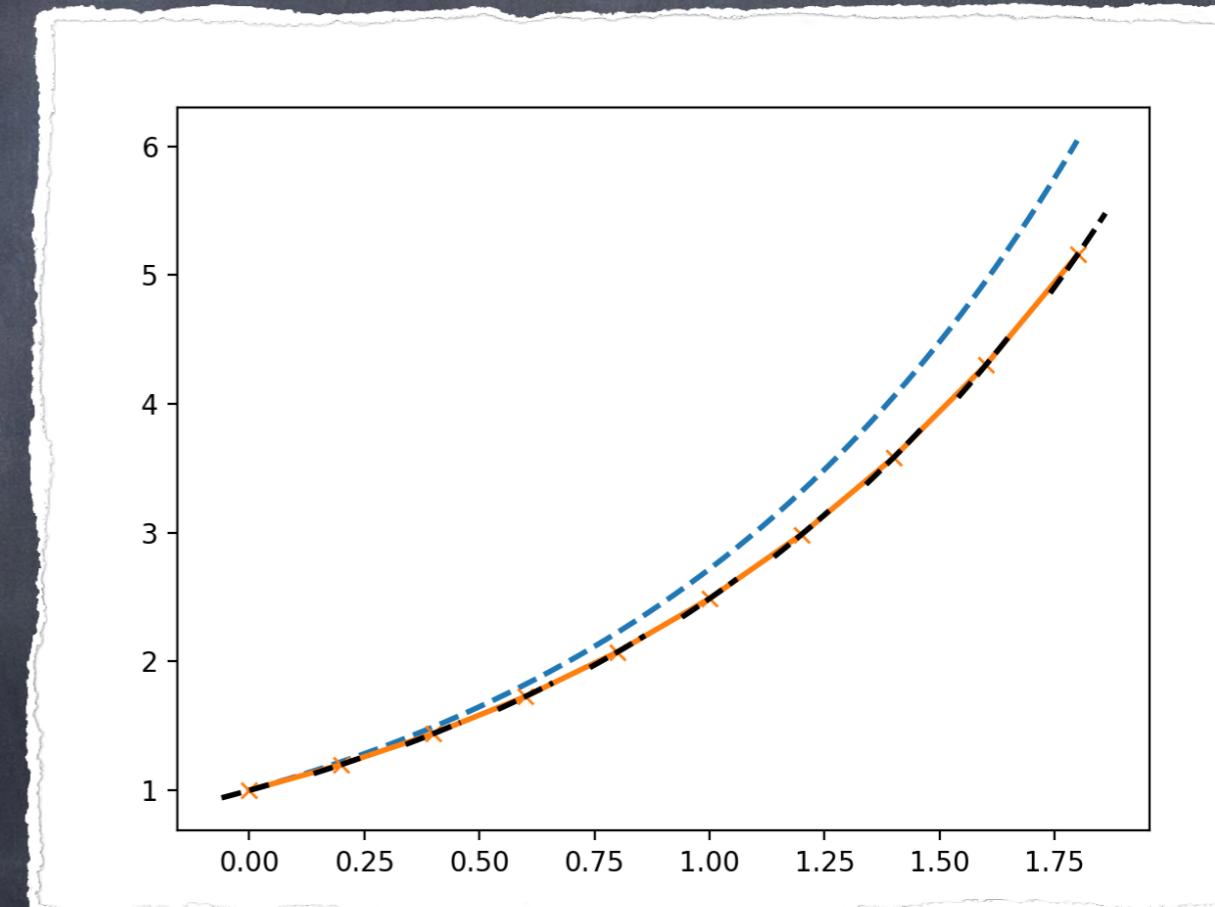
La méthode est convergente et d'ordre 1  
(détails au (vrai) tableau)

Exemple :

Appliquons ce schéma au pb :

$$\begin{cases} y'(t) = y(t), & t \in [0, T] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

pour lequel la sol. exacte est connue :  $y(t) = e^t$ .



$$\Delta t = \{0.2, 0.1, \dots, 0.0125\}$$

## II. a) Définition et analyse

Peut-on proposer des schémas d'ordre plus élevé ?

Idée 1 : Exploiter le Thm. 2.10.

Par exemple, pour une méthode d'ordre 2 on aurait :

$$\underline{y}_{i+1} = \underline{y}_i + \Delta t \underline{f}(\underline{t}_i, \underline{y}_i) + \frac{\Delta t^2}{2} \left( \partial_t \underline{f}(\underline{t}_i, \underline{y}_i) + \partial_y \underline{f}(\underline{t}_i, \underline{y}_i) \underline{f}(\underline{t}_i, \underline{y}_i) \right)$$

(détails au (vrai) tableau)

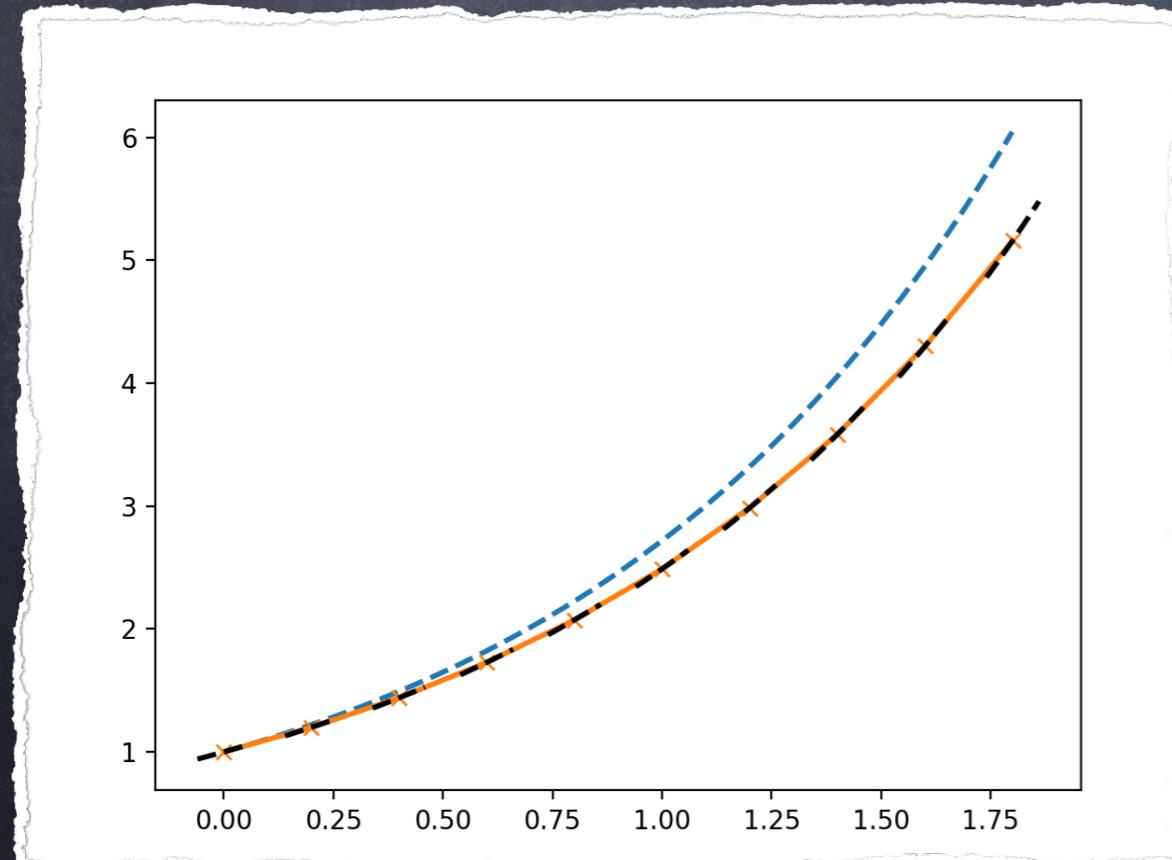
## II. a) Définition et analyse

Peut-on proposer des schémas d'ordre plus élevé ?

Idée 1 : Exploiter le Thm. 2.10.

Par exemple, pour une méthode d'ordre 2 on aurait :

$$\underline{y}_{i+1} = \underline{y}_i + \Delta t \underline{f}(t_i, \underline{y}_i) + \frac{\Delta t^2}{2} \left( \partial_t \underline{f}(t_i, \underline{y}_i) + \partial_y \underline{f}(t_i, \underline{y}_i) \underline{f}(t_i, \underline{y}_i) \right)$$



Euler  $\Delta t = 0.2$

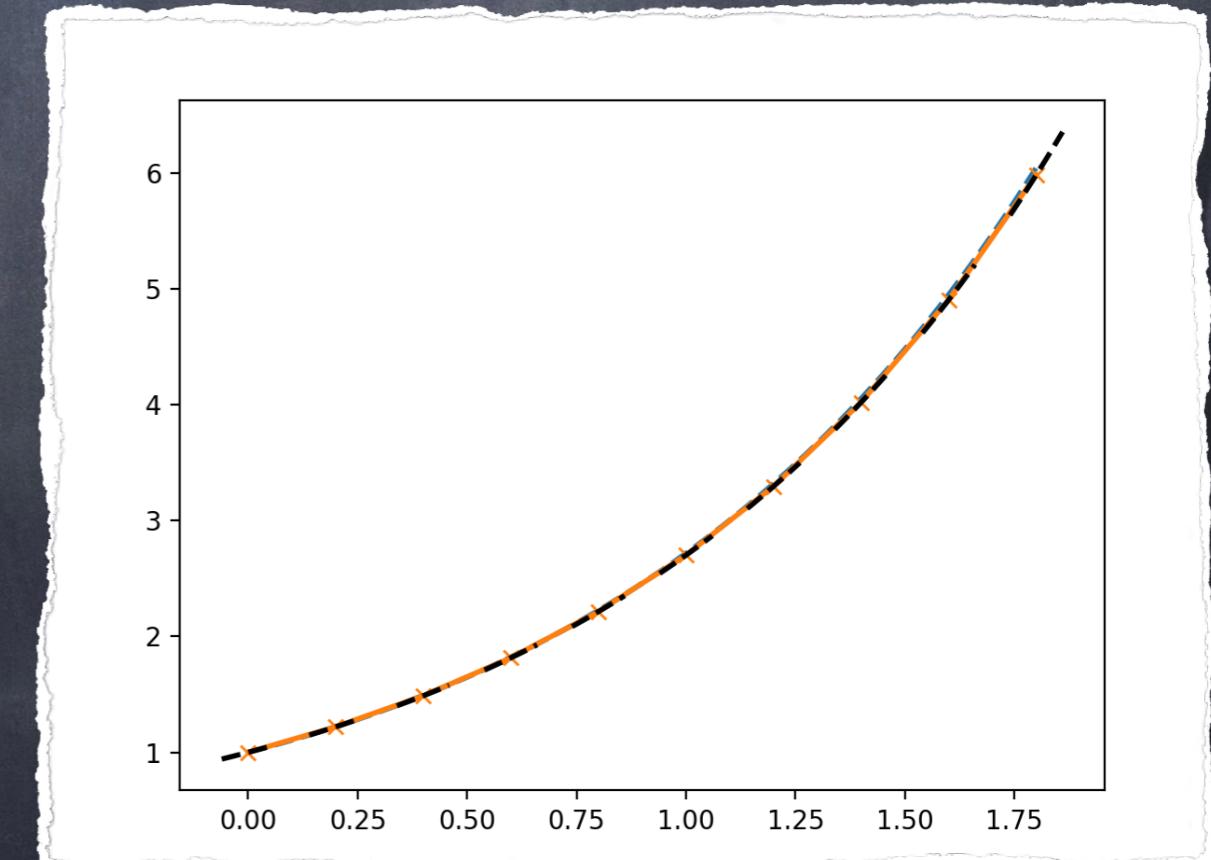


Schéma o2  $\Delta t = 0.2$

## II. a) Définition et analyse

Peut-on proposer des schémas d'ordre plus élevé ?

Idée 1 : Exploiter le Thm. 2.10.

Par exemple, pour une méthode d'ordre 2 on aurait :

$$\underline{y}_{i+1} = \underline{y}_i + \Delta t \underline{f}(\underline{t}_i, \underline{y}_i) + \frac{\Delta t^2}{2} \left( \partial_t \underline{f}(\underline{t}_i, \underline{y}_i) + \partial_y \underline{f}(\underline{t}_i, \underline{y}_i) \underline{f}(\underline{t}_i, \underline{y}_i) \right)$$

Cette approche pose plusieurs problèmes :

## II. a) Définition et analyse

Peut-on proposer des schémas d'ordre plus élevé ?

Idée 1 : Exploiter le Thm. 2.10.

Par exemple, pour une méthode d'ordre 2 on aurait :

$$\underline{y}_{i+1} = \underline{y}_i + \Delta t \underline{f}(\underline{t}_i, \underline{y}_i) + \frac{\Delta t^2}{2} \left( \partial_t \underline{f}(\underline{t}_i, \underline{y}_i) + \partial_y \underline{f}(\underline{t}_i, \underline{y}_i) \underline{f}(\underline{t}_i, \underline{y}_i) \right)$$

Cette approche pose plusieurs problèmes :

- Ⓐ L'augmentation de l'ordre devient rapidement très compliqué et nécessite la connaissance et le calcul des dérivées partielles de  $f$ .
- Ⓑ La stabilité de la méthode nécessite des hypothèses de plus en plus forte sur  $f$  pour être prouvée.

## II. a) Définition et analyse

Peut-on proposer des schémas d'ordre plus élevé ?

Idée 1 : Exploiter le Thm. 2.10.

Par exemple, pour une méthode d'ordre 2 on aurait :

$$\underline{y}_{i+1} = \underline{y}_i + \Delta t \underline{f}(\underline{t}_i, \underline{y}_i) + \frac{\Delta t^2}{2} \left( \partial_t \underline{f}(\underline{t}_i, \underline{y}_i) + \partial_y \underline{f}(\underline{t}_i, \underline{y}_i) \underline{f}(\underline{t}_i, \underline{y}_i) \right)$$

Idée 2 : Introduire des pas intermédiaires

## II. a) Définition et analyse

Peut-on proposer des schémas d'ordre plus élevé ?

Idée 1 : Exploiter le Thm. 2.10.

Par exemple, pour une méthode d'ordre 2 on aurait :

$$\underline{y}_{i+1} = \underline{y}_i + \Delta t \underline{f}(\underline{t}_i, \underline{y}_i) + \frac{\Delta t^2}{2} \left( \partial_t \underline{f}(\underline{t}_i, \underline{y}_i) + \partial_y \underline{f}(\underline{t}_i, \underline{y}_i) \underline{f}(\underline{t}_i, \underline{y}_i) \right)$$

Idée 2 : Introduire des pas intermédiaires

→ Méthodes de Runge-Kutta

## II. b) Les méthodes de Runge Kutta

Revenons un instant à la formule

$$\underline{y}(\underline{t}_{i+1}) = \underline{y}(\underline{t}_i) + \int_{\underline{t}_i}^{\underline{t}_{i+1}} \underline{f}(s, \underline{y}(s)) ds$$

et considérons  $r$  points intermédiaires  $\underline{t}_{ij} = \underline{t}_i + \theta_j \Delta \underline{t}_i$  avec  $\theta_j \in [0,1]$ . L'idée est alors d'appliquer une formule de quadrature plus précises exploitant ces  $r$  points :

$$\int_{\underline{t}_i}^{\underline{t}_{i+1}} \underline{f}(s, \underline{y}(s)) ds \simeq \Delta \underline{t}_i \sum_{j=1}^r c_j \underline{f}(\underline{t}_{ij}, \underline{y}(\underline{t}_{ij}))$$

## II. b) Les méthodes de Runge Kutta

Revenons un instant à la formule

$$\underline{y}(t_{i+1}) = \underline{y}(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \underline{f}(s, \underline{y}(s)) ds$$

et considérons  $r$  points intermédiaires  $t_{ij} = t_i + \theta_j \Delta t_i$  avec  $\theta_j \in [0,1]$ . L'idée est alors d'appliquer une formule de quadrature plus précises exploitant ces  $r$  points :

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \underline{f}(s, \underline{y}(s)) ds \simeq \Delta t_i \sum_{j=1}^r c_j \underline{f}(t_{ij}, \underline{y}(t_{ij}))$$

Intuitivement, cela conduit au schéma :

$$\underline{y}_{i+1} = \underline{y}_i + \Delta t_i \sum_{j=1}^r c_j \underline{f}(t_{ij}, \underline{y}_{ij})$$

## II. b) Les méthodes de Runge Kutta

Revenons un instant à la formule

$$\underline{y}(t_{i+1}) = \underline{y}(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \underline{f}(s, \underline{y}(s)) ds$$

et considérons  $r$  points intermédiaires  $t_{ij} = t_i + \theta_j \Delta t_i$  avec  $\theta_j \in [0,1]$ . L'idée est alors d'appliquer une formule de quadrature plus précises exploitant ces  $r$  points :

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \underline{f}(s, \underline{y}(s)) ds \simeq \Delta t_i \sum_{j=1}^r c_j \underline{f}(t_{ij}, \underline{y}(t_{ij}))$$

Intuitivement, cela conduit au schéma :

$$\underline{y}_{-i+1} = \underline{y}_i + \Delta t_i \sum_{j=1}^r c_j \underline{f}(t_{ij}, \underline{y}_{-ij})$$

Comment évaluer  $\underline{y}_{-ij}$  ?

## II. b) Les méthodes de Runge Kutta

Partant du schéma :

$$\underline{y}_{i+1} = \underline{y}_i + \Delta t_i \sum_{j=1}^r c_j \underline{f}(t_{ij}, \underline{y}_{ij})$$

on appliquera la même idée que précédemment pour évaluer  $\underline{y}_{ij}$  (l'approximation de  $\underline{y}(t_{ij})$ ) :

$$\underline{y}(t_{ij}) = \underline{y}(t_i) + \int_{t_i}^{t_{ij}} \underline{f}(s, \underline{y}(s)) ds$$

## II. b) Les méthodes de Runge Kutta

Partant du schéma :

$$\underline{y}_{i+1} = \underline{y}_i + \Delta t_i \sum_{j=1}^r c_j \underline{f}(t_{ij}, \underline{y}_{ij})$$

on appliquera la même idée que précédemment pour évaluer  $\underline{y}_{ij}$  (l'approximation de  $\underline{y}(t_{ij})$ ) :

$$\underline{y}(t_{ij}) = \underline{y}(t_i) + \int_{t_i}^{t_{ij}} \underline{f}(s, \underline{y}(s)) ds$$

On utilise alors une formule « de quadrature » :

$$\underline{y}_{ij} = \underline{y}_i + \Delta t_i \sum_{k=1}^r a_{jk} \underline{f}(t_{ik}, \underline{y}_{ik})$$

## II. b) Les méthodes de Runge Kutta

Partant du schéma :

$$\underline{y}_{i+1} = \underline{y}_i + \Delta t_i \sum_{j=1}^r c_j f(t_{ij}, \underline{y}_{ij})$$

on appliquera la même idée que précédemment pour évaluer  $\underline{y}_{ij}$  (l'approximation de  $\underline{y}(t_{ij})$ ) :

$$\underline{y}(t_{ij}) = \underline{y}(t_i) + \int_{t_i}^{t_{ij}} f(s, \underline{y}(s)) ds$$

On utilise alors une formule « de quadrature » :

$$\underline{y}_{ij} = \underline{y}_i + \Delta t_i \sum_{k=1}^r a_{jk} f(t_{ik}, \underline{y}_{ik})$$

Remarque :

La formule utilisée est a priori différente pour chaque j. 32

## II. b) Les méthodes de Runge Kutta

Partant du schéma :

$$\underline{y}_{i+1} = \underline{y}_i + \Delta t_i \sum_{j=1}^r c_j \underline{f}(t_{ij}, \underline{y}_{ij})$$

on appliquera la même idée que précédemment pour évaluer  $\underline{y}_{ij}$  (l'approximation de  $\underline{y}(t_{ij})$ ) :

$$\underline{y}(t_{ij}) = \underline{y}(t_i) + \int_{t_i}^{t_{ij}} \underline{f}(s, \underline{y}(s)) ds$$

On utilise alors une formule « de quadrature » :

$$\underline{y}_{ij} = \underline{y}_i + \Delta t_i \sum_{k=1}^r a_{jk} \underline{f}(t_{ik}, \underline{y}_{ik})$$

Remarque :

La formule utilisée est a priori différente pour chaque j. 32

## II. b) Les méthodes de Runge Kutta

### 2.11 Définition (méthode de Runge-Kutta)

Étant donné les coefficients  $(c_j)_{j=1,\dots,r}$ ,  $(a_{jk})_{j,k=1,\dots,r}$ ,  $(\theta_j)_{j=1,\dots,r}$  une méthode de RK est définie par :

$$\begin{aligned} \underline{y}_{i+1} &= \underline{y}_i + \Delta t_i \sum_{j=1}^r c_j f(t_{ij}, \underline{y}_{ij}) \\ \underline{y}_{ij} &= \underline{y}_i + \Delta t_i \sum_{k=1}^r a_{jk} f(t_{ik}, \underline{y}_{ik}) \end{aligned} \quad \text{et } t_{ij} = t_i + \theta_j \Delta t_i.$$

## II. b) Les méthodes de Runge Kutta

### 2.11 Définition (méthode de Runge-Kutta)

Étant donné les coefficients  $(c_j)_{j=1,\dots,r}$ ,  $(a_{jk})_{j,k=1,\dots,r}$ ,  $(\theta_j)_{j=1,\dots,r}$  une méthode de RK est définie par :

$$\begin{aligned} \underline{y}_{i+1} &= \underline{y}_i + \Delta t_i \sum_{j=1}^r c_j f(t_{ij}, \underline{y}_{ij}) \\ \underline{y}_{ij} &= \underline{y}_i + \Delta t_i \sum_{k=1}^r a_{jk} f(t_{ik}, \underline{y}_{ik}) \end{aligned} \quad \text{et } t_{ij} = t_i + \theta_j \Delta t_i.$$

De manière plus condensée, on peut reformuler ainsi :

$$\begin{bmatrix} \underline{y}_{i1} \\ \vdots \\ \underline{y}_{ir} \\ \underline{y}_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{y}_i \\ \vdots \\ \underline{y}_i \\ \underline{y}_i \end{bmatrix} + \Delta t_i \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \\ c_1 & \cdots & c_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(t_{i1}, \underline{y}_{i1}) \\ \vdots \\ f(t_{ir}, \underline{y}_{ir}) \end{bmatrix}$$

## II. b) Les méthodes de Runge Kutta

### 2.11 Définition (méthode de Runge-Kutta)

Étant donné les coefficients  $(c_j)_{j=1,\dots,r}$ ,  $(a_{jk})_{j,k=1,\dots,r}$ ,  $(\theta_j)_{j=1,\dots,r}$  une méthode de RK est définie par :

$$\begin{aligned} \underline{y}_{i+1} &= \underline{y}_i + \Delta t_i \sum_{j=1}^r c_j f(t_{ij}, \underline{y}_i) \\ \underline{y}_{ij} &= \underline{y}_i + \Delta t_i \sum_{k=1}^r a_{jk} f(t_{ik}, \underline{y}_i) \end{aligned} \quad \text{et } t_{ij} = t_i + \theta_j \Delta t_i.$$

Remarque :

On résume généralement une méthode de RK à l'aide du tableau de Butcher :

$\theta_1$	$a_{11}$	$\dots$	$a_{1r}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$\theta_r$	$a_{r1}$	$\dots$	$a_{rr}$
	<hr/>		<hr/>
	$c_1$	$\dots$	$c_r$

## II. b) Les méthodes de Runge Kutta

### 2.11 Définition (méthode de Runge-Kutta)

Étant donné les coefficients  $(c_j)_{j=1,\dots,r}$ ,  $(a_{jk})_{j,k=1,\dots,r}$ ,  $(\theta_j)_{j=1,\dots,r}$  une méthode de RK est définie par :

$$\begin{aligned} \underline{y}_{-i+1} &= \underline{y}_i + \Delta t_i \sum_{j=1}^r c_j f(t_{ij}, \underline{y}_{-ij}) \\ \underline{y}_{-ij} &= \underline{y}_i + \Delta t_i \sum_{k=1}^r a_{jk} f(t_{ik}, \underline{y}_{-ik}) \end{aligned} \quad \text{et } t_{ij} = t_i + \theta_j \Delta t_i.$$

Remarque 2 :

Il s'agit bien d'une méthode à 1-pas car on calcule  $\underline{y}_{-i+1}$  à l'aide uniquement de  $\underline{y}_i$ .

## II. b) Les méthodes de Runge Kutta

Quelques exemples :

• Méthode de Euler :

$$\underline{y}_{i+1} = \underline{y}_i + \Delta t_i \underline{f}(\underline{t}_i, \underline{y}_i)$$

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$$

## II. b) Les méthodes de Runge Kutta

Quelques exemples :

① Méthode de Euler :

$$\underline{y}_{i+1} = \underline{y}_i + \Delta t_i \underline{f}(\underline{t}_i, \underline{y}_i)$$

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$$

② Méthode de Euler Implicit

$$\underline{y}_{i+1} = \underline{y}_i + \Delta t_i \underline{f}(\underline{t}_{i+1}, \underline{y}_{i+1})$$

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

Remarque :

On a ici une équation non linéaire à résoudre à chaque pas de temps. A priori, rien ne nous garantit l'existence et l'unicité de la solution. On peut en fait le prouver pour un  $\Delta t_i$  suffisamment petit avec l'hypothèse de  $f$  Lip.

## II. b) Les méthodes de Runge Kutta

Quelques exemples :

① Méthode de Euler :

$$\underline{y}_{i+1} = \underline{y}_i + \Delta t_i \underline{f}(t_i, \underline{y}_i)$$

0	0
	1

② Méthode de Euler Implicit

$$\underline{y}_{i+1} = \underline{y}_i + \Delta t_i \underline{f}(t_{i+1}, \underline{y}_{i+1})$$

1	1
	1

③ Méthode de Heun

$$\underline{y}_{i+1} = \underline{y}_i + \frac{\Delta t_i}{2} \left( \underline{f}(t_{i1}, \underline{y}_{i1}) + \underline{f}(t_{i2}, \underline{y}_{i2}) \right)$$

0	0	0
1	1	0
	1	1

$$\underline{y}_{i1} = \underline{y}_i$$

$$\underline{y}_{i2} = \underline{y}_i + \Delta t_i \underline{f}(t_{i1}, \underline{y}_{i1})$$

## II. b) Les méthodes de Runge Kutta

### 2.12 Théorème

Une méthode de RK est consistante ssi  $\sum_{j=1}^r c_j = 1$ .

Preuve : au (vrai) tableau !

## II. b) Les méthodes de Runge Kutta

### 2.12 Théorème

Une méthode de RK est consistante ssi  $\sum_{j=1}^r c_j = 1$ .

### 2.13 Théorème

En notant A la matrice de coefficients  $a_{ij}$ , une méthode de RK est stable si  $\Delta t_i \leq h^*$  pour tout i avec  $h^* L \rho(A) < 1$  où L est la constante de Lipschitz de f.

Idée de la preuve : au (vrai) tableau !

## II. b) Les méthodes de Runge Kutta

### 2.12 Théorème

Une méthode de RK est consistante ssi  $\sum_{j=1}^r c_j = 1$ .

### 2.13 Théorème

En notant A la matrice de coefficients  $a_{ij}$ , une méthode de RK est stable si  $\Delta t_i \leq h^*$  pour tout i avec  $h^* L \rho(A) < 1$  où L est la constante de Lipschitz de f.

Remarque :

Pour une méthode de RK explicite, on a  $\rho(A) = 0$  et donc la méthode est toujours stable.

## II. b) Les méthodes de Runge Kutta

### 2.12 Corollaire (du Thm. 2.10)

Une méthode de RK est d'ordre  $p$  ssi elle vérifie les conditions  $j = 1, \dots, p$  du tableau ci-dessous :

$j = 1$	$\underline{c} \cdot \underline{1} = 1$
$j = 2$	$\underline{c}^t \Theta \underline{1} = \underline{c}^t A \underline{1} = \frac{1}{2}$
$j = 3$	$\underline{c}^t \Theta^2 \underline{1} = \underline{c}^t \Theta A \underline{1} = \underline{c}^t (A \underline{1})^2 = \frac{1}{3}$ et $\underline{c}^t A \Theta \underline{1} = \underline{c}^t A^2 \underline{1} = \frac{1}{6}$

où  $\Theta$  est la matrice diagonale formée des  $\theta_i$  et  $\underline{1}$  le vecteur de composantes 1 de  $\mathbb{R}^r$ .

Idée de la preuve : au (vrai) tableau !

## II. b) Les méthodes de Runge Kutta

Conditions pour une méthode d'ordre élevé :

Les conditions précédentes ont le défaut de devenir rapidement inextricables ! On a souvent recourt à des conditions simplificatrices.

Typiquement, en imposant  $A\underline{1} = \Theta\underline{1}$ , le tableau devient :

$j = 1$	$\underline{c} \cdot \underline{1} = 1$
$j = 2$	$\underline{c}^t \Theta \underline{1} = \frac{1}{2}$
$j = 3$	$\underline{c}^t \Theta^2 \underline{1} = \frac{1}{3}$ et $\underline{c}^t A \Theta \underline{1} = \frac{1}{6}$

# Au programme (Chapitre 3)

Objectif :

Étant donné  $t_0 \in [a, b]$ , déterminer numériquement la solution d'un système d'EDO :  $\begin{cases} \underline{y}'(t) = \underline{f}(t, \underline{y}(t)), & t \in [a, b] \\ \underline{y}(t_0) = \underline{y}_0 \end{cases}$

Plan :

I. Le théorème de Cauchy-Lipschitz

II. Les méthodes à 1-pas

III. Les méthodes multi-pas

a) Définition et analyse

b) Les méthodes prédition-correction

IV. Quelques extensions

### III. a) Définition et analyse

L'idée de départ pour construire une méthode multi-pas est la remarque suivante :

$$\underline{y}(\underline{t}_{i+k}) = \underline{y}(\underline{t}_i) + \int_{\underline{t}_i}^{\underline{t}_{i+k}} \underline{f}(s, \underline{y}(s)) ds$$

On utilisera alors une formule de quadrature pour évaluer l'intégrale exploitant les points  $\underline{y}(\underline{t}_{i+j})$  :

$$\int_{\underline{t}_i}^{\underline{t}_{i+k}} \underline{f}(s, \underline{y}(s)) ds \simeq \Delta \underline{t} \sum_{j=0}^k \beta_j \underline{f}(\underline{t}_{i+j}, \underline{y}(\underline{t}_{i+j}))$$

ce qui conduit au schéma suivant :

$$\underline{y}_{-i+k} = \underline{y}_i + \Delta \underline{t} \sum_{j=0}^k \beta_j \underline{f}(\underline{t}_{i+j}, \underline{y}_{-i+j})$$

### III. a) Définition et analyse

L'idée de départ pour construire une méthode multi-pas est la remarque suivante :

$$\underline{y}(\underline{t}_{i+k}) = \underline{y}(\underline{t}_i) + \int_{\underline{t}_i}^{\underline{t}_{i+k}} \underline{f}(s, \underline{y}(s)) ds$$

On utilisera alors une formule de quadrature pour évaluer l'intégrale exploitant les points  $\underline{y}(\underline{t}_{i+j})$  :

$$\int_{\underline{t}_i}^{\underline{t}_{i+k}} \underline{f}(s, \underline{y}(s)) ds \simeq \Delta t \sum_{j=0}^k \beta_j \underline{f}(\underline{t}_{i+j}, \underline{y}(\underline{t}_{i+j}))$$

ce qui conduit au schéma suivant :

$$\underline{y}_{-i+k} = \underline{y}_i + \Delta t \sum_{j=0}^k \beta_j \underline{f}(\underline{t}_{i+j}, \underline{y}_{-i+j})$$

Remarque : Pour les méthodes multi-pas, on se limitera au cas  $\Delta t$  constant.

### III. a) Définition et analyse

#### 3.1 Définition (méthode multi-pas)

Étant donné  $\alpha_j$  et  $\beta_j$ , avec  $\alpha_k \neq 0$ , on définit la méthode multi-pas comme suit :

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j \underline{y}_{-i+j} = \Delta t \sum_{j=0}^k \beta_j \underline{f(t}_{i+j}, \underline{y}_{-i+j})$$

### III. a) Définition et analyse

#### 3.1 Définition (méthode multi-pas)

Étant donné  $\alpha_j$  et  $\beta_j$ , avec  $\alpha_k \neq 0$ , on définit la méthode multi-pas comme suit :

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{-i+j} = \Delta t \sum_{j=0}^k \beta_j f(t_{i+j}, y_{-i+j})$$

Remarques :

- ② Pour initialiser la méthode, i.e. calculer  $y_{-1}, \dots, y_{-k-1}$ , il faut utiliser une méthode à 1 pas.

### III. a) Définition et analyse

#### 3.1 Définition (méthode multi-pas)

Étant donné  $\alpha_j$  et  $\beta_j$ , avec  $\alpha_k \neq 0$ , on définit la méthode multi-pas comme suit :

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j \underline{y}_{-i+j} = \Delta t \sum_{j=0}^k \beta_j \underline{f(t}_{i+j}, \underline{y}_{-i+j})$$

Remarques :

- ① Pour initialiser la méthode, i.e. calculer  $\underline{y}_{-1}, \dots, \underline{y}_{-k-1}$ , il faut utiliser une méthode à 1 pas.
- ② Le calcul de  $\underline{y}_{-i+k+1}$  ne nécessite qu'une évaluation de  $\underline{f}$  ce qui permet un gain en coût de calculs.

### III. a) Définition et analyse

#### 3.1 Définition (méthode multi-pas)

Étant donné  $\alpha_j$  et  $\beta_j$ , avec  $\alpha_k \neq 0$ , on définit la méthode multi-pas comme suit :

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{-i+j} = \Delta t \sum_{j=0}^k \beta_j f(t_{i+j}, y_{-i+j})$$

Pour l'analyse de ces méthodes, il sera utile d'introduire deux polynômes :

①  $\alpha(t) = \sum_{j=0}^k \alpha_j t^j$

②  $\beta(t) = \sum_{j=0}^k \beta_j t^j$

### III. a) Définition et analyse

#### 3.2 Définition (consistance)

Une méthode multi-pas est dite **consistante** ssi l'erreur de consistance :

$$\underline{\varepsilon}_i = \frac{1}{\Delta t} \sum_{j=0}^k \alpha_j \underline{y}(t_{i+j}) - \sum_{j=0}^k \beta_j \underline{f}(t_{i+j}, \underline{y}(t_{i+j}))$$

vérifie  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \max_{i \in \{0, \dots, N-k\}} \|\underline{\varepsilon}_i\| = 0$

### III. a) Définition et analyse

#### 3.2 Définition (consistance)

Une méthode multi-pas est dite **consistante** ssi l'erreur de consistance :

$$\underline{\varepsilon}_i = \frac{1}{\Delta t} \sum_{j=0}^k \alpha_j \underline{y}(t_{i+j}) - \sum_{j=0}^k \beta_j \underline{f}(t_{i+j}, \underline{y}(t_{i+j}))$$

vérifie  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \max_{i \in \{0, \dots, N-k\}} \|\underline{\varepsilon}_i\| = 0$

#### 3.3 Théorème (admis, cf démo. Thm.)

Une méthode multi-pas est consistante ssi  $\alpha(1) = 0$  et  $\alpha'(1) = \beta(1)$ .

### III. a) Définition et analyse

#### 3.4 Définition (stabilité)

Soit  $\tilde{\underline{\varepsilon}}_i$  une suite et  $\underline{z}_i$  définie par

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j \underline{z}_{i+j} = \Delta t \left[ \tilde{\underline{\varepsilon}}_i + \sum_{j=0}^k \beta_j \underline{f}(t_{i+j}, \underline{z}_{i+j}) \right]$$

alors la méthode est dite **stable** ssi il existe  $M > 0$  tq.

$$\max_{0 \leq i \leq N} \|\underline{y}_i - \underline{z}_i\| \leq M \left( \max_{0 \leq i \leq k-1} \|\underline{y}_i - \underline{z}_i\| + \max_{0 \leq i \leq N-k} \|\tilde{\underline{\varepsilon}}_i\| \right)$$

### III. a) Définition et analyse

#### 3.4 Définition (stabilité)

Soit  $\tilde{\varepsilon}_i$  une suite et  $\underline{z}_i$  définie par

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j \underline{z}_{i+j} = \Delta t \left[ \tilde{\varepsilon}_i + \sum_{j=0}^k \beta_j \underline{f}(t_{i+j}, \underline{z}_{i+j}) \right]$$

alors la méthode est dite **stable** ssi il existe  $M > 0$  tq.

$$\max_{0 \leq i \leq N} \|\underline{y}_i - \underline{z}_i\| \leq M \left( \max_{0 \leq i \leq k-1} \|\underline{y}_i - \underline{z}_i\| + \max_{0 \leq i \leq N-k} \|\tilde{\varepsilon}_i\| \right)$$

#### 3.5 Théorème (admis)

Une méthode multi-pas est stable ssi les racines de  $\alpha(t)$  sont de module inférieur à 1, et celle de module 1 de multiplicité simple.

### III. a) Définition et analyse

#### 3.6 Définition (convergence)

Une méthode multi-pas est dite **convergente** ssi

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \max_{0 \leq i \leq N} \|\underline{y}(t_i) - \underline{y}_i\| = 0$$

### III. a) Définition et analyse

#### 3.6 Définition (convergence)

Une méthode multi-pas est dite **convergente** ssi

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \max_{0 \leq i \leq N} \left\| \underline{y}(t_i) - \underline{y}_i \right\| = 0$$

#### 3.7 Théorème

Si une méthode multi-pas est stable et consistante et vérifie

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \max_{0 \leq i \leq k-1} \left\| \underline{y}(t_i) - \underline{y}_i \right\| = 0$$

alors elle est convergente.

Preuve : au (vrai) tableau !

### III. a) Définition et analyse

#### 3.8 Définition (ordre)

Une méthode multi-pas est d'ordre  $p$  ssi

$$\max_{0 \leq i \leq N-k} \|\underline{\varepsilon}_i\| = O(\Delta t^p)$$

### III. a) Définition et analyse

#### 3.8 Définition (ordre)

Une méthode multi-pas est d'ordre p ssi

$$\max_{0 \leq i \leq N-k} \|\underline{\varepsilon}_i\| = O(\Delta t^p)$$

#### 3.9 Corollaire

Si une méthode est convergente et d'ordre p alors

$$\max_{0 \leq i \leq N} \|\underline{y}(t_i) - \underline{y}_i\| = O(\Delta t^p)$$

### III. a) Définition et analyse

#### 3.8 Définition (ordre)

Une méthode multi-pas est d'ordre p ssi

$$\max_{0 \leq i \leq N-k} \|\underline{\varepsilon}_i\| = O(\Delta t^p)$$

#### 3.9 Corollaire

Si une méthode est convergente et d'ordre p alors

$$\max_{0 \leq i \leq N} \|\underline{y}(t_i) - \underline{y}_i\| = O(\Delta t^p)$$

Remarque :

Ce résultat n'est vrai que si on initialise la méthode multi-pas avec un méthode d'ordre p au moins !

### III. a) Définition et analyse

#### 3.10 Théorème

Une méthode multi-pas est d'ordre  $p$  si  
 $C_l = 0, \forall l \in \{0, \dots, p\}$  où :

$$C_0 = \sum_{i=0}^k \alpha_i \quad \text{et} \quad C_l = \sum_{j=0}^k \alpha_j \frac{j^l}{l!} - \beta_j \frac{j^{l-1}}{(l-1)!}$$

Preuve : au (vrai) tableau !

Remarque :

Ce résultat n'est vrai que si on initialise la méthode multi-pas avec un méthode d'ordre  $p$  au moins !

## III. b) Méthode de prédiction correction

### Méthode implicite

Dans le cas où  $\beta_k \neq 0$ , la méthode multi-pas est **implicite** :

$$\alpha_k \underline{y}_{i+k} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j \underline{y}_{i+j} = \Delta t \beta_k \underline{f(t}_{i+k}, \underline{y}_{i+k}) + \Delta t \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \underline{f(t}_{i+j}, \underline{y}_{i+j})$$

ce qui conduit à résoudre une équation non linéaire.

### III. b) Méthode de prédiction correction

#### Méthode implicite

Dans le cas où  $\beta_k \neq 0$ , la méthode multi-pas est **implicite** :

$$\alpha_k \underline{y}_{i+k} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j \underline{y}_{i+j} = \Delta t \beta_k \underline{f(t}_{i+k}, \underline{y}_{i+k}) + \Delta t \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \underline{f(t}_{i+j}, \underline{y}_{i+j})$$

ce qui conduit à résoudre une **équation non linéaire**.

Deux difficultés apparaissent alors :

- Ⓐ Comment initialiser la méthode de Newton pour résoudre le problème non linéaire ?
- Ⓑ Quel critère choisir pour stopper les itérations ?

## III. b) Méthode de prédiction correction

### Méthode implicite

Dans le cas où  $\beta_k \neq 0$ , la méthode multi-pas est **implicite** :

$$\alpha_k \underline{y}_{-i+k} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j \underline{y}_{-i+j} = \Delta t \beta_k \underline{f(t_{i+k}, y_{-i+k})} + \Delta t \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \underline{f(t_{i+j}, y_{-i+j})}$$

ce qui conduit à résoudre une **équation non linéaire**.

Pour palier ces deux difficultés, l'idée est d'utiliser une méthode de **prédiction-correction** :

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j \underline{y}_{-i+j} = \Delta t \beta_k \underline{f(t_{i+k}, y'_{-i+k})} + \Delta t \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \underline{f(t_{i+j}, y_{-i+j})} \quad (\text{Correcteur})$$

$$\alpha'_k \underline{y'_{-i+k}} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha'_j \underline{y_{-i+j}} = \Delta t \sum_{j=0}^{k-1} \beta'_j \underline{f(t_{i+j}, y_{-i+j})} \quad (\text{Prédicteur})$$

## III. b) Méthode de prédiction correction

Méthode prédiction-correction :

On considère la méthode de prédiction-correction :

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j \underline{y}_{-i+j} = \Delta t \beta_k \underline{f(t}_{i+k}, \underline{y'}_{i+k}) + \Delta t \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j \underline{f(t}_{i+j}, \underline{y}_{i+j}) \quad (\text{Correcteur})$$

$$\alpha'_k \underline{y'}_{i+k} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha'_j \underline{y}_{i+j} = \Delta t \sum_{j=0}^{k-1} \beta'_j \underline{f(t}_{i+j}, \underline{y}_{i+j}) \quad (\text{Prédicteur})$$

### 3.11 Théorème

Si la méthode du prédicteur est d'ordre  $q \geq p - 1$  où  $p$  est l'ordre du correcteur, alors la méthode de prédiction correction est d'ordre  $p$ .

Preuve : au (vrai) tableau !

# Au programme (Chapitre 3)

Objectif :

Étant donné  $t_0 \in [a, b]$ , déterminer numériquement la solution d'un système d'EDO :  $\begin{cases} \underline{y}'(t) = \underline{f}(t, \underline{y}(t)), & t \in [a, b] \\ \underline{y}(t_0) = \underline{y}_0 \end{cases}$

Plan :

I. Le théorème de Cauchy-Lipschitz

II. Les méthodes à 1-pas

III. Les méthodes multi-pas

IV. Quelques extensions

a) Adaptation du pas

b) Méthode pararéel

## IV. a) Adaptation du pas

Revenons sur les méthodes à 1-pas :

$$\underline{y}_{i+1} = \underline{y}_i + \Delta t_i \underline{\Phi}(\underline{t}_i, \underline{y}_i, \Delta t_i)$$

Si on connaissait l'erreur de consistance  $\underline{\varepsilon}_i$ , on pourrait adapter le pas  $\Delta t_i$  à chaque itération.

Idée :

Utiliser une seconde méthode pour approcher l'erreur de consistance :

$$\underline{y}'_{i+1} = \underline{y}'_i + \Delta t_i \underline{\Phi}'(\underline{t}_i, \underline{y}'_i, \Delta t_i)$$

On supposera que la première méthode est d'ordre  $p$  et la deuxième d'ordre  $p' > p$ .

## IV. a) Adaptation du pas

On rappelle que l'on a :

$$\underline{\varepsilon}_i = \underline{y}(\underline{t}_{i+1}) - \underline{y}(\underline{t}_i) - \Delta \underline{t}_i \underline{\Phi}(\underline{t}_i, \underline{y}(\underline{t}_i), \Delta \underline{t}_i)$$

et

$$\underline{\varepsilon}'_i = \underline{y}(\underline{t}_{i+1}) - \underline{y}(\underline{t}_i) - \Delta \underline{t}_i \underline{\Phi}'(\underline{t}_i, \underline{y}(\underline{t}_i), \Delta \underline{t}_i)$$

### 4.1 Proposition (cf TD)

L'erreur de consistance  $\underline{\varepsilon}_i$  vérifie :

$$\underline{\varepsilon}_i = \underline{y}_i + \Delta \underline{t}_i \underline{\Phi}'(\underline{t}_i, \underline{y}_i, \Delta \underline{t}_i) - \underline{y}_{i+1} + O(\Delta \underline{t}_i^{p+2})$$

## IV. a) Adaptation du pas

On rappelle que l'on a :

$$\underline{\varepsilon}_i = \underline{y}(\underline{t}_{i+1}) - \underline{y}(\underline{t}_i) - \Delta \underline{t}_i \underline{\Phi}(\underline{t}_i, \underline{y}(\underline{t}_i), \Delta \underline{t}_i)$$

et

$$\underline{\varepsilon}'_i = \underline{y}(\underline{t}_{i+1}) - \underline{y}(\underline{t}_i) - \Delta \underline{t}_i \underline{\Phi}'(\underline{t}_i, \underline{y}(\underline{t}_i), \Delta \underline{t}_i)$$

### 4.1 Proposition (cf TD)

L'erreur de consistance  $\underline{\varepsilon}_i$  vérifie :

$$\underline{\varepsilon}_i = \underline{y}_i + \Delta \underline{t}_i \underline{\Phi}'(\underline{t}_i, \underline{y}_i, \Delta \underline{t}_i) - \underline{y}_{i+1} + O(\Delta \underline{t}_i^{p+2})$$

Idée : Choisir le « plus grand » pas  $\Delta \underline{t}_i$  t.q. L'estimation de  $\|\underline{\varepsilon}_i\|$  soit inférieur à une tolérance fixée !

## IV. a) Adaptation du pas

Algorithme d'adaptation du pas à chaque pas de tps :

Tant que  $\|e_i\| > tol$  et  $\|ep_i\| < tol$  :

$$ep_i \leftarrow e_i$$

$$y_{i+1} \leftarrow y_i + \Delta t_i \Phi(t_i, y_i, \Delta t_i)$$

$$\tilde{y}_{i+1} \leftarrow y_i + \Delta t_i \Phi'(t_i, y_i, \Delta t_i)$$

$$e_i \leftarrow y_{i+1} - \tilde{y}_{i+1}$$

Si  $\|e_i\| < tol$  alors

$$\Delta t_i \leftarrow \Delta t_i \times 0.8$$

Si  $\|e_i\| > tol$  alors

$$\Delta t_i \leftarrow \Delta t_i \times 1.2$$

## IV. a) Adaptation du pas

Algorithme d'adaptation du pas à chaque pas de tps :

Tant que  $\|e_i\| > tol$  et  $\|ep_i\| < tol$  :

$$ep_i \leftarrow e_i$$

$$y_{i+1} \leftarrow y_i + \Delta t_i \Phi(t_i, y_i, \Delta t_i)$$

$$\tilde{y}_{i+1} \leftarrow y_i + \Delta t_i \Phi'(t_i, y_i, \Delta t_i)$$

$$e_i \leftarrow y_{i+1} - \tilde{y}_{i+1}$$

Si  $\|e_i\| < tol$  alors

$$\Delta t_i \leftarrow \Delta t_i \times 0.8$$

Si  $\|e_i\| > tol$  alors

$$\Delta t_i \leftarrow \Delta t_i \times 1.2$$

A priori courteux !

## IV. a) Adaptation du pas

### 4.1 Définition (Runge-Kutta emboîtée)

Un couple de méthode de RK respectivement d'ordre  $p$  et  $p' > p$  et impliquant  $r$  et  $r' = r + 1$  pas intermédiaire est dite **emboîtée** ssi les tableaux de Butcher vérifient :

$\theta_1$	$a_{11}$	$\dots$	$a_{1r}$	$0$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$\theta_r$	$a_{r1}$	$\dots$	$a_{rr}$	$0$
<hr/>	<hr/>	<hr/>	<hr/>	<hr/>
$1$	$c_1$	$\dots$	$c_r$	$0$
<hr/>	<hr/>	<hr/>	<hr/>	<hr/>
	$c'_1$	$\dots$	$c'_r$	$c'_{r+1}$

## IV. a) Adaptation du pas

### 4.1 Définition (Runge-Kutta emboîtée)

Un couple de méthode de RK respectivement d'ordre  $p$  et  $p' > p$  et impliquant  $r$  et  $r' = r + 1$  pas intermédiaire est dite **emboîtée** ssi les tableaux de Butcher vérifient :

$\theta_1$	$a_{11} \dots a_{1r}$	$0$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\theta_r$	$a_{r1} \dots a_{rr}$	$0$
<hr/>	<hr/>	<hr/>
$1$	$c_1 \dots c_r$	$0$
<hr/>	<hr/>	<hr/>
	$c'_1 \dots c'_r$	$c'_{r+1}$



$$\begin{aligned} \underline{y}_{-i+1} &= \underline{y}_i + \Delta t_i \sum_{j=1}^r c_j f(t_{ij}, \underline{y}_{-ij}) \\ \underline{y}_{-ij} &= \underline{y}_i + \Delta t_i \sum_{k=1}^{r'} a_{jk} f(t_{jk}, \underline{y}_{-jk}) \end{aligned}$$

## IV. a) Adaptation du pas

### 4.1 Définition (Runge-Kutta emboîtée)

Un couple de méthode de RK respectivement d'ordre  $p$  et  $p' > p$  et impliquant  $r$  et  $r' = r + 1$  pas intermédiaire est dite **emboîtée** ssi les tableaux de Butcher vérifient :

$\theta_1$	$a_{11} \dots a_{1r}$	$0$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\theta_r$	$a_{r1} \dots a_{rr}$	$0$
<hr/>	<hr/>	<hr/>
$1$	$c_1 \dots c_r$	$0$
<hr/>	<hr/>	<hr/>
	$c'_1 \dots c'_r$	$c'_{r+1}$

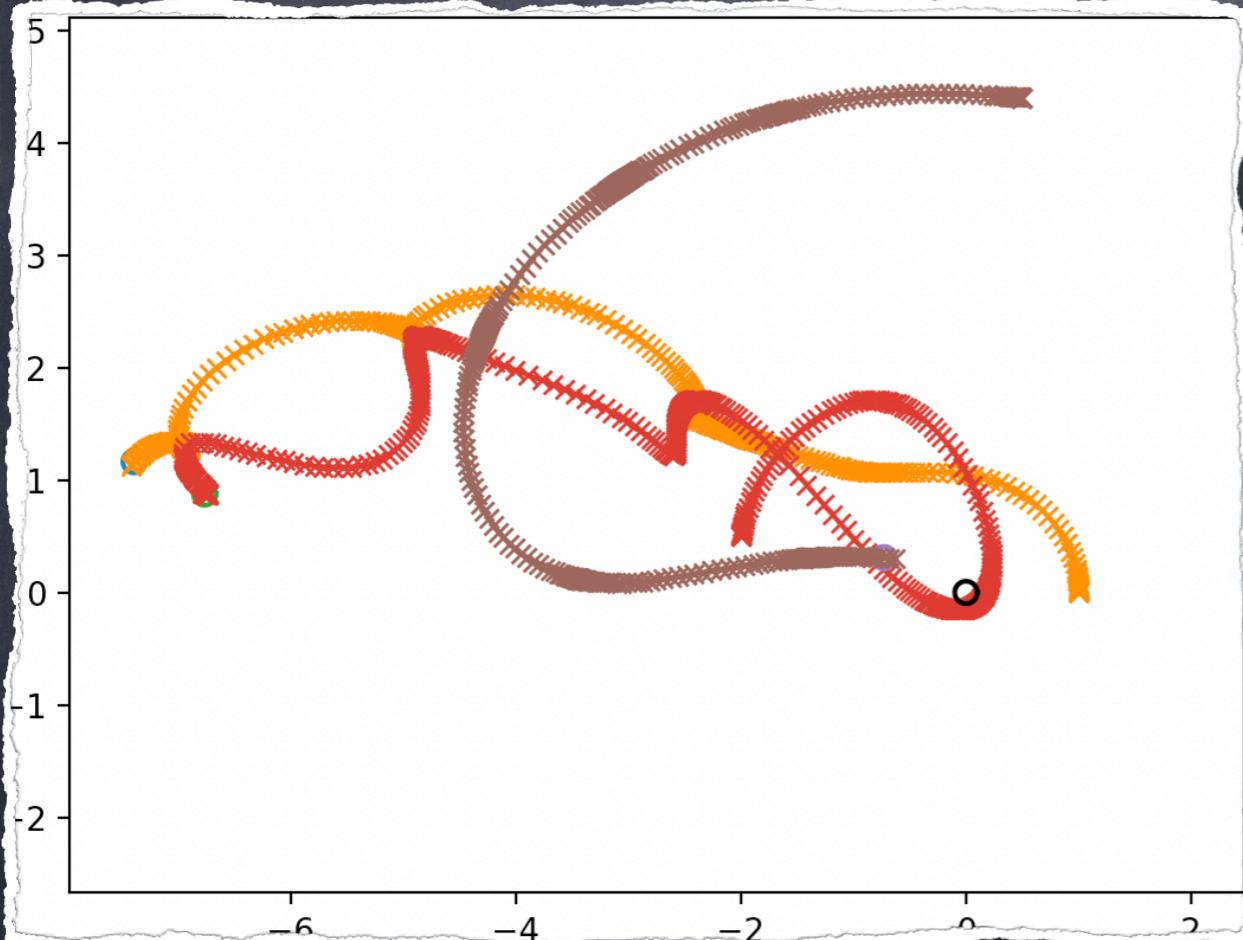


$$\begin{aligned}
 \underline{y}_{-i+1} &= \underline{y}_i + \Delta t_i \sum_{j=1}^r c_j f(\underline{t}_{ij}, \underline{y}_{-ij}) \\
 \underline{y}_{-ij} &= \underline{y}_i + \Delta t_i \sum_{k=1}^r a_{jk} f(\underline{t}_{jk}, \underline{y}_{-jk}) \\
 \tilde{\underline{y}}_{-i+1} &= \underline{y}_i + \Delta t_i \sum_{j=1}^{r+1} c'_j f(\underline{t}_{ij}, \underline{y}_{-ij})
 \end{aligned}$$

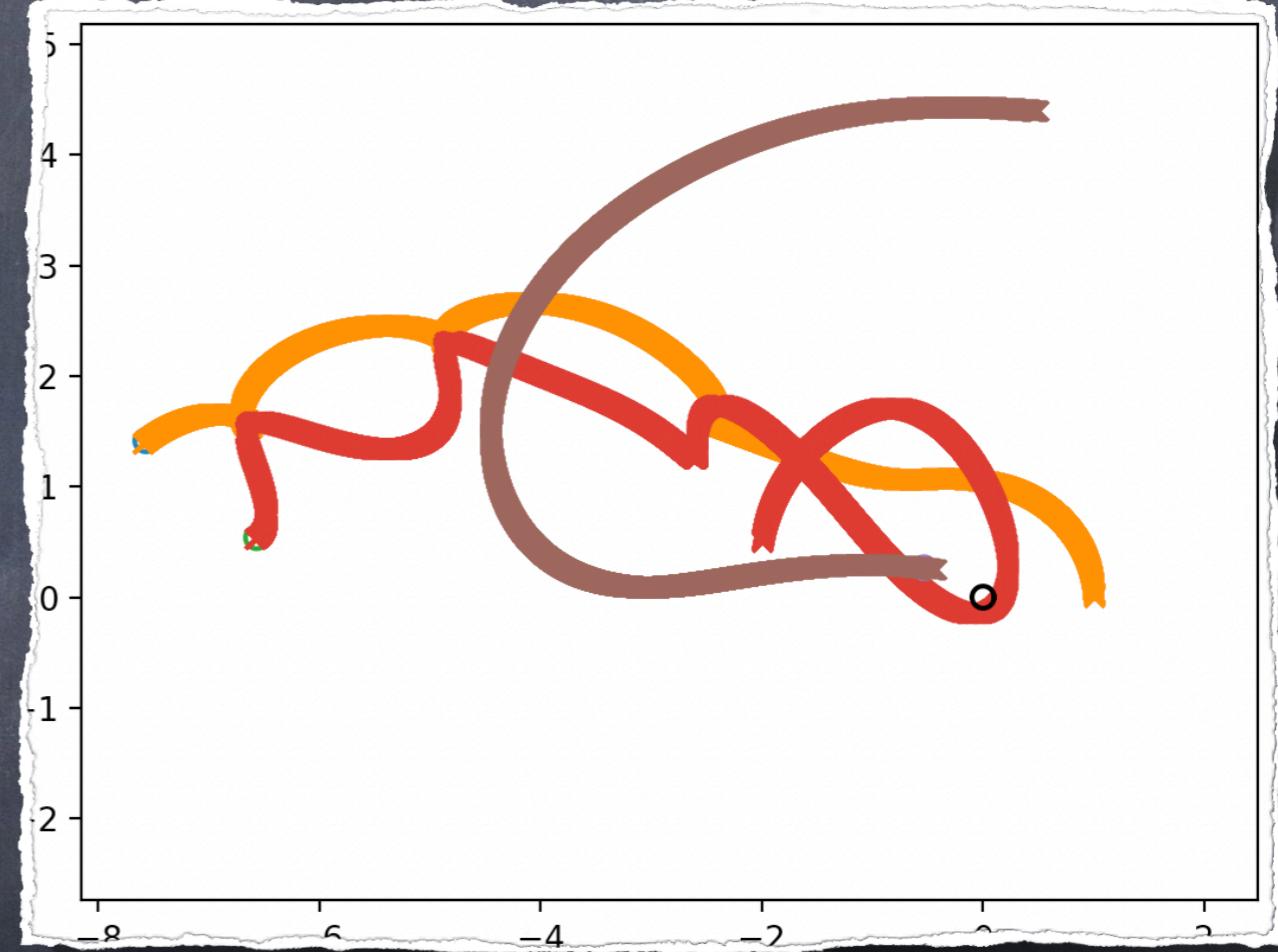
## IV. a) Adaptation du pas

Illustration méthode de Runge-Kutta emboîtée

Simulation du mouvement de trois planètes.



Méthode de RK 24  
(Tps  $\sim$  0.1s)



Méthode de RK 4  
(Tps  $\sim$  1s)

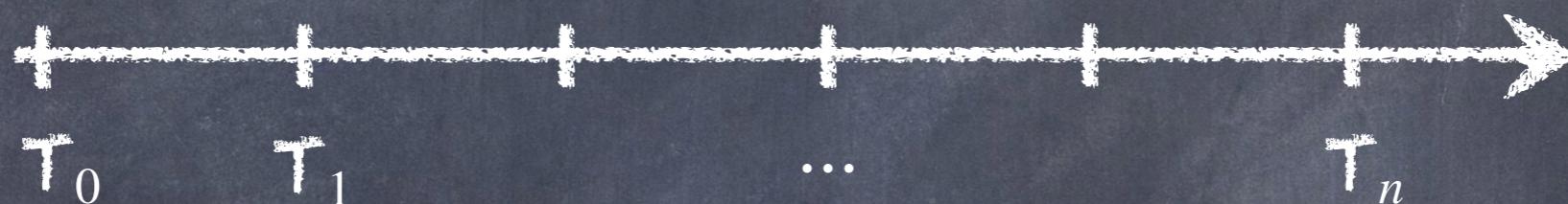
## IV. b) Méthode pararéel

Considérons une série d'instant  $T_0 = t_0 < \dots < T_N < T$  et notons  $y_n$  l'approximation de la solution à ces instants.

Remarque : On aura  $t_{n+1} - t_n > \Delta t$

## IV. b) Méthode pararéel

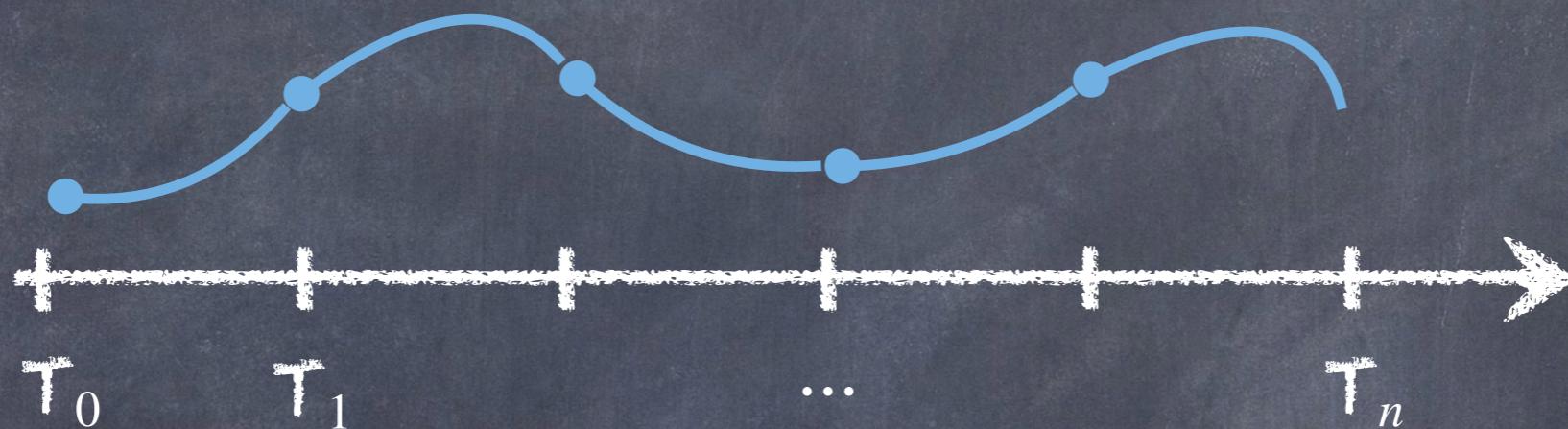
Considérons une série d'instant  $T_0 = t_0 < \dots < T_N < T$  et notons  $y_n$  l'approximation de la solution à ces instants.



Remarque : On aura  $t_{n+1} - t_n > \Delta t$

## IV. b) Méthode pararéel

Considérons une série d'instant  $T_0 = t_0 < \dots < T_N < T$  et notons  $y_n$  l'approximation de la solution à ces instants.

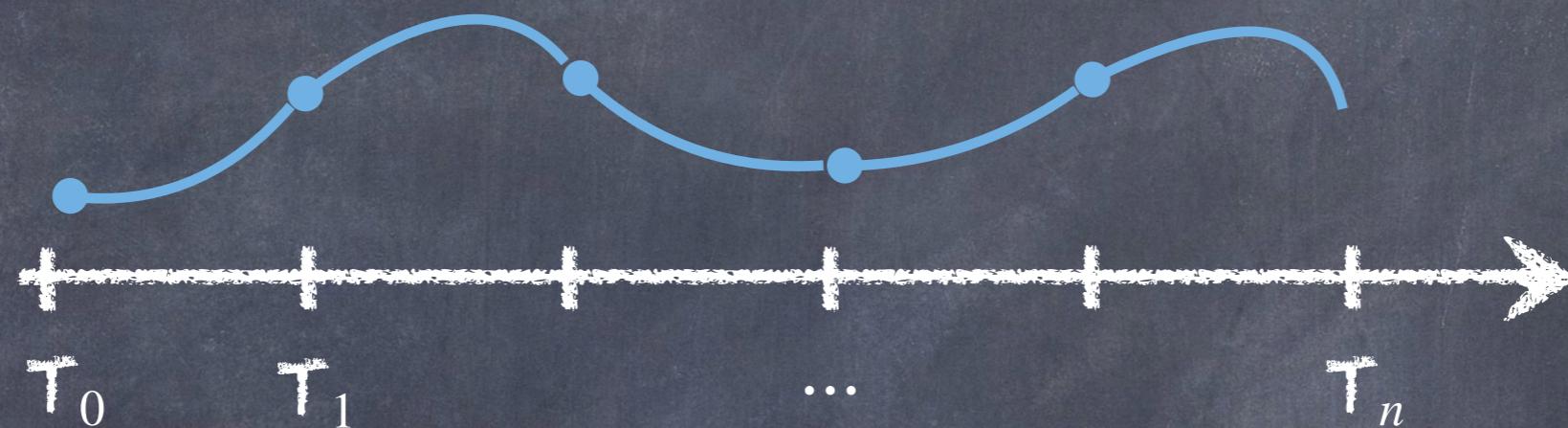


**Idée / Objectif :** Calculer en parallèle la solution dans chaque intervalle  $[t_n, t_{n+1}]$ .

**Remarque :** On aura  $t_{n+1} - t_n > \Delta t$

## IV. b) Méthode pararéel

Considérons une série d'instant  $T_0 = t_0 < \dots < T_N < T$  et notons  $y_n$  l'approximation de la solution à ces instants.



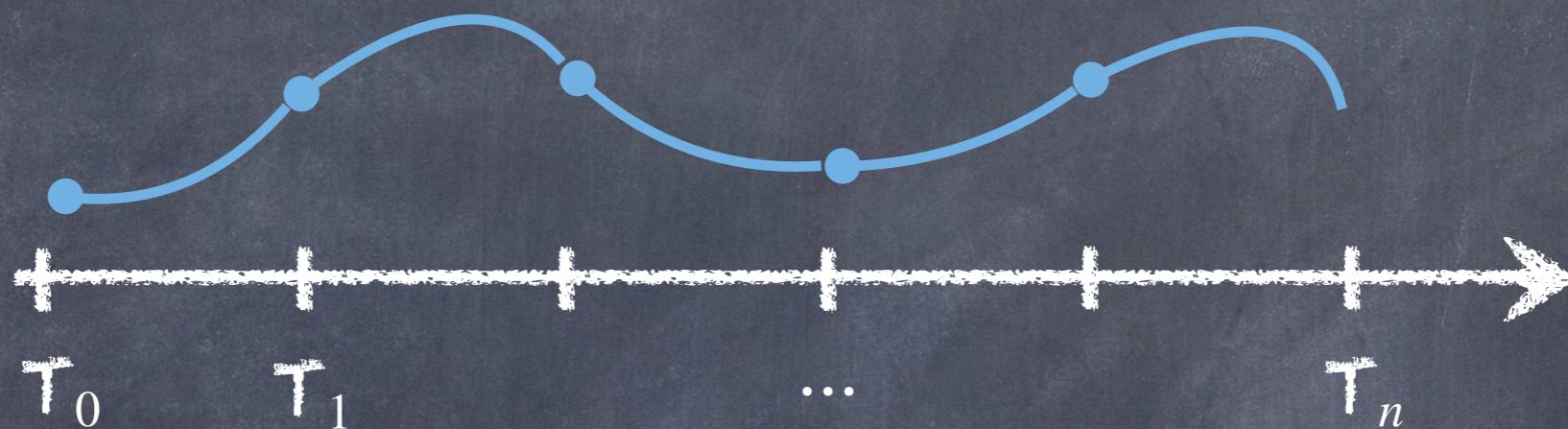
**Idée / Objectif :** Calculer en parallèle la solution dans chaque intervalle  $[t_n, t_{n+1}]$ .

**Problème :** Connaitre l'approximation  $y_n$ .

**Remarque :** On aura  $t_{n+1} - t_n > \Delta t$

## IV. b) Méthode pararéel

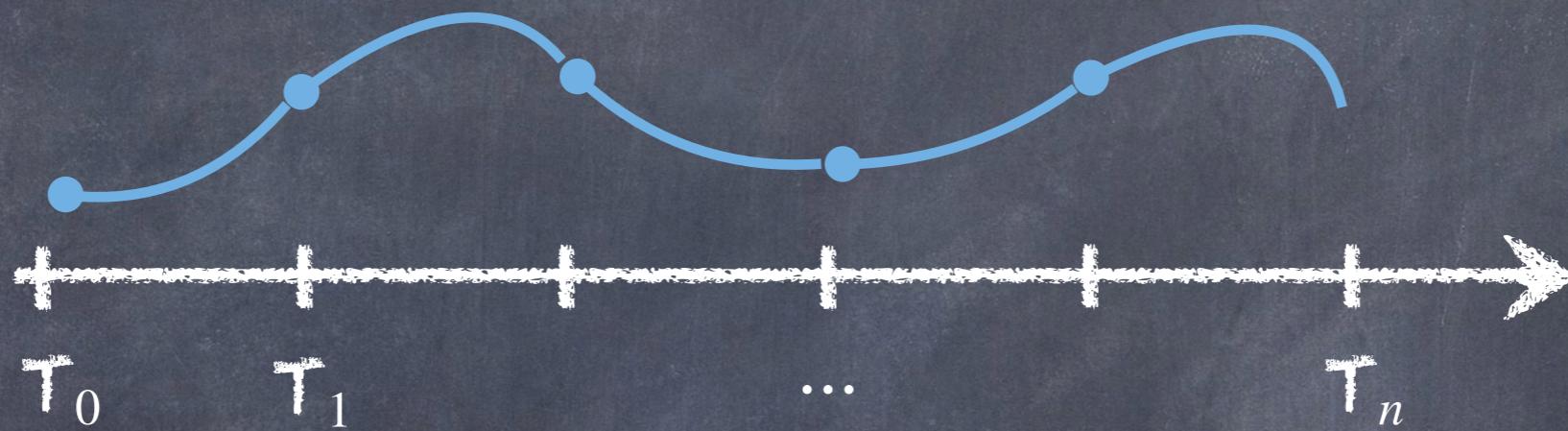
Considérons une série d'instant  $T_0 = t_0 < \dots < T_N < T$  et notons  $y_n$  l'approximation de la solution à ces instants.



Introduisons également deux méthodes de résolution :

## IV. b) Méthode pararéel

Considérons une série d'instant  $T_0 = t_0 < \dots < T_N < T$  et notons  $y_n$  l'approximation de la solution à ces instants.

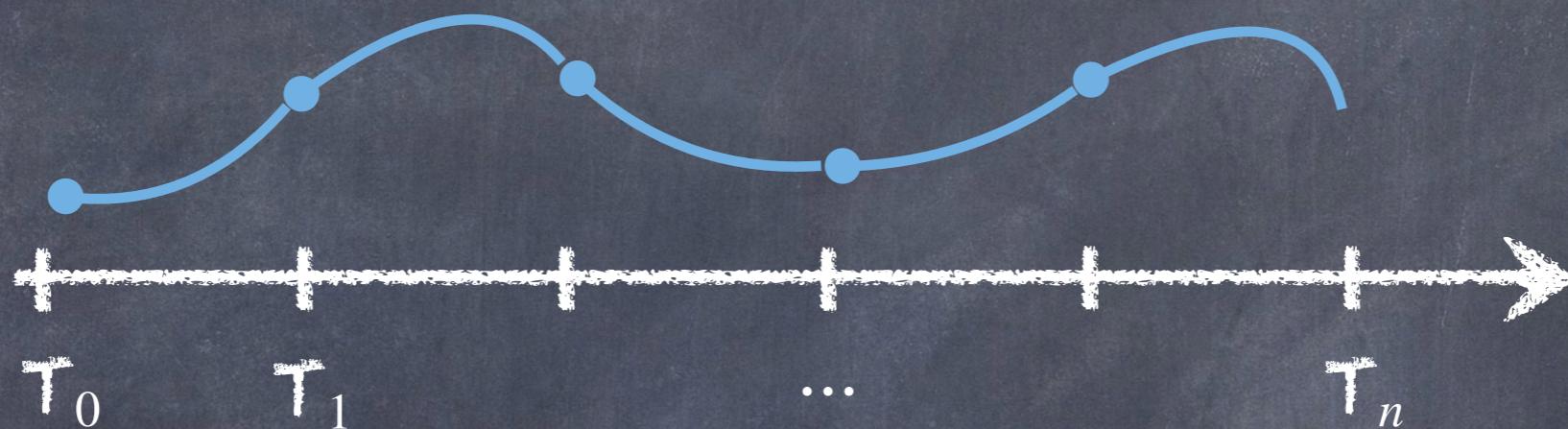


Introduisons également deux méthodes de résolution :

- ① Une précise et coûteuse  $\mathcal{F}$ . On notera  $\mathcal{F}(y_n, t_n, t_{n+1})$   
L'approximation obtenue avec en  $t_{n+1}$  partant de  $(t_n, y_n)$
- ② Une grossière et peu coûteuse  $\mathcal{G}$ . On notera  $\mathcal{G}(y_n, t_n, t_{n+1})$   
L'approximation obtenue avec en  $t_{n+1}$  partant de  $(t_n, y_n)$

## IV. b) Méthode pararéel

Considérons une série d'instant  $T_0 = t_0 < \dots < T_N < T$  et notons  $\underline{y}_n$  l'approximation de la solution à ces instants.

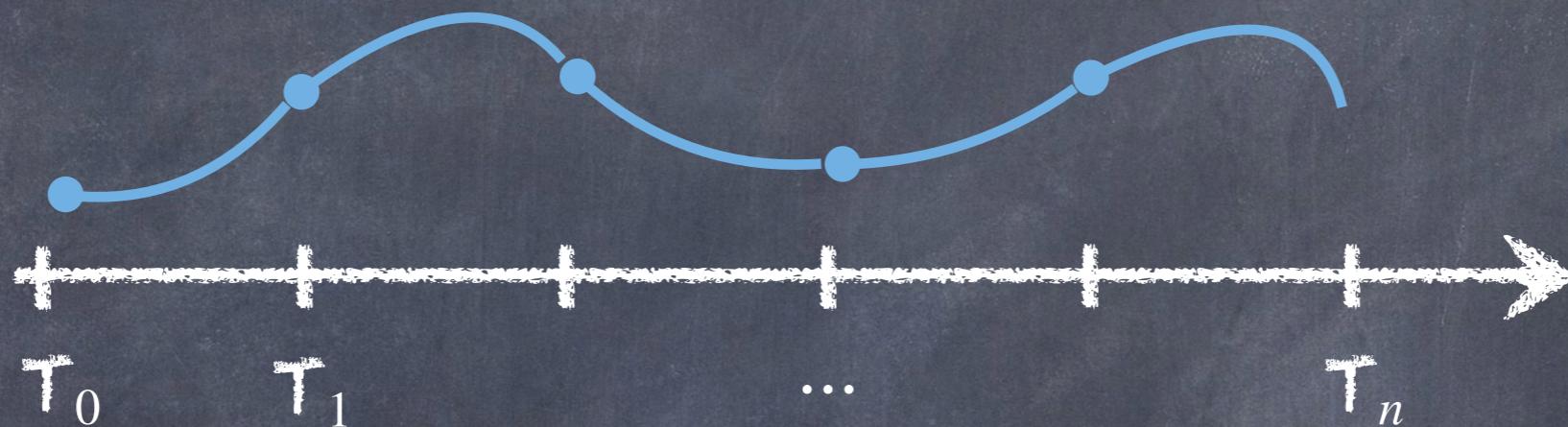


**Idée :** Calculer itérativement les approximations  $\underline{y}_n$  :

$$\underline{y}_{n+1}^{k+1} = \mathcal{F}(\underline{y}_n^k, t_n, t_{n+1}) + \mathcal{G}(\underline{y}_n^{k+1}, t_n, t_{n+1}) - \mathcal{G}(\underline{y}_n^k, t_n, t_{n+1})$$

## IV. b) Méthode pararéel

Considérons une série d'instant  $T_0 = t_0 < \dots < T_N < T$  et notons  $\underline{y}_n$  l'approximation de la solution à ces instants.



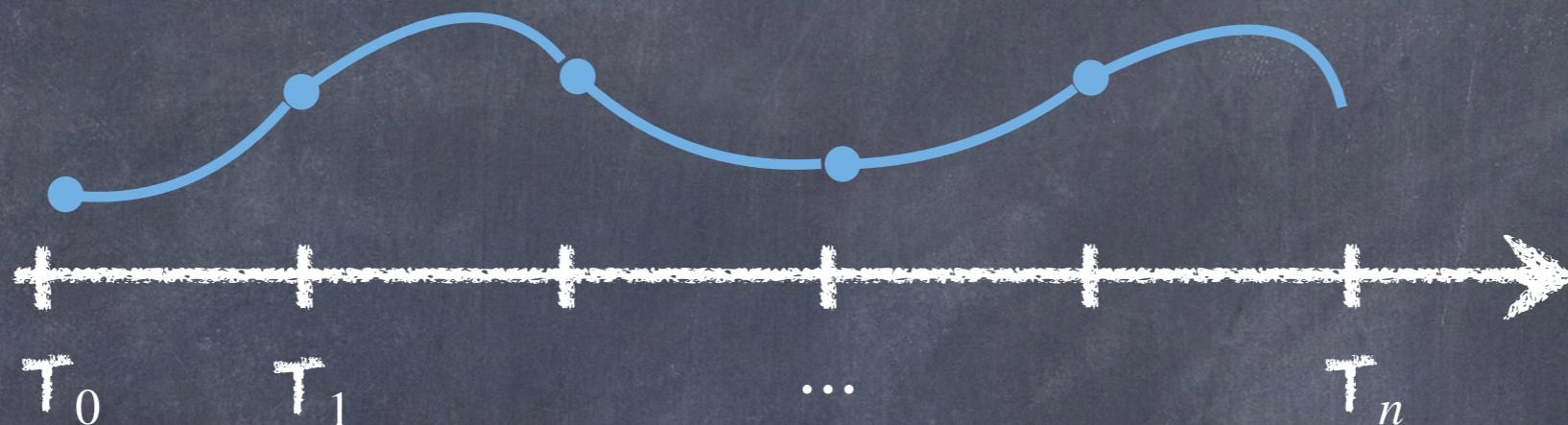
**Idée :** Calculer itérativement les approximations  $\underline{y}_n$  :

$$\underline{y}_{n+1}^{k+1} = \mathcal{F}(\underline{y}_n^k, t_n, t_{n+1}) + \boxed{\mathcal{G}(\underline{y}_n^{k+1}, t_n, t_{n+1}) - \mathcal{G}(\underline{y}_n^k, t_n, t_{n+1})}$$

Séquentiel

## IV. b) Méthode pararéel

Considérons une série d'instant  $T_0 = t_0 < \dots < T_N < T$  et notons  $\underline{y}_n$  l'approximation de la solution à ces instants.



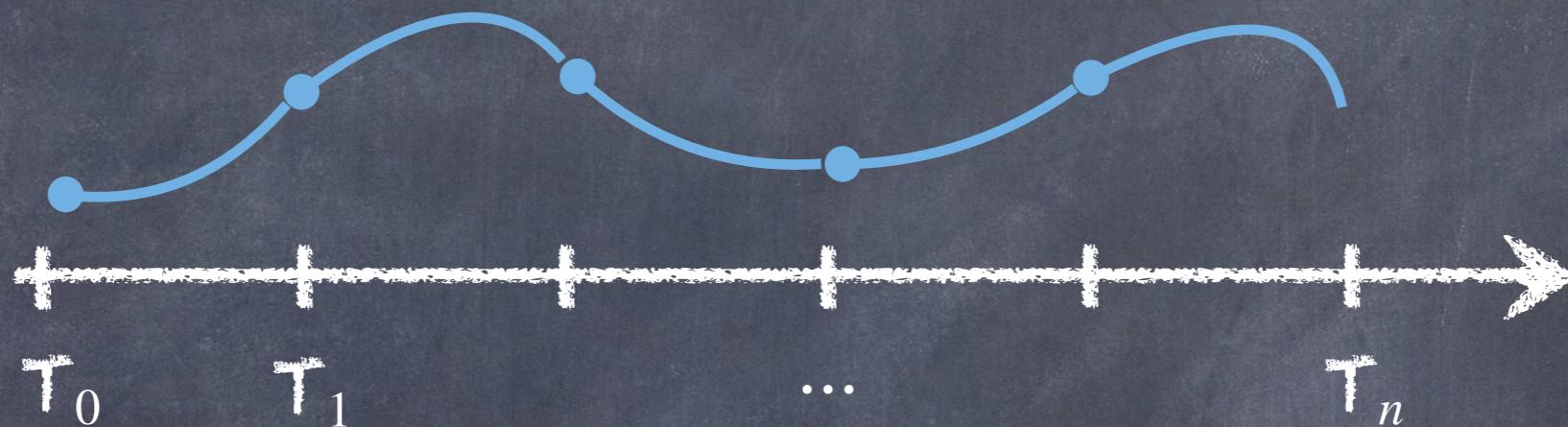
Idée : Calculer itérativement les approximations  $\underline{y}_n$  :

$$\underline{y}_{n+1}^{k+1} = \mathcal{F}(\underline{y}_n^k, t_n, t_{n+1}) + \mathcal{G}(\underline{y}_n^{k+1}, t_n, t_{n+1}) - \mathcal{G}(\underline{y}_n^k, t_n, t_{n+1})$$

Parallèle ! Séquentiel Parallèle !

## IV. b) Méthode pararéel

Considérons une série d'instant  $T_0 = t_0 < \dots < T_N < T$  et notons  $\underline{y}_n$  l'approximation de la solution à ces instants.



**Idée : Calculer itérativement les approximations  $\underline{y}_n$  :**

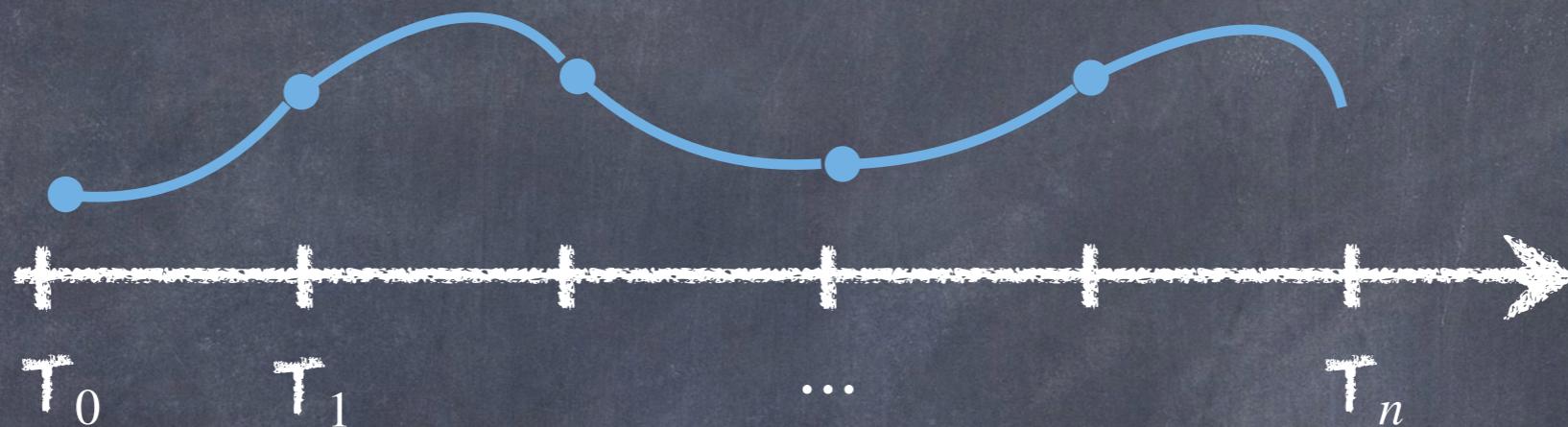
$$\underline{y}_{n+1}^{k+1} = \mathcal{F}(\underline{y}_n^k, t_n, t_{n+1}) + \mathcal{G}(\underline{y}_n^{k+1}, t_n, t_{n+1}) - \mathcal{G}(\underline{y}_n^k, t_n, t_{n+1})$$



$$\underline{y}_{n+1} = \mathcal{F}(\underline{y}_n, t_n, t_{n+1}) + \mathcal{G}(\underline{y}_n, t_n, t_{n+1}) - \mathcal{G}(\underline{y}_n, t_n, t_{n+1})$$

## IV. b) Méthode pararéel

Considérons une série d'instant  $T_0 = t_0 < \dots < T_N < T$  et notons  $\underline{y}_n$  l'approximation de la solution à ces instants.



**Idée : Calculer itérativement les approximations  $\underline{y}_n$  :**

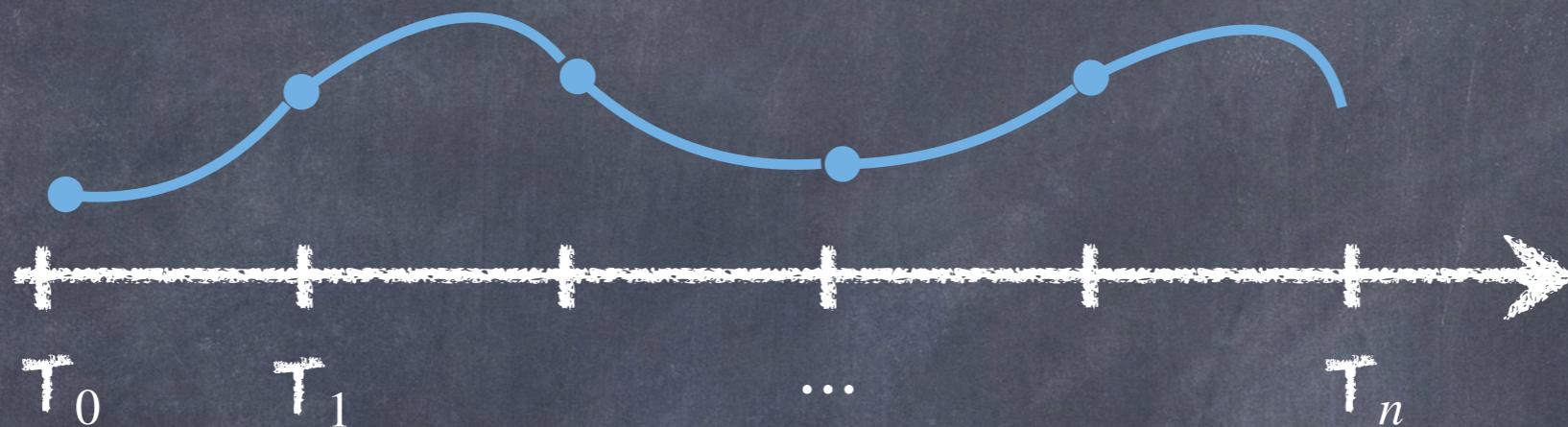
$$\underline{y}_{n+1}^{k+1} = \mathcal{F}(\underline{y}_n^k, t_n, t_{n+1}) + \mathcal{G}(\underline{y}_n^{k+1}, t_n, t_{n+1}) - \mathcal{G}(\underline{y}_n^k, t_n, t_{n+1})$$



$$\underline{y}_{n+1} = \mathcal{F}(\underline{y}_n, t_n, t_{n+1}) + \mathcal{G}(\underline{y}_n, t_n, t_{n+1}) - \mathcal{G}(\underline{y}_n, t_n, t_{n+1})$$

## IV. b) Méthode pararéel

Considérons une série d'instant  $T_0 = t_0 < \dots < T_N < T$  et notons  $\underline{y}_n$  l'approximation de la solution à ces instants.



Idée : Calculer itérativement les approximations  $\underline{y}_n$  :

$$\underline{y}_{n+1}^{k+1} = \mathcal{F}(\underline{y}_n^k, t_n, t_{n+1}) + \mathcal{G}(\underline{y}_n^{k+1}, t_n, t_{n+1}) - \mathcal{G}(\underline{y}_n^k, t_n, t_{n+1})$$

Remarque :

Une méthode pararéel sera efficace seulement si on converge rapidement en  $k$ .

## IV. b) Méthode pararéel

Illustration méthode pararéel :

Résolution du système de Lotka-Volterra

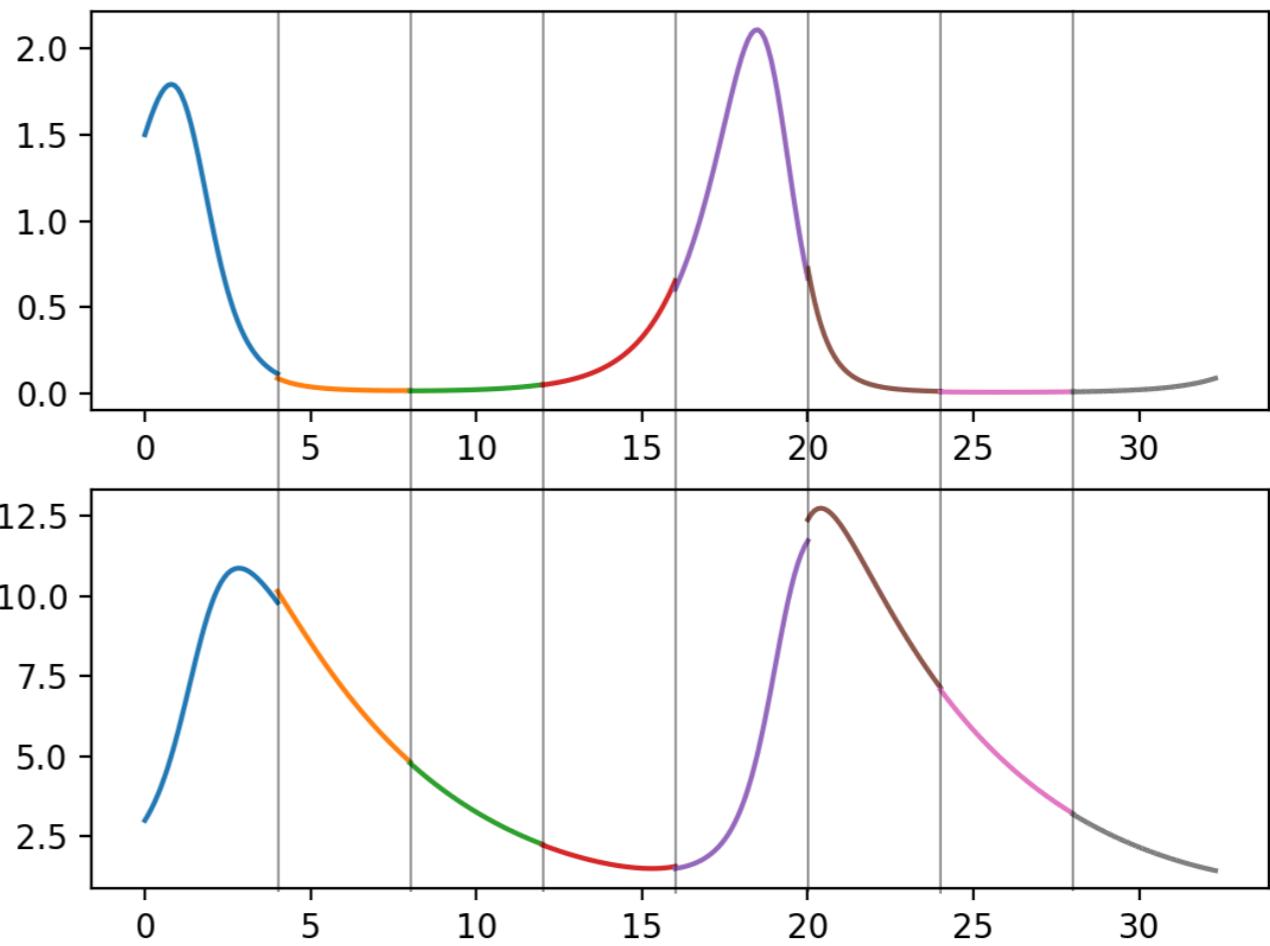
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \alpha x(t) - \beta x(t)y(t) \\ \dot{y}(t) = \delta x(t)y(t) - \gamma y(t) \end{cases}$$

Paramètres :

$$\Delta t = 0.1$$

Euler / RK4

8 sous domaines



## IV. b) Méthode pararéel

Illustration méthode pararéel :

Résolution du système de Lotka-Volterra

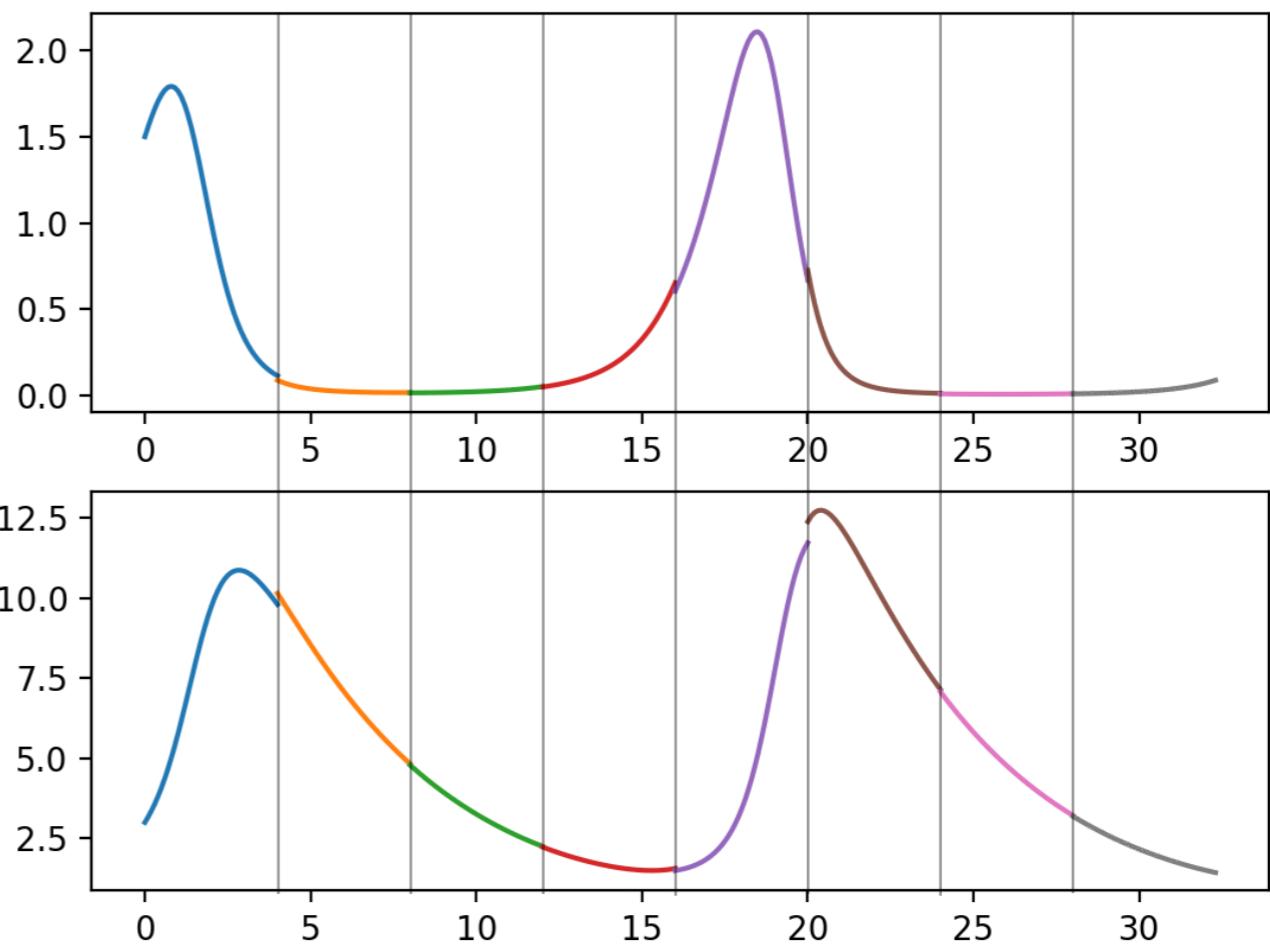
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \alpha x(t) - \beta x(t)y(t) \\ \dot{y}(t) = \delta x(t)y(t) - \gamma y(t) \end{cases}$$

Paramètres :

$$\Delta t = 0.1$$

Euler / RK4

8 sous domaines



## IV. b) Méthode pararéel

Illustration méthode pararéel :

Résolution du système de Lorentz (chaotique !)

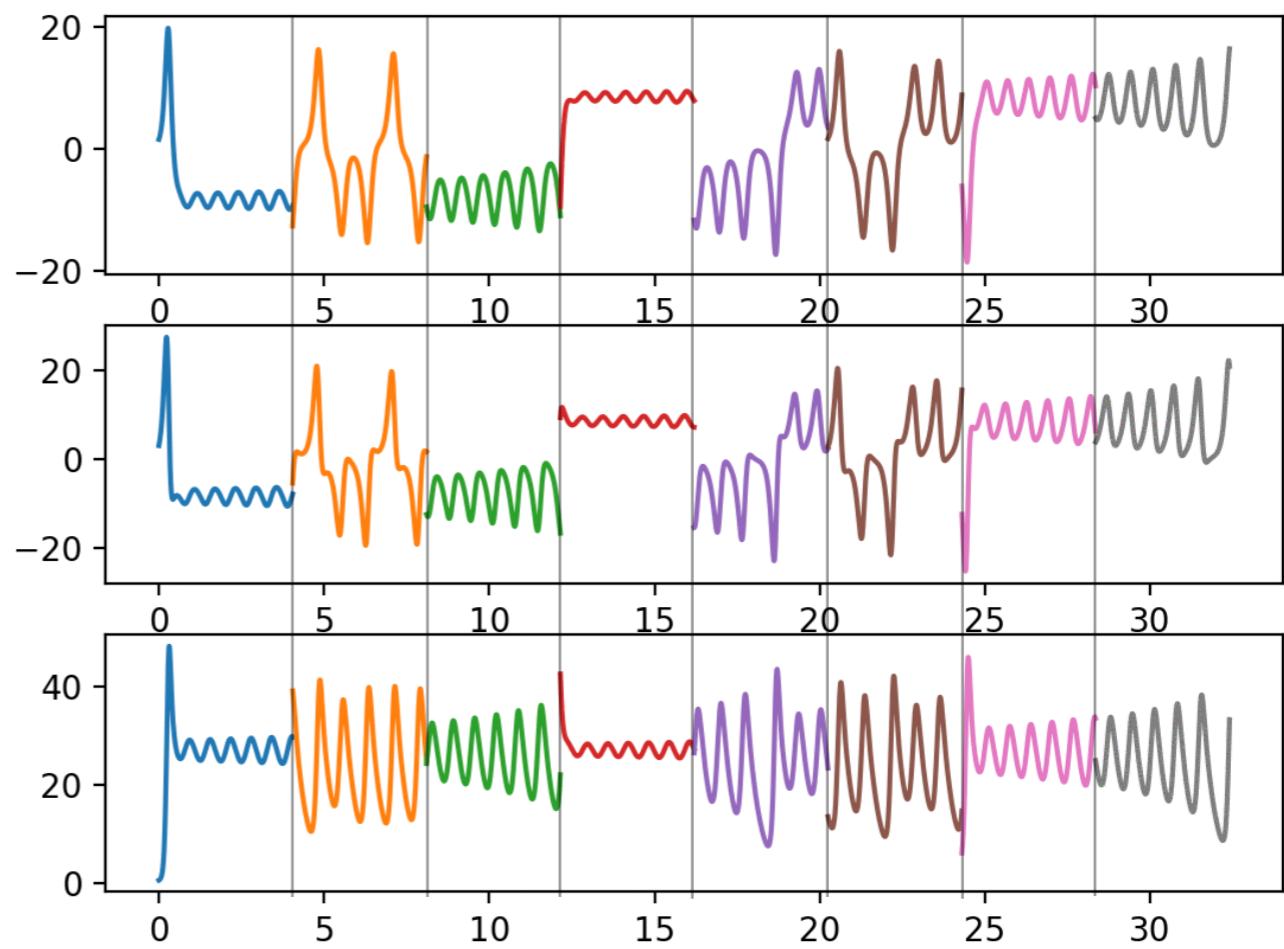
$$\begin{cases} x'(t) = \sigma(y(t) - x(t)) \\ y'(t) = \rho x(t) - y(t) - x(t)z(t) \\ z'(t) = x(t)y(t) - \beta z(t) \end{cases}$$

Paramètres :

$$\Delta t = 0.1$$

Euler / RK4

8 sous domaines



## IV. b) Méthode pararéel

Illustration méthode pararéel :

Résolution du système de Lorentz (chaotique !)

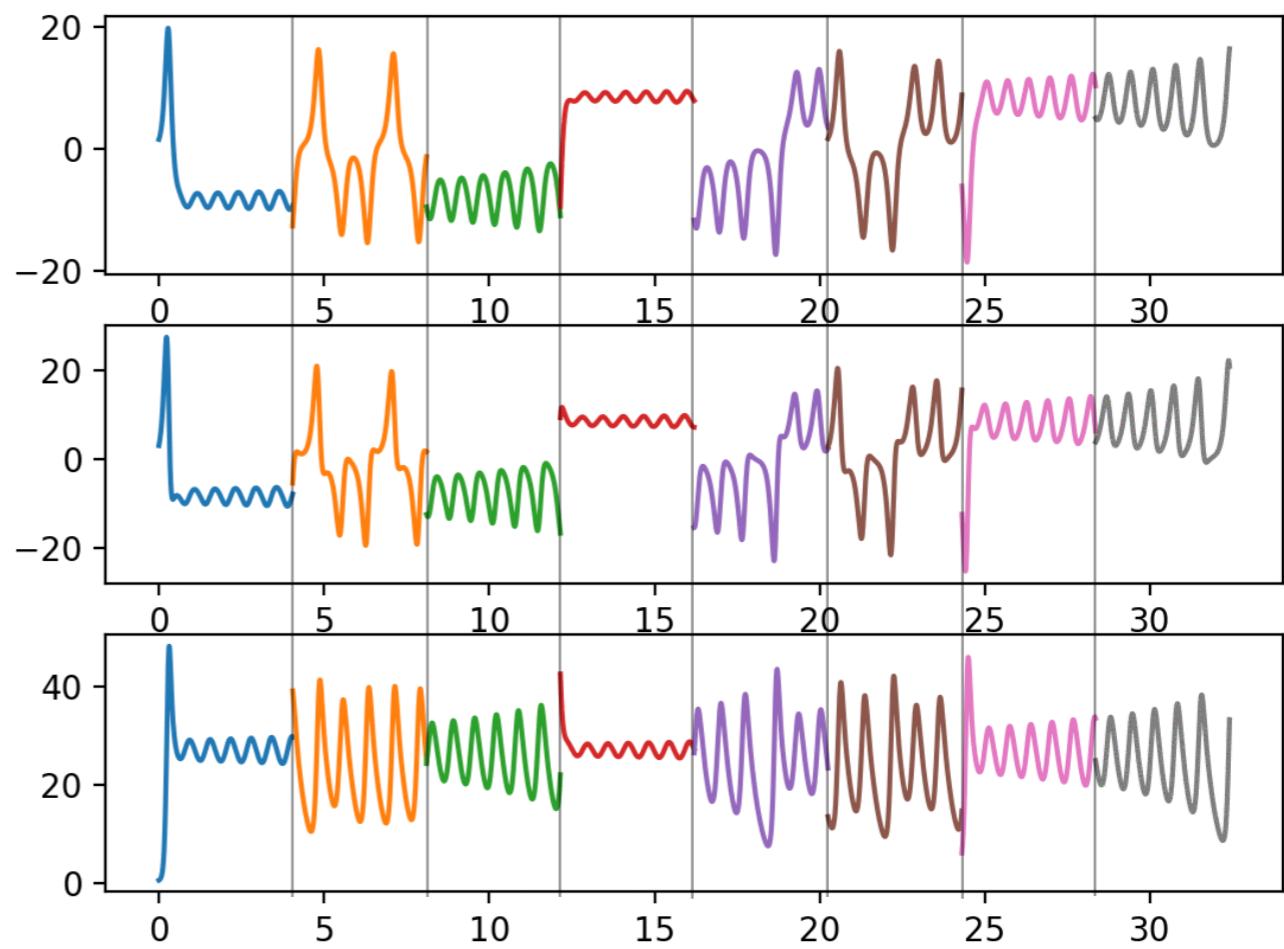
$$\begin{cases} x'(t) = \sigma(y(t) - x(t)) \\ y'(t) = \rho x(t) - y(t) - x(t)z(t) \\ z'(t) = x(t)y(t) - \beta z(t) \end{cases}$$

Paramètres :

$$\Delta t = 0.1$$

Euler / RK4

8 sous domaines



# Plan détaillé du chapitre 3

Plan :

I. Le théorème de Cauchy-Lipschitz

II. Les méthodes à 1-pas

a) Définition et analyse

b) Les méthodes de Runge Kutta

III. Les méthodes multi-pas

a) Définition et analyse

b) Les méthodes prédiction-correction

IV. Quelques extensions

a) Adaptation du pas

b) Méthode pararéel