Analyse fonctionnelle
GM3.1

Nicolas FORCADEL

6 janvier 2020

Résumé

Ce cours vous est offert par la promotion de GM3 de 2019-2020, qui n'a pas eu la chance de bénéficier d'un polycopié, et qui, par conséquent, s'est sacrifiée pour les générations futures. Plusieurs personnes ayant collaboré sur ce projet, il se peut que le style ne soit pas uniforme : soyez indulgents. Vous pouvez consulter le git du projet à l'adresse `https://gitlab.insa-rouen.fr/aquedeville/poly-analyse-fonctionnelle`. Accrochez-vous, tout va bien se passer.

Antoine QUEDEVILLE & Benjamin LEFEBVRE & Averil PROST

Table des matières

Chapitre 1

Analyse des espaces de fonctions

L'objectif de ce cours est d'introduire certains outils mathématiques de base permettant d'appréhender la théorie des équations aux dérivées partielles (EDP) et leur analyse numérique. L'analyse fonctionnelle c'est l'analyse des espaces de fonctions.

1.1 Espaces vectoriels normés

1.1.1 Normes

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour $x \in \mathbb{K}$, on notera $|x|$ sa valeur absolue ou son module. On notera $\mathbb{K}$-ev un espace vectoriel ou sous-espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Définition - norme

Soit V un $\mathbb{K}$-ev. Une norme est une application de V dans $\mathbb{R}^+$, notée $\|\cdot\|_V$, qui vérifie les trois propriétés suivantes :

— $\|v\|_p = 0 \iff v = 0$ l'axiome de séparation

— $\forall \lambda \in \mathbb{K}\ \ \|\lambda v\|_V = |\lambda|\, \|v\|_V$ l'axiome d'homogénéité

— $\|u+v\|_V \leqslant \|u\|_V + \|v\|_V$ l'inégalité triangulaire.

Dans ce cas, on dira que $(V, \|\cdot\|_V)$ est un espace vectoriel normé (evn).

Exemple en dimension finie

Soit $d \geqslant 1$, $d \in \mathbb{N}$. On considère le $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{K}^d$, de dimension d. On pose

$$\|v\|_p = \left(\sum_{i=1}^{d} |v_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall\ 1 \leqslant p < +\infty$$

$$\|v\|_\infty = \max_{i \in [\![1;d]\!]} |v_i|$$

Alors $\forall\ p \in [1;+\infty]$, $\|\cdot\|_p$ définit une norme. Cet exemple peut se généraliser au cas des produits d'espaces vectoriels.

Proposition
Soit $d \geqslant 1$, $d \in \mathbb{N}$ et $(V_i)_{i\in[\![1;d]\!]}$ d evn. On note $V = V_1 \times \cdots \times V_d$.

Pour tout $v = \Big(\underbrace{v_1}_{\in V_1}, \ldots, \underbrace{v_d}_{\in V_d}\Big) \in V$, on définit

$$\|v\|_p = \left(\sum_{i=1}^{d} \|v_i\|_{V_i}^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall\ 1 \leqslant p < +\infty$$
$$\|v\|_\infty = \max_{i\in[\![1;d]\!]} \|v_i\|_{V_i}.$$

Alors $\forall\ p \in [1;+\infty]$, $\|\cdot\|_p$ définit une norme sur $V = V_1 \times \cdots \times V_d$.

Exemples en dimension infinie
• Soit $[a;b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère $\mathscr{C}^k([a;b])$ l'ensemble des fonctions continues k fois continument dérivables sur $[a;b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Alors l'application

$$\begin{array}{rcccc} \|\cdot\|_{\mathscr{C}^k([a;b])} & : & \mathscr{C}^k([a;b]) & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & & f & \mapsto & \max\limits_{l\in[\![0;k]\!]} \sup\limits_{x\in[a;b]} \left|f^{(l)}(x)\right| \end{array}$$

définit une norme sur $\mathscr{C}^k([a;b])$.

• Soit $u = (u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. On pose

$$\|u\|_{l^p} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |u_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall\ 1 \leqslant p < +\infty$$
$$\|u\|_{l^\infty} = \sup_{i\in\mathbb{N}} |u_i|$$

avec $\forall\ p \in [1;+\infty]$, $l^p = \left\{u = (u_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K} \mid \|u\|_{l^p} < +\infty\right\}$.

Alors $(l^p, \|\cdot\|_{l^p})$ est un espace vectoriel normé.

1.1.2 Topologie sur les espaces vectoriels normés

Définition - ouvert & fermé
Soit V un evn muni d'une norme $\|\cdot\|_V$. On dit que

— $O \subset V$ est un ouvert de V
$\Leftrightarrow$ $\forall x \in O$ $\exists r > 0$ tel que $\mathscr{B}(0,r) \subset O$
avec $\mathscr{B}(0,r) = \{y \in V \mid \|x - y\|_V < r\}$ la boule de rayon r centrée en 0.

— $F \subset O$ est un fermé de V
$\Leftrightarrow$ $F^c = V \backslash F$ est un ouvert de V.

Remarque

Si on définit

$$d \quad : \quad \begin{array}{ccc} V \times V & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x, y & \mapsto & \|x-y\|_V \end{array}$$

alors d est une distance sur V.

Proposition

Soit $(V, \|\cdot\|_V)$ un $\mathbb{K}$-evn normé, F un fermé de V, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de F. On a le résultat suivant :

Si (u_n) converge dans V, alors sa limite est dans F.

Preuve

On suppose que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \overline{u}$. On veut montrer que $\overline{u} \in F$.

Par contradiction, on suppose que $\overline{u} \in V \backslash F$. Comme $V \backslash F$ ouvert, $\exists r > 0$ tel que $\mathscr{B}(\overline{u}, r) \subset V \backslash F$.

Or, par définition, $\exists N$ assez grand tel que

$$\forall n > N \quad \|\overline{u} - u_n\|_N \leqslant \frac{r}{2} \quad \Longrightarrow \quad u_n \in \mathscr{B}(\overline{u}, r) \subset V \backslash F$$

ce qui est absurde, car $u_n \in F$.

Donc la limite de toute suite convergente d'un fermé reste dans ledit fermé.
$\square$

Définition - adhérence

Soit $(V, \|\cdot\|_V)$ un $\mathbb{K}$-evn normé et $A \subset V$.

On définit l'adhérence de A dans V, aussi appelée fermeture, comme l'ensemble des points qui sont limites d'une suite d'éléments de A.

$$\overline{A}^V = \left\{ \overline{u} \in V \ \mid \ \exists (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A \text{ tq } \lim_{n\to\infty} u_n = \overline{u} \right\}$$

Remarque

Quand il n'y a pas d'ambiguïté, on note l'adhérence $\overline{A}$ et non $\overline{A}^V$.

Proposition

Soit $(V, \|\cdot\|_V)$ un $\mathbb{K}$-evn normé, F un sous-espace de V.

F fermé $\Leftrightarrow \overline{F}^V = F$

Définition - densité

On dit qu'un ensemble $A \subset V$ est dense dans V si $\overline{A}^V = V$.

Définition - équivalence des normes

Soit V un $\mathbb{K}$-evn, $\|\cdot\|_{V,1}$ et $\|\cdot\|_{V,2}$ deux normes sur V. On dit que $\|\cdot\|_{V,1}$ et $\|\cdot\|_{V,2}$ sont équivalentes sur V si

$$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*^+ \text{ tq } \forall v \in V \quad \alpha \|v\|_{V,1} \leqslant \|v\|_{V,2} \leqslant \beta \|v\|_{V,1}$$

Proposition
Soit V un K-ev normé, $\|\cdot\|_{V,1}$ et $\|\cdot\|_{V,2}$ deux normes équivalentes sur V. Soit $O \subset V$.

O ouvert de $\left(V, \|\cdot\|_{V,1}\right) \Leftrightarrow O$ ouvert de $\left(V, \|\cdot\|_{V,2}\right)$.

Preuve
Condition nécessaire : si O ouvert de $\left(V, \|\cdot\|_{V,1}\right)$, alors par définition

$$\begin{aligned} & \forall o \in O \quad \exists r_1 > 0 \quad \text{tq} \quad \mathscr{B}_{\|\cdot\|_{V,1}}(o, r_1) \subset O \\ \Leftrightarrow \quad & \forall v \in V \quad \|v - o\|_{V,1} < r_1 \quad \Longrightarrow \quad v \in O \end{aligned}$$

Autrement dit, pour tout élément de O, il existe une boule pour la norme $\|\cdot\|_{V,1}$ centrée en cet élément qui soit totalement contenue dans O.

Or, par définition des normes équivalentes

$$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*^+ \quad \text{tq} \quad \forall v \in V \quad \alpha \|v\|_{V,1} \leqslant \|v\|_{V,2} \leqslant \beta \|v\|_{V,1}$$

donc pour tout élément de O, il existe une boule pour la norme $\|\cdot\|_{V,2}$ centrée en cet élément et entièrement contenue dans une boule pour la norme $\|\cdot\|_{V,1}$: $\forall o \in O \quad \exists r_2 = \frac{r_1}{\alpha} \quad \text{tq} \quad \forall v \in V$

$$\begin{aligned} & \|v - o\|_{V,2} < r_2 \\ \Longrightarrow\ & \alpha \|v - o\|_{V,1} < \frac{r_1}{\alpha} \\ \Longrightarrow\ & v \in \mathscr{B}_{\|\cdot\|_{V,1}}(o, r_1) \subset O \end{aligned}$$

d'où $\forall o \in O \quad \exists r_2 \quad \text{tq} \quad \mathscr{B}_{\|\cdot\|_{V,2}}(o, r_2) \subset O$ et on a bien O ouvert pour la norme $\|\cdot\|_{V,2}$. $\square$

Proposition
Si V est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, alors toutes les normes sur V sont équivalentes.

Contre-exemple en dimension infinie
Sur $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, avec les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ usuelles : prendre l'exemple de

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } x \in \left[0; \frac{1}{n}\right[\\ 2n - n^2 x & \text{si } x \in \left[\frac{1}{n}; \frac{2}{n}\right[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Définition - compacité
Soit V un $\mathbb{K}$-evn et $A \subset V$. On dit que A est compact si de toute suite d'éléments de A, on peut extraire une sous-suite qui converge dans A.

Propositions

- Si A est compact, alors A est fermé borné.
- Si V est de dimension finie, alors il y a équivalence : A compact $\Leftrightarrow$ A fermé borné.

Théorème

Soit V un $\mathbb{K}$-ev. La boule unité fermée est compacte dans $V \Leftrightarrow V$ est de dimension finie.

1.1.3 Applications linéaires continues

Soient V et W deux $\mathbb{K}$-ev.

Proposition

Soit L une application linéaire, $L : V \mapsto W$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- L est continue
- L est continue en 0
- $\exists c > 0 \ \ \forall v \in V \quad \|Lu\|_W \leqslant c \|u\|_V$

Preuve

Ceci est une preuve circulaire.

Première implication : triviale.

Deuxième implication : Soit une application L linéaire continue en 0. $\exists \eta > 0$ tel que $\forall u \in \mathscr{B}(0, \eta)$ on ait $\|Lu - L0\|_W = \|Lu\|_W \leqslant 1$, avec la valeur de 1 choisie arbitrairement.

Soit $v \in V$. On pose $u = \frac{v}{\|v\|_V}\eta \in \mathscr{B}(0, \eta)$. Dès lors,

$$\begin{aligned} & \|Lu\|_W \leqslant 1 \\ \Leftrightarrow & \left\| L\frac{v}{\|v\|_V}\eta \right\|_W \leqslant 1 \\ \Leftrightarrow & \|Lv\|_W \leqslant \frac{1}{\eta} \|v\|_V \end{aligned}$$

donc l'existence de la constante $c = \frac{1}{\eta}$ est démontrée.

Troisième et dernière implication : Soit $(u, v) \in V^2$. On a $\|Lu - Lv\|_W = \|L(u - v)\|_W \leqslant c \|u - v\|_V$ par hypothèse, donc L est lipschitzienne et donc continue. $\square$

Proposition

Soit L une application linéaire de V dans W. Si V est de dimension finie, alors L est continue.

Preuve

Soit V un $\mathbb{K}$-ev de dimension d finie, et $(e_1, \ldots, e_d)$ une base de V. Dès lors, tout $u \in V$ peut s'écrire sous la forme $u = \sum_{i=1}^{d} u_i e_i$, avec $u_i \in \mathbb{K}$. On a alors, pour toute application L linéaire de V dans W :

$$\begin{aligned}
\|Lu\|_W &= \left\| L\left(\sum_{i=1}^{d} u_i e_i\right) \right\|_W \\
&= \left\| \sum_{i=1}^{d} u_i L e_i \right\|_W \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{d} |u_i| \, \|Le_i\|_W \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{d} \|Le_i\|_W \times \|u\|_\infty \\
&= c \, \|u\|_\infty
\end{aligned}$$

or toutes les normes sont équivalentes en dimension finie, et donc, d'après la proposition précédente L est continue. □

Définition - espace $\mathscr{L}$ et $\|\cdot\|_{\mathscr{L}}$

- L'espace vectoriel des applications linéaires continues de V dans W est noté $\mathscr{L}(V, W)$. Si $V = W$, on note simplement $\mathscr{L}(V)$.
- Par une proposition précédente, si $L \in \mathscr{L}(V, W)$ alors $\exists c > 0$ tel que $\forall u \in V \setminus \{0\} \quad \frac{\|Lu\|_W}{\|u\|_V} \leqslant c$. Dès lors, on note

$$\|L\|_{\mathscr{L}(V,W)} = \sup_{\substack{u \in V \\ u \neq 0}} \frac{\|Lu\|_W}{\|u\|_V}$$

Proposition

$\|\cdot\|_{\mathscr{L}(V,W)}$ définit une norme sur $\mathscr{L}(V, W)$.

Preuve

Par définition, $\|\cdot\|_{\mathscr{L}(V,W)}$ est positive.

- Séparation :

$$\begin{aligned}
&\|L\|_{\mathscr{L}(V,W)} = 0 \\
\Leftrightarrow &\sup_{\substack{u \in V \\ u \neq 0}} \frac{\|Lu\|_W}{\|u\|_V} = 0 \\
\Leftrightarrow &\forall v \in V \setminus \{0_V\} \quad \|Lu\|_W = 0 \\
\Leftrightarrow &L = 0_{\mathscr{L}(V,W)}
\end{aligned}$$

La réciproque est triviale.

— Homogénéité : $\forall\lambda \in \mathbb{K}$, $\forall L \in \mathscr{L}(V, W)$

$$\begin{aligned}\|\lambda L\|_{\mathscr{L}(V,W)} &= \sup_{\substack{u\in V\\u\neq 0}} \frac{\|\lambda L u\|_W}{\|u\|_V} = \sup_{\substack{u\in V\\u\neq 0}} |\lambda| \frac{\|Lu\|_W}{\|u\|_V} = |\lambda| \sup_{\substack{u\in V\\u\neq 0}} \frac{\|Lu\|_W}{\|u\|_V}\\ &= |\lambda| \, \|L\|_{\mathscr{L}(V,W)}\end{aligned}$$

— Inégalité triangulaire : soient L_1 et L_2 dans $\mathscr{L}(V, W)$.

$$\begin{aligned}\|L_1 + L_2\|_{\mathscr{L}(V,W)} &= \sup_{\substack{u\in V\\u\neq 0}} \frac{\|(L_1 + L_2)\, u\|_W}{\|u\|_V}\\ &\leqslant \sup_{\substack{u\in V\\u\neq 0}} \left(\frac{\|L_1 u\|_W}{\|u\|_V} + \frac{\|L_2 u\|_W}{\|u\|_V}\right)\\ &\leqslant \sup_{\substack{u\in V\\u\neq 0}} \frac{\|L_1 u\|_W}{\|u\|_V} + \sup_{\substack{u\in V\\u\neq 0}} \frac{\|L_2 u\|_W}{\|u\|_V}\\ &= \|L_1\|_{\mathscr{L}(V,W)} + \|L_2\|_{\mathscr{L}(V,W)}\end{aligned}$$

ce qui conclût la preuve. $\square$

Définition - dualité

On considère le cas $W = \mathbb{K}$. Soit V un evn.

— L'ensemble $\mathscr{L}(V, \mathbb{K})$ est appelé le dual de V, et noté V'.

— Un élément de V' est appelé « forme linéaire sur V » et son action sur un élément de V est notée $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V',V}$:

$$\forall L \in V' \quad \forall u \in V \quad \langle L, u\rangle_{V',V} = Lu$$

— V' est équipé d'une norme $\|\cdot\|_{V'}$ définie par

$$\|L\|_{V'} = \sup_{\substack{u\in V\\u\neq 0}} \frac{\left|\langle L, u\rangle_{V',V}\right|}{\|u\|_V}$$

Proposition

Soient $(V, \|\cdot\|_V)$ et $(W, \|\cdot\|_W)$ deux espaces vectoriels normés. Supposons que $V \subset W$ avec injection continue, i.e. $\exists\, C^{ste} \quad tq \quad \|u\|_W \leqslant C^{ste} \times \|u\|_V$. Alors $W' \subset V'$ avec injection continue.

Preuve

Soit $L \in W'$. On définit l'application

$$\begin{array}{cccc}\widetilde{L} & : & V & \longrightarrow & \mathbb{K}\\ & & u & \mapsto & \langle L, u\rangle_{W',W}\end{array}$$

Prouvons que $\widetilde{L} \in V'$. On a bien $\widetilde{L}$ linéaire par linéarité de L. De plus, $\forall u \in V$, on a $\left|\widetilde{L}u\right| = \left|\langle L, u\rangle_{W',W}\right| \leqslant \|Lu\|_{W'} \times \|u\|_W \leqslant C^{ste} \times \|L\|_{W'} \times \|u\|_V$ par injection continue. D'où

$$\left\|\widetilde{L}\right\|_{V'} = \sup_{\substack{u \in V \\ u \neq 0}} \frac{\left|\widetilde{L}u\right|}{\|u\|_V} \leqslant C^{ste} \times \|L\|_{W'}$$

et l'injection $W' \subset V'$ est continue. $\square$

Théorème

Soit V un $\mathbb{K}$-evn et Z un sous-espace vectoriel de V. Soit $L \in Z'$ le dual de Z.

Alors il existe $\widetilde{L} \in V'$ qui prolonge L, i.e. $\left\langle \widetilde{L}, u \right\rangle_{V',V} = \langle L, u\rangle_{Z',Z} \quad \forall u \in Z$.

Théorème

Soit V un $\mathbb{K}$-evn et Z un sev de V.

Si toute forme linéaire continue de V' qui s'annule sur Z est identiquement nulle sur V, alors Z est dense dans V. Autrement dit :

$$\text{Si} \quad \forall L \in V' \quad \text{tq} \quad \forall u \in Z \quad Lu = 0 \quad \text{on a} \quad \forall u \in V \quad Lu = 0$$
$$\text{Alors} \quad Z \text{ est dense dans } V.$$

Encore autrement dit : si la seule prolongation de toute forme linéaire continue nulle partout sur Z est la forme linéaire continue nulle sur V, alors Z est dense dans V.

Définition - forme bilinéaire

Soit V et W deux $\mathbb{K}$-ev (sans forcément de norme). Une forme bilinéaire sur $V \times W$ est une forme $a \ : \ V \times W \ \mapsto \ \mathbb{K}$ telle que

- $\forall w \in W \quad a(\cdot, w)$ soit linéaire sur V
- $\forall v \in V \quad a(v, \cdot)$ soit linéaire sur W

Définition - continuité d'une forme bilinéaire

Soit V et W deux $\mathbb{K}$-evn. Une forme bilinéaire $a \ : \ V \times W \ \mapsto \ \mathbb{K}$ est continue si

$$\exists c > 0 \quad \text{tq} \quad \forall (v, w) \in V \times W \quad |a(v, w)| \leqslant c \times \|v\|_V \times \|w\|_W$$

On note

$$\|a\|_{(V \times W)'} = \sup_{\substack{(v,w) \in V \times W \\ v \neq 0, w \neq 0}} \frac{|a(v, w)|}{\|v\|_V \times \|w\|_W}$$

Remarque
L'intérêt des formes bilinéaires continues est qu'elles interviennent fréquemment dans la formulation faible des EDP. On gardera à l'esprit qu'une forme bilinéaire $a \in \mathscr{L}(V \times W, \mathbb{K})$ peut s'interpréter comme une forme linéaire A de $\mathscr{L}(V, W')$ en posant $\langle Av, w\rangle_{W',W} = a(v, w)$. On vérifie que $Av \in W'$ et $\|A\|_{\mathscr{L}(V,W')} = \|a\|_{(V,W)'}$.

1.2 Espaces de Banach

1.2.1 Suites de Cauchy

Définition - Suite de Cauchy
Soit V un $\mathbb{K}$-evn. On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de V est de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N} \ \ \forall n \geqslant N \ \ \forall p \geqslant 0 \quad \|u_{n+p} - u_n\|_V \leqslant \varepsilon$$

Proposition
Toute suite convergente est de Cauchy.

Proposition
Toute suite de Cauchy est bornée.

Idée de la preuve
Poser $\varepsilon = 1$ arbitrairement, et $n = N$. On obtient que tous les termes à partir de u_n sont dans la boule $\mathscr{B}(u_n, 1)$. Or il y a un nombre fini de termes avant celui-ci ; dès lors, la suite est bornée par $\max(u_0, \ldots, u_{n-1}, u_n + 1)$. $\square$

Proposition
Soient V_1 et V_2 deux $\mathbb{K}$-evn et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de V_1. Soit $f : V_1 \to V_2$ uniformément continue. Alors $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans V_2.

Preuve
D'après la définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de Cauchy, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \forall p \geqslant 0, \|u_{n+p} - u_n\|_V \leqslant \varepsilon$$

De même, f uniformément continue se traduit par

$$\forall \varepsilon' > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in V_1^2, \ \left(\|x - y\|_{V_1} < \eta \implies \|f(x) - f(y)\|_{V_2} < \varepsilon'\right)$$

Posons $x = u_{n+p}$, $y = u_n$ et $\eta = \varepsilon$, avec le N_ε associé. Dès lors :

$$\forall \varepsilon', \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_\varepsilon, \forall p \geqslant 0, \|f(u_{n+p}) - f(u_n)\|_{V_2} < \varepsilon'$$

et l'on obtient bien la définition de $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ suite de Cauchy dans V_2. Intuitivement, si les éléments d'une suite se rapprochent de plus en plus, alors leurs images par une fonction continue aussi. $\square$

1.2.2 Espaces complets

Définition - espace complet

Soit V un $\mathbb{K}$-evn. On dit que V est complet si toute suite de Cauchy de V converge dans V, implicitement pour la norme associée à V.

Proposition

Soit V un $\mathbb{K}$-evn muni de deux normes équivalentes $\|\cdot\|_{V_1}$ et $\|\cdot\|_{V_2}$. Alors

$$V \text{ complet pour } \|\cdot\|_{V_1} \Leftrightarrow V \text{ complet pour } \|\cdot\|_{V_2}$$

Idée de la preuve

Supposons V complet $\|\cdot\|_{V_1}$ et montrons qu'il est complet pour $\|\cdot\|_{V_2}$. La réciproque se déduira par symétrie.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy pour la norme $\|\cdot\|_{V_2}$. On a donc $\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geqslant N \;\; \forall p \geqslant 0 \;\; \|u_{n+p} - u_n\|_{V_2} \leqslant \varepsilon$. Par la propriété d'équivalence des normes, il existe une constante $C > 0$ telle que $C\|u_{n+p} - u_n\|_{V_1} \leqslant \|u_{n+p} - u_n\|_{V_2} \leqslant \varepsilon$. On en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy pour la norme $\|\cdot\|_{V_1}$ (avec $\frac{\varepsilon}{C}$). Or V est complet pour $\|\cdot\|_{V_1}$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans V. Autrement dit, $\exists \overline{u} \;\; tq \;\; \|u_{n+p} - u_n\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Or, il existe une autre constante $c > 0$ telle que $c\|u_n - \overline{u}\|_{V_2} \leqslant \|u_n - \overline{u}\|_{V_1}$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans V, et celui-ci est complet pour $\|\cdot\|_{V_2}$. $\square$

Proposition

Tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet.

Preuve

On se place dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Le cas $\mathbb{C}$ se traite en considérant que $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-ev de dimension 2.

On prend V un $\mathbb{K}$-evn de dimension d finie. V étant de dimension finie, toutes les normes y sont équivalentes ; on choisit de travailler avec la norme infinie. On pose $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans V. On note $(u_{n,1}, \ldots, u_{n,d})$ les composantes de u_n dans une base donnée. Dès lors :

$$\begin{aligned} &\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geqslant N \;\; \forall p \geqslant 0 \;\; \|u_{n+p} - u_n\|_\infty \leqslant \varepsilon \\ \Longrightarrow \;& |u_{n+p,i} - u_{n,i}| \leqslant \varepsilon \qquad \forall i \in [\![1;d]\!] \end{aligned}$$

Donc la suite coordonnée d'indice i $(u_{n,i})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy pour tout $\forall i \in [\![1;d]\!]$ dans $\mathbb{K}$ complet, donc elle converge :

$$\forall i \in [\![1;d]\!] \;\;\; \exists \overline{u}_i \;\; tq \;\; u_{n,i} \underset{n\to\infty}{\to} \overline{u}_i \quad et \quad u_n \underset{n\to\infty}{\to} \overline{u} = (\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_d) \in \mathbb{R}^d$$

d'où V est complet. $\square$

exemples

- Pour $p \in [\![1; +\infty]\!]$, l^p équipé de la norme $\|\cdot\|_{l^p}$ est complet.
- $\mathscr{C}^0([a;b])$ équipé de $\|\cdot\|_\infty$ est un espace de Banach, mais $\mathscr{C}^0([a;b])$ équipé de $\|\cdot\|_1$ n'est pas complet.

Proposition

Soit V un espace de Banach de F un sev fermé de V, F équipé de la norme induite par V. Alors $(F, \|\cdot\|_V)$ est un espace de Banach.

Preuve

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $F \subset V$. Puisque V est de Banach, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans V ; en outre, F est fermé, donc $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \overline{u} \in F$, et on a bien F complet. $\square$

Proposition

Soit $V_1, \ldots, V_d$ d espaces de Banach, et $V = V_1 \times \cdots \times V_d$. Alors $\left(V, \|\cdot\|_p\right)$ est un espace de Banach, avec $\|\cdot\|_p$ la norme de Hölder.

1.2.3 Applications linéaires continues dans les espaces de Banach

Théorème

Soit V un evn un W un espace de Banach. Alors $\left(\mathscr{L}(V,W), \|\cdot\|_{\mathscr{L}(V,W)}\right)$ est un espace de Banach.

Preuve

Soit $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathscr{L}(V,W)$. Pour mémoire, L_n est alors une application linéaire continue de V dans W.

On a par définition $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geqslant N \;\; \forall p \geqslant 0 \;\; \|L_{n+p} - L_n\|_{\mathscr{L}(V,W)} \leqslant \varepsilon$

$$\text{avec } \|L_{n+p} - L_n\|_{\mathscr{L}(V,W)} = \sup_{\substack{u\in V\\ u\neq 0}} \frac{\|L_{n+p}u - L_n u\|_W}{\|u\|_V} \leqslant \varepsilon \qquad (*^1)$$

d'où $\forall u \in V \setminus \{0\}$,la suite $(L_n u)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans W un espace de Banach. Donc $L_n u \to \overline{l_u} \in W$, avec la limite dépendant de u. Pour $u = 0$, la suite converge vers 0, donc est de Cauchy.

On définit l'application

$$\begin{array}{cccc} \overline{L} & : & V & \longrightarrow & W \\ & & u & \mapsto & \overline{l_u} \end{array}$$

dont on veut montrer que c'est la limite de $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et qu'elle appartient aussi à $\mathscr{L}(V,W)$. On a facilement que $\overline{L}$ est linéaire, par linéarité de L_n et unicité de la limite :

$$\begin{aligned} L_n(\lambda u + v) = \lambda L_n u + L_n v \ &\to \ \lambda \overline{l_u} + \overline{l_v} \\ &\to \ \overline{l_{\lambda u + v}} \end{aligned}$$

Passons à la limite en $p \to \infty$ dans l'expression $\left(*^1\right)$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N} \ \ \forall n \geqslant N \quad \left\|\overline{L} - L_n\right\|_{\mathscr{L}(V,W)} = \sup_{\substack{u \in V \\ u \neq 0}} \frac{\left\|\overline{L}u - L_n u\right\|_W}{\|u\|_V} \leqslant \varepsilon \qquad \left(*^2\right)$$

On pose arbitrairement $\varepsilon = 1$. Dès lors, $\left\|\overline{L}u - L_n u\right\|_W \leqslant \|u\|_V$, et on a par l'inégalité triangulaire

$$\left\|\overline{L}u\right\|_W \leqslant \left\|\overline{L}u - L_n u\right\|_W + \|L_n u\|_W \leqslant \|u\|_V + \left\|\overline{L}\right\|_{\mathscr{L}(V,W)} \|u\|_V = \underbrace{\left(1 + \left\|\overline{L}\right\|_{\mathscr{L}(V,W)}\right)}_{constant} \times \|u\|_V$$

d'où $\overline{L}$ est lipschitzienne. Sachant qu'elle est linéaire, elle est donc continue. Elle réunit donc toutes les propriétés d'appartenance à $\mathscr{L}(V,W)$.

On conclût en se rappelant que d'après l'expression $\left(*^2\right)$, $\left\|\overline{L} - L_n\right\|_{\mathscr{L}(V,W)} \to 0$ dans $\mathscr{L}(V,W)$, et $\mathscr{L}(V,W)$ est complet. $\square$

Corollaire
Soit V un $\mathbb{K}$-evn. Alors son dual V' est un espace de Banach.

Preuve
$V' = \mathscr{L}(V,\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K}$ de dimension finie, donc $\mathscr{L}(V,\mathbb{K})$ est un espace de Banach par le théorème précédent ; ainsi, V' est un espace de Banach. $\square$

1.2.4 Théorème du point fixe de Banach - Picard

Définition - application contractante
Soit V un espace de Banach et $A : V \mapsto V$. On dit que A est contractante s'il existe une constante $\alpha < 1$ telle que $\forall (u,v) \in A^2$, on ait

$$\|Au - Av\|_V \leqslant \alpha \times \|u - v\|_V$$

En particulier, cette application est lipschitzienne, donc continue.

Théorème du point fixe
Soit V un espace de Banach et $A : V \mapsto V$ une application contractante. Alors l'équation du point fixe $Au = u$ admet une unique solution $u^* \in V$. Cette solution est appelée le point fixe.

Preuve

Existence

Soit $u_0 \in V$ quelconque. Définissons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite par $u_{n+1} = Au_n$. Montrons que cette suite est de Cauchy.

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N} \quad \|u_{n+1} - u_n\|_V &= \|Au_n - Au_{n-1}\|_V \\ &\leqslant \alpha \times \|u_n - u_{n-1}\|_V \\ &\dots \\ &\leqslant \alpha^n \times \|u_1 - u_0\|_V\end{aligned}$$

car A est contractante. Or

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N} \ \ \forall p \geqslant 0 \quad \|u_{n+p} - u_n\|_V &\leqslant \|u_{n+p} - u_{n+p-1}\|_V + \dots + \|u_{n+1} - u_n\|_V \\ &\leqslant \alpha^{n+p-1} \times \|u_1 - u_0\|_V + \dots + \alpha^n \times \|u_1 - u_0\|_V \\ &= \|u_1 - u_0\|_V \times \sum_{i=0}^{p-1} \alpha^{n+i} \\ &= \|u_1 - u_0\|_V \times \alpha^n \times \frac{1-\alpha^p}{1-\alpha} \\ &\leqslant \underbrace{\frac{\alpha^n}{1-\alpha}}_{\to 0} \times \|u_1 - u_0\|_V\end{aligned}$$

d'où $\forall n \in \mathbb{N} \ \ \forall p \geqslant 0 \quad \|u_{n+p} - u_n\|_V \underset{n\to\infty}{\to} 0$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans V espace de Banach, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $u^* \in V$.

Or A est continue (car contractante), donc par passage à la limite dans l'équation $u_{n+1} = Au_n$, on obtient bien $u^* = Au^*$.

Unicité

Par l'absurde : supposons qu'il existe u_1 et u_2 deux solutions de l'équation de point fixe. Dès lors

$$\|u_1 - u_2\|_V = \|Au_1 - Au_2\|_V \leqslant \alpha \times \|u_1 - u_2\|_V < \|u_1 - u_2\|_V$$

ce qui est absurde. □

1.3 Espaces de Hilbert

1.3.1 Définitions et propriétés

Définition - produit scalaire

Soit V un $\mathbb{K}$-ev. Un produit scalaire sur V est une application $\langle\cdot,\cdot\rangle_V : V \times V \mapsto \mathbb{K}$ qui vérifie

— $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est linéaire par rapport à la première variable (à gauche) : $\forall (u,v,w) \in V^3,\ \forall\lambda \in \mathbb{K},\quad \langle\lambda u + v, w\rangle_V = \lambda \langle u,w\rangle_V + \langle v,w\rangle_V$

- la symétrie hermitienne : $\forall (u,v) \in V, \quad \langle u,v\rangle_V = \overline{\langle v,u\rangle_V}$. Implique la semi-linéarité par rapport à la deuxième variable.
- la positivité : $\forall u \in V \quad \langle u,u\rangle_V \geqslant 0$. En particulier, la positivité implique l'appartenance à $\mathbb{R}$.
- la séparation : $\forall u \in V \quad \langle u,u\rangle_V = 0 \;\Leftrightarrow\; u = 0_V$.

Définition - espace pré-hilbertien

Soit V un $\mathbb{K}$-ev muni d'un produit scalaire. On dit alors que V est pré-hilbertien.

Proposition

Soit V un espace pré-hilbertien. L'application

$$\begin{array}{cccc} \|\cdot\|_V & : & V & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & & v & \mapsto & \langle v,v\rangle_V^{\frac{1}{2}} \end{array}$$

est une norme sur V que l'on appelle norme induite par le produit scalaire. On a en outre l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall (u,v) \in V^2 \quad |\langle u,v\rangle_V| \leqslant \|u\|_V \times \|v\|_V$$

Le cas d'égalité se produit si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u = \lambda v$.

Preuve

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On suppose que $\|u\|_V > 0$. (Sinon, l'inégalité devient triviale.) On a alors

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \langle \lambda u + v, \lambda u + v\rangle_V &= \lambda \langle u, \lambda u + v\rangle_V + \langle v, \lambda u + v\rangle_V \\ &= \lambda \overline{\langle \lambda u + v, u\rangle_V} + \overline{\langle \lambda u + v, v\rangle_V} \\ &= \lambda\overline{\lambda}\overline{\langle u,u\rangle_V} + \lambda\overline{\langle v,u\rangle_V} + \overline{\lambda}\overline{\langle u,v\rangle_V} + \overline{\langle v,v\rangle_V} \\ &= |\lambda|^2 \|u\|_V^2 + 2Re\left(\lambda \langle u,v\rangle_V\right) + \|v\|_V^2 \end{aligned}$$

On pose $\lambda = \frac{-\overline{\langle u,v\rangle_V}}{\|u\|_V^2}$, avec $\|u\|_V \neq 0$ par hypothèse. Ainsi donc,

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \left|\frac{-\overline{\langle u,v\rangle_V}}{\|u\|_V^2}\right|^2 \|u\|_V^2 + 2\mathrm{Re}\left(\frac{-\overline{\langle u,v\rangle_V}}{\|u\|_V^2}\langle u,v\rangle_V\right) + \|v\|_V^2 \\ &= \frac{\left|\overline{\langle u,v\rangle_V}\right|^2}{\|u\|_V^2} - 2\mathrm{Re}\left(\frac{\left|\overline{\langle u,v\rangle_V}\right|^2}{\|u\|_V^2}\right) + \|v\|_V^2 \\ &= \frac{-\left|\overline{\langle u,v\rangle_V}\right|^2 + \|u\|_V^2 \|v\|_V^2}{\|u\|_V^2} \end{aligned}$$

et le dénominateur étant positif, on peut conclure que $|\langle u,v\rangle_V| \leqslant \|u\|_V \times \|v\|_V$.

$\|\cdot\|_V$ est bien une norme

Le lecteur attentif remarquera que la première partie de cette démonstration ne nécessite pas que $\|\cdot\|_V$ soit une norme : on peut donc le justifier après. Ceci précisé, on a bien :

- la positivité par définition d'un produit scalaire : $\forall u \in V \quad \|u\|_V = \langle u, u\rangle_V^{\frac{1}{2}} \geqslant 0$
- la séparation par définition d'un produit scalaire : $\|u\|_V = 0 \Leftrightarrow \langle u, u\rangle_V = 0 \Leftrightarrow u = 0$
- l'homogénéité par linéarité à gauche et symétrie hermitienne : soit $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\|\lambda u\|_V^2 = \langle \lambda u, \lambda u\rangle_V = |\lambda|^2 \|u\|_V^2$
- l'inégalité triangulaire : soit $(u, v) \in V^2$.

$$\|u+v\|_V^2 = \langle u+v, u+v\rangle_V = \|u\|_V^2 + 2\mathrm{Re}\left(\langle u, v\rangle_V\right) + \|v\|_V^2$$

or, par Pythagore puis Cauchy-Schwarz,

$$\mathrm{Re}\left(\langle u, v\rangle_V\right) \leqslant |\langle u, v\rangle_V| \leqslant \|u\|_V \times \|v\|_V$$

Donc

$$\|u+v\|_V^2 \leqslant \|u\|_V^2 + 2\|u\|_V \times \|v\|_V + \|v\|_V^2 = \left(\|u\|_V^2 + \|v\|_V^2\right)^2$$

ce qui conclût la preuve. □

Remarque

L'inégalité de Cauchy-Schwarz exprime la continuité du produit scalaire, par définition de la continuité des formes bilinéaires.

Définition - espace de Hilbert

Un espace de Hilbert est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire et qui est complet pour la norme induite par ce produit scalaire.

exemples

• En dimension finie

$\mathbb{R}^d$ muni de $\langle u, v\rangle = \sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i v_i$ est un espace de Hilbert.

• En dimension infinie

L'espace de Banach l^2 des suites réelles de carrés sommables, muni du produit scalaire $\langle u, v\rangle_{l^2} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i v_i$, est un espace de Hilbert. Pour mémoire, $l^2 = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \mid \sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i^2 < \infty\right\}$ l'ensemble des suites dont les sommes des carrés sont finies.

Proposition

Soit H un espace de Hilbert et $F \subset H$ un fermé. Alors F muni du produit scalaire induit par H est un espace de Hilbert.

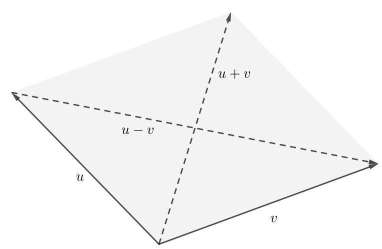

FIGURE 1.1 – Illustration de l'identité du parallélogramme

Preuve
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $F \subset H$. Puisque H est de Hilbert, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans H ; en outre, F est fermé, donc $u_n \underset{n\to\infty}{\to} \overline{u} \in F$, et on a bien F complet. $\square$

1.3.2 Théorème de projection orthogonale

Définition - orthogonalité
Soit V un $\mathbb{K}$-ev muni d'un produit scalaire ϕ. On dit que u et v sont orthogonaux si $\phi(u, v) = 0$. On note $u \perp_\phi v$, ou $u \perp v$ s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Théorème de Pythagore
Soit H un espace pré-hilbertien (donc en particulier, un $\mathbb{K}$-ev).
Si $u \perp v$, alors $\|u+v\|_H^2 = \|u\|_H^2 + \|v\|_H^2$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors la réciproque est vraie.

Preuve
On suppose que $u \perp v$. Alors $\langle u+v, u+v\rangle_H = \|u\|_H^2 + \|v\|_H^2 + 2\mathrm{Re}\left(\langle u, v\rangle_H\right) = \|u\|_H^2 + \|v\|_H^2$.
Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, l'égalité $\|u+v\|_H^2 = \|u\|_H^2 + \|v\|_H^2$ implique que $\mathrm{Re}\left(\langle u, v\rangle_H\right) = 0$, d'où $\langle u, v\rangle_H = 0$ et $u \perp v$. $\square$

Proposition
Soit H un espace pré-hilbertien, et $(u, v) \in H^2$. On a l'identité du parallélogramme :

$$\|u+v\|_H^2 + \|u-v\|_H^2 = 2\left(\|u\|_H^2 + \|v\|_H^2\right)$$

On peut visualiser cette relation en figure 1.1.

Preuve

$$\begin{aligned}
&\|u+v\|_H^2+\|u-v\|_H^2\\
=&\|u\|_H^2+\|v\|_H^2+2\mathrm{Re}\left(\langle u,v\rangle_H\right)+\|u\|_H^2+\|v\|_H^2-2\mathrm{Re}\left(\langle u,v\rangle_H\right)\\
=&2\left(\|u\|_H^2+\|v\|_H^2\right)
\end{aligned}$$

□

Théorème de projection orthogonale

Soit H un espace de Hilbert et K un sous-espace vectoriel fermé de H. Pour tout $u \in H$, il existe $v \in K$, appelé le projeté orthogonal de u sur K et noté $P_K(u)$, tel que

$$\|u-v\|_H=\min_{w\in K}\|u-w\|_H$$

De plus, $P_K(u)$ est caractérisé par $\begin{cases} P_K(u)\in K \\ \langle P_K(u)-u,w\rangle=0 \quad \forall w\in K \end{cases}$

Preuve

Existence

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite minimisante, i.e. telle que $\forall u\in K$, $\|u-v_n\|_H\to \bar{l}=\inf\limits_{w\in K}\|u-w\|_H$. Montrons que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. On a $\forall n\in\mathbb{N}$ et $\forall p\geqslant 0$

$$\begin{aligned}
\|v_{n+p}-v_n\|_H^2&=\|v_{n+p}-u+u-v_n\|_H^2\\
&=2\|v_{n+p}-u\|_H^2+2\|u-v_n\|_H^2-\|v_{n+p}-u-(u-v_n)\|_H^2\\
&=2\|v_{n+p}-u\|_H^2+2\|u-v_n\|_H^2-4\underbrace{\left\|u-\underbrace{\frac{v_n+v_{n+p}}{2}}_{\in K}\right\|_H^2}_{\geqslant \bar{l}^2}
\end{aligned}$$

$$\implies \|v_{n+p}-v_n\|_H^2\leqslant 2\underbrace{\|v_{n+p}-u\|_H^2}_{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\bar{l}^2}+2\underbrace{\|u-v_n\|_H^2}_{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\bar{l}^2}-4\bar{l}^2\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$$

donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans K fermé et inclus dans un espace de Hilbert, donc $v_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} v\in K$. Par continuité de la norme, on en déduit que

$$\|u-v\|_H=\lim_{n\to\infty}\|u-v_n\|_H=\inf_{w\in K}\|u-w\|_H$$

et il existe bien un $v\in K$ tel que $\|u-v\|_H=\inf\limits_{w\in K}\|u-w\|_H$.

Unicité

Par l'absurde : soient v_1 et v_2 tels que $\|u-v_1\|_H = \|u-v_2\|_H = \bar{l}$.

$$\|v_1-v_2\|_H^2 = 2\underbrace{\|v_1-u\|_H^2}_{=\bar{l}^2} + 2\underbrace{\|v_2-u\|_H^2}_{=\bar{l}^2} - 4\underbrace{\left\|u-\frac{v_1+v_2}{2}\right\|_H^2}_{\geqslant \bar{l}^2} \leqslant 0$$

ce qui est absurde si $v_1 \neq v_2$. Donc $v_1 = v_2$ et l'on a unicité du projeté.

Caractérisation

Montrons d'abord que $\forall w \in K,\ \langle P_K(u)-u, w\rangle_H = 0$. Soit $w \in K$. On considère la fonction définie $\forall t \in \mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \|P_K(u)-u+tw\|_H^2 \\ &= \|P_K(u)-u\|_H^2 + t^2\|w\|_H^2 + 2t\mathrm{Re}\left(\langle P_K(u)-u, w\rangle_H\right)\end{aligned}$$

Observons que ϕ est un polynôme de degré 2 en t. Or ϕ est minimale en $t = 0$, donc $\phi'(0) = 0$, sachant $\phi'(0) = 2t\|w\|_H^2 + 2\mathrm{Re}\left(\langle P_K(u)-u, w\rangle_H\right)$. Donc $\mathrm{Re}\left(\langle P_K(u)-u, w\rangle_H\right) = 0 \quad \forall w \in K$. Deux cas se présentent :

• Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on a directement $\langle P_K(u)-u, w\rangle_H = 0$ et le projeté vérifie bien la caractérisation.

• Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on utilise le fait que K soit un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$: si $w \in K$, alors $iw \in K$. Or $\forall iw \in K$

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}\left(\langle P_K(u)-u, iw\rangle_H\right) = 0 \\ \Leftrightarrow &\mathrm{Re}\left(\bar{i}\,\langle P_K(u)-u, w\rangle_H\right) = 0 \\ \Leftrightarrow &-\mathrm{Im}\left(\langle P_K(u)-u, w\rangle_H\right) = 0\end{aligned}$$

d'où on a simultanément nullité de la partie réelle et la partie imaginaire de $\langle P_K(u)-u, w\rangle_H$, donc $\langle P_K(u)-u, w\rangle_H = 0$ et le projeté vérifie aussi la caractérisation.

Il reste à montrer qu'un élément vérifiant la caractérisation est forcément le projeté. Pour ceci, on suppose que $\forall w \in K,\ \langle P_K(u)-u, w\rangle_H = 0$. Dès lors

$$\begin{aligned}\|w-u\|_H^2 &= \|(P_K(u)-u)+(w-P_K(u))\|_H^2 \\ &= \|P_K(u)-u\|_H^2 + \underbrace{\|w-P_K(u)\|_H^2}_{\geqslant 0} + 2\mathrm{Re}\left(\underbrace{\left\langle P_K(u)-u, \underbrace{w-P_K(u)}_{\in K}\right\rangle_H}_{=0}\right) \\ &\geqslant \|P_K(u)-u\|_H^2\end{aligned}$$

et on a bien $P_K(u)$ (défini uniquement par la caractérisation) vérifiant $\|P_K(u)-u\|_H^2 = \min_{w\in K}\|u-w\|_H$. $\square$

Premier corollaire

$P_K \in \mathscr{L}(H,H)$ et si K n'est pas réduit à $\{0\}$, $\|P_K\|_{\mathscr{L}(H,H)} = 1$. D'où $\|P_K(u)\|_H \leqslant \|u\|_H$.

Preuve

Linéarité de P_K

Soient α_1 et α_2 dans $\mathbb{K}$, u_1 et u_2 dans H. On a immédiatement $\alpha_1 P_K(u_1) + \alpha_2 P_K(u_2) \in K$. De plus, $\forall v \in K$, on a

$$\begin{aligned}
&\left\langle (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) - (\alpha_1 P_K(u_1) + \alpha_2 P_K(u_2)), v \right\rangle_H \\
=&\alpha_1 \left\langle u_1 - P_K(u_1), v \right\rangle_H + \alpha_2 \left\langle u_2 - P_K(u_2), v \right\rangle_H \\
=&0 + 0
\end{aligned}$$

De ce fait, le vecteur $\alpha_1 P_K(u_1) + \alpha_2 P_K(u_2)$ vérifie la caractérisation du projeté de $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$; on a donc $P_K(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 P_K(u_1) + \alpha_2 P_K(u_2)$, et c'est bien la définition de la linéarité de P_K.

Norme de P_K

Soit $u \in K$. Par la caractérisation, on a $\left\langle u - P_K(u), P_K(u) \right\rangle_H = 0$. Donc, par Pythagore,

$$\begin{aligned}
&\|u\|_H^2 = \|u - P_K(u)\|_H^2 + \|P_K(u)\|_H^2 \\
\Longrightarrow\ &\|P_K(u)\|_H^2 = \|u\|_H^2 - \|u - P_K(u)\|_H^2 \\
&\leqslant \|u\|_H^2
\end{aligned}$$

Sachant qu'elle est linéaire, l'application projeté est donc lipschitzienne, donc continue et $\|P_K\|_{\mathscr{L}(H,H)} \leqslant 1$ par homogénéité de la norme. Si $K \neq \{0\}$, alors $\forall w \in K \setminus \{0\}$, on a

$$\begin{aligned}
&P_K(w) = w \\
\Longrightarrow\ &\|P_K(u)\|_H = \|u\|_H \\
\Longrightarrow\ &\|P_K\|_{\mathscr{L}(H,H)} = \sup_{\substack{u \in K \\ u \neq 0}} \frac{\|P_K(u)\|_H}{\|u\|_H} \geqslant 1
\end{aligned}$$

et par double inégalité, $\|P_K\|_{\mathscr{L}(H,H)} = 1$. $\square$

Deuxième corollaire

Soit $(u_1, u_2) \in H^2$. Alors $\|P_K(u_1) - P_K(u_2)\|_H \leqslant \|u_1 - u_2\|_H$. Autrement dit, les projetés sont plus « proches » que les vecteurs originaux.

Preuve

Par linéarité puis propriété de P_K : $\|P_K(u_1) - P_K(u_2)\|_H = \|P_K(u_1 - u_2)\|_H \leqslant \|u_1 - u_2\|_H$. $\square$

Définition - orthogonal d'un espace

Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ un espace de Hilbert, et $A \subset H$ un sous-espace non vide. L'orthogonal de A, noté $A^\perp$, est l'ensemble

$$A^\perp = \{u \in H \mid \forall v \in A \quad \langle u, v \rangle_H = 0\}$$

Si F est un sous-espace vectoriel fermé de H, alors par caractérisation de la projection, $\forall u \in H$, $u - P_F(u) \in F^\perp$.

Propriétés

Soit A un sous-ensemble non vide de H. Alors

— $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de H

— $H^\perp = \{0\}$ et $\{0\}^\perp = H$

— Si $A \subset B$ alors $B^\perp \subset A^\perp$

— $A^\perp = \left(\overline{\text{Vect}(A)}\right)^\perp$

Preuve

• On se place dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(u_1, u_2) \in \left(A^\perp\right)^2$. Trivialement, $0 \in A^\perp$ car $\forall v \in H$, $\langle 0, v \rangle_H = 0$. De plus, $\langle \alpha u_1 + u_2, v \rangle_H = \alpha \langle u_1, v \rangle_H + \langle u_2, v \rangle_H = 0$, donc $\alpha u_1 + u_2 \in A^\perp$ et $A^\perp$ est bien un sous-espace vectoriel de H. Montrons que $A^\perp$ est un fermé. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A^\perp$ et $u_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} u \in H$.

$$\forall v \in H \quad \langle u, v \rangle_H = \lim_{n \to \infty} \langle u_n, v \rangle_H = 0$$

Donc $u \in A^\perp$, et $A^\perp$ fermé.

• Soit $u \in H^\perp$. Alors $\forall v \in H$, $\langle u, v \rangle_H = 0$, donc en particulier, $\langle u, u \rangle_H = 0 \implies \|u\|_H = 0 \implies u = 0$. Donc $H^\perp = \{0\}$.

Réciproquement, $\forall u \in H$, $\langle 0, u \rangle_H = 0$, donc $\{0\}^\perp = H$.

• Soit $A \subset B$, et $u \in B^\perp$. $\forall v \in B$, on a $\langle u, v \rangle_H = 0$. En particulier, si $v \in A \subset B$, $\langle u, v \rangle_H = 0$ et $u \in A^\perp$, donc $B^\perp \subset A^\perp$.

• On a $A \subset \overline{\text{Vect}(A)}$, donc par le point précédent, $\left(\overline{\text{Vect}(A)}\right)^\perp \subset A^\perp$.

Réciproquement, soit $u \in A^\perp$. On a $\forall v \in A \quad \langle u, v \rangle_H = 0$. Procédons en deux étapes.

Premièrement, soit $v \in \text{Vect}(A)$. $\exists (\lambda_i)_{i \in [\![1;n]\!]} \subset \mathbb{R}^n$ et $(u_i)_{i \in [\![1;n]\!]} \subset A$ tels que $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$. On a alors

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle_H = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i, v \right\rangle_H &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left\langle \underbrace{u_i}_{\in A^\perp}, \underbrace{v}_{\in A} \right\rangle = 0 \\ \implies u \in \left(\overline{\text{Vect}(A)}\right)^\perp \end{aligned}$$

Donc $A^\perp \subset \left(\overline{\text{Vect}(A)}\right)^\perp$.

Deuxièmement, soit $v \in \overline{\mathrm{Vect}\,(A)} \implies \exists\,(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{Vect}\,(A)$ tel que $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} v$. Donc, $\forall u \in A^{\perp}$,

$$\langle u, v\rangle_H = \lim_{n\to\infty} \langle u, v_n\rangle_H = 0$$

car $v_n \in \mathrm{Vect}\,(A)$. Donc $u \in \left(\overline{\mathrm{Vect}\,(A)}\right)^{\perp} \implies A^{\perp} \subset \left(\overline{\mathrm{Vect}\,(A)}\right)^{\perp}$ et par double inclusion, $A^{\perp} = \left(\overline{\mathrm{Vect}\,(A)}\right)^{\perp}$. □

Proposition

F sous-espace vectoriel fermé de $H \Leftrightarrow \left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F$.

Preuve

Sens direct

On suppose que F est un sous-espace vectoriel fermé de H. Soit $u \in F$. $\forall v \in F^{\perp},\ \ \langle u, v\rangle_H = 0$, donc $u \in \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$, et $F \subset \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$.

Réciproquement, soit $u \in \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$. On considère $P_F\,(u)$ la projection orthogonale de u sur F (le retour). D'après la caractérisation, on a $\langle u - P_F\,(u)\,, v\rangle_H = 0\ \ \forall v \in F$. Donc $u - P_F\,(u) \in F^{\perp}$, avec $u \in \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$, donc $\langle u - P_F\,(u)\,, u\rangle_H = 0$, et on déduit

$$\|u\|_H^2 \underset{\text{développement}}{=} \langle P_F\,(u)\,, u\rangle_H \underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leqslant} \|P_F\,(u)\|_H\,\|u\|_H \underset{\text{propriété de } P_F}{\leqslant} \|u\|_H^2$$

et par double inégalité, $\langle P_F\,(u)\,, u\rangle_H = \|P_F\,(u)\|_H\,\|u\|_H$, ce qui réalise le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz. Le vecteur u est donc colinéaire à son projeté, et $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tel que $P_F\,(u) = \lambda u$. Donc $\langle P_F\,(u)\,, u\rangle_H = \langle \lambda u, u\rangle_H = \lambda\,\|u\|_H^2$. Mais on sait que $\langle P_F\,(u)\,, u\rangle_H = \|u\|_H^2$, d'où $\lambda = 1$, et l'on peut finalement conclure que $P_F\,(u) = u \in F$, d'où $\left(F^{\perp}\right)^{\perp} \subset F$, et par double inclusion, on obtient l'égalité.

Sens réciproque

Supposons que $\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F$. On sait que $\left(F^{\perp}\right)^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel fermé de H, donc F est un sev fermé de H. □

Proposition

Si F est un sous-espace vectoriel fermé de H, alors

— $H = F \oplus F^{\perp}$

— $Id = P_F + P_{F^{\perp}}$

Preuve

• Soit $u \in H$. On a $u = \underbrace{P_F\,(u)}_{\in F} + \underbrace{u - P_F\,(u)}_{\in F^{\perp}}$ donc $H = F + F^{\perp}$.

De plus, si $u \in F \bigcap F^{\perp}$, alors $\left\langle \underbrace{u}_{\in F}, \underbrace{u}_{\in F^{\perp}} \right\rangle_H = 0 \implies u = 0$ et $F \bigcap F^{\perp} = \{0\}$. On a donc bien $H = F \oplus F^{\perp}$.

• Après le premier point, l'égalité $Id(u) = P_F(u) + u - P_F(u) = P_F(u) + P_{F^{\perp}}(u)$ devient triviale. $\square$

1.3.3 Bases hilbertiennes

Définition - famille totale

Soit H un espace de Hilbert, et $A \subset H$. On dit qu'une famille A de H est totale si $\overline{\mathrm{Vect}(A)} = H$. (À prendre comme une analogie de « famille génératrice »).

Proposition

A totale $\Leftrightarrow \left(\overline{\mathrm{Vect}(A)}\right)^{\perp} = \{0\}$.

Preuve

Si A totale, $\overline{\mathrm{Vect}(A)} = H \implies \left(\overline{\mathrm{Vect}(A)}\right)^{\perp} = H^{\perp} = \{0\}$.

Réciproquement, si $\left(\overline{\mathrm{Vect}(A)}\right)^{\perp} = \{0\}$, alors $\overline{\mathrm{Vect}(A)} = \left(\left(\overline{\mathrm{Vect}(A)}\right)^{\perp}\right)^{\perp} = \{0\}^{\perp} = H$ et A est totale. $\square$

Définition - base hilbertienne

Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de H. On dit que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de H si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est totale et orthonormale :

— $\left(\overline{\mathrm{Vect}(\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\})}\right)^{\perp} = \{0\}$

— $\forall i \in [\![1;n]\!] \quad \langle e_n, e_i \rangle_H = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq n \\ 1 & \text{si } i = n \end{cases} = \delta_{i,n}$

Définition - espace séparable

On dit qu'un espace vectoriel normé E est séparable si E contient une famille dénombrable dense dans lui-même.

exemple

l^p est séparable si $p \in [1;\infty[$, et ne l'est pas si $p = \infty$.

Théorème

Tout espace de Hilbert séparable admet une base hilbertienne.

Preuve

On utilise le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable dense dans H. Nos hypothèses ne stipulent pas que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ soit libre ; aussi, nous aurons besoin de travailler sur une famille extraite libre. Pour ceci, définissons $F_n = \mathrm{Vect}\left(\{x_0,\dots,x_n\}\right)$. On a $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n = \mathrm{Vect}\left(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right)$ dense dans H, car contenant toute la famille dense. Construisons une famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une suite d'indices $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement croissante telles que

— $\forall n\in\mathbb{N}\quad (e_0,\dots,e_n)$ soit une base de F_{k_n}

— $(e_0,\dots,e_n)$ soit orthonormée.

Il faut voir ici $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme une sélection d'indices, permettant d'écarter les x_i redondants. On a donc automatiquement $k_n \geqslant n$, le cas d'égalité ne se produisant que si la famille $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est déjà libre.

Procédons par récurrence. Soit n_0 le premier indice tel que $x_{n_0}\neq 0$. On pose alors $e_0 = \frac{x_{n_0}}{\left\|x_{n_0}\right\|_H}$, d'où $\{e_0\}$ est une base orthonormée de F_{n_0}.

On suppose maintenant que l'on dispose de $(e_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$ et $(k_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$. On note k_{n+1} le plus petit indice tel que $\begin{cases} k_{n+1}\geqslant n \\ F_{k_{n+1}}\neq F_{k_n}\end{cases}$. Ainsi, on aura $\left(e_0,\dots,e_n,x_{k_{n+1}}\right)$ base de $F_{k_{n+1}}$. On pose

$$e'_{n+1} = x_{k_{n+1}} - \sum_{i=0}^{n} \left\langle x_{k_{n+1}}, e_i\right\rangle_H e_i$$

ce qui revient à enlever à $x_{k_{n+1}}$ l'ensemble de ses composantes selon les e_i, ou, en d'autres termes, à le projeter sur $H\backslash\overline{F_{n_k}}$. Comme $\left(e_0,\dots,e_n,x_{k_{n+1}}\right)$ base de $F_{k_{n+1}}$ et $F_{k_{n+1}}\neq F_{k_n}$, on est assuré que $x_{k_{n+1}}$ ne puisse pas être exprimé en fonction de $(e_0,\dots,e_n)$; aussi, $\left\|e'_{n+1}\right\|_H\neq 0$. Une telle définition permet d'obtenir l'orthogonalité :

$$\begin{aligned}\forall j\in[\![0;n]\!]\quad \left\langle e'_{n+1},e_j\right\rangle_H &= \left\langle x_{k_{n+1}},e_j\right\rangle_H - \sum_{i=0}^{n}\left\langle x_{k_{n+1}},e_i\right\rangle_H \underbrace{\left\langle e_i,e_j\right\rangle_H}_{=\delta_{i,j}} \\ &= \left\langle x_{k_{n+1}},e_j\right\rangle_H - \left\langle x_{k_{n+1}},e_j\right\rangle_H \\ &= 0\end{aligned}$$

donc $e'_{n+1}\perp e_j\quad \forall j\in[\![0;n]\!]$.

On pose alors $e_{n+1} = \frac{e'_{n+1}}{\left\|e'_{n+1}\right\|_H}$ avec $\left\|e'_{n+1}\right\|_H\neq 0$. On a e_{n+1} normé, donc $(e_0,\dots,e_{n+1})$ une base orthonormale de $F_{k_{n+1}}$.

On peut ainsi construire $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence, et obtenir une famille orthonormale et totale, car $\mathrm{Vect}\left(\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right) = \mathrm{Vect}\left(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\right) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$ qui est dense dans H. Ainsi, on a bien $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne. $\square$

Théorème

Soit H un espace de Hilbert séparable, muni d'une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors l'application

$$\begin{array}{cccc} \phi & : & H & \longrightarrow & l^2 \\ & & u & \mapsto & \left(\langle u, e_n\rangle_H\right)_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$

est linéaire, continue, bijective et isométrique.

En particulier, on a les deux égalités suivantes :

$$u = \sum_{n\geqslant 1} \langle u, e_n\rangle_H \, e_n \qquad \text{de Friedrich Wilhelm Bessel}$$

$$\|u\|_H^2 = \sum_{n\geqslant 1} \langle u, e_n\rangle_H^2 \qquad \text{de Marc-Antoine Parseval des Chênes}$$

Preuve

• ϕ est clairement linéaire, par linéarité du produit scalaire.

• On pose F_n l'espace vectoriel engendré par $(e_1, \ldots, e_n)$. Soit $u \in H$. On note $\hat{u}_n = P_{F_n}(u)$ sa projection sur F_n. Par caractérisation de ladite projection, on a

$$\forall i \in [\![1;n]\!] \quad \langle u - \hat{u}_n, e_i\rangle_H = 0 \implies \langle u, e_i\rangle_H = \langle \hat{u}_n, e_i\rangle_H$$

De plus, $\hat{u}_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$, donc

$$\forall j \in [\![1;n]\!] \quad \langle \hat{u}_n, e_j\rangle_H = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle e_i, e_j\rangle_H = \lambda_j = \langle u, e_j\rangle_H$$

d'où $\hat{u}_n = \sum_{i=1}^{n} \langle u, e_i\rangle_H e_i$, et $\|\hat{u}_n\|_H^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle u, e_i\rangle_H^2 \leqslant \|u\|_H^2$ par Pythagore. Comme $u \in H \implies \|u\|_H < \infty$, les sommes partielles des carrés des éléments de la suite $\phi(u)$ sont bornées, donc $\phi(u) \in l^2$, et $\|\phi(u)\|_H^2 = \sum_{i\in\mathbb{N}} \langle u, e_i\rangle_H^2 \leqslant \|u\|_H^2$, donc ϕ continue.

• De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall p \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} \|\hat{u}_{n+p} - \hat{u}_n\|_H^2 &= \left\| \sum_{i=n+1}^{n+p} \langle u, e_i\rangle_H \, e_i \right\|_H^2 \\ &= \sum_{i=n+1}^{n+p} \langle u, e_i\rangle_H^2 \, \|e_i\|_H^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

par Pythagore, puis reste d'une série convergente. Donc la suite $(\hat{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans H un espace de Hilbert. Donc $\hat{u}_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \hat{u} \in H$. Montrons que $\hat{u} = u$. Pour mémoire, on montrera ainsi que la projection d'un élément de H sur l'espace engendré par une base hilbertienne de H est égale à cet élément. Utilisons l'argument $(u - \hat{u}) \perp (e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \ \forall i \in [\![1;n]\!] \quad \langle u - \hat{u}, e_i\rangle_H = \lim_{n\to\infty} \langle u - \hat{u}_n, e_i\rangle_H = 0$$

d'où $u - \hat{u}$ est orthogonal à la famille totale $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donc $u - \hat{u} \in H^\perp = \{0\}$ et on a bien $u = \hat{u}$. Donc

$$u = \lim_{n\to\infty} \hat{u}_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \langle u, e_i \rangle_H e_i = \sum_{i\in\mathbb{N}} \langle u, e_i \rangle_H e_i$$

d'où l'inégalité de Bessel.

• De surcroît,

$$\begin{aligned} \|u\|_H^2 &= \lim_{n\to\infty} \|\hat{u}_n\|_H^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \langle u, e_i \rangle_H^2 = \sum_{i\in\mathbb{N}} \langle u, e_i \rangle_H^2 \\ &= \|\phi(u)\|_H^2 \end{aligned}$$

d'où l'égalité de Parseval, et ϕ isométrie.

• Enfin, montrons que ϕ est bijective.

Si $\phi(u) = 0$, on a $\|\phi(u)\|_H = 0 \implies \|u\|_H = 0$, d'où, comme ϕ est linéaire et a son noyau réduit à $\{0\}$, ϕ est injective.

D'autre part, soit $\lambda = (\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l^2$. Posons $u_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$. On a alors, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall p \geqslant 0$,

$$\|u_{n+p} - u_n\|_H^2 = \left\| \sum_{i=n+1}^{n+p} \lambda_i e_i \right\|_H^2 = \underbrace{\sum_{i=n+1}^{n+p} \lambda_i^2}_{\text{reste d'une série convergente}}$$

par Pythagore. D'où $\|u_{n+p} - u_n\|_H^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de Cauchy dans H de Hilbert, donc $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u = \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i e_i \in H$. Qui plus est,

$$\forall j \in \mathbb{N} \quad \langle u, e_j \rangle_H = \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i \langle e_i, e_j \rangle_H = \lambda_j$$

d'où $u = \sum_{i\in\mathbb{N}} \langle u, e_i \rangle_H e_i$ et $\phi(u) = \lambda$. On a ainsi prouvé que tout élément de l'espace d'arrivée de ϕ possède un antécédent par ϕ dans son espace de départ, ou, en d'autres termes, que ϕ est surjective. On a donc bien ϕ bijective. □

Remarque

Ce théorème montre que $u \in H \Leftrightarrow u = \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i e_i$, avec $\lambda \in l^2$ telle que $\lambda_i = \langle u, e_i \rangle_H$ et $\|u\|_H^2 = \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i^2$.

1.3.4 Théorème de Riesz

Pour les espaces de Hilbert, on peut identifier H et son dual H'.

Théorème

Soit H un espace de Hilbert muni de son produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$. Soit $\phi \in H' = \mathscr{L}(H, \mathbb{K})$. Alors

$$\exists! \overline{u} \in H \text{ tel que } \forall v \in H \quad \phi(v) = \langle \phi, v \rangle_{H', H} = \langle v, \overline{u} \rangle_H$$

De plus, l'application

$$\begin{array}{cccc} \Phi & : & H' & \longrightarrow & H \\ & & \phi & \mapsto & \overline{u} \end{array}$$

est antilinéaire, continue, bijective, isométrique et d'inverse continue.

Nota bene

- Une application antilinéaire est telle que $\Phi(\phi_1 + \lambda \phi_2) = \Phi(\phi_1) + \overline{\lambda} \Phi(\phi_2)$. Les constantes complexes sortent conjuguées.
- Ce théorème veut dire que toute application du dual de H peut être exactement « modélisée » par un simple produit scalaire avec un élément $\overline{u}$ de H, et que cette « modélisation » est très pratique (cf la liste des propriétés de Φ).

Preuve

Existence

Soit $\phi \in H'$. Si $\phi = 0$, on prend $\overline{u} = 0$.

Supposons que $\phi \neq 0$. Par définition, ceci implique qu'il existe $u_1 \in H$ tel que $\phi(u_1) \neq 0$. Considérons $K = \{u \in H \mid \phi(u) = 0\}$ le noyau de ϕ, donc un sous-espace vectoriel de H. Considérons $u_2 = P_K(u)$, avec $u_1 \notin K$, d'où $u_1 \neq u_2$. On pose

$$\overline{u} = \phi(u_1) \frac{u_1 - u_2}{\|u_1 - u_2\|_H^2} \quad \Leftrightarrow \quad \|\overline{u}\|_H^2 = \left\| \phi(u_1) \frac{u_1 - u_2}{\|u_1 - u_2\|_H^2} \right\|_H^2 = \frac{\phi^2(u_1)}{\|u_1 - u_2\|_H^2}$$

Cette définition implique que $\overline{u} \neq 0$.

D'autre part, par linéarité de ϕ,

$$\phi(\overline{u}) = \phi\left(\phi(u_1) \frac{u_1 - u_2}{\|u_1 - u_2\|_H^2} \right) = \frac{\phi(u_1)}{\|u_1 - u_2\|_H^2} \left(\phi(u_1) - \underbrace{\phi(u_2)}_{=0 \text{ car } u_2 \in K} \right) = \frac{\phi^2(u_1)}{\|u_1 - u_2\|_H^2}$$

D'où on obtient que $\|\overline{u}\|_H^2 = \phi(\overline{u})$.

Or, par caractérisation de la projection, on a $\forall v \in K \quad \langle u_1 - u_2, v \rangle_H = 0$, d'où

$$\langle \overline{u}, v \rangle_H = \frac{\phi(u_1)}{\|u_1 - u_2\|_H^2} \langle u_1 - u_2, v \rangle_H = 0$$

d'où $\forall v \in K$, $\langle \overline{u}, v \rangle_H = 0$. En d'autres termes, l'élément que nous avons posé est orthogonal au noyau de ϕ. Nous allons utiliser ceci pour prouver que ϕ peut bien être définie comme un produit scalaire avec $\overline{u}$.

$\forall v \in H$, étudions $v - \frac{\phi(v)}{\phi(\overline{u})}\overline{u}$. On a

$$\phi\left(v - \frac{\phi(v)}{\phi(\overline{u})}\overline{u}\right) = \phi(v) - \frac{\phi(v)}{\phi(\overline{u})}\phi(\overline{u}) = 0$$

donc $v - \frac{\phi(v)}{\phi(\overline{u})}\overline{u} \in K$ le noyau de ϕ. Donc, par la propriété prouvée précédemment,

$$\begin{aligned}
&\left\langle v - \frac{\phi(v)}{\phi(\overline{u})}\overline{u}, \overline{u}\right\rangle_H = 0 \\
&\Leftrightarrow \langle v, \overline{u}\rangle_H = \frac{\phi(v)}{\phi(\overline{u})}\langle \overline{u}, \overline{u}\rangle_H = \frac{\phi(v)}{\phi(\overline{u})}\|\overline{u}\|_H^2 \underset{\|\overline{u}\|_H^2 = \phi(\overline{u})}{=} \frac{\phi(v)}{\phi(\overline{u})}\phi(\overline{u}) \\
&\Leftrightarrow \langle v, \overline{u}\rangle_H = \phi(v)
\end{aligned}$$

et on a bien prouvé que $\forall \phi \in H', \quad \exists \overline{u} \in H \quad \text{tq} \quad \phi = \langle \cdot, \overline{u}\rangle_H$.

Unicité

Supposons qu'il existe $\overline{u}_1$ et $\overline{u}_2$ tels que $\forall v \in H$

$$\begin{aligned}
&\phi(v) = \langle v, \overline{u}_1\rangle_H = \langle v, \overline{u}_2\rangle_H \\
\Longrightarrow\ &\langle v, \overline{u}_1 - \overline{u}_2\rangle_H = 0
\end{aligned}$$

et en particulier, pour $v = \overline{u}_1 - \overline{u}_2$, on a $\|\overline{u}_1 - \overline{u}_2\|_H = 0$, donc $\overline{u}_1 = \overline{u}_2$ et il y a bien unicité.

Propriétés de Φ

Pour mémoire, Φ associe à chaque forme linéaire continue l'élément de H qui la « modélise ». L'existence et l'unicité de $\overline{u}$ prouvent donc que Φ est bijective. De même, par définition, Φ est clairement antilinéaire : $\forall v \in H$

$$\begin{aligned}
(\phi_1 + \lambda\phi_2)(v) &= \phi_1(v) + \lambda\phi_2(v) = \langle v, \overline{u}_{\phi_1}\rangle_H + \lambda\langle v, \overline{u}_{\phi_2}\rangle_H = \left\langle v, \overline{u}_{\phi_1} + \overline{\lambda}\overline{u}_{\phi_2}\right\rangle_H \\
&= \langle v, \overline{u}_{\phi_1 + \lambda\phi_2}\rangle_H \\
&\Leftrightarrow \left\langle v, \Phi(\phi_1) + \overline{\lambda}\Phi(\phi_2)\right\rangle_H = \langle v, \Phi(\phi_1 + \lambda\phi_2)\rangle_H
\end{aligned}$$

En outre, $\|\Phi(\phi)\|_H^2 = \|\overline{u}\|_H^2 = \phi(\overline{u}) \leqslant \|\phi\|_{H'}\|\overline{u}\|_H$, d'où $\|\Phi(\phi)\|_H \leqslant \|\phi\|_{H'}$, i.e. Φ est continue.

De surcroît,

$$\begin{aligned}
\|\phi\|_{H'} &= \sup_{\substack{v \in H \\ v \neq 0}} \frac{|\phi(v)|}{\|v\|_H} = \sup_{\substack{v \in H \\ v \neq 0}} \frac{|\langle v, \overline{u}\rangle_H|}{\|v\|_H} \\
&\leqslant \sup_{\substack{v \in H \\ v \neq 0}} \frac{\|v\|_H \|\overline{u}\|_H}{\|v\|_H} \leqslant \|\overline{u}\|_H = \|\Phi(\phi)\|_H
\end{aligned}$$

d'où, par double inégalité, $\|\Phi(\phi)\|_H = \|\phi\|_{H'}$ et Φ est bien isométrique. En particulier, ceci prouve que l'inverse de Φ est continue. $\square$

1.4 Espaces L^p

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On va construire les espaces $L^p(\Omega)$. Tout se généralise à $L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ où $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ est un espace mesuré quelconque.

⚠ Les espaces $\mathscr{L}^p$ et L^p sont nommés d'après Henri Lebesgue ; ils n'ont strictement rien à voir avec les espaces $\mathscr{L}(V, W)$ vus précédemment dans ce cours. En particulier, les applications étudiées ici ne sont pas linéaires.

1.4.1 Construction de l'espace $L^1(\Omega)$

Proposition

La relation « f est égale à g presque partout (p.p) » est une relation d'équivalence sur l'ensemble des fonctions mesurables (réflexive, symétrique, transitive). Elle se traduit par $\mu(\{x \in \Omega \mid f(x) \neq g(x)\}) = 0$.

Définition - $\mathscr{L}^1(\Omega)$ et $L^1(\Omega)$

On définit $\mathscr{L}^1(\Omega)$ comme l'ensemble des fonctions intégrables, par

$$\mathscr{L}^1(\Omega) = \left\{ f \text{ mesurables de } \Omega \to \mathbb{R} \mid \int_\Omega |f| < \infty \right\}$$

On définit $L^1(\Omega)$ comme l'espace vectoriel obtenu en quotientant $\mathscr{L}^1(\Omega)$ par la relation d'équivalence d'égalité-presque-partout. Autrement dit, au lieu de manipuler des fonctions, on manipule directement les classes d'équivalences de ces fonctions par la relation $=_{p.p}$.

Proposition

Si on prend f et g deux fonctions presque partout égales, alors

$$\int_\Omega f(x)\, d\mu(x) = \int_\Omega g(x)\, d\mu(x)$$

Pour $f \in L^1$, la notation $\int_\Omega f(x)\, d\mu(x)$ désigne l'intégrale d'un représentant quelconque de la classe d'équivalence de f.

Nota bene

Dans la suite de ce cours, on désignera indistinctement une fonction f et sa classe d'équivalence $f = \{g \mid g =_{p.p} f\}$.

Théorème

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Muni de la norme $\|\cdot\|_{L^1}$ définie par $\|f\|_{L^1} = \int_\Omega |f(x)|\, d\mu(x)$, L^1 est un espace de Banach.

Preuve

$\|\cdot\|_{L^1}$ **est bien une norme** • Trivialement, l'intégrale d'une valeur absolue est positive.

• Montrons d'abord la séparation. Si $f =_{p.p} 0$, on a directement $\|f\|_{L^1} = 0$. Réciproquement, si $\int_\Omega |f(x)|\, d\mu(x) = 0$, on définit une suite d'ensembles $(A_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \subset \Omega$ tels que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ A_k = \left\{x \in \Omega \mid |f(x)| \geqslant \frac{1}{k}\right\}$. On définit la suite de fonctions en escalier $(e_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ telle que $e_k = \frac{1}{k} \times 1_{A_k}$. On a donc $\forall k \in \mathbb{N}^*$ e_k nulle quand f est nulle, et égale à $\frac{1}{k}$ quand $|f|$ est supérieure à $\frac{1}{k}$; d'où $0 \leqslant e_k \leqslant |f|$, et par croissance de l'intégrale,

$$0 \leqslant \int_\Omega e_k \leqslant \int_\Omega |f| = 0$$

avec

$$\int_\Omega e_k = \int_\Omega \frac{1}{k} \times 1_{A_k} = \frac{1}{k} \times \mu(A_k) = 0 \implies \mu(A_k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

Donc

$$\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} A_k$$

est de mesure nulle par union dénombrable : d'où $f = 0$ presque partout et la séparation est vérifiée.

• Montrons maintenant l'homogénéité. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f \in L^1(\Omega)$.

$$\|\lambda f\|_{L^1} = \int_\Omega |\lambda f(x)|\, d\mu(x) = |\lambda| \int_\Omega |f(x)|\, d\mu(x) = |\lambda|\, \|f\|_{L^1}$$

• Enfin, montrons l'inégalité triangulaire : soient f et g dans $L^1(\Omega)$.

$$\|f+g\|_{L^1} = \int_\Omega |f(x)+g(x)|\, d\mu(x) \leqslant \int_\Omega |f(x)|\, d\mu(x) + \int_\Omega |g(x)|\, d\mu(x) = \|f\|_{L^1} + \|g\|_{L^1}$$

Donc $\|\cdot\|_{L^1}$ est bien une norme.

Complétude de L^1 pour cette norme

Nous allons procéder de la manière suivante :

— Poser (f_n) une suite de Cauchy dans L^1. Le but est de montrer qu'elle converge dans L^1.

— On en extrait une sous-suite (f_{n_k}) bien choisie.

— On montre qu'en tout $x \in \mathbb{R}$, $(f_{n_k}(x))$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, donc converge ponctuellement.

— On domine la différence entre $(f_{n_k}(x))$ et sa limite simple par une fonction de L^1, pour pouvoir obtenir la convergence en norme $\|\cdot\|_{L^1}$ par le théorème de convergence dominée.

— Enfin, on généralise à toute la suite (f_n) de départ.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $L^1(\Omega)$.

Extrayons $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\|_{L^1} \leqslant \frac{1}{2^k}$. On peut le faire par itération, en choisissant n_1 le premier indice tel que $\forall n \geqslant n_1 \quad \|f_n - f_{n_1}\|_{L^1} \leqslant$

$\frac{1}{2}$: n_1 existe, car $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Puis, $\forall k \geqslant 1$, on choisit n_{k+1} le premier indice tel que $\forall n \geqslant n_{k+1}$ $\|f_n - f_{n_k}\|_{L^1} \leqslant \frac{1}{2^k}$.

Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}$, $(f_{n_k}(x))$ est de Cauchy. Pour ceci, on définit une suite de fonctions $(g_p)_{p\geqslant 1}$ tel que

$$g_p(x) = \sum_{k=1}^{p} \left|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\right|$$

Dès lors,

$$\begin{aligned}\|g_p\|_{L^1} = \left\|\sum_{k=1}^{p}\left|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right|\right\|_{L^1} &\leqslant \sum_{k=1}^{p}\left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\|_{L^1} \\ \leqslant \sum_{k=1}^{p}\frac{1}{2^k} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k} &= \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1\end{aligned}$$

donc $g_p \in L^1$. On a $(g_p)_{p\geqslant 1}$ positive, croissante et convergeant simplement vers $g = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\|_{L^1}$, donc, d'après un corollaire de Beppo-Levi, $g \in L^1(\Omega)$.

D'autre part, $\forall k \geqslant 1$, $\forall l \geqslant k$,

$$\begin{aligned}|f_{n_l}(x) - f_{n_k}(x)| &\leqslant \left|f_{n_l}(x) - f_{n_{l-1}}(x)\right| + \cdots + \left|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\right| \\ &= g_{l-1}(x) - g_{k-1}(x) \leqslant g(x) - g_{k-1}(x) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

d'où on a bien $(f_{n_k}(x))$ de Cauchy dans $\mathbb{R}$ un espace complet. Donc $\exists f$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_{n_k}(x) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$.

Montrons que $f \in L^1$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |f_{n_k}(x) - f(x)| \leqslant g(x) - \underbrace{g_{k-1}(x)}_{\geqslant 0} \leqslant g(x) \quad \text{avec } g \in L^1(\Omega)$$

d'où, par le théorème de convergence dominée appliqué à $f_{n_k} - f$ qui converge simplement vers 0, on a

$$\|f_{n_k} - f - 0\|_{L^1} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

et $f_{n_k} - f \in L^1 \implies f \in L^1$ car L^1 est un espace vectoriel et $f_{n_k} \in L^1$. Ainsi, la sous-suite converge bien vers un élément de $L^1(\Omega)$.

Enfin, montrons que la convergence de cette sous-suite implique la convergence de la suite entière. Par définition de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy et de la convergence, on a

$$\begin{cases}\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geqslant N \;\; \forall p \geqslant 0 \;\; \|f_{n+p} - f_n\|_{L^1} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \\ \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists K \in \mathbb{N} \;\; \forall k \geqslant K \;\; \|f_{n_k} - f\|_{L^1} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\end{cases}$$

d'où en prenant $f_{n+p} = f_{n_k}$, et $M = \max(N, K)$, on obtient

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists M \in \mathbb{N} \ \ \forall n \geqslant M \quad \|f_n - f\|_{L^1} \leqslant 2 \times \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

et on a bien convergence de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers $f \in L^1$. Donc $\left(L^1, \|\cdot\|_{L^1}\right)$ est complet. □

Théorème

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de L^1 et $f \in L^1$ telles que $\|f_n - f\|_{L^1} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$. Alors il existe une sous-suite $(f_{n_k}(x))$ telle que

— $f_{n_k}(x) \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} f(x)$ presque pour tout $x \in \mathbb{R}$

— $|f_{n_k}(x)| \leqslant h(x)$ $\forall k$ et pp$x \in \mathbb{R}$ avec $h \in L^1(\Omega)$

Preuve

Comme $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans L^1, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy. On peut donc extraire une sous-suite $(f_{n_k}(x))$ telle que $\left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\|_{L^1} \leqslant \frac{1}{2^k}$. Comme dans la preuve précédente, on peut montrer qu'il existe $\overline{f} \in L^1$ telle que $f_{n_k}(x) \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} \overline{f}(x)$ presque partout, et par la convergence dominée, $f_{n_k} \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} \overline{f}$ en norme $\|\cdot\|_{L^1}$. Par unicité de la limite, on aura alors $\overline{f} = f$.

Avec les notations de la preuve précédente, on a $|f_{n_k}(x) - f(x)| \leqslant g(x)$; on peut donc prendre $h = \underbrace{|f|}_{\in L^1} + \underbrace{g}_{\in L^1} \in L^1$. □

1.4.2 Espace $L^2(\Omega)$

Définition - espace $L^2(\Omega)$

On pose $L^2(\Omega) = \left\{f \ : \ \Omega \to \mathbb{R} \mid f \text{ mesurable et } |f|^2 \in L^1(\Omega)\right\}$ l'espace des applications à carrés intégrables.

On a $|fg| \leqslant \frac{1}{2}\left(f^2 + g^2\right)$, d'où si f et g sont dans L^2, on a $|fg| \in L^1$. Ceci permet de définir un produit scalaire.

Définition - produit scalaire sur $L^2(\Omega)$

On le définit comme $\langle f, g\rangle_{L^2} = \int_\Omega fg$.

Preuve

La bilinéarité, symétrie et positivité de $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$ sont évidentes par propriété de l'intégrale, commutativité et carré. Prouvons la séparation : si $\langle f, f\rangle_{L^2} = 0$, alors $\int_\Omega |f|^2 = 0 \implies |f|^2 = 0$ pp $|f| = 0$ pp et $f = 0$ dans L^2 au sens des classes d'équivalences de $=_{pp}$. La réciproque est triviale. Ainsi, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$ est bien un produit scalaire. □

Théorème

$\left(L^2(\Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}\right)$ est un espace de Hilbert.

Preuve
Idem que pour L^1. $\square$

Remarque
L'inégalité de Cauchy-Schwarz se réécrit $\left|\int fg\right| \leqslant \left(\int f^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int g^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

1.4.3 Espace $L^\infty(\Omega)$

Définition - espace $L^\infty(\Omega)$
On pose $L^\infty(\Omega) = \{f \ : \ \Omega \to \mathbb{R} \mid f$ mesurable et $\exists C \in \mathbb{R}^+$ tq $|f(x)| \leqslant C \ ppx \in \Omega\}$ l'espace des applications bornées.
On pose alors $\|\cdot\|_{L^\infty}$ telle que $\|f\|_{L^\infty} = \inf(\{C \in \mathbb{R}^+ \mid \ |f(x)| \leqslant C \ ppx \in \Omega\})$.

Proposition
Si $f \in L^\infty$, alors $|f(x)| \leqslant \|f\|_{L^\infty}$ presque pour tout x.

Preuve
$f \in L^\infty \implies \exists (C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que

$$\begin{cases} |f(x)| \leqslant C_n & \text{presque pour tout } x \\ C_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|f\|_{L^\infty} \end{cases}$$

D'où $\exists E_n$ un ensemble négligeable tel que $|f(x)| \leqslant C_n \ \ \forall x \in \Omega \backslash E_n$. On pose $E = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n$ négligeable par union. Dès lors, on a $|f(x)| \leqslant C_n \ \ \forall x \in \Omega\backslash E$, et par passage à la limite en $n \to \infty$, $|f(x)| \leqslant \|f\|_{L^\infty} \ \ \forall x \in \Omega\backslash E$, i.e. pp$x \in \Omega$. $\square$

Corollaire
Si $f \in L^1(\Omega)$ et $g \in L^\infty(\Omega)$ alors $fg \in L^1(\Omega)$ et $\|fg\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^\infty}$.

Preuve
On a f et g mesurables, donc par produit, fg l'est. De plus, soit E l'ensemble de Ω tel que $g(x) \geqslant \|g\|_{L^\infty}$. E est négligeable, d'où

$$\int |fg| = \int_{\Omega\backslash E} |fg| + \underbrace{\int_E |fg|}_{=0} \leqslant \|g\|_{L^\infty} \int |f| = \|g\|_{L^\infty} \|f\|_{L^1} < \infty$$

et on a bien $fg \in L^1$. De plus, $\int |fg| = \|fg\|_{L^1}$, d'où $\|fg\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^\infty}$. $\square$

Proposition
$\|\cdot\|_{L^\infty}$ est une norme sur L^∞.

Preuve

Par définition, $\|\cdot\|_{L^\infty}$ est positive.

• Si $f = 0$ alors $|f(x)| \leqslant 0 \quad \forall x \in \Omega \quad \Longrightarrow \quad \|f\|_{L^\infty} \leqslant 0$ et par positivité, $\|f\|_{L^\infty} = 0$.

Réciproquement, si $\|f\|_{L^\infty} = 0$, alors $|f(x)| \leqslant \|f\|_{L^\infty} = 0 \quad \text{pp}x \in \Omega \quad \Longrightarrow$ $f =_{pp} 0$ et dans L^∞, $f = 0$.

• Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $f \in L^\infty$.

$$\begin{aligned}
\|\lambda f\|_{L^\infty} &= \inf\left(\left\{C \in \mathbb{R}^+ \mid |\lambda f(x)| \leqslant C \ ppx \in \Omega\right\}\right)\\
&= \inf\left(\left\{C \in \mathbb{R}^+ \mid |f(x)| \leqslant \frac{C}{|\lambda|} \ ppx \in \Omega\right\}\right) \quad \text{avec } C' = \frac{C}{|\lambda|}\\
&= \inf\left(\left\{C' |\lambda| \in \mathbb{R}^+ \mid |f(x)| \leqslant C' \ ppx \in \Omega\right\}\right)\\
&= |\lambda| \inf\left(\left\{C' \in \mathbb{R}^+ \mid |f(x)| \leqslant C' \ ppx \in \Omega\right\}\right)\\
&= |\lambda| \, \|f\|_{L^\infty}
\end{aligned}$$

• Soient f et g dans L^∞.

$$\|f+g\|_{L^\infty} = \inf\left(\left\{C \in \mathbb{R}^+ \mid |f(x)+g(x)| \leqslant C \ ppx \in \Omega\right\}\right)$$

Or on a $|f(x)+g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)| \leqslant \|f\|_{L^\infty} + \|g\|_{L^\infty}$, donc $\|f\|_{L^\infty} + \|g\|_{L^\infty} \in \{C \in \mathbb{R}^+ \mid |f(x)+g(x)| \leqslant C \ ppx \in \Omega\}$, et en passant à l'infimum sur cet ensemble, on a bien $\|f+g\|_{L^\infty} \leqslant \|f\|_{L^\infty} + \|g\|_{L^\infty}$.

Donc $\|\cdot\|_{L^\infty}$ est bien une norme. □

Théorème

$\left(L^\infty(\Omega), \|\cdot\|_{L^\infty}\right)$ est un espace de Banach.

Preuve

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de L^∞.

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \exists N_k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N_k \quad \forall m \geqslant N_k \quad \|f_m - f_n\|_{L^\infty} \leqslant \frac{1}{k} \quad ppx$$

Donc $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\exists E_k$ un ensemble négligeable tel que $|f_m(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{k} \quad \forall x \in \Omega \backslash E_k$ et $\forall (n,m) \geqslant N_k$. On pose $E = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}^*} E_k$ négligeable par union.

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \forall (n,m) \geqslant N_k \quad |f_m(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{k} \quad \forall x \in \Omega \backslash E \qquad (1)$$

Donc $\forall x \in \Omega \backslash E$, $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ complet. Donc $\exists f \in L^\infty$ telle que $f_n(x) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} f(x) \quad \forall x \in \Omega \backslash E$, f étant définie presque partout. En passant à la limite en $m \to \infty$ dans (1), on obtient

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \forall n \geqslant N_k \quad |f(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{k} \quad \forall x \in \Omega \backslash E$$
$$\Longrightarrow f(x) \leqslant \frac{1}{k} + f_n(x) \quad \text{donc } f \in L^\infty$$
$$\Longrightarrow \|f - f_n\|_{L^\infty} \leqslant \frac{1}{k} \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \quad \forall n \geqslant N_k$$
$$\Longrightarrow \|f - f_n\|_{L^\infty} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en norme $\|\cdot\|_{L^\infty}$ vers un élément de L^∞, et L^∞ de Banach. □

1.4.4 Autres espaces $L^p(\Omega)$

Définition - espace $L^p(\Omega)$
$\forall p \in]1; \infty[$, on pose $L^p(\Omega) = \left\{f : \Omega \to \mathbb{R} \mid f \text{ mesurable et } |f|^p \in L^1(\Omega)\right\}$. On note $\|f\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

Notation
$\forall p \in [1; \infty]$, on note p' l'exposant conjugué défini par $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Si $p = 1$, $p' = \infty$ et vice versa.

Théorème - inégalité de Hölder
Soit $p \in [1; \infty]$, et $(f, g) \in L^p \times L^{p'}$. Alors $fg \in L^1$ et

$$\left|\int fg d\mu\right| \leqslant \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}$$

Preuve • Si $p = 1$ ou $p' = \infty$, déjà fait.
• Soit $p \in]1; \infty[$. On va utiliser l'inégalité de Young, qui découle de la concavité de la fonction ln :

$$\forall (a, b) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2 \quad ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$$

Si $\|f\|_{L^p} = 0$ ou $\|g\|_{L^{p'}} = 0$, l'inégalité est triviale. On suppose donc que $\|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}} \neq 0$. Posons $a = \frac{|f|}{\|f\|_{L^p}}$ et $b = \frac{|g|}{\|g\|_{L^{p'}}}$. Dès lors, en passant à l'intégrale dans l'inégalité de Young,

$$\int \frac{|fg|}{\|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}} d\mu \leqslant \int \left(\frac{|f|}{p\|f\|_{L^p}}\right)^p d\mu + \int \left(\frac{|g|}{p'\|g\|_{L^{p'}}}\right)^{p'} d\mu$$
$$= \frac{1}{p} \frac{\int |f|^p d\mu}{\int |f|^p d\mu} + \frac{1}{p'} \frac{\int |g|^{p'} d\mu}{\int |g|^{p'} d\mu}$$
$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

d'où on déduit

$$\int |fg|\, d\mu \leqslant \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}$$

et l'inégalité est vérifiée. $\square$

Théorème

$\forall p \in]1;\infty[\quad \|\cdot\|_{L^p}$ est une norme sur L^p.

Preuve

La positivité, la séparation et l'homogénéité sont évidentes par définition et propriétés de l'intégrale.

Montrons l'inégalité triangulaire. Soit $(f,g) \in (L^p)^2$. On a

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x)|^p &\leqslant (2\max(|f(x)|, |g(x)|))^p \\ &\leqslant 2^p \max(|f(x)|^p, |g(x)|^p) \\ &\leqslant 2^p (|f(x)|^p + |g(x)|^p) \end{aligned}$$

d'où $f + g \in L^p$. De plus,

$$\begin{aligned} \|f+g\|_{L^p} &= \int |f+g|^{p-1} |f+g|\, d\mu \\ &\leqslant \int |f+g|^{p-1} |f|\, d\mu + \int |f+g|^{p-1} |g|\, d\mu \end{aligned}$$

Or $|f+g|^{p-1} \in L^{p'}$ car $p'(p-1) = p$, et $|f+g| \in L^p$. On peut donc appliquer l'inégalité de Hölder :

$$\|f+g\|_{L^p} \leqslant \left\| |f+g|^{p-1} \right\|_{L^{p'}} \|f\|_{L^p} + \left\| |f+g|^{p-1} \right\|_{L^{p'}} \|g\|_{L^p}$$

Or

$$\begin{aligned} \left\| |f+g|^{p-1} \right\|_{L^{p'}} &= \left(\int \left(|f+g|^{p-1} \right)^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} = \left(\int |f+g|^{p'(p-1)} \right)^{\frac{1}{p'}} = \left(\int |f+g|^p \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &= \|f+g\|_{L^p}^{p-1} \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} &\|f+g\|_{L^p}^p \leqslant \|f+g\|_{L^p}^{p-1} (\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}) \\ \Leftrightarrow\ &\|f+g\|_{L^p}^{p-p+1} \leqslant \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p} \\ \Leftrightarrow\ &\|f+g\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p} \end{aligned}$$

et $\|\cdot\|_{L^p}$ est bien une norme. $\square$

Théorème

$(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p})$ est un espace de Banach.

Preuve
Idem L^1. $\square$

Proposition
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ tel que $\lambda(\Omega) < \infty$ et $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$. Alors $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$.

Théorème
Soit $1 < p < \infty$ et $\phi \in (L^p)'$ le dual de L^p. Alors $\exists! u \in L^{p'}$ tel que $\forall v \in L^p$

$$\langle \phi, v \rangle_{(L^p)', L^p} = \int uv$$

De plus, on a $\|u\|_{L^{p'}} = \|\phi\|_{(L^p)'}$.

Remarque
Ce théorème permet d'identifier un espace de Lebesgue et le dual de l'espace associé à l'exposant conjugué. Cette propriété se montre aussi pour $p = 1$, mais elle est fausse pour $p = \infty$: $\left(L^1\right)' = L^\infty$ mais la réciproque est inexacte.

Définition - espaces L^p_{loc}
On note $L^p_{loc} = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \mid f \text{ mesurable et } f \times 1_K \in L^p(\Omega) \text{ pour tout compact } K \subset \Omega\}$.

Remarque
Si $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$, alors $L^q_{loc}(\Omega) \subset L^p_{loc}(\Omega)$.

1.5 Convolution dans $L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$

Soient $\Omega_1 \in \mathbb{R}^{d_1}$ et $\Omega_2 \in \mathbb{R}^{d_2}$, ainsi que $F : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable.

Théorème de Tonelli
On suppose que

$$\int_{\Omega_2} F(x,y)\, dy < \infty \quad ppx \in \Omega_1$$

et

$$\int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} F(x,y)\, dy \right) dx < \infty$$

Alors $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Théorème de Fubini
On suppose que $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Alors

- ppx $\in \Omega_1$ on a $y \mapsto F(x,y) \in L^1(\Omega_2)$ et $x \mapsto \int_{\Omega_2} F(x,y)\, dy \in L^1(\Omega_1)$
- ppy $\in \Omega_2$ on a $x \mapsto F(x,y) \in L^1(\Omega_1)$ et $y \mapsto \int_{\Omega_1} F(x,y)\, dx \in L^1(\Omega_2)$
- $\int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} F(x,y)\, dy \right) dx = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} F(x,y)\, dx \right) dy = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} F(x,y)\, dxdy$

Théorème

Soient f et g dans $L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$. Alors pp$x \in \mathbb{R}^d$, la fonction $y \mapsto f(x-y)\,g(y) \in L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$.

Définition - convoluée

On pose le produit de convolution de f et g

$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\,g(y)\,dy$$

On a $f \star g \in L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$ et $\|f \star g\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}$.

Preuve

Posons $F(x,y) = f(x-y)\,g(y) \quad ppy \in \mathbb{R}^d$. On a alors

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} |F(x,y)|\,dx &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|\,|g(y)|\,dx \\ &= |g(y)| \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|\,dx}_{=\|f\|_{L^1} \text{ par changement de variable } w=x-y} < \infty\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} |F(x,y)|\,dx\right)dy &= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|\,|g(y)|\,dxdy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |g(y)|\,\|f\|_{L^1}\,dy \\ &= \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1} < \infty\end{aligned}$$

d'où d'après le théorème de Tonelli, $F \in L^1\left(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d\right)$. D'où, d'après le théorème de Fubini, pp$x \in \mathbb{R}^d$, $x \mapsto f(x-y)\,g(y) \in L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$.

De plus,

$$\begin{aligned}\|f \star g\|_{L^1} &= \int_{\mathbb{R}^d} |(f \star g)(x)|\,dx \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|\,|g(y)|\,dxdy \\ &= \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}\end{aligned}$$

et ceci conclût la preuve. $\square$

Chapitre 2

Théorie des distributions

2.1 Pourquoi la notion de fonction est insuffisante

Soit $f_{reg} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On définit une fonction avec $c > 0$ donné (voir figure 2.1).

$$\begin{aligned} u_{reg} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R} \\ (x,t) &\mapsto u_{reg}(x,t) = f_{reg}(x - ct) \end{aligned}$$

Vérifions si u_{reg} vérifie l'équation des ondes.

$$\frac{\partial u_{reg}}{\partial t}(x,t) = -c \cdot f'_{reg}(x-ct) \qquad \frac{\partial u_{reg}}{\partial x}(x,t) = f'_{reg}(x-ct)$$
$$\frac{\partial^2 u_{reg}}{\partial t^2}(x,t) = c^2 \cdot f''_{reg}(x-ct) \qquad \frac{\partial^2 u_{reg}}{\partial x^2}(x,t) = f''_{reg}(x-ct)$$

On a donc $\frac{\partial^2 u_{reg}}{\partial t^2} - c^2 \cdot \frac{\partial^2 u_{reg}}{\partial x^2} = 0$, d'où u_{reg} vérifie l'équation des ondes.

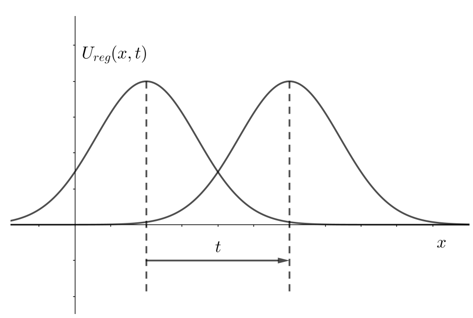

Figure 2.1 – Graphe de la fonction u_{reg}

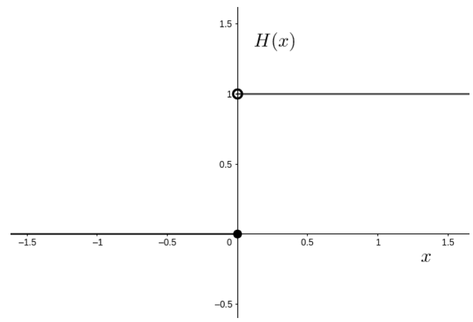

FIGURE 2.2 – Fonction de Heaviside

Prenons maintenant f_{sing} une fonction de type créneau, avec $L \in \mathbb{R}$ (voir figure 2.2) :

$$f_{sing}(x) = H(x) - H(x-L) \text{ avec } H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ la fonction de Heaviside}$$

Remarquons que f_{sing} est non dérivable en 0 et L. Définissons u_{sing}.

$$\begin{aligned} u_{sing} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R} \\ (x,t) &\mapsto u_{sing}(x,t) = f_{sing}(x - ct) \end{aligned}$$

On ne peut pas écrire d'équation descriptive du système satisfaite par u_{sing} telle que l'équation des ondes car f_{sing} est non dérivable en 0 et L.

Afin de faire des calculs en mécanique quantique, Paul Dirac propose en 1926 d'étudier la « fonction » « définie » par :

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ +\infty & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Plus formellement, on définira :

$$\int_{-\infty}^{x} \delta(y)\, dy = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases} = H(x)$$

C'est à dire que $H' = \delta$. Cette définition n'est clairement pas rigoureuse mathématiquement, mais Dirac a été plus loin en dérivant la « fonction » δ. On notera δ' sa « dérivée ». En utilisant ces notations avec l'exemple précédent :

$$u_{sing}(x,t) = H(x-ct) - H(x-ct-L)$$

$$\frac{\partial u_{sing}}{\partial t}(x,t) = -c \cdot \delta(x-ct) + c \cdot \delta(x-ct-L)$$
$$\frac{\partial^2 u_{sing}}{\partial t^2}(x,t) = c^2 \cdot \delta'(x-ct) - c^2 \cdot \delta'(x-ct-L)$$
$$\frac{\partial u_{sing}}{\partial x}(x,t) = \delta(x-ct) - c \cdot \delta(x-ct-L)$$
$$\frac{\partial^2 u_{sing}}{\partial x^2}(x,t) = \delta'(x-ct) - c \cdot \delta'(x-ct-L)$$

D'où $\frac{\partial^2 u_{sing}}{\partial t^2} - c^2 \cdot \frac{\partial^2 u_{sing}}{\partial x^2} = 0$. On va dire que u_{sing} vérifie la même équation que u_{reg}.

C'est la théorie des distributions de Laurent Schwartz en 1946 qui donnera un sens rigoureux à la « fonction » de Dirac (qui est une distribution), à ses dérivées et à tous les calculs précédents. Cela lui vaudra la médaille Fields. Avoir un cadre mathématique est essentiel car cela permet d'avoir des garde-fous et d'éviter de faire des erreurs.

Exemple De manière triviale, on a $H^2 = H$, d'où on déduit que

$$\begin{aligned} & & 2H\delta &= \delta \\ &\Longrightarrow & 2H^2\delta &= H\delta \\ &\Longrightarrow & 2H\delta &= H\delta \\ &\Longrightarrow & H\delta &= 0 \\ &\Longrightarrow & \delta &= 0 \end{aligned}$$

Or $\int \delta = 1$, donc c'est absurde. Cet exemple montre que les distributions ne peuvent pas être manipulées comme des fonctions ; en effet, on ne peut pas multiplier des distributions entre elles, donc le passage de la ligne 2 à la ligne 3 n'a pas de sens.

2.2 Changeons de point de vue

On a vu que l'on ne pouvait pas considérer les valeurs ponctuelles de δ. Au lieu de regarder les valeurs ponctuelles d'une fonction (une vraie) $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, on va prendre ses valeurs moyennes « contre » des fonctions test φ (des vraies).

On va considérer les quantités $\int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,dx$. Pour l'espace des fonctions tests, on prendra les fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans Ω. On le notera $\mathcal{D}(\Omega)$.

Ainsi, à la fonction f on associe une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$, notée T_f, définie par :

$$< T_f, \varphi >= \int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,dx$$

En particulier, T_f est bien définie si $f \in L^1_{loc}$.

Théorème

Soient $f, g \in L^1_{loc}$ alors $T_f = T_g \iff \int f(x)\varphi(x)\,dx = \int g(x)\varphi(x)\,dx \iff f = g$ pp.

Cela signifie que l'ensemble $\mathcal{D}(\Omega)$ est suffisamment riche pour pouvoir distinguer deux fonctions de L^1_{loc} en ne regardant que T_f et T_g.

Remarque

Ce point de vue se généralise facilement et on définira une distribution comme une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$. On notera $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'ensemble des distributions.

2.3 Définitions

Définition

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, φ une fonction de $\Omega \to \mathbb{R}$, continue. On définit le support de φ comme :

$$\operatorname{supp}(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega \,|\, \varphi(x) \neq 0\}}^{\Omega}$$

On note $\mathcal{D}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans Ω.

Remarque

Près du bord, les fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$ sont nulles : sinon $\operatorname{supp}(\varphi)$ n'est pas compact. L'ensemble $\mathcal{D}(\Omega)$ est appelé l'ensemble des fonctions tests.

Théorème

$\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$, avec $\|\cdot\|_{L^p}$, $\forall p \in [1; \infty[$

Définition

On dit que $\varphi_n \to \varphi$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$si :

— $\exists K \in \Omega, K$ compact $|\, \forall n, \operatorname{supp}(\varphi_n) \subset K$ et $\operatorname{supp}(\varphi_n) \subset K$

— $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d$ (multi-indice) on a :

$\partial^\alpha \varphi \to \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1}, \ldots, x_d^{\alpha_d}}$, avec $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$

C'est une convergence assez forte, toutes les dérivées de φ_n convergent vers les dérivées de φ. Par contre, pas de norme associée.

Définition

On appelle distribution toute forme linéaire $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ qui est continue, c'est-à-dire, si $\varphi_n \to \varphi$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ alors :

$$< T, \varphi_n > \xrightarrow[n\to\infty]{} < T, \varphi > \text{ (convergence dans } \mathbb{R})$$

⚠ Dual topologique mais pas de norme associée donc convergence au sens défini précédemment.

On note $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'ensemble des distributions.

Exemples

1. Soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. On note T_f (ou f) la distribution définie par :
$$T_f(\varphi) = < T_f, \varphi > = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$
2. Soit μ une mesure localement bornée ($\iff$ bornée sur tout compact). On note $T_\mu$la distribution définie par :
$$T_\mu(\varphi) = < T_\mu, \varphi > = \int_\Omega \varphi(x)\,d\mu(x) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$
3. On définit $\forall a \in \mathbb{R}$, δ_a (mesure de Dirac) par :
$$< \delta_a, \varphi > = \varphi(a) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$
4. $\forall a \in \mathbb{R}^d$, on définit δ'_a par :
$$< \delta'_a, \varphi > = - < \delta_a, \varphi' > = -\varphi'(a) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

2.4 Convergence des distributions

Définition

Soit T_n une suite de distributions. On dit que $T_n \to T$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ si :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), < T_n, \varphi > \xrightarrow[n\to\infty]{} < T, \varphi >$$

Définition

Une suite X_n tel que $X_n \to \delta_0$ est appelée une approximation de l'unité.

Théorème

La convergence dans $L^1_{loc}(\Omega)$ implique la convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega), \forall p \in [1; +\infty]$

Preuve

Soit $(f_n) \subset L^p_{loc}(\Omega)$ tel que $f_n \to f$ dans L^p_{loc}. On suppose $p \in]1, +\infty[$ (1 et

$+\infty$ faciles). Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

$$\begin{aligned}|< T_{f_n}, \varphi > - < T_f, \varphi >| &= |< f_n, \varphi > - < f, \varphi >| \\ &= \left| \int_\Omega f_n \cdot \varphi - \int_\Omega f \cdot \varphi \right| \\ &\leqslant \int_\Omega |f_n - f| \, |\varphi| \\ &\leqslant \|\varphi\|_{L^\infty} \int_{\mathrm{supp}(\varphi)} |f_n - f| \cdot 1\end{aligned}$$

Car $\varphi = 0$ ailleurs que sur son support. En appliquant l'inégalité de Hölder, on obtient finalement :

$$|< T_{f_n}, \varphi > - < T_f, \varphi >| \leqslant \|\varphi\|_{L^\infty} \|f_n - f\|_{L^p(\mathrm{supp}(\varphi))} \|1\|_{L^{p'}(\mathrm{supp}(\varphi))}$$

Or $\|f_n - f\|_{L^p(\mathrm{supp}(\varphi))} \to 0$ car $\mathrm{supp}(\varphi)$ est compact et que $f_n \to f$ dans L^p_{loc}.

D'où $T_{f_n} \to T_f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. □

⚠ La convergence pp n'implique pas la convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Théorème

Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une*suite de distributions. On suppose que $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), < T_n, \varphi >$ converge vers une limite l_φ. Alors l'application :

$$\begin{aligned}T : \mathcal{D}(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto < T, \varphi >= l_\varphi\end{aligned}$$

est une distribution.

2.5 Dérivation des distributions

Principe général de définition d'une généralisation d'une opération sur les fonctions normales :

Si on a $\mathcal{F}$ un ensemble de fonctions dans $L^1_{loc}(\Omega)$ sur lequel on a un opérateur linéaire L tel que $Lf \in L^1_{loc}(\Omega)$, $\forall f \in \mathcal{F}$. Par exemple pour $\mathcal{F} = \mathcal{C}^1(\Omega)$ et L l'opérateur de dérivation, Lf continue donc toujours dans L^1_{loc}.

On prend $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et on calcule $< Lf, \varphi >$. Si on peut mettre $< Lf, \varphi >$ sous la forme $< f, L^*\varphi >$. Avec L^* un autre opérateur linéaire de $\mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega)$.

Alors on pose pour une distribution T :

$$< LT, \varphi >=< T, L^*\varphi > \quad \forall T \in \mathcal{D}'(\Omega), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

On a généralisé l'opérateur L aux distributions, et on a le résultat suivant : si $T_n \to T$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, alors $LT_n \to LT$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$.

Preuve

$< LT_n, \varphi > = < T_n, L^* \varphi >$ par définition, ce qui tend vers $< T, L^* \varphi >$ par hypothèse, ce qui est égal à $< LT, \varphi >$ par définition.

Appliquons ce principe à la dérivation. On considère les fonctions $\mathcal{C}^1(\Omega)$ et $Lf = \frac{\partial f}{\partial x_i} \in \mathcal{C}^0(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$. On obtient :

$$\begin{aligned}
< Lf, \varphi > &= < \frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi > = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, \varphi(x)\, dx \\
&= \underbrace{[f(x)\,\varphi(x)]_{\text{bords de } \Omega}}_{=0 \text{ car } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)} - \int_\Omega f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \\
&= < f, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} > = < f, L^* \varphi >
\end{aligned}$$

□

Définition

- Soit $T \in \mathcal{D}(\Omega)$. On définit la dérivée de T par rapport à x_i notée $\frac{\partial}{\partial x_i}(T)$ par :
$$< \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi > = - < T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} >$$
- De même, pour $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on définit $\partial^\alpha T$ par :
$$\partial^\alpha T = (-1)^{|\alpha|} < T, \partial^\alpha \varphi > \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Remarque

Au sens des distributions, une distribution est infiniment dérivable (car les dérivées sont « portées » par φ, qui est $\mathcal{C}^\infty$). En particulier, une fonction L^1_{loc} est infiniment dérivable au sens des distributions.

Théorème

Si $T_n \to T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ alors $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d$ on a $\partial^\alpha T_n \to \partial^\alpha T$.

Preuve

$$< \partial^\alpha T_n, \varphi > = (-1)^{|\alpha|} < T_n, \partial^\alpha \varphi > \to (-1)^{|\alpha|} < T, \partial^\alpha \varphi > = < \partial^\alpha T, \varphi >$$

□

2.6 Dérivation de fonctions $\mathcal{C}^1$ par morceaux

On considère uniquement le cas de dimension 1.

Définition

On dit qu'une fonction est $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur $]a, b[$ s'il existe une s'il existe une subdivision $\{a_0, \ldots, a_{N+1}\}$ avec $a_0 = a$ et $a_{N+1} = b$ tel que :

— f est $\mathcal{C}^k$ sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[\,, \forall i \in [\![0, N]\!]$

— f et ses dérivées jusqu'à l'ordre k sont prolongeables par continuité à gauche et à droite en chaque a_i.

Notation

— $f\left(a_i^+\right)$ la limite à droite en a_i

— $f\left(a_i^-\right)$ la limite à gauche en a_i

— $\{f\}^{(k)}$ la fonction définie presque partout (sauf en a_i) égale à la dérivée de f au sens des fonctions.

Théorème

Soit f une fonction $\mathcal{C}^1_{pm}$. Alors la dérivée de f au sens des distributions (notée f') est donnée par :

$$f' = \{f\}' + \sum_{i=1}^{N} \left(f\left(a_i^+\right) - f\left(a_i^-\right)\right) \delta_{a_i}$$

Preuve
Soit $\varphi \in \mathcal{D}(]a,b[)$. On a :

$$\begin{aligned}
< f', \varphi > &= - < f, \varphi' >= - \int f(x)\varphi'(x)\,dx \\
&= -\sum_{i=0}^{N} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\varphi'(x)\,dx \\
&= -\sum_{i=0}^{N} \left(\left[f(x)\varphi(x) \right]_{a_i^+}^{a_{i+1}^-} - \int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(x)\varphi(x)\,dx \right) \\
&= -\sum_{i=0}^{N} \left(f\left(a_{i+1}^-\right) \underbrace{\varphi(a_{i+1})}_{=0 \text{ si } i=N} - f\left(a_i^+\right) \underbrace{\varphi(a_i)}_{=0 \text{ si } i=0} \right) + \sum_{i=0}^{N} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(x)\varphi(x)\,dx \\
&= -\sum_{i=0}^{N-1} f\left(a_{i+1}^-\right)\varphi\left(a_{i+1}^-\right) + \sum_{i=1}^{N} f\left(a_i^+\right)\varphi\left(a_i^+\right) + \int_a^b \{f\}'(x)\varphi(x)\,dx \\
&= -\sum_{i=1}^{N} f\left(a_i^-\right)\varphi\left(a_i^-\right) + \sum_{i=1}^{N} f\left(a_i^+\right)\varphi\left(a_i^+\right) + \int_a^b \{f\}'(x)\varphi(x)\,dx \\
&= \sum_{i=1}^{N} \left(f\left(a_i^+\right) - f\left(a_i^-\right) \right) \underbrace{\varphi(a_i)}_{<\delta_{a_i}, \varphi>} + < \{f\}', \varphi > \\
&=< \sum_{i=1}^{N} \left(f\left(a_i^+\right) - f\left(a_i^-\right) \right)\delta_{a_i} + \{f\}', \varphi >
\end{aligned}$$

$\square$

Remarque
Si $f \in \mathcal{C}^0$ et C^1_{pm} alors $f' = \{f\}'$ car $f\left(a_i^+\right) = f\left(a_i^-\right)$.

2.7 Multiplication d'une distribution par une fonction $\mathcal{C}^\infty$

Soit $f \in L^1_{loc}$ et $g \in \mathcal{C}^\infty \subset L^1_{loc}$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. On a $fg \in L^1_{loc}(\Omega)$ et $< fg, \varphi >= \int_\Omega fg\varphi =< f, g\varphi >$.

Définition
Soit T une distribution et $g \in \mathcal{C}^\infty$ alors la distribution gT est définie par :

$$< gT, \varphi >=< T, g\varphi > \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Remarque
Si T_1 et T_2 sont deux distributions, alors le produit $T_1 \cdot T_2$ n'a aucun sens.

2.8 Séries de distributions

Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de distributions. On note $S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$.

Définition
On dit que la série des distributions T_i converge au sens des distributions vers S si :

$$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} S \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega)$$

Théorème
La série des T_i converge au sens des distributions $\iff$ La série des T_i appliqués à φ converge dans $\mathcal{D}(\Omega), \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, c'est à dire :

$$\sum_{i=1}^{n} < T_i, \varphi > \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{i=1}^{+\infty} < T_i, \varphi >$$

Dans ce cas, on a par définition : $< S_n, \varphi > \to \sum_{i=1}^{+\infty} < T_i, \varphi >$

Théorème
Si $\sum_i T_i$ converge au sens des distributions, alors :

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \sum_i T_i = \sum_i \frac{\partial T_i}{\partial x_k}$$

Preuve
On a par hypothèse que $\sum_i T_i$ converge. Alors :

$$\begin{aligned}
< \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_i T_i, \varphi > &= - < \sum_i T_i, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} > \\
&= - \sum_i < T_i, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} > \\
&= \sum_i < \frac{\partial T_i}{\partial x_k}, \varphi > \quad < +\infty \\
&= < \sum_i \frac{\partial T_i}{\partial x_k}, \varphi >
\end{aligned}$$

□

2.9 Produit de convolution pour les distributions

Définition
Soient f et g deux fonctions mesurables. On dit que f et g sont convolables

si pp$x \in \mathbb{R}$:

$$\int_{\mathbb{R}} |f(y)|\,|g(x-y)|\,dy < +\infty$$

Dans ce cas, on appelle produit de convolution de f par g la fonction définie par :

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\,g(x-y)\,dy$$

Rappel

Si f et g sont dans L^1 alors f et g sont convolables.

Que se passe-t-il si f et g sont dans L^1_{loc} ? Deux cas :

1. Si f (<u>ou</u> g) est à support borné, alors f et g sont convolables.
2. Si f <u>et</u> g sont à support borné à gauche, alors f et g sont convolables.

Preuves

1. f est à support borné, on a donc $\exists a, \forall |x| > a, f(x) = 0$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\int_{-n}^{n} |(f*g)(x)|\,dx &= \int_{-n}^{n}\int_{\mathbb{R}} |f(y)|\,|g(x-y)|\,dydx \\ &= \int_{-n}^{n}\int_{-a}^{a} |f(y)|\,|g(x-y)|\,dydx\end{aligned}$$

On peut appliquer le théorème de Fubini, qui donne :

$$\begin{aligned}\int_{-n}^{n} |(f*g)(x)|\,dx &= \int_{-a}^{a} |f(y)| \int_{-n}^{n} |g(x-y)|\,dxdy \\ &= \int_{-a}^{a} |f(y)| \int_{-n-y}^{n-y} |g(z)|\,dzdy \\ &\leqslant \int_{-a}^{a} |f(y)| \underbrace{\int_{-n-a}^{n-a} |g(z)|\,dz}_{\text{cste finie car } g \in L^1_{loc}} dy \\ &\leqslant C \underbrace{\int_{-a}^{a} |f(y)|\,dy}_{\text{cste finie car } f \in L^1_{loc}} < +\infty\end{aligned}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{-n}^{n} (f*g)(x)\,dx < \int_{-n}^{n} |(f*g)(x)|\,dx < \infty$$

D'où $(f*g)(x) < \infty$ pp$x \in \,]-n, n[$. De plus $\forall n \in \mathbb{N} \implies$ pp$x \in \mathbb{R}$.
Donc f et g convolables.

2.

$$\int_{-n}^{n} |(f*g)(x)|\,dx = \int_{-n}^{n}\int_{\mathbb{R}} |f(y)|\,|g(x-y)|\,dydx$$

Or $f(y) \neq 0 \implies y \geqslant a$ et $g(x-y) \neq 0 \implies y \leqslant x-a$, d'où :

$$\begin{aligned} I &= \int_{-n}^{n}\int_{a}^{x-a} |f(y)|\,|g(x-y)|\,dydx \\ &\leqslant \int_{a}^{n}\int_{a}^{n-a} |f(y)|\,|g(x-y)|\,dydx \end{aligned}$$

En appliquant Fubini, on obtient :

$$\begin{aligned} I &\leqslant \int_{a}^{n-a} |f(y)| \underbrace{\int_{a}^{n} |g(x-y)|\,dx}_{\text{cste finie car } g\in L^1_{loc}} dy \\ &\leqslant c \underbrace{\int_{a}^{n-a} |f(y)|\,dy}_{\text{cste finie car } f\in L^1_{loc}} < \infty \end{aligned}$$

Donc f et g convolables.

Essayons d'étendre le principe de définition de la convolution aux distributions. Soient f et g deux distributions régulières ($f, g \in L^1_{loc}$) telles que f et g soient convolables et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

$$\begin{aligned} < f*g, \varphi > &= \int_{\mathbb{R}} (f*g)(x)\,\varphi(x)\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(y)\,g(x-y)\,\varphi(x)\,dydx \end{aligned}$$

On pose $\begin{cases} y = y \\ z = z-y \end{cases}$. On a donc $|J| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$. D'où :

$$\begin{aligned} < f*g, \varphi > &= \int_{\mathbb{R}^2} f(y)\,g(z)\,\varphi(y+z)\,dydz \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \underbrace{f(x)\,g(y)}_{f\otimes g(x,y)} \varphi(x+y)\,dxdy \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(y) \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi(x+y)\,dxdy \end{aligned}$$

Donc sous les bonnes hypothèses (tout est défini) on aurait :

$$\begin{aligned} < f*g, \varphi > &=< f\otimes g, \varphi(x+y) > \\ &=< f_x, < g_y, \varphi(x+y) >> \\ &=< g_y, < f_x, \varphi(x+y) >> \end{aligned}$$

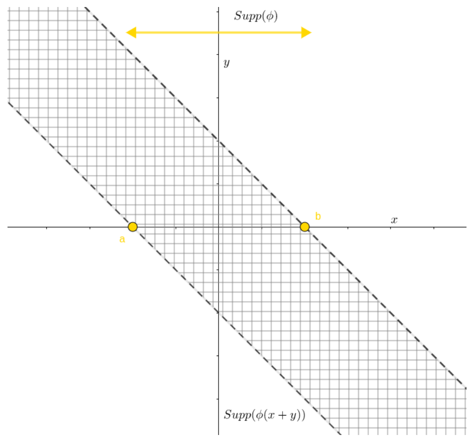

FIGURE 2.3 – Support de la convoluée

Si S et T sont deux distributions, on a envie de définir une nouvelle distribution $S \otimes T$ de la manière suivante avec $\Psi \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^2\right)$:

$$\begin{aligned} < S \otimes T, \varphi > &=< S_x, < T_y, \Psi_{(x,y)} >> \\ &=< T_y, < S_x, \Psi_{(x,y)} >> \end{aligned}$$

Et ensuite de définir $< S * T, \varphi >=< S \otimes T, \varphi(x+y) >$. Or $\varphi(x+y)$ est $\mathcal{C}^\infty$ mais pas à support compact (voir figure 2.3). On a donc un problème de support. Définissons le support d'une distribution. □

Définition
Soit T une distribution. On appelle support de T :

$$\operatorname{supp}(T) = \{x \in \mathbb{R} | \forall \epsilon > 0, \exists \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \operatorname{supp}(\varphi) \subset B(x,\epsilon) \text{ et } < T, \varphi > \neq 0\}$$

Autrement dit, $x \notin \operatorname{supp}(T) \iff \exists \epsilon > 0, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \text{ et } \operatorname{supp}(\varphi) \subset B(x,\epsilon), < T, \varphi >= 0$.

Exemple
$\operatorname{supp}(\delta_0) = \{0\}$.

Théorème (prolongement des distributions)
Soit T une distribution, $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Si $\operatorname{supp}(T) \cap \operatorname{supp}(\varphi)$ est borné, alors $< T, \varphi >$ est bien définie.

Pour en revenir à la convolution, on a donc que $< S \otimes T, \varphi >$ est bien défini dès que $\operatorname{supp}(S \otimes T) \cap \operatorname{supp}(\varphi)$ est borné.

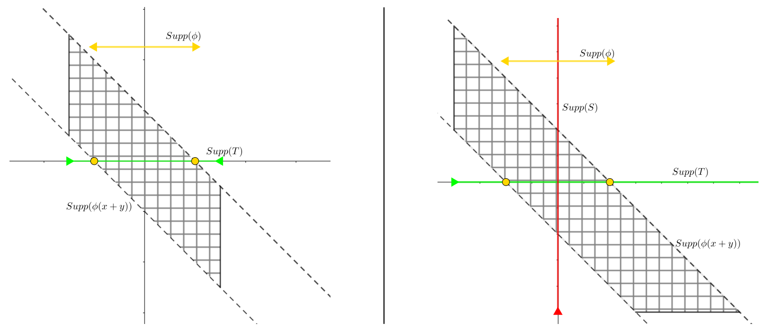

Figure 2.4 – Comparaison des supports

Deux cas :

- Si S ou T est à support borné, $S * T$ est défini
- Si S et T sont à support borné à gauche, $S * T$ est défini

Définition
On note ϵ' l'ensemble des distributions à support compact et $\mathcal{D}'_+$ l'ensemble des distributions à support borné à gauche.

Définition/Théorème
Soient S et T deux distributions. On suppose que (S ou $T \in \epsilon'$) ou (S et $T \in \mathcal{D}'_+$). Dans ce cas, $S * T$ est défini et on a :

$$\begin{aligned} < S * T, \varphi > &=< S_x \otimes T_y, \varphi(x+y) > \\ &=< S_x, < T_y, \varphi(x+y) >> \\ &=< T_y, < S_x, \varphi(x+y) >> \end{aligned}$$

Propriétés
Sous les mêmes hypothèses, on a :

1. $S * T = T * S$
2. $\delta_0 * T = T$
3. $S * (T)' = (S)' * T = (S * T)'$

Preuve

1. Trivial par définition
2. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} < \delta_0 * T, \varphi > &=< T_x, < \delta_{oy}, \varphi(x+y) >> \\ &=< T_x, \varphi(x+0) > \\ &=< T, \varphi > \end{aligned}$$

3. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} < (S*T)', \varphi > &= - < S*T, \varphi' > \\ &= - < S_x, < T_y, \varphi' >> \\ &= < S_x, < T'_y, \varphi >> \\ &= < S*T', \varphi > \end{aligned}$$

On obtient l'autre par commutativité. $\square$

Remarque

Par récurrence, $\forall p \in \mathbb{N}, \forall k \in [\![0;p]\!], (S*T)^{(p)} = S^{(k)} * T^{(p-k)}$. En particulier, $\delta_0^{(p)} * T = \delta_0 * T^{(p)} = T^{(p)}$, D'où la méthode pour définir/retrouver la dérivée d'une distribution.

Chapitre 3

Transformée de Fourier

3.1 Transformée de Fourier dans $L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$

Soit $f \in L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$. Alors l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-i\xi x} dx$ est bien définie, $\forall \xi \in \mathbb{R}^d$.

Définition
Soit $f \in L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$. Alors la transformé de Fourier de f vérifie les propriétés suivantes :

1. $\widehat{f} \in L^\infty\left(\mathbb{R}^d\right)$ et $\left\|\widehat{f}\right\|_{L^\infty} \leqslant \|f\|_{L^1}$
2. $\widehat{f} \in \mathcal{C}^0\left(\mathbb{R}^d\right)$ et $\lim\limits_{\|\xi\| \to +\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$

Preuve

1. $\forall \xi \in \mathbb{R}^d$ on a :

$$\begin{aligned} \left|\widehat{f}(\xi)\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-i\xi x} dx\right| \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| \underbrace{\left|e^{-i\xi x}\right|}_{=1} dx \\ &\leqslant \|f\|_{L^1} \end{aligned}$$

2. $\widehat{f}$ continue car $f(x)\, e^{-i\xi x}$ continue en tout $\xi_0 \in \mathbb{R}^d$ et $\left|f(x)\, e^{-i\xi x}\right| = |f(x)|$ avec $f \in \mathcal{L}'$ donc $f(x)\, e^{-i\xi x} \in L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$.
   Pour prouver que $\lim\limits_{\|\xi\| \to +\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$, on raisonne par densité. Soit $\varphi \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^d\right)$. On a

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\, e^{-i\xi x} dx$$

On effectue une double IPP, et on note par Δ le laplacien :

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{\|\xi\|^2} \int_{\mathbb{R}^d} \Delta\varphi(x) e^{-i\xi x} dx$$

D'où $|\widehat{\varphi}(\xi)| = cste \times \frac{\|\Delta\varphi\|_{L^\infty}}{\|\xi\|^2} \xrightarrow[\|\xi\|\to\infty]{} 0$, car $\|\Delta\varphi\|_{L^\infty}$ est fini et indépendant de ξ. Soit maintenant $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Comme $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^1(\mathbb{R}^d), \exists (\varphi_n) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ tel que $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^1} f$.

Or $\left\|\widehat{f} - \widehat{\varphi_n}\right\|_{L^\infty} = \left\|\widehat{f - \varphi_n}\right\|_{L^\infty} \leqslant \|f - \varphi_n\|_{L^1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Donc $\widehat{\varphi_n} \xrightarrow[n\to\infty]{L^\infty} \widehat{f}$. De plus, $\lim\limits_{\|\xi\|\to+\infty} \widehat{\varphi_n}(\xi) = 0$, donc $\lim\limits_{\|\xi\|\to+\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$.

□

Corollaire

L'application $\mathcal{F}$ est linéaire et continue de L^1 dans L^∞ et

$$\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{L}(L^1,L^\infty)} = \sup_{\substack{f\in L^1 \\ \|f\|_{L^1}\neq 0}} \frac{\|\mathcal{F}(f)\|_{L^\infty}}{\|f\|_{L^1}} = 1$$

Preuve

Linéarité triviale (voir cours de Mesure & Intégration).
Par le 1. du théorème, $\|\mathcal{F}f\|_{L^\infty} \leqslant \|f\|_{L^1}$. D'où f continue et $\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{L}(L^1,L^\infty)} \leqslant 1$.

De plus, si $f \geqslant 0$ on a $\|f\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx = \mathcal{F}f(0) \leqslant \|\mathcal{F}f\|_{L^\infty}$. D'où $\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{L}(L^1,L^\infty)} \geqslant 1$.

Ainsi, $\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{L}(L^1,L^\infty)} = 1$. □

Théorème

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

1. Si $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors $\mathcal{F}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(\xi) = i\xi_j \mathcal{F}f(\xi)$
2. Si $x_j f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors $\mathcal{F}(x_j f)(\xi) = i\frac{\partial \mathcal{F}f}{\partial \xi_j}(\xi)$

Preuve

1. On a bien $\mathcal{F}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$ définie car $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. De plus :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) e^{-i\xi x} dx \\ &= \left[f(x) e^{-i\xi x}\right]_{\text{bornes de } \mathbb{R}^d} - \int_{\mathbb{R}^d} f(x)(-i\xi_j) e^{-i\xi x} dx \\ &= 0 + i\xi_j \mathcal{F}f(\xi)\end{aligned}$$

car $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, donc nulle aux bords de $\mathbb{R}^d$, et que $\frac{\partial}{\partial x_j}(\xi x) = \xi_j$ par construction du produit scalaire.

2. De même, $\mathcal{F}(x_j f)$ n'est définie que si $x_j f \in L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$. Alors :

$$\begin{aligned} i\frac{\partial \mathcal{F} f}{\partial \xi_j}(\xi) &= i\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial}{\partial \xi_j}\left(f(x)\, e^{-i\xi x}\right) dx \\ &= i\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,(-ix_j)\, e^{-i\xi x} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} x_j f(x)\, e^{-i\xi x} dx \\ &= \mathcal{F}(x_j f)(\xi) \end{aligned}$$

On peut appliquer la dérivée car $\frac{\partial}{\partial \xi_j}\left(f(x)\, e^{-i\xi x}\right)$ est fini $\forall x \in \mathbb{R}^d$, et appartient à $L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$ car produit de fonctions de $L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$. $\square$

Théorème

Soit $f \in L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$ et $a \in \mathbb{R}^d$. On définit $\tau_a f(x) = f(x-a)$, l'opération de translation. Alors :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \mathcal{F}(\tau_a f)(\xi) = e^{-i\xi a} \mathcal{F} f(\xi)$$

Preuve

On a $f \in L^1\left(\mathbb{R}^d\right) \implies \tau_a f \in L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$. De plus, $\forall a \in \mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\tau_a f)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} \tau_a f(x)\, e^{-i\xi x} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x-a)\, e^{-i\xi x} dx \end{aligned}$$

On effectue un changement de variable avec $\omega = x - a$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\tau_a f)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(\omega)\, e^{-i\xi(\omega+a)} dx \\ &= e^{-i\xi a} \int_{\mathbb{R}^d} f(\omega)\, e^{-i\xi \omega} dx \\ &= e^{-i\xi a} \mathcal{F} f(\xi) \end{aligned}$$

$\square$

Théorème

Soient f et $g \in L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$. Alors $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F} f \cdot \mathcal{F} g \in L^\infty\left(\mathbb{R}^d\right)$.

Preuve

On pose $h = f * g$. Alors :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}h(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} h(x) e^{-i\xi x} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(y) g(x-y) dy \right) e^{-i\xi x} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} f(y) g(x-y) e^{-i\xi(x-y)} e^{-i\xi y} dxdy\end{aligned}$$

On effectue le changement de variable $z = x - y$ et $y = y$.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}h(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} f(y) e^{-i\xi y} g(z) e^{-i\xi z} dxdy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) e^{-i\xi y} dy \times \int_{\mathbb{R}^d} g(z) e^{-i\xi z} dz \\ &= \mathcal{F}f(\xi) \cdot \mathcal{F}g(\xi)\end{aligned}$$

□

Définition : Formule d'inversion de Fourier

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. On définit $\mathcal{F}^{-1}(f)$ par :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \mathcal{F}^{-1}(f)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\xi x} dx$$

Théorème

Soit $f \in L^1$. Si $\widehat{f} \in L^1$ alors $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f = \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}f = f$. C'est à dire que $\mathcal{F}^{-1}$ est l'inverse de $\mathcal{F}$ sur l'ensemble des fonctions $f \in L^1$ tel que $\widehat{f} \in L^1$.

Comment étendre cette définition aux distributions ?

Soit $f \in L^1 \implies \widehat{f} \in L^\infty \subset L^1_{loc}$ donc $\widehat{f}$ définit une distribution.

Soit φ une fonction test.

$$\begin{aligned}\left\langle \widehat{f}, \varphi \right\rangle &= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi) \varphi(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\xi x} dx \varphi(\xi) d\xi\end{aligned}$$

En appliquant le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned}\left\langle \widehat{f}, \varphi \right\rangle &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\xi) e^{-i\xi x} d\xi dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \widehat{\varphi}(x) dx\end{aligned}$$

Avec $\widehat{\varphi}$ définie car $\varphi \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^d\right) \subset L^1$. On aimerait donc dire que $\left\langle \widehat{f}, \varphi \right\rangle = \langle f, \widehat{\varphi} \rangle$, mais cela ne marche que si $\widehat{\varphi} \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^d\right)$.

Problème, en général $\widehat{\varphi} \notin \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^d\right)$. On a donc besoin de définir un espace de fonctions test qui est stable par transformation de Fourier.

3.2 L'espace de Schwartz

Définition

Soit $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $\varphi \in \mathcal{C}^\infty\left(\mathbb{R}^d\right)$. On dit que φ est à décroissance rapide si $\forall p \geqslant 0$:

$$\mathcal{N}_p(\varphi) = \sup_{|\alpha| \leqslant p} \sup_{|\beta| \leqslant p} \left\| x^\alpha \partial^\beta \varphi \right\|_{L^\infty} < \infty$$

Autrement dit, φ et toutes ses dérivées décroissent plus vite que les polynômes. On note $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$ l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à décroissance rapide.

Définition

On dit que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$ converge vers $\varphi \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$ dans $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$ si :

$$\forall p \geqslant 0, \mathcal{N}_p(\varphi_n - \varphi) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Il est évident que $\mathcal{D}\left(\mathbb{R}^d\right) \subset \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$: si on est nul sur un support compact, on décroît plus vite que n'importe quel polynôme.

Théorème

$\mathcal{D}\left(\mathbb{R}^d\right)$ est dense dans $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$.

Théorème

L'espace $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$ est stable par multiplication par des polynômes et par dérivation. De plus, on a :

$$\exists c \geqslant 0, \sup_{|\alpha| \leqslant p} \sup_{|\beta| \leqslant p} \left\| x^\alpha \partial^\beta \varphi \right\|_{L^1} \leqslant c\mathcal{N}_{p+d+1}(\varphi) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$$

Preuve

Stabilité par définition.

On a $x \mapsto \frac{1}{1+\sum_{j=1}^d |x_j|^{d+1}} \in L^1$. Donc :

$$\begin{aligned}
\left\| x^\alpha \partial^\beta \varphi \right\| &= \left\| \left(1 + \sum_{j=1}^d |x_j|^{d+1}\right) x^\alpha \partial^\beta \varphi \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^d |x_j|^{d+1}} \right\|_{L^1} \\
&= \left\| \left(1 + \sum_{j=1}^d |x_j|^{d+1}\right) x^\alpha \partial^\beta \varphi \right\|_{L^\infty} \underbrace{\left\| \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^d |x_j|^{d+1}} \right\|_{L^\infty}}_{c} \\
&\leqslant c\mathcal{N}_{p+d+1}(\varphi)
\end{aligned}$$

La dernière inégalité s'obtient avec l'inégalité de Hölder et l'inégalité triangulaire.

Comme $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right) \subset L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$, on peut définir la transformée de Fourier dans $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$. $\square$

Théorème

L'espace $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$ est stable par transformée de Fourier. De plus, $\forall p \geqslant 0, \exists C_p$ tel que :

$$\mathcal{N}_p\left(\widehat{\varphi}\right) \leqslant C_p \mathcal{N}_{p+d+1}\left(\varphi\right) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$$

De plus, la transformée de Fourier va définir un isomorphisme (donc bijection) séquentiellement bi-continu de $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$ dans lui-même et d'inverse $\mathcal{F}^{-1}$.

3.3 Espace des distributions tempérées $\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^d\right)$

Définitions

On note $\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^d\right)$ l'espace vectoriel des formes linéaires sur $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$ qui vérifie la propriété de continuité :

$$\exists p \in \mathbb{N}, \exists c > 0, \forall \varphi \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right), \langle T, \varphi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} \leqslant c \mathcal{N}_p\left(\varphi\right)$$

Théorème

La restriction à $\mathcal{D}\left(\mathbb{R}^d\right)$ d'un élément de $\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^d\right)$ est une distribution ($\in \mathcal{D}'\left(\mathbb{R}^d\right)$).

Preuve

Soient $T \in \mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^d\right)$, $p \in \mathbb{N}$ et $c > 0$ tel que

$$\langle T, \varphi \rangle \leqslant \mathcal{N}_p\left(\varphi\right) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$$

Il est clair que T est une forme linéaire. Sur $\mathcal{D}\left(\mathbb{R}^d\right)$, car $\mathcal{D}\left(\mathbb{R}^d\right) \subset \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$. Soit $\left(\varphi_n\right)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^d\right)$ tel que $\varphi_n \to \varphi$ dans $\mathcal{D}$. On veut montrer que $\langle T, \varphi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} \to \langle T, \varphi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}}$. On a :

$$\exists R > 0 \text{ tel que } \begin{cases} \operatorname{supp}\left(\varphi_n\right) \subset B\left(0, R\right) \\ \operatorname{supp}\left(\varphi\right) \subset B\left(0, R\right) \end{cases} \quad \text{et } \partial^\beta \varphi_n \to \partial^\beta \varphi \text{ uniformément}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \left| \langle T, \varphi_n - \varphi \rangle_{\mathcal{S}', \mathcal{S}} \right| &\leqslant c \mathcal{N}_p\left(\varphi_n - \varphi\right) \\ &\leqslant c \sup_{|\alpha| \leqslant p} \sup_{|\beta| \leqslant p} \left\| x^\alpha \partial^\beta \left(\varphi_n - \varphi\right) \right\|_{L^\infty} \end{aligned}$$

Avec $\varphi_n - \varphi$ à support dans la boule unité $\implies$ nulle si $|x| > R$. D'où on peut majorer :

$$\left|\langle T, \varphi_n - \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}\right| \leqslant cR^p \sup_{|\beta|\leqslant p} \left\|x^\alpha \partial^\beta \left(\varphi_n - \varphi\right)\right\|_{L^\infty} \to 0$$

par convergence uniforme de $\partial^\beta \varphi_n$ vers $\partial^\beta \varphi$. D'où $\langle T, \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} \to \langle T, \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}$. □

Définition
Les éléments de $\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^d\right)$ sont appelées distributions tempérées. On a $\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$.

Théorème
L'espace $\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^d\right)$ contient :
- Les polynômes sur $\mathbb{R}^d$
- Les fonctions de L^p
- L'espace $\epsilon'\left(\mathbb{R}^d\right)$ des distributions à support compact

Remarque
Par abus de notation, on note de la même façon une distribution tempérée et sa restriction à $\mathcal{D}$:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}'\left(\mathbb{R}^d\right), \langle T, \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle T, \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \langle T, \varphi\rangle$$

En particulier, si $f \in L^p\left(\mathbb{R}^d\right) \subset \mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^d\right)$, on a :

$$\langle T_f, \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle T, \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, \varphi(x)\, dx$$

3.3.1 Convergence et dérivation dans $\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^d\right)$

Définition
On dit que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^d\right)$ converge vers $T \in \mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^d\right)$. Si $\forall \varphi \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$, on a :

$$\langle T_n, \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} \to \langle T, \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}$$

Proposition
Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}'\left(\mathbb{R}^d\right)$ qui converge vers T dans $\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^d\right)$. Alors (T_n) converge vers T dans $\mathcal{D}'\left(\mathbb{R}^d\right)$.

Preuve

$$\langle T_n, \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \langle T_n, \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} \to \langle T, \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle T, \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}$$

□

Définition/Théorème

Soit $T \in \mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^d\right)$. Alors la dérivée de T par rapport à x_j est la distribution tempérée notée $\frac{\partial T}{\partial x_j}$ et définie par :

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = -\left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}$$

et la restriction à $\mathcal{D}$ de $\frac{\partial T}{\partial x_j}$ est la dérivée par rapport à x_j de la restriction de T à $\mathcal{D}$.

Preuve

Il est évident que $\frac{\partial T}{\partial x_j}$ définit une forme linéaire.

$$\begin{aligned}
\left| \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} \right| &= \left| \left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} \right| \\
&\leqslant c\mathcal{N}_p \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) \\
&\leqslant c\mathcal{N}_{p+1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right)
\end{aligned}$$

Donc $\frac{\partial T}{\partial x_j} \in \mathcal{S}'$. De plus, $\forall \varphi \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^d\right)$ on a :

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} &= -\left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} \\
&= -\left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} \\
&= \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}
\end{aligned}$$

□

3.3.2 Transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^d\right)$

Définition

Soit $T \in \mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^d\right)$. La transformée de Fourier de T, notée $\widehat{T}$ ou $\mathcal{F}T$, est la distribution tempérée définie par :

$$\left\langle \widehat{T}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle T, \widehat{\varphi} \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} \qquad\qquad \forall \varphi \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$$

Théorème

La transformée de Fourier ainsi définie va être une extension de celle définie pour $L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$.

Preuve

Il est évident que $\widehat{T}$ est une forme linéaire sur $\mathcal{S}$. Montrons que $\widehat{T}$ est continue. Soit $\varphi \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$:

$$\begin{aligned}\left|\left\langle \widehat{T}, \varphi \right\rangle\right| &= \left|\langle T, \widehat{\varphi} \rangle\right| \\ &\leqslant c\mathcal{N}_p\left(\widehat{\varphi}\right) \\ &\leqslant \widetilde{c}\mathcal{N}_{p+d+1}\left(\varphi\right)\end{aligned}$$

D'où $\widehat{T} \in \mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^d\right)$.

Soit $T \in L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$. Alors, $\forall \varphi \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$, on a :

$$\begin{aligned}\left\langle \widehat{T}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} &= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{T}\left(x\right)\varphi\left(x\right)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} T\left(y\right)e^{-ixy}dy\varphi\left(x\right)dx\end{aligned}$$

En appliquant Fubini :

$$\begin{aligned}\left\langle \widehat{T}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} &= \int_{\mathbb{R}^d} T\left(y\right)\int_{\mathbb{R}^d}\varphi\left(x\right)e^{-ixy}dxdy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} T\left(y\right)\widehat{\varphi}\left(y\right)dy \\ &= \langle T, \widehat{\varphi}\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}\end{aligned}$$

$\square$

Théorème

La transformée de Fourier est un isomorphisme séquentiellement bi-continu de $\mathbb{R}^d$ dans lui même, d'inverse $\mathcal{F}^{-1}$définie par :

$$\left\langle \mathcal{F}^{-1}T, \varphi\right\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \left\langle T, \mathcal{F}^{-1}\varphi\right\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} \qquad \forall \varphi \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$$

Preuve

Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^d\right)$ tel que $T_n \to T$ dans $\mathcal{S}'\left(\mathbb{R}^d\right)$. $\forall \varphi \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$ on a :

$$\langle \mathcal{F}T_n, \varphi\rangle = \langle T_n, \mathcal{F}\varphi\rangle \to \langle T, \mathcal{F}\varphi\rangle = \langle \mathcal{F}T, \varphi\rangle$$

D'où $\mathcal{F}T_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathcal{F}T$. Idem pour $\mathcal{F}^{-1}$.

Soit $T \in \mathcal{S}'$, $\varphi \in \mathcal{S}$. On a :

$$\left\langle \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}T, \varphi\right\rangle = \left\langle \mathcal{F}T, \mathcal{F}^{-1}\varphi\right\rangle = \left\langle T, \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\varphi\right\rangle = \langle T, \varphi\rangle$$

D'où $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}T = T$. Idem pour $\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}T = T$. $\square$

Théorème
Soit $T \in \mathcal{S}'$. Alors $\frac{\partial T}{\partial x_j} \in \mathcal{S}'$ et $x_j T \in \mathcal{S}'$. De plus :

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial T}{\partial x_j}\right) = i\xi_j \mathcal{F}T$$
$$\mathcal{F}\left(x_j T\right) = i\frac{\partial \mathcal{F}T}{\partial x_j}$$

Preuve
Soit $\varphi \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^d\right)$. On a :

$$\begin{aligned}\left\langle \mathcal{F}\left(\frac{\partial T}{\partial x_j}\right), \varphi \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \mathcal{F}\varphi \right\rangle \\ &= -\left\langle T, \frac{\partial}{\partial x_j} F\varphi \right\rangle \\ &= -\left\langle T, \mathcal{F}\left(-i\xi_j \varphi\right)\right\rangle \\ &= -\left\langle \mathcal{F}T, \underbrace{-i\xi_j}_{\in \mathcal{C}^\infty} \varphi \right\rangle \\ &= \left\langle i\xi_j \mathcal{F}T, \varphi \right\rangle\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}\left\langle \mathcal{F}\left(x_j T\right), \varphi \right\rangle &= \left\langle x_j T, \mathcal{F}\varphi \right\rangle \\ &= \left\langle T, x_j \mathcal{F}\varphi \right\rangle \\ &= \left\langle T, -i\mathcal{F}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_j}\right)\right\rangle \\ &= \left\langle T, \mathcal{F}\left(-i\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_j}\right)\right\rangle \\ &= \left\langle \mathcal{F}T, -i\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_j}\right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial}{\partial \xi_j}\mathcal{F}T, i\varphi \right\rangle \\ &= \left\langle i\frac{\partial}{\partial \xi_j}\mathcal{F}T, \varphi \right\rangle\end{aligned}$$

□

3.3.3 Transformée de Fourier dans L^2

Théorème
Les transformations $\frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}\mathcal{F}$ et $(2\pi)^{\frac{d}{2}}\mathcal{F}^{-1}$ sont des isométries dans L^2, in-

verses l'une de l'autre.

$$\forall f \in L^2, \mathcal{F}f \in L^2 \qquad \text{et } \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \|\mathcal{F}f\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$$
$$\forall f \in L^2, \mathcal{F}^{-1}f \in L^2 \qquad \text{et } (2\pi)^{\frac{d}{2}} \|\mathcal{F}f\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$$