II) Equations différentielles

• Système linéaire autonome

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$)

On considère le système :

$$y'(t) = Ay(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Dans le cas $n = 1$, la solution qui vérifie $y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}$ est donnée par

$$y(t) = e^{A(t-t_0)} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

cas $n > 1$ (dans $\mathbb{C}^n$)

Rappel

Polynome caractéristique : $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda Id)$

Dans $\mathbb{C}$, on peut toujours décomposer $P_A(\lambda)$ en produit de n monômes.

$$P_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{p_1} \dots (\lambda - \lambda_r)^{p_r}$$

où $p_1 + p_2 + \dots + p_r = n$ multiplicité de la valeur propre

$\lambda_1, \lambda_2 \dots, \lambda_r$ valeur propre de A

⚠ $P_A(\lambda)$ est toujours scindé dans $\mathbb{C}^n$, mais ne l'est pas toujours dans $\mathbb{R}$.

Sous Espace propre dans $\mathbb{C}$

$$\Pi_{\lambda_j} = \ker(A - \lambda_j Id)$$

Pour tout $x \in \Pi_{\lambda_j}$, on a $Ax = \lambda_j x \in \Pi_{\lambda_j}$

A diagonalisable dans $\mathbb{C}$

$\iff$ Il existe une base de $\mathbb{C}^n$ formée des vecteurs propres de A.

$\iff \dim \Pi_{\lambda_j} = p_j \quad \forall j \in 1, \dots, r$

$\iff \mathbb{C}^n = \Pi_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus \Pi_{\lambda_r}$

Théorème :

Solution du système dans $\mathbb{C}^n$: $\quad y'(t) = A y(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$$y(t) = \sum_{j=1}^{r} e^{t\lambda_j} x_j \quad \text{avec } x_j \in \Pi_{\lambda_j}$$

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable dans $\mathbb{C}$

$$P_A(\lambda) = \prod_{j=1}^{s} (\lambda - \lambda_j)^{p_j} \prod_{j=s+1}^{q} \left[(\lambda - \lambda_j)(\lambda - \overline{\lambda_j}) \right]^{p_j}$$

avec $\lambda_j \in \mathbb{R}$ pour $j = 1 \dots s$

→ le polynôme $P_A(\lambda)$ admet des racines dans $\mathbb{C}$ (pas seulement dans $\mathbb{R}$)

→ Du fait que A est réelle, on a :

$\lambda_j \in \mathbb{C}$ vp de $A \Rightarrow \overline{\lambda_j}$ vp de A

→ chaque vp λ_j est associé à un espace propre $\Pi_{\lambda_j} \subset \mathbb{C}^n$

→ On définit les sous-espaces caractéristiques réels de A par

$V_j = \Pi_{\lambda_j}$ pour $j = 1 \dots s$

$V_j = \Pi_{\lambda_j} \oplus \Pi_{\overline{\lambda_j}} \cap \mathbb{R}^n$ pour $j = s+1 \dots q$

L'unique solution de $y'(t) = A\,y(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$ est donc donné par

$$y(t) = e^{tA} y(0) = \sum_{j=1}^{s} e^{t\lambda_j} x_j + \underbrace{\sum_{j=s+1}^{q} \left(e^{t\lambda_j} x_{j,1} + e^{t\overline{\lambda_j}} x_{j,2}\right)}_{\in V_j}$$

Théorème

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable dans $\mathbb{C}$

Toute solution de $y'(t) = A\,y(t)$ dans $\mathbb{R}^n$ s'écrit :

$$y(t) = \sum_{j=1}^{q} e^{t\alpha_j}\left[\cos(t\beta_j)\,a_j + \sin(t\beta_j)\,b_j\right]$$

où $\alpha_j = \mathrm{Re}(\lambda_j)$
$\beta_j = \mathrm{Im}(\lambda_j)$

et $a_j, b_j \in V_j$

a_j et b_j dépendent des valeurs propres λ_j et de la décomposition de $y(0)$, le calcul n'est pas explicite mais on peut prédire son comportement en "temps long"

Dans la décomposition $\mathbb{R}^n = V_1 \oplus \dots \oplus V_q$:

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) + \dots + y_q(t)$$

où

$$\begin{cases} y_i(t) = e^{\lambda_i t} v_i & \text{pour } i = 1..s \\ y_i(t) = e^{\alpha_i t}\left[\cos(\beta_i t)\,a_i + \sin(\beta_i t)\,b_i\right] & \text{pour } i = s+1 \dots q \end{cases}$$

où $\alpha_i = \mathrm{Re}(\lambda_i)$ $\beta_i = \mathrm{Im}(\lambda_i)$

et $a_i, b_i \in V_i$

Théorème

Pour tout $i = 1 .. q$:

* Si $\alpha_i = Re(\lambda_i) < 0$ alors y_i est stable

ie $\lim_{t \to +\infty} \|y_i(t)\| = 0$

* Si $\alpha_i = 0$ ($\leftarrow Re(\lambda_i)$) alors y_i est périodique et

$y_i(t) = \cos(t\beta_i) a_i + \sin(t\beta_i) b_i$

* Si $\alpha_i > 0$ ($\leftarrow Re(\lambda_i)$) alors y_i diverge.

ie $\lim_{t \to +\infty} \|y_i(t)\| = +\infty$

et y_i émane de l'origine cad

$\lim_{t \to -\infty} \|y_i(t)\| = 0$

Conséquence

1) Si $Re(\lambda_i) < 0$ pour toute vp de A alors la solution de $y'(t) = Ay(t)$ est stable

$\Leftrightarrow \lim_{t \to +\infty} \|y(t)\| = 0$

2) Si $Re(\lambda_i) \leq 0$ pour toute vp de A alors la solution est borné.