Signal Déterministe à Temps Continu de carré intégrable – Représentation de Fourier (TFTC)

$$x(t) \xrightarrow{TF} X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-2\pi jft}dt \qquad X(f) \xrightarrow{(TF)^{-1}} x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{2\pi jft}df$$

Exemple: $x(t) = rect_T(t)$

$x(t) = 1 \qquad -T \leq t \leq T$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} rect_T(t)e^{-2\pi jft}dt = \int_{-T}^{T} e^{-2\pi jft}dt = -\frac{[e^{-2\pi jft}]_{-T}^{T}}{2\pi jf}$$

$$X(f) = \frac{e^{2\pi jfT} - e^{-2\pi jfT}}{2\pi jf}$$

Rappel: $\frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j} = \sin\alpha \qquad \sin c(\alpha) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha}$

$$X(f) = \frac{\sin(2\pi fT)}{\pi f}$$

$$\boxed{X(f) = \mathbf{2T}\sin c(\mathbf{2T}f)}$$

Remarque: La largeur de la rectangulaire est égale à $2T$.

Si $y(t) = rect_{\frac{T}{2}}(t)$ alors $Y(f) = Tsinc(Tf)$.

Propriétés

$$x(t) \xrightarrow{TF} X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-2\pi jft}dt$$

$$X^*(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{2\pi jft}dt$$

$$x(-t) \xrightarrow{TF} \int_{-\infty}^{\infty} x(-t)e^{-2\pi jft}dt$$

On pose $\theta = -t \quad \rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} x(-t)e^{-2\pi jft}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(\theta)e^{2\pi jf\theta}d\theta$

$$x(-t) \xrightarrow{TF} X(-f)$$

$$x^*(t) \xrightarrow{TF} \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{-2\pi jft}dt$$

$$x^*(t) \xrightarrow{TF} X^*(-f)$$

Nous obtenons alors:

$$x^*(-t) \xrightarrow{TF} X^*(f)$$

– décalage temporel

$y(t) = x(t - t_0) \qquad t_0 > 0$

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-2\pi jft}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_0)e^{-2\pi jft}dt$$

On pose $\theta = t - t_0$ $\rightarrow$ $Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\theta) e^{-2\pi j f(\theta + t_0)} d\theta$

$$Y(f) = e^{-2\pi j f t_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(\theta) e^{-2\pi j f \theta} d\theta$$

$$x(t - t_0) \xrightarrow{TF} X(f) e^{-2\pi j f t_0}$$
$$x(t + t_0) \xrightarrow{TF} X(f) e^{2\pi j f t_0}$$

– *décalage fréquentiel*

$z(t) = x(t) e^{2\pi j f_0 t}$

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} z(t) e^{-2\pi j f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{2\pi j f_0 t} e^{-2\pi j f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-2\pi j (f - f_0) t} dt$$

$$x(t) e^{2\pi j f_0 t} \xrightarrow{TF} X(f - f_0)$$

– *dilation temps fréquence*:

$w(t) = x(at) \qquad a > 0$

$$W(f) = \int_{-\infty}^{\infty} w(t) e^{-2\pi j f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(at) e^{-2\pi j f t} dt$$

On pose $\theta = at$ $\rightarrow$ $W(f) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(\theta) e^{-2\pi j f \frac{\theta}{a}} d\theta$

$$x(at) \xrightarrow{TF} \frac{1}{a} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

Nous avons alors:

$$x(-at) \xrightarrow{TF} \frac{1}{a} X\left(-\frac{f}{a}\right)$$

– *dérivation*:

- temporelle $\qquad \frac{d^n x(t)}{dt^n} \xrightarrow{TF} (2\pi j f)^n X(f)$
- fréquentielle $\qquad (-2\pi j t)^n x(t) \xrightarrow{TF} \frac{d^n X(f)}{df^n}$