Corrélation

Définition: Soient $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux d'énergie finie.

La fonction d'*inter-corrélation* entre $x(t)$ et $y(t)$ est la fonction $R_{xy}(t)$ telle que:

$$R_{xy}(\tau) = x(\tau) * y^*(-\tau)$$

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t-\tau)dt$$

La corrélation mesure *le degré de ressemblance* entre ces deux signaux suivant la valeur du décalage τ.

Si $y(t) = x(t)$, on parle d'*auto-corrélation* notée $R_x(\tau)$.

Remarque:

$$R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t)dt = E_x$$

inégalité de *Schwarz*

$$|\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2dt \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2dt = E_xE_y$$

$$|R_{xy}(\tau)|^2 \leq E_xE_y$$

La fonction d'inter-corrélation est donc finie pour des signaux d'énergie finie.

En particulier

$$|R_x(\tau)| \leq R_x(0)$$

La fonction d'auto-corrélation est donc bornée par l'énergie du signal.

$x(t) \xrightarrow{TF} X(f)$ $\quad$ $y(t) \xrightarrow{TF} Y(f)$

$y^*(-t) \xrightarrow{TF} Y^*(f)$

$x(\tau) * y^*(-\tau) \xrightarrow{TF} X(f)Y^*(f)$

Par $(TF)^{-1}$, nous obtenons:

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)Y^*(f)e^{2\pi jf\tau}df$$

Si $\tau = 0$, nous retrouvons le résultat suivant:

$$R_{xy}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)Y^*(f)df = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt$$

La densité *inter-spectrale d'énergie* est la TF de la fonction d'*inter-corrélation*.

$$R_{xy}(\tau) \xrightarrow{TF} S_{xy}(f)$$

La *densité spectrale d'énergie* est la TF de la fonction d'*auto-corrélation*.

$$R_x(\tau) \xrightarrow{TF} S_x(f)$$

En particulier, nous retrouvons:

$$R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df = E_x$$

Conservation de l'énergie lorsque l'on passe du domaine temporel au domaine fréquentiel.