Algorithme de Bellman

→ graphe orienté de poids négatif et/ou positif

→ pas de circuit absorbant si on veut minimiser

→ pas de circuit grossissant si on veut maximiser

→ aucun circuit

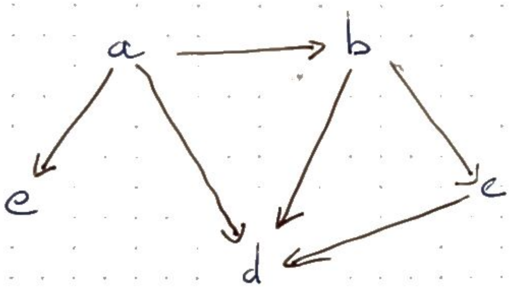
Définition Ordre topologique

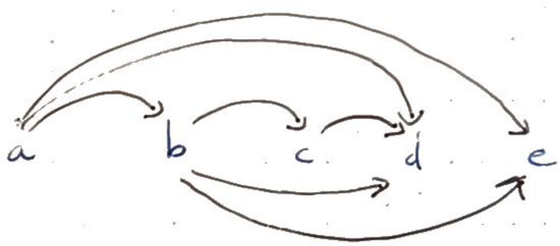
Un graphe $G = (X,U)$ orienté possède un ordre topologique si on peut numéroter les sommets de 1 à n de façon à ce que

$$ij \in U \Rightarrow i < j$$

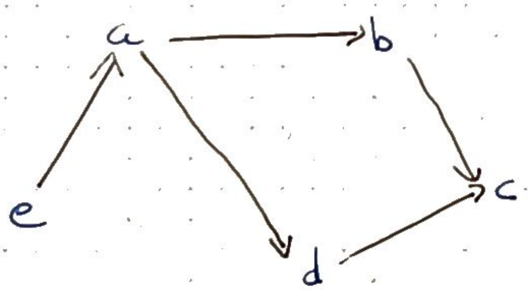
G est sans circuit ssi il possède un ordre topologique

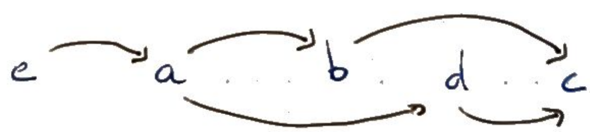
Exemple



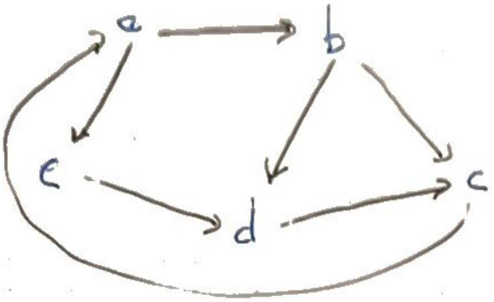


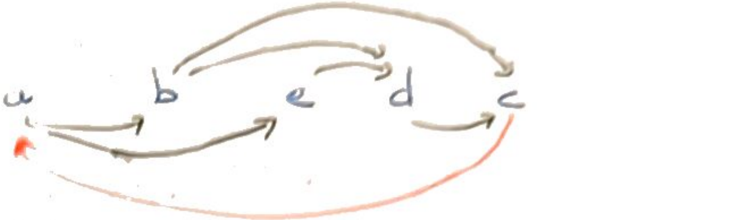
Ordre topologique ✓





ordre topologique





pas d'ordre topologique car circuit.

Rq : On construit un ordre topologique en prenant un sommet qui n'a pas de prédecesseur. Il y en a forcément, sinon on construit un circuit en remontant les arcs

L'idée de l'algorithme de Bellman est de parcourir les sommets dans l'ordre topologique et de tester la condition de Ford seulement au sommet successeur.

Algo

Pour tout sommet i de 1 à n dans l'ordre topologique :

  Pour tout $j \in R^+(i)$ ← successeur de i

    Si $\pi_j > \pi_i + l_{ij}$ alors ← condition pour le plus court (minimiser)

      $\pi_j \leftarrow \pi_i + l_{ij}$

      $pred_j \leftarrow i$

    Fin Si

  Fin Pour

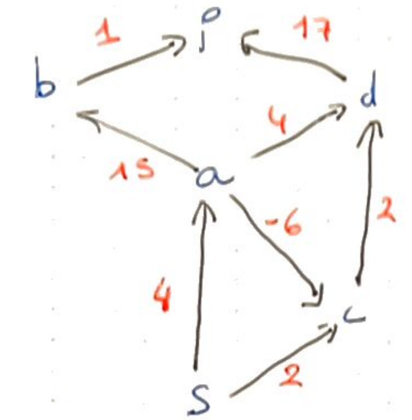
Fin Pour

pour le plus long (maximiser)

$\pi_j < \pi_i + l_{ij}$

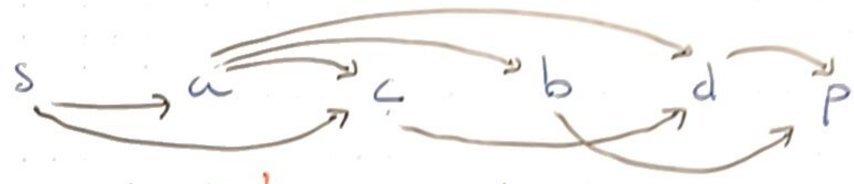
Complexité : $O(n+m)$ car chaque arc est examiné exactement 1 fois

Exemple



Déterminer le plus court chemin de s à p.

Ordre topologique.



Initialisation :

	s	a	c	b	d	p
π	0	$\boxed{4}$	2	+∞	+∞	+∞
pred	s	$\boxed{s}$	s	∅	∅	∅

	s	a	c	b	d	p
π	0	4	$\boxed{-2}$	19	8	+∞
pred	s	s	$\boxed{a}$	a	a	∅

π	0	4	-2	$\boxed{19}$	0	+∞
pred	s	s	a	$\boxed{a}$	c	∅

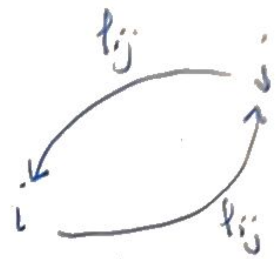
π	0	4	-2	19	$\boxed{0}$	20
pred	s	s	a	a	$\boxed{c}$	b

π	0	4	-2	19	0	17
pred	s	s	a	a	c	d

Donc le plus court chemin s → a → c → d → p

Que se passe-t-il si on a un graphe valué non orienté ?

$\Longrightarrow$



G non orienté

G' orienté

$\underbrace{\text{Si il existe } l_{ij} < 0 \text{ dans } G}_{A} \Rightarrow \underbrace{\text{circuit absorbant dans } G'}_{B}$

$A \Rightarrow B$

non $B \Rightarrow$ non A

s'il n'y a pas de circuit absorbant dans G' alors $\forall i, j \in X$, $l_{ij} \geq 0$ dans G.

On peut donc appliquer Dijkstra.

On ne peut pas faire Bellman car il y aura plein de circuit.