Contrôle Continu.
Equations différentiels ordinaires
HASNAA ZIDANI - HASNAA.ZIDANI@INSA-ROUEN.FR

Devoir Maison - **à rendre le vendredi 7 avril 2023**

Les 4 exercices sont indépendants.
Le devoir peut être réalisé seul ou en binôme
Les réponses doivent être justifiées de manière concise.
Il faut déposer le devoir avant le 7 avril midi **sur moodle**

Exercice 1 On considère l'équation différentielle suivante:

$$y'(t) = 2t(y(t) + y^2(t)), \quad y(0) = y_0.$$

1. Justifier que, pour tout $y_0 \in R$, l'équation admet une solution maximale (y, I) où I est un intervalle contenant 0.

2. Supposons que $y_0 = 0$. Déterminer la solution globale de l'équation.

3. On suppose maintenant que $y_0 \neq 0$. Résoudre l'équation et discuter si la solution est globale. [*Ind. On peut considérer le changement de variable:* $z(t) = \frac{1}{y(t)}$]

Exercice 2 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & \alpha \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres de A dans $\mathbb{C}$ en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. Distinguer, selon les valeurs de α, si A est diagonalisable ou pas et étudier la stabilité du système différentiel $y'(t) = Ay(t)$, avec $y(0) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 3 On considère sur $I =]1, +\infty[$ l'équation différentielle

$$y'(t) = 1 + \frac{\cos^2(y(t))}{4t^2}, \quad y(2) = y_0.$$

1. Montrer que les solutions maximales existent, sont uniques et globales sur I.

2. On pose $z(t) := y(t) - t$. Trouver l'équation différentielle satisfaite par z. Montrer que z est croissante.

3. En majorant sa dérivée,montrer que z est majorée.
   Montrer que $z(t)$ converge vers une limite, que l'on notera ℓ, lorsque $t \to +\infty$.
   En déduire que $y(\cdot)$ admet pour asymptote la fonction $t \longmapsto t + \ell$.

4. La valeur de ℓ dépend de la condition initiale y_0. Pour indiquer cette dépendance on notera $\ell(y_0)$. Montrer que $y_0 \longmapsto \ell(y_0)$ est une fonction croissante.

Exercice 4 On considère les systèmes suivants:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -\sin(y_1) \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_1^2 - 3y_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1' = -y_1 - y_1 y_2^2 \\ y_2' = -y_2 + 3y_1^2 y_2 \end{cases}$$

Pour chacun de ces systèmes non linéaires:

(a) trouver les points d'équilibre

(b) Déterminer le système linéarisé autour de chaque point d'équilibre et étudier la stabilité du système linéarisé

(c) Ensuite, étudier la stabilité du système non linéaire