Chapitre 13

Equations récurrentes

1 Equations récurrentes linéaires :

On considère l'équation scalaire linéaire d'ordre k à coefficients complexes en u_n :

$$u_{n+k} + a_{n-1}u_{n+k-1} + \cdots + a_{n-k}u_n = f_n$$

La solution générale u_n est égale à $y_n + z_n$ où y_n est une solution quelconque de l'équation homogène associée (avec $f_n = 0$) et z_n une solution particulière de l'équation complète (avec second membre quelconque f_n) qui s'écrit sous forme matricielle :
$U_{n+1} = A_nU_n + F_n$ avec les vecteurs $U_n = (u_n, u_{n+1}, \cdots, u_{n+k-1})^t$, $F_n = (0, 0, \cdots, 0, f_n)^t$ et la matrice carrée d'ordre k :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_{n-k} & \dots & \cdots & \cdots & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \tag{1}$$

La solution générale de l'équation homogène $U_{n+1} = A_nU_n$ est :
$U_n = C^{(1)}U_n^{(1)} + C^{(2)}U_n^{(2)} + \cdots + C^{(k)}U_n^{(k)}$ où les vecteurs $U_n^{(i)}$ de $i = 1, \cdots, k$ forment un système fondamental de solutions (base de l'espace vectoriel des solutions de dimension k) et les constantes arbitraires $C^{(i)}$.
Soit le vecteur $V_n = C_n^{(1)}U_n^{(1)} + C_n^{(2)}U_n^{(2)} + \cdots + C_n^{(k)}U_n^{(k)}$ et $C_n^{(i)}$ de $i = 1, \cdots, k$ des suites scalaires à déterminer (variation des constantes) tel que :
$V_{n+1} = A_nV_n + F_n$
c'est à dire $C_{n+1}^{(1)}U_{n+1}^{(1)} + C_{n+1}^{(2)}U_{n+1}^{(2)} + \cdots + C_{n+1}^{(k)}U_{n+1}^{(k)} = A_n(C_n^{(1)}U_n^{(1)} + C_n^{(2)}U_n^{(2)} + \cdots + C_n^{(k)}U_n^{(k)}) + F_n = C_n^{(1)}A_nU_n^{(1)} + C_n^{(2)}A_nU_n^{(2)} + \cdots + C_n^{(k)}A_nU_n^{(k)} + F_n = C_n^{(1)}U_{n+1}^{(1)} + C_n^{(2)}U_{n+1}^{(2)} + \cdots + C_n^{(k)}U_{n+1}^{(k)} + F_n$
On note $\Delta C_n^{(i)} = C_{n+1}^{(i)} - C_n^{(i)}$ de $i = 1, \cdots, k$ d'où $\Delta C_n^{(1)}U_{n+1}^{(1)} + \Delta C_n^{(2)}U_{n+1}^{(2)} + \cdots + \Delta C_n^{(k)}U_{n+1}^{(k)} = F_n$ mis sous forme matricielle :
$Z_{n+1}\Delta C_n = F_n$ avec le vecteur $\Delta C_n = (\Delta C_n^{(1)}, \Delta C_n^{(2)}, \cdots, \Delta C_n^{(k)})$ et la matrice $Z_{n+1} = (U_{n+1}^{(1)}, U_{n+1}^{(2)}, \cdots, U_{n+1}^{(k)})$.
On obtient (Z_{n+1} est inversible) $\Delta C_n = Z_{n+1}^{-1}F_n$
A partir d'un rang n_0 arbitraire on a $\sum_{k=n_0}^{n-1} \Delta C_k = C_n - C_{n_0}$ d'où $C_n = C_{n_0} + \sum_{k=n_0}^{n-1} Z_{k+1}^{-1}F_k$ en notant le vecteur $C_n = (C_n^{(1)}, C_n^{(2)}, \cdots, C_n^{(k)})$.

La solution étant particulière, on peut prendre $C_{n_0} = 0$.
Ainsi la solution particulière scalaire z_n est égale à la 1ère composante du vecteur V_n, c'est-à-dire :
$v_n = C_n^{(1)} u_n^{(1)} + C_n^{(2)} u_n^{(2)} + \cdots + C_n^{(k)} u_n^{(k)}$.

1.1 Equations linéaires à coefficients constants

Cas homogène : $f_n = 0$
On associe le polynôme caractéristique noté P :

$$P(r) = r^k + a_{n-1} r^{k-1} + \cdots + a_{n-k} = 0 \text{ (équation caractéristique)}$$

Soient r_i les racines et w_i leur ordre de multiplicité
alors $u_n = \sum_i P_i(n) r_i^n$ degré de $P_i(n) \leq w_i$ - 1

Cas complet : f_n particulier
La solution générale est de la forme :$u_n = y_n + z_n$ où y_n est une solution quelconque de l'équation homogène associée et z_n une solution particulière.
Si $f_n = a^n q_n^{(m)}$ avec a constant non nul, $q^{(m)}$ polynôme de degré m on a comme solution particulière $z_n = a^n n^\nu p_n^{(m)}$ avec $p^{(m)}$ polynôme de degré m et ν l'ordre de multiplicité de a pour le polynôme caractéristique (si $P(a) = \cdots = P^{(\nu-1)}(a) = 0$ et $P^{(\nu)}(a) \neq 0$ et si $P(a) \neq 0$, $\nu = 0$).

1.2 Exemple

$u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = log\ n \quad n > 0$
En résolvant l'équation homogène par le polynôme caractéristique on obtient $u_n^{(1)} = 1$ et $u_n^{(2)} = 2^n$, donc le système fondamental $U_n^{(1)} = (1,1)^t$, $U_n^{(2)} = (2^n, 2^{n+1})^t$, $Z_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2^{n+1} \\ 1 & 2^{n+2} \end{pmatrix}$ et $Z_{n+1}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1/2^{n+1} & 1/2^{n+1} \end{pmatrix}$
$C_n = \sum_{k=1}^{n-1} Z_{k+1}^{-1} F_k$ avec $F_k = (0, log\ k)^t$ d'où $C_n = (-\sum_{k=1}^{n-1} log\ k, \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{logk}{2^k})^t$
$z_n = -log((n-1)!) + 2^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{logk}{2^k}$ et $u_n = \alpha + \beta 2^n + z_n$

2 Equations récurrentes linéaires et non linéaires :

On considère la série génératrice : $G(z) = \sum_{n \geq 0} u_n z^n$ issue de la suite (u_n), l'équation associée issue de l'équation récurrente et sa résolution en $G(z)$, le développement en série formelle de G sous la forme $G(z) = \sum_{n \geq 0} u_n z^n$ et l'identification de la suite (u_n) .

Exemple 1 : Suite de Fibonacci

$$(2)\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ F_0 = 0,\ F_1 = 1$$

On multiplie (2) par z^n :

$$(3)\ F_n z^n = F_{n-1} z^n + F_{n-2} z^n$$

On somme (3) :

$$(4) \sum_{n\geq 2} F_n z^n = \sum_{n\geq 2} F_{n-1} z^n + \sum_{n\geq 2} F_{n-2} z^n$$

On a $G(z) = \sum_{n\geq 0} F_n z^n$ d'où dans (4) :

$$G(z) - F_0 - F_1 z = z(G(z) - F_0) + z^2 G(z) \Leftrightarrow G(z)(1 - z - z^2) = z \Leftrightarrow G(z) = \frac{z}{1 - z - z^2}$$

$$\text{Soit } G(z) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\phi z} - \frac{1}{1-\bar{\phi} z}\right) \text{ où } \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } \bar{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$G(z) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{n\geq 0} (\phi z)^n - \sum_{n\geq 0} (\bar{\phi} z)^n\right) \Longrightarrow F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^n - \bar{\phi}^n)$$

<u>Exemple 2</u> : $n u_n + (n-2) u_{n-1} - u_{n-2} = 0 \qquad u_0 = u_1 = 1$

$G(z) = \sum_{n\geq 0} u_n z^n$, $G'(z) = \sum_{n\geq 0} n u_n z^{n-1}$
Après calcul, on a $G(z) = G'(z)$ d'où $G(z) = \lambda e^z$ $(G(0) = u_0 = 1)$
$G'(z) = \lambda e^z, \quad G'(0) = \lambda = 1$
$G(z) = e^z = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ d'où $u_n = \frac{1}{n!} \quad n \geq 0$

2.1 Opérations sur les séries génératrices :

<u>Notations</u> :
$F(z) = \sum_{n\geq 0} f_n z^n \qquad G(z) = \sum_{n\geq 0} g_n z^n$
F associé à la suite $<f_0, f_1, f_2, \cdots>$ notée $<f_n>$
On prend $f_{-1} = f_{-2} = \cdots = 0$

<u>Opérations</u> :

$\alpha F(z) + \beta G(z) = \sum_{n\geq 0} (\alpha f_n + \beta g_n) z^n \qquad z^m G(z) = \sum_{n\geq 0} g_{n-m} z^n$ m entier ≥ 0

$\dfrac{G(z) - g_0 - g_1 z - \cdots - g_{m-1} z^{m-1}}{z^m} = \sum_{n\geq 0} g_{n+m} z^n$, m entier ≥ 0

$G(cz) = \sum_{n\geq 0} c^n g_n z^n$

$G'(z) = \sum_{n\geq 0} (n+1) g_{n+1} z^n \qquad zG'(z) = \sum_{n\geq 0} n g_n z^n$

$\int_0^z G(t)dt = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} g_{n-1} z^n$

Convolution de $< f_n >$ *et* $< g_n >$: $F(z)G(z) = \sum_{n\geq 0}(\sum_{k=0}^{n} f_k g_{n-k})z^n$

$$\frac{1}{1-z}G(z) = \sum_{n\geq 0}(\sum_{k=0}^{n} g_k)z^n$$

2.2 Suites simples et séries génératrices :

SUITE	SERIE GENERATRICE	FORME FERMEE
$< 1, 0, 0, \cdots >$	$\sum_{n\geq 0}[n=0]\, z^n$	1
$< 0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots >$	$\sum_{n\geq 0}[n=m]\, z^n$	z^m
$< 1, 1, 1, \cdots >$	$\sum_{n\geq 0} z^n$	$\frac{1}{1-z}$
$< 1, -1, 1, -1, \cdots >$	$\sum_{n\geq 0}(-1)^n z^n$	$\frac{1}{1+z}$
$< 1, 0, 1, 0, \cdots >$	$\sum_{n\geq 0}[2\|n]\, z^n$	$\frac{1}{1-z^2}$
$< 1, 0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots >$	$\sum_{n\geq 0}[m\|n]\, z^n$	$\frac{1}{1-z^m}$
$< 1, 2, 3, 4, 5, \cdots >$	$\sum_{n\geq 0}(n+1)z^n$	$\frac{1}{(1-z)^2}$
$< 1, 2, 4, 8, 16, \cdots >$	$\sum_{n\geq 0} 2^n z^n$	$\frac{1}{1-2z}$
$< 1, 4, 6, 4, 1, 0, \cdots >$	$\sum_{n\geq 0}\binom{4}{n}z^n$	$(1+z)^4$
$< 1, c, \binom{c}{2}, \binom{c}{3}, \cdots >$	$\sum_{n\geq 0}\binom{c}{n}z^n$	$(1+z)^c$
$< 1, c, \binom{c+1}{2}, \binom{c+2}{3}, \cdots >$	$\sum_{n\geq 0}\binom{c+n-1}{n}z^n$	$\frac{1}{(1-z)^c}$
$< 1, c, c^2, c^3, \cdots >$	$\sum_{n\geq 0} c^n z^n$	$\frac{1}{1-cz}$
$< 1, \binom{m+1}{m}, \binom{m+2}{m}, \binom{m+3}{m}, \cdots >$	$\sum_{n\geq 0}\binom{m+n}{m}z^n$	$\frac{1}{(1-z)^{m+1}}$
$< 0, 1, 1/2, 1/3, \cdots >$	$\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n}z^n$	$\ln\frac{1}{(1-z)}$
$< 0, 1, -1/2, 1/3, -1/4, \cdots >$	$\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^{n+1}}{n}z^n$	$\ln 1+z$
$< 1, 1, 1/2, 1/6, 1/24, \cdots >$	$\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}z^n$	e^z

Remarque :
$[n=m]$: si n=m on obtient 1 sinon 0
$m|n$: m divise n
$\binom{c}{n}$ est le coefficient binomial $C_c^n = \frac{c(c-1)\cdots(c-n+1)}{n!}$ si $n > 0$ et $C_c^n = 1$ si $n = 0$