INSA. Rouen. GM3 et EM Sic 3. 2022/2023. Rachida El Assoudi.

Cours : Mesure et Intégration. Partie II. Intégration.

Ce résumé présente la suite du chapitre 2 (Intégration), il contient les définitions, les propriétés et les théorèmes fondamentaux. Les démonstrations sont faites en cours.
La partie I du Chapitre 2 contient le I et II :
I. Intégrale d'une fonction simple positive.
1. Définitions, exemples.
2. Propriétés. Théorèmes fondamentaux.

II. Intégrale d'une application mesurable positive.
1. Définitions, exemples. Théorèmes fondamentaux.
2. Théorème de Beppo-Levi - Corollaires. Lemme de Fatou.
3. Mesure définie par densité (mesure image).

III. Fonctions μ-intégrables à valeurs réelles ou complexes.
1. Définitions et propriétés.
2. Théorème de convergence dominée. Corollaires
4. Mesure image. Théorème de transfert.
5. Théorème de Fubini -Tonelli.
6. Espaces vectoriels $\mathcal{L}^p(\mu)$ et espaces normés $L^p(\mu)$.
7. Intégrale dépendant d'un paramètre.

Exemples : Transformée de Fourier. Transformée de Laplace.

III. Fonctions μ-intégrables à valeurs réelles ou complexes

1. Définitions et propriétés

Soient $(E, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré et $f \quad E \to \mathbb{C}$ une application.

• Soit $f \quad (E, \mathcal{B}) \to \mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ une application à valeurs réelles mesurable. On note pour $x \in E$,

$$f^+(x) = \mathrm{Sup}(f(x), 0) \;\; et \;\; f^-(x) = -\mathrm{Inf}(f(x), 0)$$

Il est clair que f^+ et f^- sont positives et que $f = f^+ - f^-$.
On sait que le Sup et l'Inf de deux applications mesurables sont mesurables. Donc f^+ et f^- sont mesurables. Leurs intégrales sont bien définies.

En plus, il est clair que

$$|f| = f^+ + f^- \ ; \ |f^+| \leq |f| \ et \ |f^-| \leq |f|.$$

• Soit $f \quad E \to \mathbb{C}$ une application à valeurs complexes. Pour tout $x \in E$, $f(x) = \mathrm{rel}(f(x)) + i\ \mathrm{im}(f(x)))$, $(i^2 = -1)$. On pose

$$f = \mathrm{rel}(f) + i\ \mathrm{im(f)},$$

avec $\mathrm{rel(f)}(x) = \mathrm{rel}(f(x))$ et $\mathrm{im(f)}(x) = i\mathrm{im}(f(x))$.

Définition. On dit que f est mesurable si et seulement si $rel(f)$ et $im(f)$ sont mesurables.

Définition. Soient $(E, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré et $f \quad E \to \mathbb{C}$ une application. On dit que f est μ-intégrable (ou absolument intégrable) si et seulement si f est mesurable et $\int |f|\, d\mu$ est fini.

Définition. Soient $(E, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré et $f \quad E \to \mathbb{R}$ une application à valeurs réelles, μ-intégrable. On définit

$$\int f\ d\mu = \int f^+\ d\mu - \int f^-\ d\mu.$$

Proposition Soient $(E, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré et $f \quad E \to \mathbb{R}$ une application.
1. f est mesurable $\iff$ $f^+ \ et \ f^-$ sont mesurables.
2. $\int |f^+| d\mu \leq \int |f| d\mu \ et \ \int |f^-| d\mu \leq \int |f| d\mu.$
3. f est μ-intégrable $\iff$ f^+ et f^- sont μ-intégrables.

Définition. Soient $(E, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré et $f \quad E \to \mathbb{C}$ μ-intégrable. On définit

$$\int f\ d\mu = \int rel(f)\ d\mu \ + \ i \int im(f)\ d\mu.$$

Proposition Soient $(E, \mathcal{B}, \mu)$ et $f \quad E \to \mathbb{C}$ une application. On a:
1. f est μ-intégrable si et seulement si $rel(f)$ et $im(f)$ sont μ-intégrable.
2. Si f est μ-intégrable alors $|\int f\ d\mu| \leq \int |f|\ d\mu$.

2. Convergence dominée - Corollaires

Théorème de convergence dominée de Lebesgue.
Soient $(E, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite quelconque d'applications mesurables à valeurs réelles ou complexes qui converge simplement vers f.
S'il existe une application mesurable g telle que pour tout entier n, $|f_n| \leq g$ et $\int g\ d\mu$ est fini, (g est μ-intégrable), alors
f est μ-intégrable et

$$\lim_{n \to +\infty} \int f_n\ d\mu = \int \lim_{n \to +\infty} f_n\ d\mu = \int f\ d\mu.$$

Corollaire 1 Soient $(E, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque de fonctions mesurables à valeurs réelles ou complexes telle que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge simplement.
S'il existe une application g, μ-intégrable telle que pour tout entier $N \geq 0$, on a $|\sum_{0\leq n\leq N} f_n| \leq g$, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est μ-intégrable et

$$\int \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \, d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \int f_n \, d\mu.$$

Corollaire 2 Soient $(E, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque d'applications mesurables à valeurs réelles ou complexes telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} \int |f_n| \, d\mu < +\infty$ alors on a :
1. la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est absolument convergente (la série $\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(x)|$ est convergente),
2. $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est μ-intégrable et
3. $\int \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \, d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \int f_n \, d\mu$.

3. Intégration par rapport à une mesure image

Soient $(E, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré, $(F, \mathcal{B}')$ un espace mesurable et $f \;\; (E, \mathcal{B}) \to (F, \mathcal{B}')$ une application mesurable.

La mesure image de μ par f notée μ_f est définie sur $(F, \mathcal{B}')$ par :

$$\forall A \in \mathcal{B}', \;\mu_f(A) = \mu(f^{-1}(A)).$$

Théorème de transfert Soient $(E, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré, $(F, \mathcal{B}')$ un espace mesurable et $f \;\; (E, \mathcal{B}) \to (F, \mathcal{B}')$ une application mesurable. On considère μ_f la mesure image de μ par f sur $(F, \mathcal{B}')$. Soit $\varphi \; F \to \mathbb{C}$ mesurable. Si φ est positive ou φ est μ_f-intégrable alors

$$\int_F \varphi \, d\mu_f = \int_E \varphi \circ f \, d\mu.$$

4. Espace mesuré produit -Théorème de Fubini-Tonelli

Soient $(E_i, \mathcal{B}_i, \mu_i)$ un espace mesuré pour $i = 1, 2, ..., n$. On considère le produit cartesien :
$E = \pi_i^n E_i = E_1 \times E_2 \times ... \times E_n = \{(x_1, ..., x_n), x_i \in E_i\}$.

Définition. On appelle un pavé mesurable de E toute partie A de E de la forme $A = A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(x_1, ..., x_n), x_i \in A_i\}$ avec $A_i \in \mathcal{B}_i$. Soit X l'ensemble des pavés mesurables de E. La tribu $\sigma(X)$, engendrée par X, est appelée la tribu produit et notée $\bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i = \mathcal{B}$.

Théorème (Mesure produit) (admis). Il existe sur l'espace mesurable produit $(E, \mathcal{B})$ une unique mesure notée $\mu = \bigotimes_{i=1}^{n} \mu_i$ qui vérifie pour tout $A = A_1 \times A_2 \times ... \times A_n \in X$, $\mu(A) = \mu_1(A_1)...\mu_n(A_n)$.

Théorème de Fubini-Tonelli (admis)
Soient $(E, \mathcal{B}, \mu) = (\pi_i^n E_i, \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i, \bigotimes_{i=1}^{n})$ un espace mesuré produit et $f \; E \to \mathbb{C}$ un application mesurable.
Si f est positive ou f est μ-intégrable alors
$\int_E f(x)\, d\mu(x) = \int_{E_n} [\int_{E_{n-1}} ...[\int_{E_1} f(x_1, ..., x_n)\, d\mu_1(x_1)] d\mu_2(x_2)...] d\mu_n(x_n)$.
Et l'ordre de l'intégration n'intervient pas : on peut remplacer dans la formule, i par $s(i)$ où s est une bijection de $\{1, 2, ..., n\}$ dans $\{1, 2, ..., n\}$.

5. Espaces $\mathcal{L}^p(\mu)$ et $L^p(\mu)$

Soit $(E, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré. On note
$\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ l'ensemble des applications $f \; E \to \mathbb{R} \quad \mu$-intégrables.
$\mathcal{L}^1(\mu)$ l'ensemble des applications $f \; E \to \mathbb{C} \quad \mu$-intégrables.

Proposition $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
$\mathcal{L}^1(\mu)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

On veut définir une norme sur ces espaces vectoriels telle que

$$||f||_1 = \int |f|\, d\mu.$$

Mais on sait que $\int |f|\; d\mu = 0$ si et seulement si $f = 0$ μ-presque partout. Donc $||\;\;||_1$ n'est pas une norme sur $\mathcal{L}^p(\mu)$. Pour cela on considère l'ensemble suivant $L^1(\mu)$.

Définition. Soient $(E, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré et f, g deux applications mesurables $f, g \; (E, \mathcal{B}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$.
On dit que f est équivalente à g, (on note $f \sim g$) si et seulement si $f = g \quad \mu$-presque partout $(\mu(\{x \in E \;/\; f(x) \neq g(x)\}) = 0)$.

On sait par la proposition suivante que si f et g sont μ-intégrables et $f \sim g$ alors $\int |f| d\mu = \int |g|\; d\mu$.

Proposition Soient $(E, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré et f, g deux applications mesurables positives. On a :
1. $\int f\; d\mu = 0$ si et seulement si $\quad f = 0 \quad \mu$-presque partout.
2. Si $\quad f = g \quad \mu$-presque partout alors $\int f\; d\mu = \int g\; d\mu$.

La relation $\sim$ est une relation d'équivalence.
On note $\overline{f}$ la classe d'équivalence de f; ($\overline{f}$ est l'ensemble des applications g mesurables équivalentes à f).

On note $L^1(\mu)$ l'ensemble des classes d'équivalence $\overline{f}$ avec $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$.
$L^1(\mu)$ est l'ensemble des applications μ-intégrables dans lequel on identifie deux applications égales μ-presque partout.

Proposition. $L^1(\mu)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ et
$||\overline{f}||_1 = ||f||_1 = \int |f| \, d\mu$ définit une norme sur $L^1(\mu)$.

On note pour tout entier $p \geq 1$, $\mathcal{L}^p(\mu)$ l'ensemble des applications $f \;\; E \to \mathbb{C}$ mesurables telles que $\int |f|^p \, d\mu$ est fini.

$L^p(\mu)$ est l'ensemble des classes d'équivalences $\overline{f}$ avec $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$.

Proposition $L^p(\mu)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ et
$||\overline{f}||_p = ||f||_p = (\int |f|^p \, d\mu)^{\frac{1}{p}}$ définit une norme sur $L^p(\mu)$.

Proposition Pour $p = 2$, on a pour $f, g \in L^2(\mu)$,

$$||fg||_1 \leq ||f||_2 ||g||_2.$$

On note $\mathcal{L}^{+\infty}(\mu)$ l'ensemble des applications $f \;\; E \to \mathbb{C}$ mesurables bornées.
$L^{+\infty}(\mu)$ l'ensemble des classes d'équivalences $\overline{f}$ avec $f \in \mathcal{L}^{+\infty}(\mu)$.

Proposition. $L^{+\infty}(\mu)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ et
$||\overline{f}||_{+\infty} = ||f||_{+\infty} = Sup_{x \in E} |f(x)|$ définit une norme sur $L^{+\infty}(\mu)$.

6. Intégrale dépendant d'un paramètre.

Soit $(E, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré. On considère un ensemble de paramètres Y et une application $f \;\; E \times Y \to \mathbb{C}$ telle que pour chaque paramtère $y \in Y$ fixé l'application $f_y \;\; E \to \mathbb{C}$ définie par $f_y(x) = f(x, y)$ pour tout $x \in E$ est mesurable.

Si f_y est μ-intégrable alors $\int f_y \, d\mu$ est finie et on note :

$\int f_y \, d\mu = \int_E f_y \, d\mu = \int_E f(x, y) \, d\mu(x)$.

Dans ce cas l'application $\varphi \;\; y \mapsto \int_E f(x, y) \, d\mu(x)$ est bien définie.

Définition. Soit $\varphi \;\; Y \to \mathbb{C}$, $\varphi(y) = \int_E f(x, y) \; d\mu(x)$, est une intégrale dépendant d'un paramètre y.

- Continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre.

On suppose que Y est un espace métrique et $\varphi(y) = \int_E f(x, y) \, d\mu(x)$ est bien définie sur Y. Soit $y_0 \in Y$. Le théorème suivant donne les conditions pour que φ soit continue en $y_0 \in Y$.

Théorème Si
1. pour μ-presque tout x l'application $y \mapsto f(x,y)$ est continue en y_0.
2. ils existent une application $g \;\; E \to \mathbb{C}$ μ-intégrable et un voisinage V de y_0 tels que $\forall y \in V \;\; |f(x,y)| \leq |g(x)| \;\; \mu-presque\ partout\ sur\ E$, alors φ est continue en y_0.

φ est continue sur Y si φ est continue en tout $y_0 \in Y$.

• Dérivabilité d'une intégrale dépendant d'un paramètre.

On suppose que Y est un intervalle de $\mathbb{R}$ et que $\varphi \quad Y \to \mathbb{C}$, $\varphi(y) = \int_E f(x,y)\ d\mu(x)$ est bien définie sur Y. Le théorème suivant donne les conditions pour que φ soit dérivable en $y_0 \in Y$.

Théorème. Si
1. pour μ-presque tout $x \in E$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)$ existe, et
2. ils existent une application $g \;\; E \to \mathbb{C}$ μ-intégrable et un voisinage V de y_0 tels que

$$\forall y \in V, y \neq y_0 \;\; |\frac{f(x,y) - f(x,y_0)}{y - y_0}| \leq |g(x)| \;\; \mu-presque\ partout\ sur\ E$$

alors φ est dérivable en y_0 et $\varphi^{'}(y_0) = \int_E \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)\ d\mu(x)$.

Corollaire φ est dérivable sur un intervalle ouvert Y de $\mathbb{R}$ si :
1. pour μ-presque tout $x \in E$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ existe pour tout $y \in Y$.
2. $\forall y \in Y$ ils existent une application $g \;\; E \to \mathbb{C}$ μ-intégrable et un voisinage V de y tels que

$$\forall z \in V, \;\; |\frac{\partial f}{\partial y}(x,z)| \leq |g(x)| \;\; \mu - presque\ partout\ sur\ E$$

Alors φ est dérivable en tout $y \in Y$ et $\varphi^{'}(y) = \int_E \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\ d\mu(x)$.

7. Exemples d'intégrale dépendant d'un paramètre

Transformée de Fourier, transformée de Laplace et produit de convolution.

On considère l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mu)$, μ est la mesure de Lebesgue.

Définition Soient $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Le produit de convolution de f et g, noté $f * g$ est défini par :

$$f * g\ (y) = \int f(x) g(y-x) dx$$

Proposition Si $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ alors $f * g \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Et on a $||f * g||_1 \leq ||f||_1 ||g||_1$.

Définition On considère l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R}, \mu)$, μ est la mesure de Lebesgue. Soit f $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction μ-intégrable ($f \in \mathcal{L}^1(\mu)$).
La transformée de Fourier de f est la fonction notée $\widehat{f}$ définie par :

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \widehat{f}(y) = \int e^{-2i\pi xy} f(x)dx.$$

Proposition Propriétés de la transformée de Fourier .
1. Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. La transformée de Fourier $\widehat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
2. $\lim_{x\to\pm\infty} \widehat{f}(x) = 0$.
3. Si $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et $xf \in \mathcal{L}^1(\mu)$ alors la transformée de Fourier de f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\widehat{f})'(y) = -2i\pi\ \widehat{xf}(y) = -2i\pi \int e^{-2i\pi xy} xf(x)dx$.
4. Si f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f, f' \in \mathcal{L}^1(\mu)$ alors $\widehat{f'}(y) = 2i\pi y \widehat{f}(y)$.
5. Soient $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$. $\int \hat{f}(x)g(x)dx = \int f(x)\hat{g}(x)dx$.
6. Soient $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$. La transformée de Fourier de $f * g$ est égale au produit des transformées de Fourier de f et de g : $\widehat{f * g} = \widehat{f}\,\widehat{g}$.

Définition On considère l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R}, \mu)$, μ est la mesure de Lebesgue. Soit f $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application mesurable.
La transformée de Laplace de f est la fonction notée F définie par :
pour $y \in \mathbb{R}$, $F(y) = \int_0^{+\infty} e^{-yx} f(x)dx$ lorsqu il existe.

La transfomée de Laplace a des propriétés intéressantes de dérivation comme la transformée de Fourier. Ces deux transformations sont utilisées pour la résolution d'équations diffférentielles.