SIGNAL DÉTERMINISTE À TEMPS CONTINU (TC)

I) Représentation en fréquence de signaux d'énergie finie

Notation

Signal : $x(t)$

Énergie : $E_x \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt$

Puissance (moy) : $P_x \triangleq \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 \, dt$

Signal d'énergie finie : $E_x < +\infty$

Un signal d'énergie finie est de puissance moyenne nulle.

transformé de Fourier : $X(f)$ ← fréquence

$$x(t) \xrightarrow{TF} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2\pi j f t} \, dt = X(f)$$

transformé de Fourier inverse

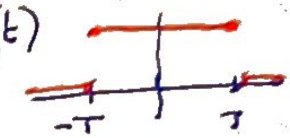
$$X(f) \xrightarrow{TF^{-1}} x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{2\pi j f t} \, df$$

⚠ Pour que la transformé de Fourier existe, il faut que l'energie du signal soit fini

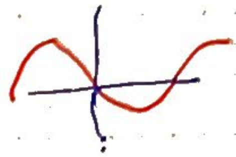
Signaux caractéristiques

Echelon unité : $u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$

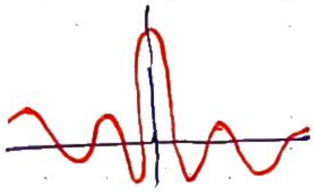
Rectangulaire (ou porte) : $\mathrm{Rect}_T(t) = \mathbb{1}_{[-T,T]}(t)$



Sinusoïdale : $x(t) = x_0 \sin(2\pi f_0 t + \varphi)$



Sinus cardinal : $\mathrm{sinc}(t) = \dfrac{\sin \pi t}{\pi t}$



signal causal : $x(t) = 0$ pour $t < 0$

notation $x(t) = 0$ pour $t < 0$ $x(t)u(t)$

signal anti-causal : $x(t) = 0$ pour $t \geqslant 0$

signal bilatéral : signal causal et anti-causal.

Exemple Transformée de Fourier de la Rectangulaire

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Rect}_T(t)\, e^{-2\pi j f t}\, dt$$

$$X(f) = \int_{-T}^{T} e^{-2\pi j f t}\, dt = \frac{1}{2\pi j f}\left[e^{-2\pi j f t}\right]_{T}^{-T}$$

$$X(f) = \frac{e^{2\pi j f T} - e^{-2\pi j f T}}{2\pi j f} = \frac{\sin 2\pi f T}{\pi f} \times \frac{2T}{2T}$$

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\boxed{X(f) = 2T\, \mathrm{sinc}(2Tf)}$$

Propriété Transformé de Fourier

• **décalage temporel**

$$a(t) = x(t - t_0) \quad , \; t_0 > 0 \quad \text{(signal en retard)}$$

$$A(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(t)\, e^{-2\pi j f t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - t_0)\, e^{-2\pi j f t}\, dt \qquad \theta = t - t_0 \quad d\theta = dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta)\, e^{-2\pi j f(\theta + t_0)}\, d\theta$$

$$= e^{-2\pi j f t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta)\, e^{-2\pi j f \theta}\, d\theta$$

$$x(t - t_0) \xrightarrow{TF} A(f) = e^{-2\pi j f t_0}\, X(f)$$

• **décalage fréquentiel**

$$b(t) = e^{2\pi j f_0 t}\, x(t) \quad ,$$

$$B(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{2\pi j f_0 t}\, e^{-2\pi j f t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-2\pi j t(f - f_0)}\, dt$$

$$= X(f - f_0)$$

• **Conjugué Transformé de Fourier**

$$x(t) \xrightarrow{TF} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-2\pi j f t}\, dt = X(f)$$

$$X^*(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)\, e^{2\pi j f t}\, dt$$

- temps opposé

$$y(t) = x(-t)$$

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(-t)\, e^{-2\pi j f t}\, dt \qquad \theta = -t \quad d\theta = -dt$$

$$= \int_{+\infty}^{-\infty} - x(\theta)\, e^{2\pi j f \theta}\, d\theta$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta)\, e^{2\pi j f \theta}\, d\theta$$

$$= \underline{X(-f)}$$

- signal conjugué

$$w(t) = x^*(t)$$

$$W(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)\, e^{-2\pi j f t}\, dt$$

$$= \underline{X^*(-f)}$$

- signal conjugué + temps opposé

$$z(t) = x^*(-t)$$

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(-t)\, e^{-2\pi j f t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(\theta)\, e^{-2\pi j f \theta}\, d\theta$$

$$= \underline{X^*(f)}$$

Exemple

$$y(t) = e^{-a|t|} \quad , a > 0$$

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|} e^{-2\pi j f t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{at} e^{-2\pi j f t} dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-at} e^{-2\pi j f t} dt$$

$$= \frac{1}{a - 2\pi j f} \left[e^{t(a-2\pi j f)} \right]_{-\infty}^{0} + \frac{1}{-(a+2\pi j f)} \left[e^{-t(a+2\pi j f)} \right]_{0}^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{a - 2\pi j f} + \frac{1}{a + 2\pi j f}$$

- La transformé de Fourier conserve la parité

$x(t)$		$X f$
réel paire	$\longrightarrow$	réel paire
réel impaire	$\longrightarrow$	imaginaire impaire
imaginaire paire	$\longrightarrow$	imaginaire paire
imaginaire impaire	$\longrightarrow$	réel impair

$$X(f) = \underbrace{|X(f)|}_{\text{module}} e^{i\varphi(f)} \quad \leftarrow \text{phase de } X(f)$$

pour $x(t)$ réel, $|X(f)|$ est une fct paire de f et $\varphi(f)$ est une fct. impaire de f

II.) Représentation en fréquence des signaux périodiques de période T ou de signaux définie non nul sur T

Soit $x(t)$ une fonction périodique de période T <u>ou</u> de durée limité sur un interval T.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \, e^{-2\pi j \frac{k}{T} t}$$ est le développement en série de Fourier

$$X_k = \frac{1}{T} \int_{(T)} x(t) \, e^{-2\pi j \frac{k}{T} t}$$ Coefficient de Fourier.

Un signal est une somme de cosinus et sinus

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} X_k \left(\cos\left(2\pi \frac{k}{T} t\right) + j\sin\left(2\pi \frac{k}{T} t\right)\right) + \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\cos\left(2\pi \frac{k}{T} t\right) + j\sin\left(2\pi \frac{k}{T} t\right)\right)$$

on change $-k$ en k et comme $\begin{cases} \text{le cos est paire} \\ \text{le sin est impaire} \end{cases}$:

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (X_k + X_{-k}) \cos\left(2\pi \frac{k}{T} t\right) + j(X_k - X_{-k}) \sin\left(2\pi \frac{k}{T} t\right)$$

que l'on peut écrire sous la forme :

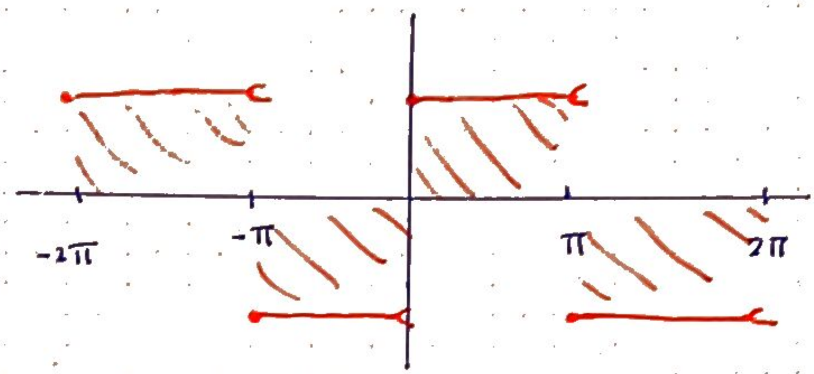
$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos\left(2\pi \frac{k}{T} t\right) + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin\left(2\pi \frac{k}{T} t\right)$$

avec $a_k = X_k + X_{-k}$ et $b_k = j(X_k - X_{-k})$

On déduit alors $X_k = \frac{1}{2}(a_k - jb_k)$ et $X_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + jb_k)$

Exemple sur la rectangulaire

$$x(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } -\pi \leq t < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq t < \pi \end{cases} \qquad T = 2\pi$$



$$X_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\, e^{-2\pi j \frac{k}{2\pi} t}\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} -1\, e^{-jkt}\, dt + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} e^{-jkt}\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi j k}\left[e^{-jkt}\right]_{-\pi}^{0} - \frac{1}{2\pi j k}\left[e^{-jkt}\right]_{0}^{\pi}$$

$$= \frac{1 - e^{j\pi k} - e^{-j\pi k} + 1}{2\pi j k} = \frac{1 - (-1)^k - (-1)^k + 1}{2\pi j k}$$

$$= \frac{1 - (-1)^k}{\pi j k}$$

donc $$X_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ paire} \\ \dfrac{2}{\pi j k} & \text{si } k \text{ impaire} \end{cases}$$

et $$X_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\, dt = 0$$

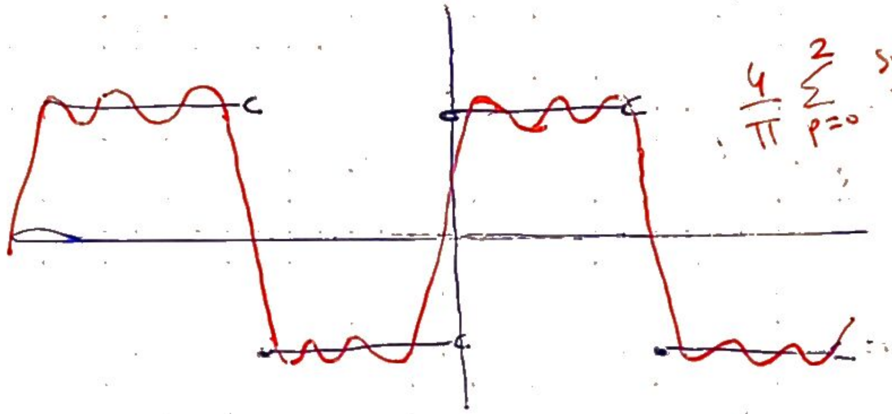
$$\Rightarrow \begin{cases} a_k = X_k + X_{-k} = 0 \\ b_k = j\left(X_k - X_{-k}\right) = \dfrac{4}{\pi k} \end{cases}$$

Ainsi:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin\left(2\pi \frac{k}{T} t\right)$$

$$x(t) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin t}{1} + \frac{\sin 3t}{3} + \dots + \frac{\sin (2p+1)t}{2p+1} + \dots \right)$$

$$= \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\sin (2p+1)t}{2p+1}$$



$$\frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{2} \frac{\sin (2p+1)t}{2p+1}$$

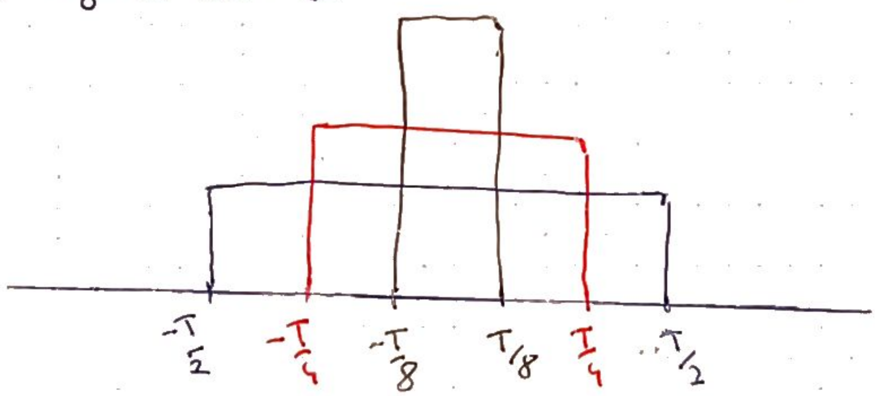
Pic de Dirac

Soit le signal rectangulaire suivant:

$$x(t) = \frac{1}{T} \mathrm{rect}_{\frac{T}{2}}(t) = \mathbb{1}_{[-T/2, T/2]}$$

c'est une rectangulaire de largeur T et de hauteur $1/T$

son intégrale vaut 1

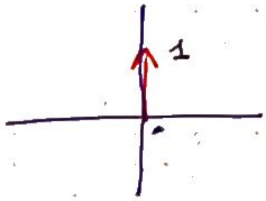


quand $T \to 0$, cette rectangulaire a une largeur qui tend vers 0 et une hauteur qui tend vers l'infini. Son intégrale vaut toujours 1.

On l'appelle distribution de Dirac noté $\delta(t)$

$$\delta(t) = \lim_{T \to 0} \frac{1}{T} \operatorname{rect}_{\frac{T}{2}}(t)$$

Par convention, le Dirac est représenté par une flèche de hauteur 1



Soit $f(t)$ une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$.

On veut calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\delta(t)\,dt$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \lim_{T \to 0} \frac{1}{T} \operatorname{rect}_{\frac{T}{2}}(t)\,dt = \lim_{T \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{T} \operatorname{rect}_{\frac{T}{2}}(t)\,dt$$

$$= \lim_{T \to 0} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \frac{1}{T}\,dt$$

On pose $t = uT$ donc $dt = T\,du$

et $I = \lim_{T \to 0} \int_{-1/2}^{1/2} f(uT)\,du$

Par passage à la limite :

$$I = \int_{-1/2}^{1/2} f(0)\,du = f(0)$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\delta(t)\,dt = f(0) \text{ si } f \text{ intégrable.}$$

Représentation fréquentiel

On choisit $f(t) = e^{-2\pi j f t}$ (intégrable)

on a vu que $\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\delta(t)}_{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, e^{-2\pi j f t} = 1} = f(0) = 1$

Ainsi $\delta(t) \xrightarrow{TF} 1$

par symétrie de correspondance :

$$1 \xrightarrow{TF} \delta(f)$$

Rappel

$x(t)\, e^{2\pi j f_0 t} \xrightarrow{TF} X(f - f_0)$

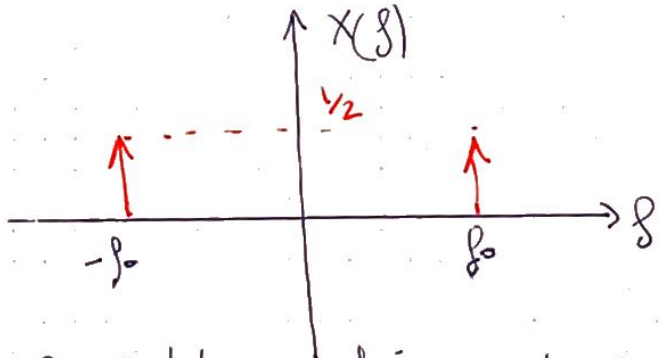
si $x(t) = 1$ nous avons

- $e^{2\pi j f_0 t} \xrightarrow{TF} \delta(f - f_0)$
- $e^{-2\pi j f_0 t} \xrightarrow{TF} \delta(f + f_0)$

Exemple

$x(t) = \cos(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2} e^{2\pi j f_0 t} + \frac{1}{2} e^{-2\pi j f_0 t}$ (euler)

$$x(t) \xrightarrow{TF} \frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0)$$



Représentation en fréquence de $\cos 2\pi f_0 t$

- $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k e^{2\pi j \frac{k}{T} t} \xrightarrow{TF} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k \, \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$

La représentation en fréquence d'un développement en série de Fourier est un spectre de raies d'amplitude X_k positionnées en $\frac{k}{T}$

Exemple

$$x(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } -\pi \leq t < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq t < \pi \end{cases} \qquad T = 2\pi$$

$$X_p = \frac{2}{\pi j (2p+1)} \qquad p \in \mathbb{Z}$$