Part I
Interpolation polynomiale

1 Introduction

Objectif :

Étant donné n+1 points de coordonnées $\underline{x}_i \in \mathbb{R}^2, i \in \{0, \cdots, n\}$ déterminer P un (le ?) polynôme vérifiant

$$P(\underline{x}_i) = y_i, \quad \forall i \in \{0, \cdots, n\} \text{ où } \underline{x}_i = (x_i, y_i)$$

1.1 Définition

On appelle problème d'interpolation de Lagrange le problème suivant : trouver P un polynôme vérifiant

$$P(x_i) = y_i, \quad \forall i \in \{0, \cdots, n\}$$

Considérons $P \in \mathbb{P}_n$ l'espace des polynômes de degré n et notons par $(\varphi_j)_{j=0,\cdots,n}$ une base. On a alors :

$$P(x_i) = y_i \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \varphi_j(x_i) = y_i$$

où les inconnues sont les coefficients α_j.

$$P(x_i) = y_i \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \cdots & \varphi_n(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \cdots & \varphi_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_0(x_n) & \varphi_1(x_n) & \cdots & \varphi_n(x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Remarque :

On peut dores et déjà noter que la matrice n'est pas inversible si on a $x_i = x_j, \ j \neq i$

1.2 Proposition

Le problème d'interpolation de Lagrange admet une unique solution ssi la matrice de Gram G définie par $G_{ij} = \varphi_j(x_i)$ est inversible.

1.3 Théorème

Si les $(\varphi_j)_{j=0,\cdots,n}$ forment une base de $\mathbb{P}_n$, et $x_i \neq x_j$, $\forall j \neq i$ alors la matrice de Gram G est inversible, et donc le problème d'interpolation admet une unique solution.

Preuve
Prouvons que $Ker(G) = \{0\}$.
Soit $\alpha \in Ker(G)$ alors

$$G\alpha = 0 \iff \begin{bmatrix} \varphi_0(x_0) & \dots & \varphi_n(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_0(x_n) & \dots & \varphi_n(x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\iff \forall i \in \{0...n\} \sum_{j=0}^{n} \varphi_j(x_i)\alpha_j = 0$$

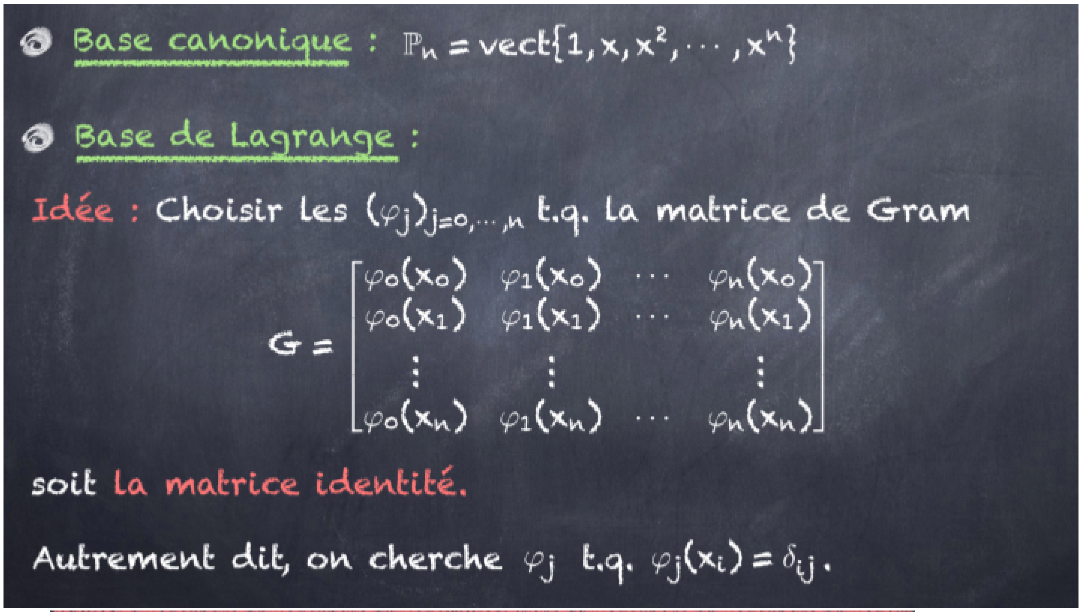
Posons $Q(x) = \sum_{j=0}^{n} \varphi_j(x)\alpha_j$

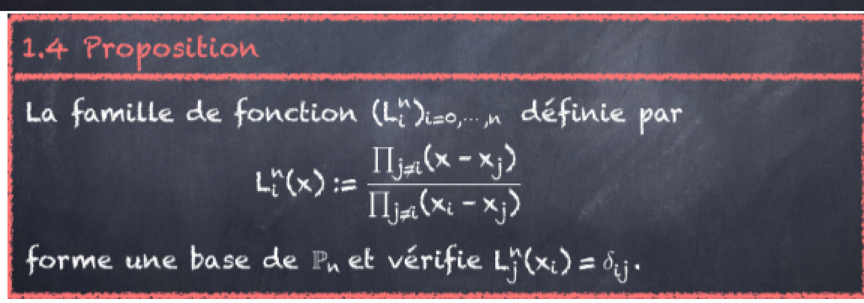
On a $Q(x_i) = 0 \; \forall i \in \{0...n\}$ Ce qui implique que Q possède $n+1$ racines. Or $Q \in P[X^n]$, on déduit que $Q = \widetilde{0}$.

D'où $\sum_{j=0}^{n} \varphi_j(x)\alpha_j = 0 \; \forall x$

Comme les φ_j forment une famille libre, on déduit que $\alpha_j = 0 \; \forall j \in \{0...n\} \iff Ker(G) = 0$

Remarque autant d'équation que d'inconnues n'implique pas forcément que G soit inversible.





Preuve
On a $L_i^n(x_k) = \frac{\prod_{j\neq i}(x_k - x_j)}{\prod_{j\neq i}(x_i - x_j)}$

- Si $k = i$

$$L_i^n(x_i) = \frac{\prod_{j\neq i}(x_i - x_j)}{\prod_{j\neq i}(x_i - x_j)} = 1$$

- Si $k \neq i$

$$L_i^n(x_k) = \frac{\prod_{j\neq i} \overbrace{(x_k - x_j)}^{0 \; quand \; j=k}}{\prod_{j\neq i}(x_i - x_j)} = 0$$

Montrons que $(L_i^n)_{i=0..n}$ est une famille libre.

Posons $Q(x) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j L_j^n(x)$

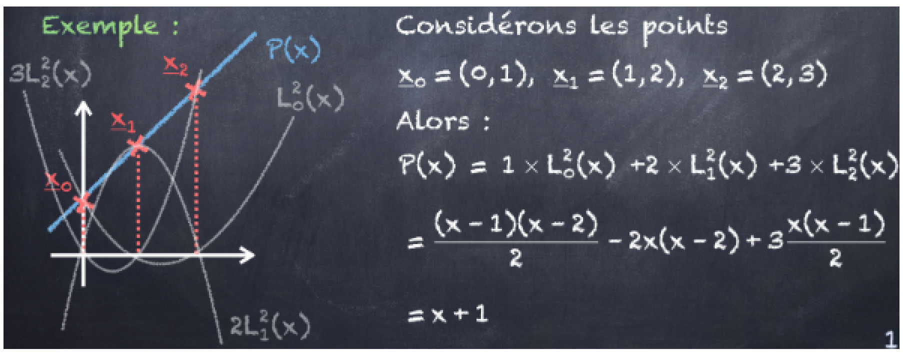
Alors en $x = x_i$, $\sum_{j=0}^{n} \alpha_j L_j^n(x_i) = 0$

Donc $\alpha_j = 0 \; \forall j \in \{0..n\}$

$(L_i^n)_i$ est dont une famille libre, c'est une base de $P[X^n]$

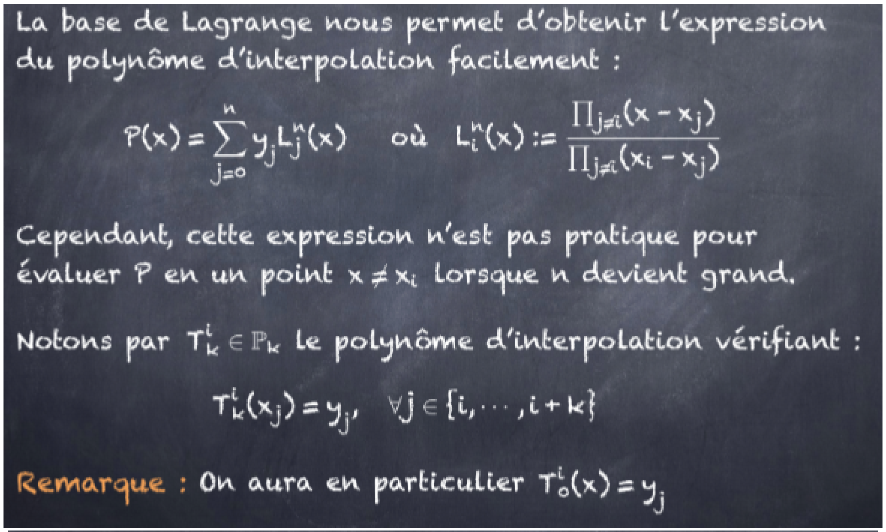
Remarque Dans la base de Lagrange, l'expression du polynôme d'interpolation est direct

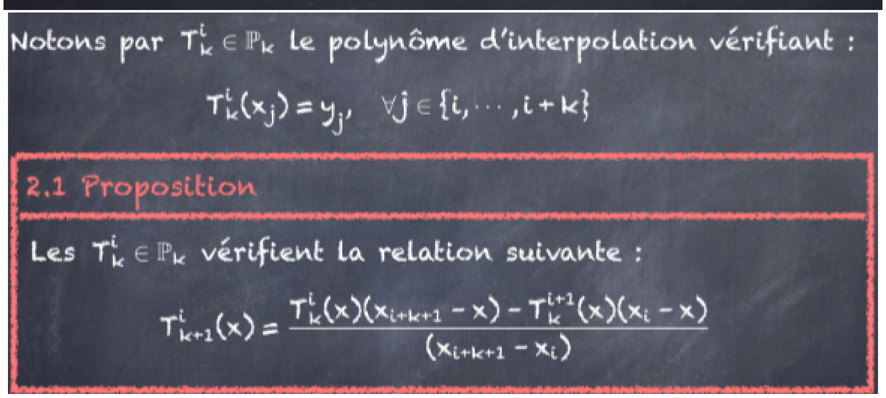
$$P(x) = \sum_{j=0}^{n} L_j^n(x) y_j$$



2 Évaluation du polynome d'interpolation

2.1 Schema de Neville-Aiken





Preuve

Par définition, on a $T_{k+1}^i \in P[X^{k+1}]$ qui vérifie $T_{k+1}^i(x_j) = y_j \ \forall j \in \{i, ..., i+k+1\}$

Posons $Q(x) = \frac{\overbrace{T_k^i(x)}^{deg\ k}\overbrace{(x_{i+k+1} - x)}^{deg\ 1} - \overbrace{T_k^{i+1}(x)}^{deg\ k}\overbrace{(x_i - x)}^{deg\ 1}}{(x_{i+k+1} - x_i)}$

Donc $deg\ Q = k + 1$

Prouvons que $\forall j \in \{i, ..., i+k+1\}$ On a $Q(x_j) = y_j$ et on aura ainsi

$Q(x) = T_{k+1}^{i}(x)$

- Pour $x = x_i$

$$Q(x_i) = \frac{\overbrace{T_k^i(x_i)}^{y_i}(x_{i+k+1} - x_i) - T_k^{i+1}(x_i)\overbrace{(x_i - x_i)}^{0}}{(x_{i+k+1} - x_i)} = y_i$$

- Pour $x = x_{i+k+1}$

$$Q(x_{i+k+1}) = \frac{T_k^i(x_{i+k+1})\overbrace{(x_{i+k+1} - x_{i+k+1})}^{0} - \overbrace{T_k^{i+1}(x_{i+k+1})}^{y_{i+k+1}}(x_i - x_{i+k+1})}{(x_{i+k+1} - x_i)} = y_{i+k+1}$$

- Pour $x = x_j$

$$Q(x_j) = \frac{\overbrace{T_k^i(x_j)}(x_{i+k+1} - x_j) - \overbrace{T_k^{i+1}(x_j)}^{y_j}(x_i - x_j)}{(x_{i+k+1} - x_i)} = y_j$$

Remarque La relation indique que pour évalué T_{k+1}^{i} en x , on a besoin de T_k^i et T_k^{i+1}

De plus, on notera que $T_n^0(x) = P(x)$

Algorithme d'évaluation de P en x=a (à la main) :

$$
\begin{array}{c|lllll}
x_0 & y_0 = T_0^0(a) & \longrightarrow T_1^0(a) & \cdots & T_{n-1}^0(a) \longrightarrow & \boxed{T_n^0(a)} \\
x_1 & y_1 = T_0^1(a) & \nearrow\!\!\longrightarrow T_1^1(a) & \cdots & T_{n-1}^1(a) \nearrow & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \\
x_i & y_i = T_0^i(a) & \nearrow\!\!\longrightarrow T_1^i(a) & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & & \\
 & & T_1^{n-1}(a) & & & \\
x_n & y_n = T_0^n(a) & \nearrow & & &
\end{array}
$$

Remarque :

L'ordre des points x_i ne compte pas.

Algorithme d'évaluation de P en x=a :

Pour k = 0 **à** n-1
  Pour i = 0 **à** n-k-1
    $T_{k+1}[i] \leftarrow \dfrac{T_k[i]\,(x[i+k+1]-a) - T_k[i+1]\,(x[i]-a)}{(x[i+k+1] - x[i])}$
  $T_k \leftarrow T_{k+1}$

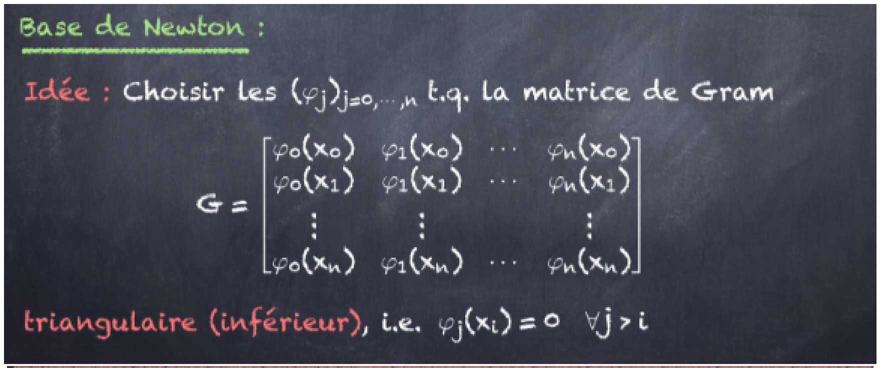
Complexité : $\cancel{O(7n^2/2)}$ $O(5n^2/2)$

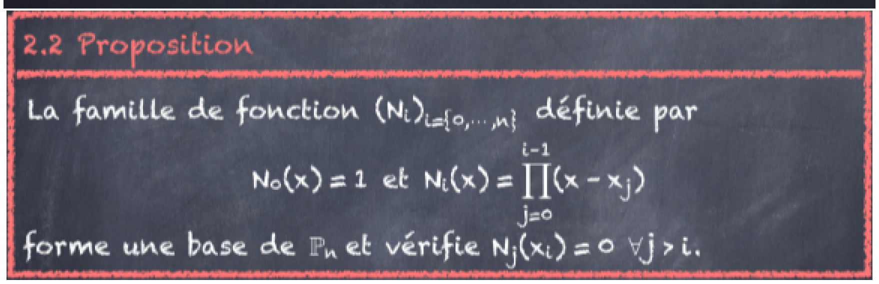
À chaque itération i, on effectue 4 différences, 2 produits et une division, soit au total 7 opérations. Au total, on a donc

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-k} 7 = 7\sum_{k=0}^{n-1}(n-k) = 7\frac{n(n+1)}{2} \quad \text{opérations}$$

19

2.2 Différence divisé et Horner





Preuve

Montrons que

1. $N_i(x_k) = 0 \ \forall k \leq i-1$
2. La famille des $(N_i)_i$ forme une base de $P[X^n]$

On a $\forall k \leq i-1$

$$N_i(x_k) = \prod_{j=0}^{i-1} \underbrace{(x_k - x_j)}_{0 \ quand \ j=k} = 0$$

De plus la famille de fonction $(N_i)_i$ possède n+1 élements et dim $P[X^n] = n+1$. Montrons que c'est une famille libre.

Posons $Q(x) = \sum_{i=0}^{n} N_i(x)\alpha_i$

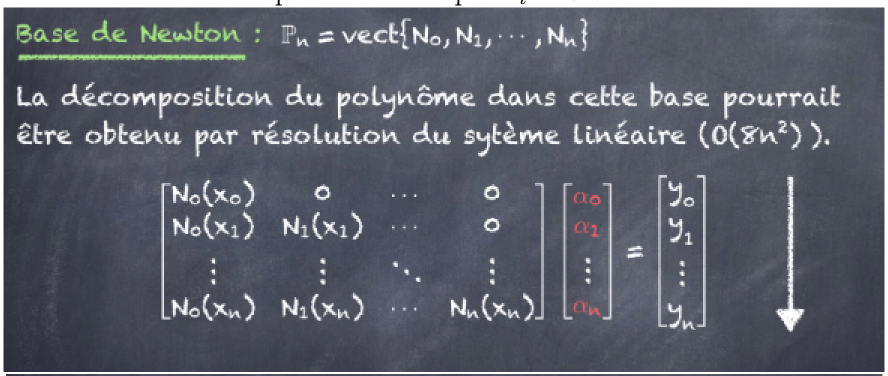
Montrons que $Q(x) = 0 \ \forall x \iff \alpha_i = 0 \ \forall i$

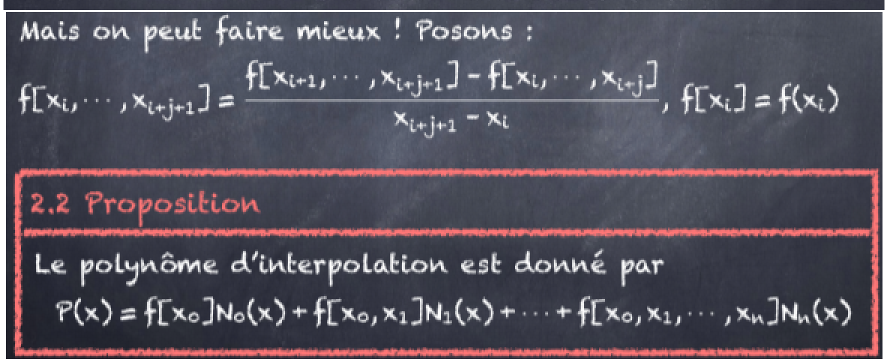
Le sens indirecte est évident, prouvons le sens direct.

Si on a $\sum_{i=0}^{n} N_i(x)\alpha_i = 0 \ \forall x$ alors en $x = x_0$, $\sum_{i=0}^{n} N_i(x_0)\alpha_i = 0 \iff \alpha_0 = 0$

Ensuite en $x = x_1$, $\sum_{i=0}^{n} N_i(x_1)\alpha_i = \alpha_1 \underbrace{N_1(x_1)}_{\neq 0} = 0 \iff \alpha_1 = 0$

Et on continue ainsi pour déduire que $\alpha_i = 0 \; \forall i$





Preuve

Posons l'hypothese de récurrence :

$(H_k) : T_k^i = f[x_i]N_0^i(x) + f[x_i, x_{i+1}]N_1^i(x) + ... + f[x_i, .., x_{i+k}]N_k^i(x)$

où $N_0^i(x) = 1$ et $N_j^i(x) = \prod_{l=0}^{j-1}(x - x_{l+i}) \; \forall i \in \{0..n-k\}$

Pour $k = 0$

On doit vérifier que $\forall i \in \{0..n\}$ $T_0^i(x) = f[x_i]N_0^i(x) = f[x_i] = y_i$ vrai au rang 0

Supposons (H_k) vrai , montrons le rang $k+1$

Soit $i \in \{0, .., n-k-1\}$

On veut prouver que

$T_k^i = f[x_i]N_0^i(x) + f[x_i, x_{i+1}]N_1^i(x) + ... + f[x_i, ..x_{i+k+1}]N_{k+1}^i(x)$

Posons $T_{k+1}^i(x) = \sum_{j=0}^{k+1} \alpha_j N_j^i(x)$

$T_k^i(x) = \sum_{j=0}^{k} f[x_i, .., x_{i+j}]N_j^i(x)$

en évaluant en $x = x_i$ on obtient
$T_k^i(x_i) = f[x_i] N_0^i(x_i) = y_i$
De plus $T_{k+1}^i(x_i) = \alpha_0 N_0^i(x_i) = y_i$
On déduit que $\alpha_0 = f[x_i]$

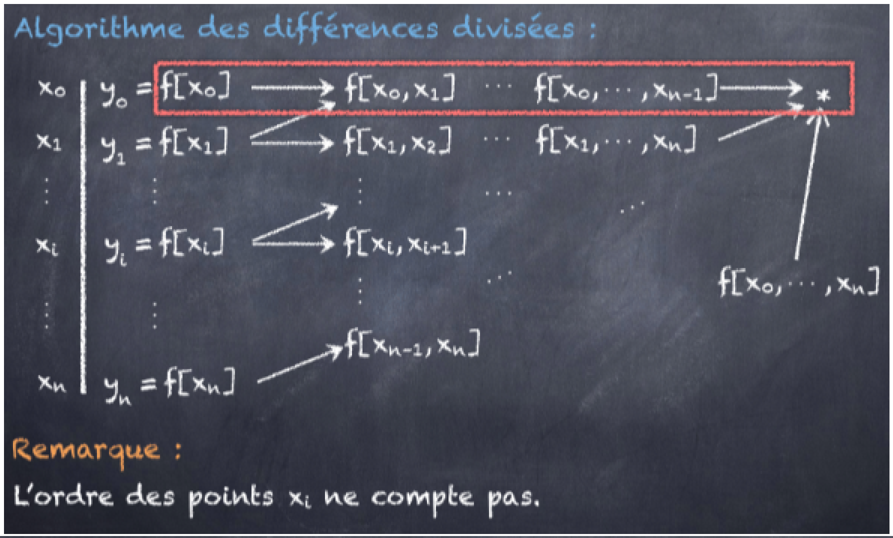
De même en $x = x_{i+1}$ on a
$T_k^i(x_{i+1}) = f[x_i] N_0^i(x_{i+1}) + f[x_i, x_{i+1}] N_1^i(x_{i+1}) = y_{i+1}$
De plus $T_{k+1}^i(x_{i+1}) = f[x_i] N_0^i(x_i) + \alpha_1 N_1^i(x_{i+1}) = y_{i+1}$
Donc $\alpha_1 = f[x_i, x_{i+1}]$
Et on continue ainsi pour les autres α_j jusqu'à $j = i + k$
Il reste à prouver que $\alpha_{k+1} = f[x_i, .., x_{i+k+1}]$
Or

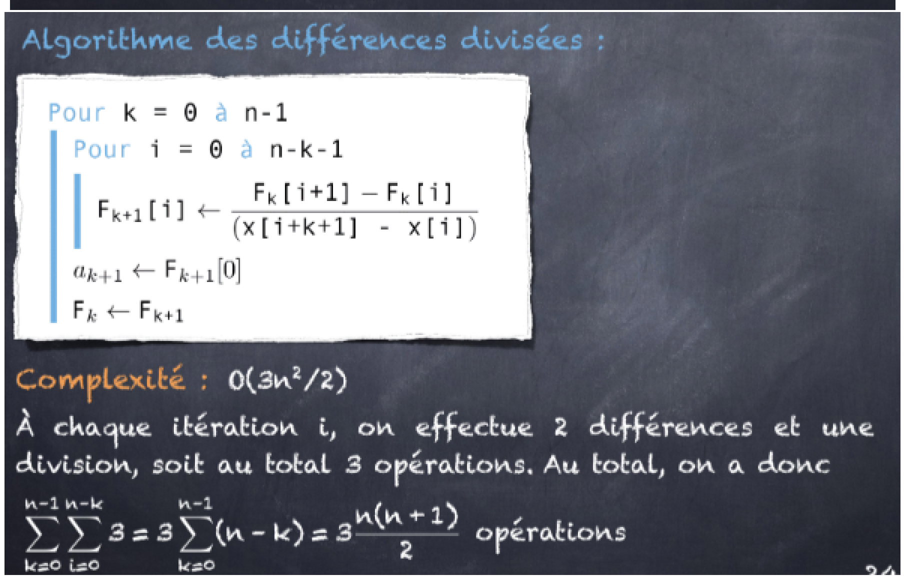
$$T_{k+1}^i(x) = \frac{T_k^i(x)(x_{i+k+1} - x) - T_k^{i+1}(x)(x_i - x)}{(x_{i+k+1} - x_i)}$$

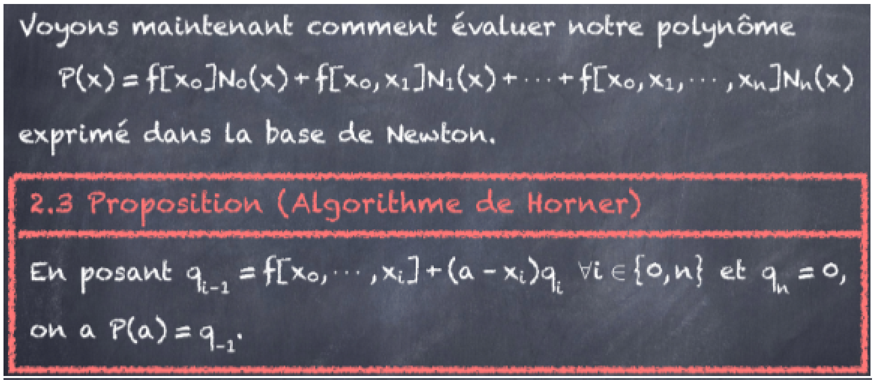
$$\iff \alpha_{k+1} N_{k+1}^i(x) + T_k^i(x)$$
$$= \frac{\sum_{j=0}^k f[x_i, .., x_{i+j}] N_j^i(x)(x_{i+k+1} - x) - \sum_{j=0}^k f[x_i, .., x_{i+j+1}] N_j^{i+1}(x)(x_i - x)}{(x_{i+k+1} - x_i)}$$

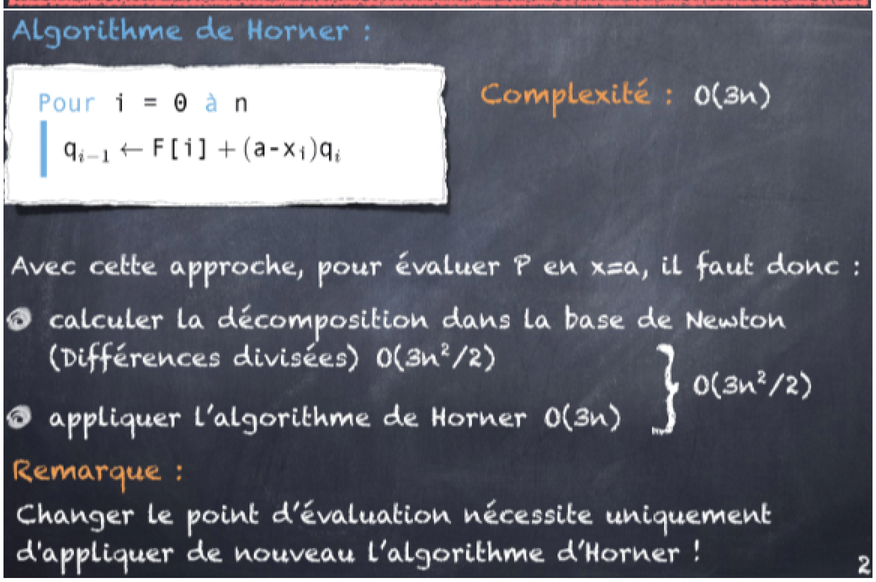
En identifiant les termes de degrès k+1 on a

$$\begin{aligned} \alpha_{k+1} &= \frac{f[x_i, .., x_{i+k}] \times (-1) - f[x_i, .., x_{i+k+1}] \times (-1)}{x_{i+k+1} - x_i} \\ &= f[x_i, .., x_{i+k+1}] \end{aligned}$$


Algorithme des différences divisées :
x_0 | $y_0 = f[x_0] \longrightarrow f[x_0, x_1] \cdots f[x_0, \cdots, x_{n-1}] \longrightarrow *$
x_1 | $y_1 = f[x_1] \longrightarrow f[x_1, x_2] \cdots f[x_1, \cdots, x_n]$
x_i | $y_i = f[x_i] \longrightarrow f[x_i, x_{i+1}]$
$f[x_0, \cdots, x_n]$
$f[x_{n-1}, x_n]$
x_n | $y_n = f[x_n]$
Remarque :
L'ordre des points x_i ne compte pas.


Algorithme des différences divisées :
Pour k = 0 à n-1
Pour i = 0 à n-k-1
$F_{k+1}[i] \leftarrow \frac{F_k[i+1] - F_k[i]}{(x[i+k+1] - x[i])}$
$a_{k+1} \leftarrow F_{k+1}[0]$
$F_k \leftarrow F_{k+1}$
Complexité : $O(3n^2/2)$
À chaque itération i, on effectue 2 différences et une division, soit au total 3 opérations. Au total, on a donc
$\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-k} 3 = 3\sum_{k=0}^{n-1}(n-k) = 3\frac{n(n+1)}{2}$ opérations



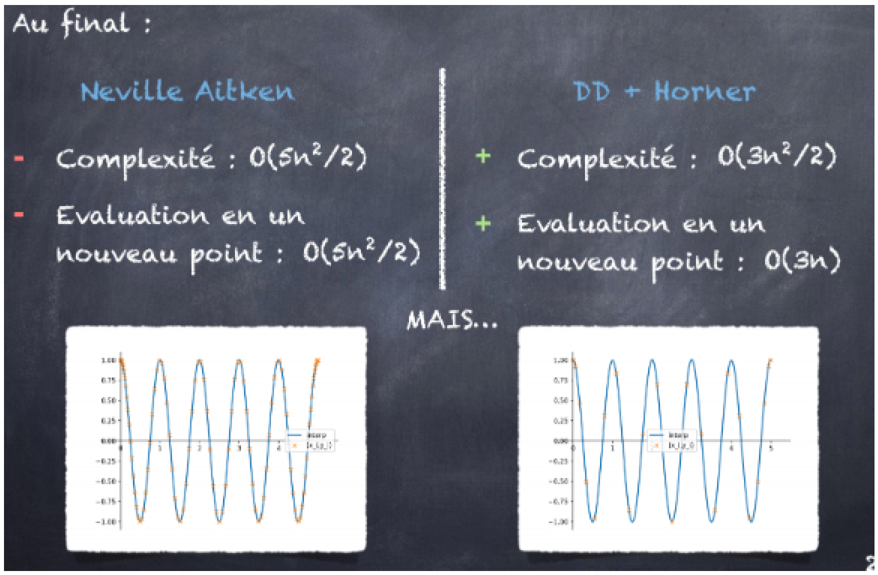


Remarque sur Horner

$$
\begin{aligned}
Pn(x) &= \sum_{i=0}^{n} f[x_0, .., x_i]N_i(x) \\
&= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + .. + f[x_0, .., x_n](x - x_0)...(x - x_{n-1}) \\
&= f[x_0] + (x - x_0)\left[f[x_0, x_1] + f[x_0, x_1, x_2](x - x_1) + ... + f[x_0, .., x_n](x - x_1)...(x - x_{n-1})\right] \\
&= f[x_0] + (x - x_0)\left[f[x_0, x_1] + (x - x_1)\left[f[x_0, x_1, x_2] + ... + f[x_0, .., x_n](x - x_2)...(x - x_{n-1})\right]\right]
\end{aligned}
$$

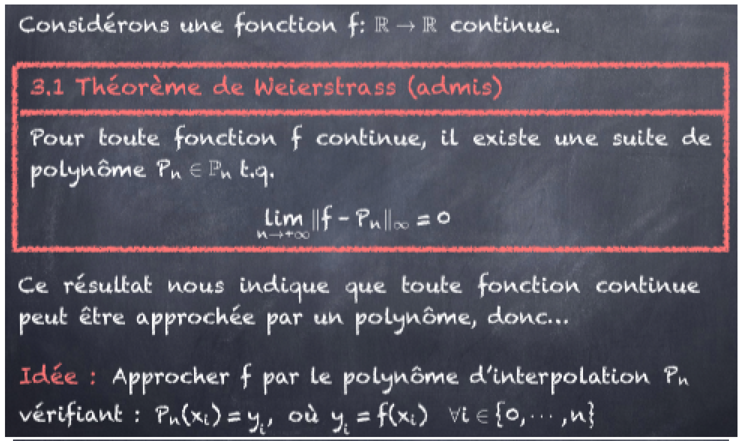
On commencera donc l'évaluation par

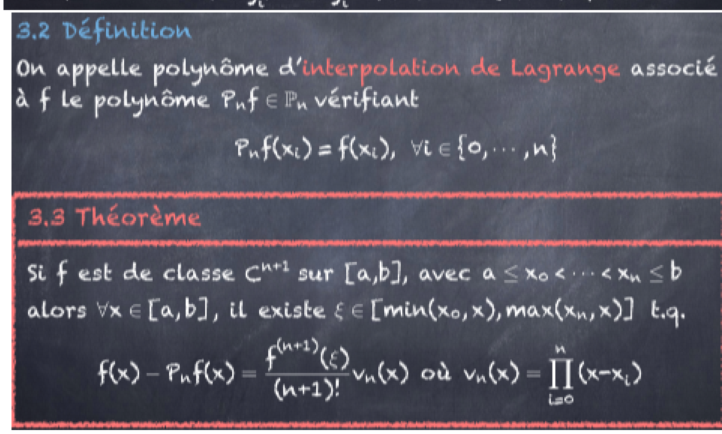
$$f[x_0, .., x_{n-1}] + f[x_0, .., x_n](x - x_{n-1})$$



3 Interpolation d'une fonction

3.1 Erreur d'interpolation





Preuve
Posons $Q(t)$le polynôme d'interpolation associé aux point x_i et x , cad

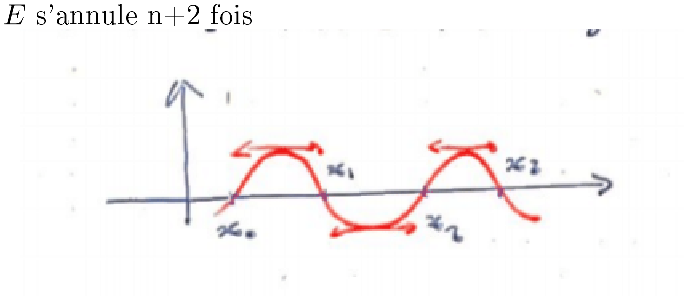
$$Q(x_i) = f(x_i) \ \forall i \in \{0...n\}$$
$$Q(x) = f(x)$$

remarque : Q est de degrès $n+1$

On a vu en TD que

$$Q(t) = \overbrace{\sum_{i=0}^{n} f[x_0, .., x_i] N_i(t)}^{P(t)} + f[x_0, .., x_n, x] v_n(t)$$

(décomposition de Q dans la base de Newton)
en $t = x$, on a
$Q(x) = f(x) = P(x) + f[x_0, .., x_n, x] v_n(x)$
Posons $E(t) = f(t) - Q(t)$
On a $E(x_i) = E(x) = 0 \; \forall i \in \{0, .., n\}$
Donc E s'annule n+2 fois

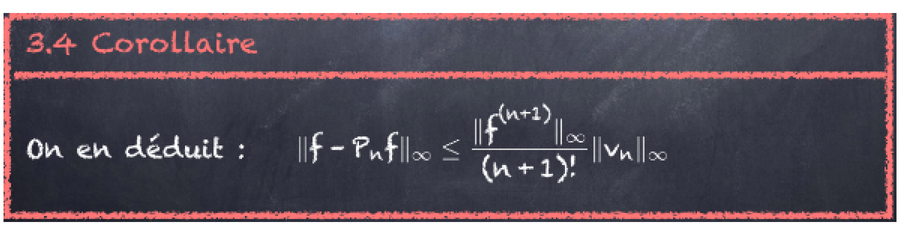


D'après le théorème de Rolle, E' s'annule don en au moins n+1 points diffèrents.
Ainsi, $E^{(2)}$ s'annule en au moins n points
et $E^{(n+1)}$ s'annulera en au moins 1 point qu'on noteras ξ
Alors $E^{(n+1)}(\xi) = 0 \iff f^{(n+1)}(\xi) - Q^{(n+1)}(\xi) = 0$
Or $Q^{(n+1)}(t) = f[x_0, .., x_n, x](n+1)!$
On obtient finalement

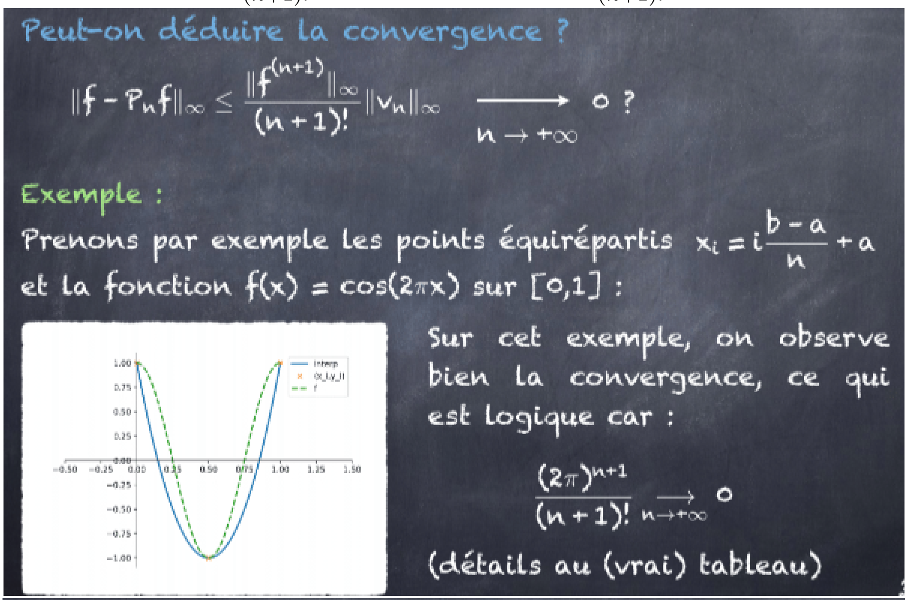
$$f^{(n+1)}(\xi) - f[x_0, .., x_n, x](n+1)! = 0$$
$$\iff f[x_0, .., x_n, x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

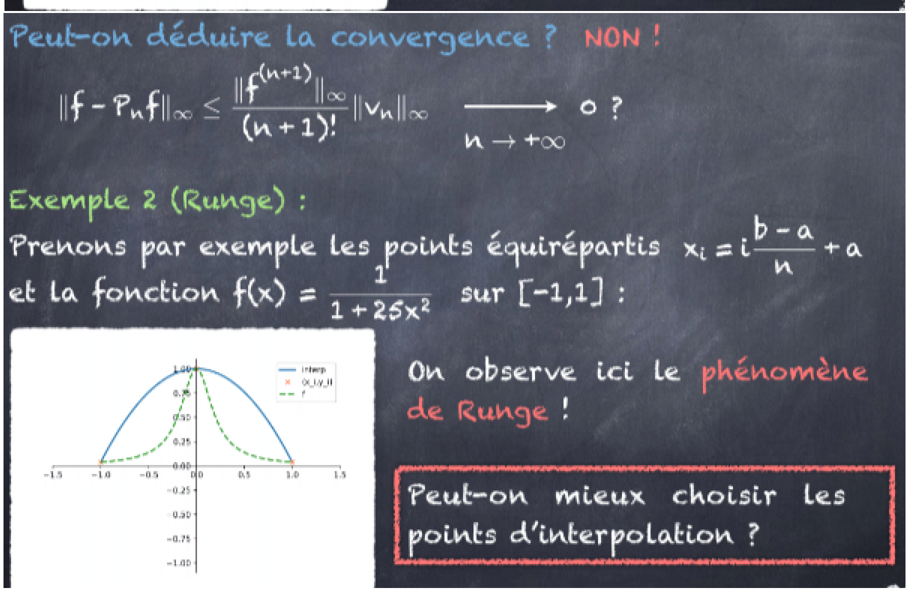
D'où

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} v_n(x)$$

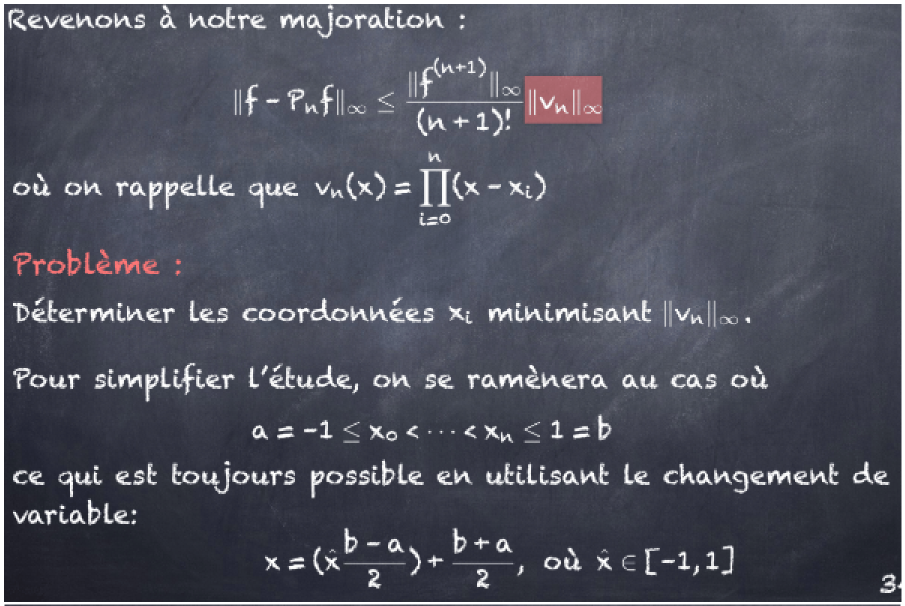


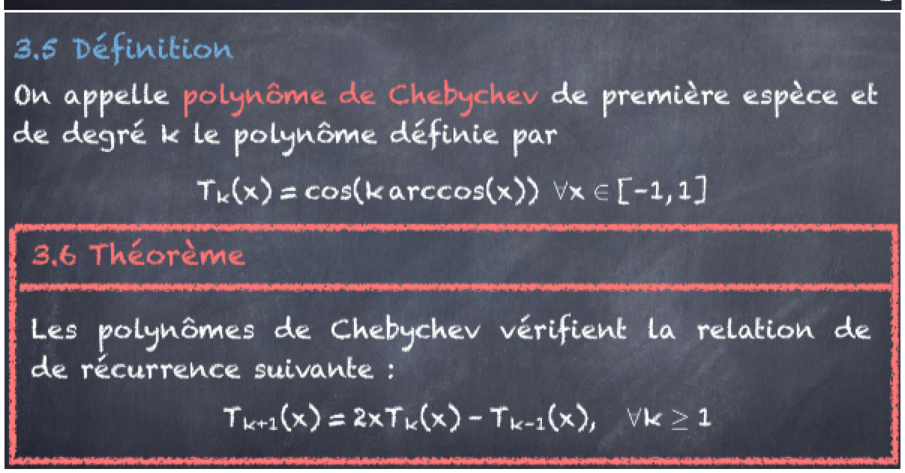
Preuve
$\|f - P_n(f)\|_\infty = \frac{1}{(n+1)!}\|f^{(n+1)}(\xi)v_n\|_\infty \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|\|v_n\|_\infty}{(n+1)!}$





3.2 Meilleurs points d'interpolations





Preuve

Rappel $cos(a + b) = cos(a)cos(b) - sin(a)sin(b)$

$$
\begin{aligned}
T_{k+1} &= cos((k+1)arcos(x)) \\
&= cos(karcos(x) + arcos(x)) \\
&= cos(k.arcos(x))cos(arcos(x) - sin(k.arcos(x))sin(arcos(x)) \\
&= 2xT_k(x) - cos(k.arcos(x)))cos(arcos(x)) - sin(k.arcos(x))sin(arcos(x)) \\
&= 2xT_k(x) - [-cos(k.arcos(x)))cos(arcos(x)) + sin(k.arcos(x))sin(arcos(x))] \\
&= 2xT_k(x) - T_{k+1}(x)
\end{aligned}
$$

3.5 Définition

On appelle polynôme de Chebychev de première espèce et de degré k le polynôme définie par

$$T_k(x) = \cos(k \arccos(x)) \quad \forall x \in [-1,1]$$

3.6 Théorème

Les polynômes de Chebychev vérifient la relation de de récurrence suivante :

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x), \quad \forall k \geq 1$$

Remarque :

Ce théorème nous « rassure » sur le fait que le polynôme $T_k \in \mathbb{P}_k$.

3.5 Définition

On appelle polynôme de Chebychev de première espèce et de degré k le polynôme définie par

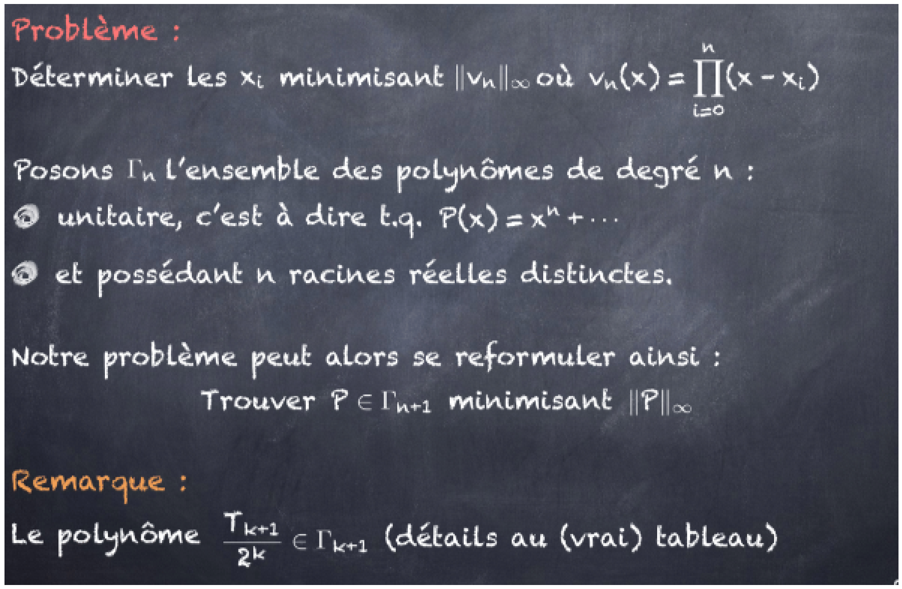
$$T_k(x) = \cos(k \arccos(x)) \quad \forall x \in [-1,1]$$

Illustration :

T_0, T_1, T_2, T_3 et T_4

Remarque :

À l'aide de la définition ci-dessus, on remarque facilement que $T_k(x) \in [-1,1], \quad \forall x \in [-1,1]$



$\frac{T_{k+1}}{2^k} \in \mathit{\Gamma}_{k+1}$
En effet, on a bien n+1 racines réelles et de plus $T_{k+1} = 2^k x^{k+1} + ...$
Prouvons le par récurrence
Si $T_k = 2^{k-1}x^k$
Alors

$$\begin{aligned} T_{k+1} &= 2xT_k - T_{k+1} \\ &= 2^k x^{k+1} + ... \end{aligned}$$

Ce qui prouve l'hérédité
Et pour $k = 0$, on a $T_k = cos(arcos(x)) = x = 2^0 x$
Intéressons nous maintenant au racines

$$\begin{aligned} \frac{T_{k+1}}{2^k} = 0 &\iff cos((k+1)arcos(x)) = 0 \\ &\iff (k+1)arcos(x) = \frac{\pi}{2} + n\pi \\ &\iff \underbrace{arcos(x)}_{\in[0,\pi]} = \frac{(2n+1)\pi}{2(k+1)} \; n \in [0, .., k] \end{aligned}$$

On a alors k+1 racines
$x_n = cos\left[\frac{(2n+1)\pi}{2(k+1)}\right]$

3.7 Théorème

Une solution du problème

$$\text{Trouver } P \in \Gamma_{n+1} \text{ minimisant } \|P\|_\infty$$

est donnée par $\frac{T_{n+1}}{2^n}$.

Preuve

On cherche un candidat qui minimise $\|P\|_\infty$ avec $P \in \Gamma_{n+1}$

Plus précisèment, on va prouver que $\frac{T_{n+1}}{2^n} \in \Gamma_{n+1}$ minimise $\|P\|_\infty$.

Supposons qu'il existe $P \in \Gamma_{n+1}\ tq\ \|P\|_\infty \leq \|\frac{T_{n+1}}{2^n}\|_\infty$

$\frac{T_{n+1}}{2^n} = \frac{cos((n+1)arcos(x))}{2^n} \in [\frac{-1}{2^n}, \frac{1}{2^n}]$

Posons $v = \frac{T_{n+1}}{2^n} - P$

$\frac{T_{n+1}}{2^n}$ atteint son maximum lorsque $(n+1)arcos(x) = 2k\pi$

$$\iff \underbrace{arcos(x)}_{\in[0,\pi]} = \frac{2k\pi}{n+1}\ k \in [0, .., \overbrace{\left[\frac{n+1}{2}\right]}^{partie\ entière}\ ]$$

Notons $x_k^M = cos(\frac{2k\pi}{n+1})$ les points où $\frac{T_{n+1}}{2^n}$ est maximal

De même, $\frac{T_{n+1}}{2^n}$ sera minimal en $x_k^m = cos(\frac{(2k+1)\pi}{n+1})\ k \in [0, [\frac{n}{2}]]$

On déduit que

$$x_0^M > x_0^m > x_1^M > x_1^m > ...$$

De plus pour $v(x_k^M) > 0$ et $v(x_k^m) < 0$ car $\|P\|_\infty \leq \|\frac{T_{n+1}}{2^n}\|_\infty$

Par le TVI, on obtient que v doit s'annuler au moins n+1 fois (dans chaque intervalle $[x_k^M, x_k^m]$ et $[x_k^m, x_{k+1}^m]$

Or $v = \frac{T_{n+1}}{2^n} - P$ donc, comme $\frac{T_{n+1}}{2^n} \in \Gamma_{n+1}$ et $P \in \Gamma_{n+1}$, on doit avoir

$$v = c_n x^n + ..$$

donc $deg(v) = n$, ce qui implique $v = 0$

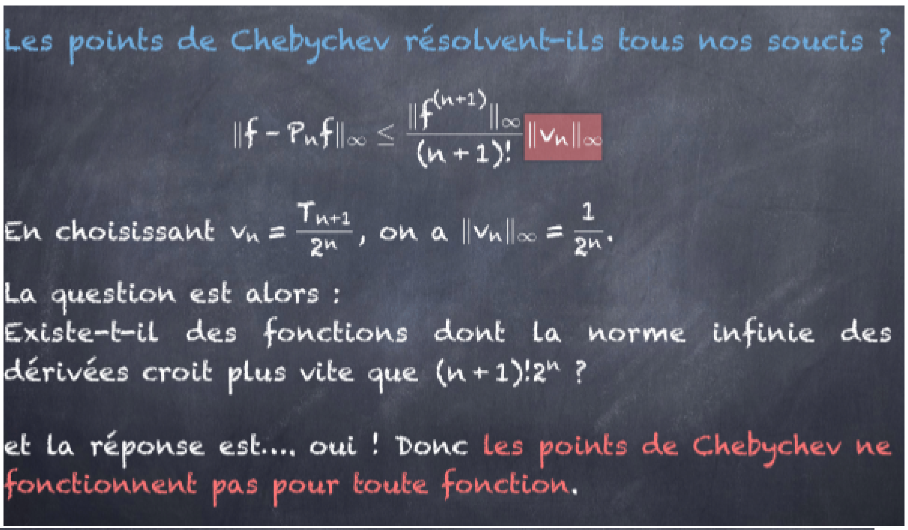
ce qui contredit que $\|P\|_\infty \leq \|\frac{T_{n+1}}{2^0}\|_\infty$

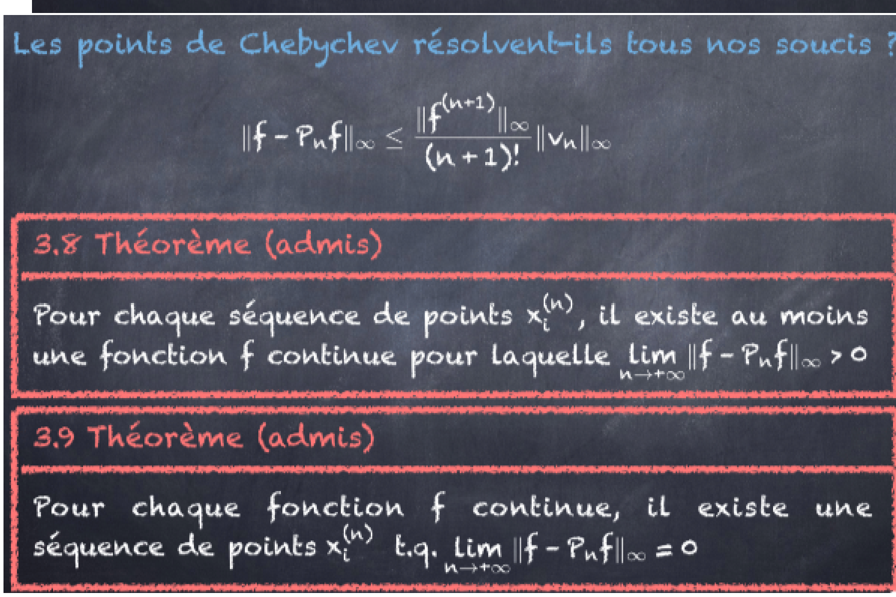
Remarque

Sur $[-1,1]$, les poibnts de Tchebychev sont les $\hat{x_k} = cos(\frac{(2k+1)\pi}{n+1})$ $k \in [0..n]$

Sur un intervalle [a,b], on aura

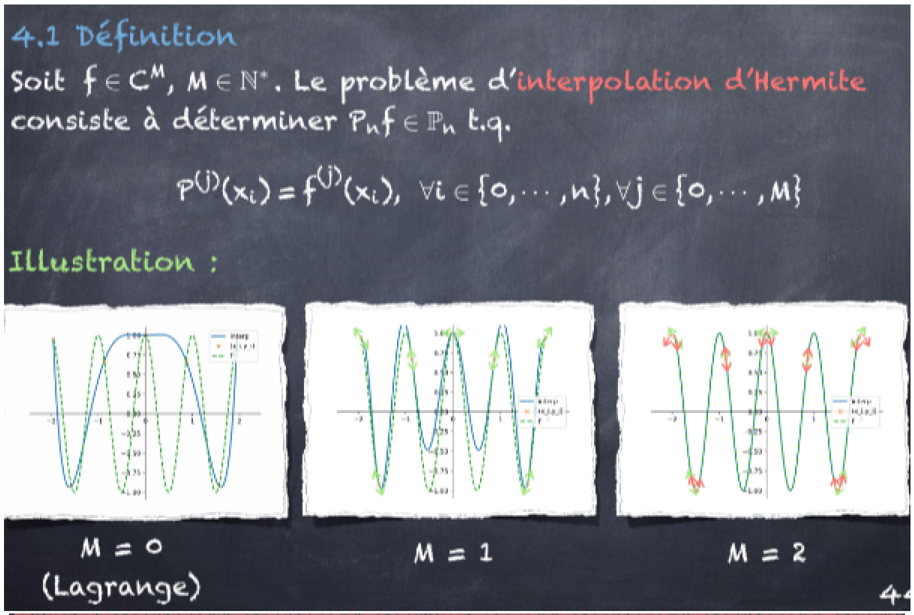
$$x_k = \frac{(\hat{x_k}+1)}{2}(b-a)+a \in [a,b]$$

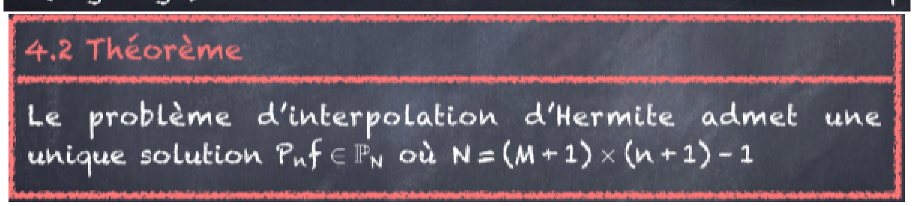




4 Quelques extensions

4.1 Interpolation d'Hermitte





Preuve

Problème d'Hermite, trouver $P \in P[X^N]$ tel que $P^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i)$ $\forall j \in \{0, ..., n\}$ $\forall j \in \{0, ..., M\}$

On a ici $N = (n+1)(M+1) - 1$.

Prouvons que s'il existe une solution, alors celle-ci est unique.

Supposons que P_1 et P_2 soient deux solutions dans $P[X^N]$ alors $v = P_2 - P_1$ vérifie $v \in P[X^N]$ et $v^{(j)}(x_i) = 0$. Ainsi $\underbrace{v(x)}_{deg=N=(n+1)(M+1)-1} = \underbrace{\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)^{M+1}}_{deg=(n+1)(M+1)} Q(x)$. C e qui implique $Q(x) = 0$. Donc s'il existe une solution ,celle-ci est unique.

Pour prouver qu'il existe une solution, on va montrer que le problème est linéaire et revient à résoudre un système linéaire de dimension $N+1$ avec $N+1$ inconnues.

Comme la matrice associé est injective (par unicité de la solution) on déduira par le théorème du rang qu'il existe une unique solution.

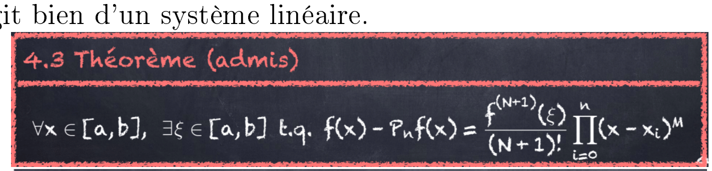
On cherche $P \in P[X^N]$, donc cela revient à chercher les coefficients α_i tel que

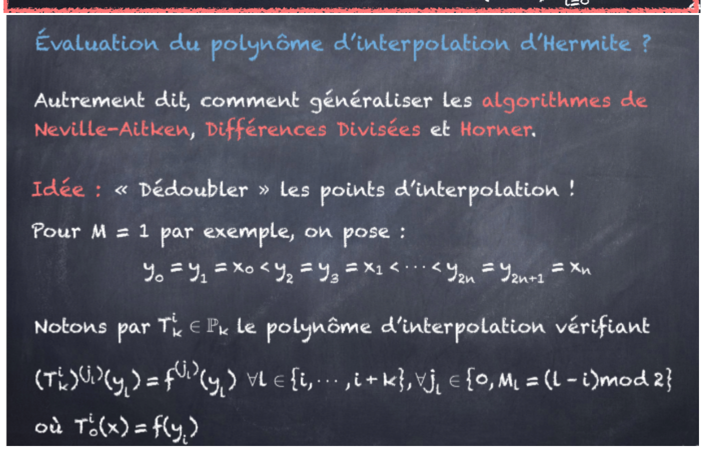
$$(\sum_{k=0}^{N} \alpha_k x^k)^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i)$$

$$\iff \alpha_k \underbrace{\sum_{k=0}^{N} (x^k)^{(j)}(x_i)}_{M_{lk}} = f^{(j)}(x_i) \; avec \; l = i + (n+1)j$$

$$\iff M \begin{matrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{matrix} = F$$

Il s'agit bien d'un système linéaire.





4.4 Théorème

On a la relation suivante entre les T_k^i

$$T_{k+1}^i(x) = \begin{cases} \dfrac{(y_{i+k+1}-x)T_k^i(x)-(y_i-x)T_k^{i+1}(x)}{(y_{i+k+1}-y_i)} & \text{si} \quad y_{i+k+1} \neq y_i \\ T_k^i(x)+f'(y_i)(x-y_i) & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque : De cette relation, on peut déduire que les Diffèrences divisés s'appliquent comme dans l'interpolation de Lagrange sauf si $y_i = y_{i+1}$, dans ce cas, aon aura $f[y_i, y_{i+1}] = f'[y_i]$

Preuve

Pour $M = 1$

prouvons le résultat par récurrence.

Initialisation :

$y_0 = y_1 = x_0$

$P(x) = \underbrace{f(y_0)}_{f[y_0]N_0(x)} + \underbrace{f'(y_0)(x-y_0)}_{f[y_0,y_1]N_1(x)}$

Pour $k = 0$, on a

$$T_1^i(x) = \begin{cases} T_0^i(x) + f'(y_i)(x-y_i) & si\ y_i = y_{i+1} \\ \frac{T_0^i(x)(y_{i+1}-x)-T_0^{i+1}(x)(y_i-x)}{y_{i+1}-y_i} & sinon \end{cases}$$

où $T_0^i(x) = f(y_i)$.

Si $y_i = y_{i+1}$on a par définition T_1^i le polynôme de degrès 1 qui vérifie $T_1^i(y_i) = f(y_i)$ et $(T_1^i)'(y_i) = f'(y_i) \iff T_1^i(x) = f(y_i) + f'(y_i)(x-y_i)$ (dl d'ordre 1)

Si $y_i \neq y_{i+1}$, on a par définition

$$\begin{aligned} T_1^i(x) = &f(y_i) + \frac{f(y_{i+1}) - f(y_i)}{y_{i+1} - y_i}(x-y_i) \\ =&T_0^i(x) + \frac{T_0^{i+1}(x) - T_0^i(x)}{y_{i+1} - y_i}(x-y_i) \\ =&\frac{T_0^i(x)(y_{i+1}-y_i) - T_0^{i+1}(x)(y_i-x) - T_0^i(x)(x-y_i)}{y_{i+1}-y_i} \\ =&\frac{T_0^i(x)(y_{i+1}-x) - T_0^{i+1}(x)(y_i-x)}{y_{i+1}-y_i} \end{aligned}$$

hérédité

Maintenant , prouvons que pour tout $k \geq 1$ on a

$$T_{k+1}^{i}(x) = \frac{T_k^i(x)(y_{i+k+1} - x) - T_k^{i+1}(x)(y_i - x)}{y_{i+k+1} - y_i}$$

Posons $\tilde{T_{k+1}^{i}}(x) = \frac{T_k^i(x)(y_{i+k+1}-x)-T_k^{i+1}(x)(y_i-x)}{y_{i+k+1}-y_i}$ et prouvons que

- $\tilde{T_{k+1}^{i}}(y_j) = f(y_j)\ \forall j \in \{i, ..., i+k+1\}$
- $(\tilde{T_{k+1}^{i}})'(y_j) = f'(y_j)\ \forall j \in \{i, .., i+k\}$ *tel que* $y_j = y_{j+1}$

On a $\forall j \in \{i+1, .., i+k\}$

$$\tilde{T_{k+1}^{i}}(y_j) = \frac{T_{k+1}^{i}(y_j)(y_{i+k+1} - y_j) - T_{k+1}^{i}(y_j)(y_i - y_j)}{y_{i+k+1} - y_i}$$
$$= f(y_j)\frac{y_{i+k+1-y_j+y_j-y_i}}{y_{i+k+1} - y_i} = f(y_j)$$

Pour $j = i$ et $j = i+k+1$ la démonstration est la même que dans le cas de Lagrange.

Deuxièment, on a

$$(\tilde{T_{k+1}^{i}})'(x) = \frac{1}{y_{i+k+1} - y_i}\left[(T_k^i)'(x)(y_{i+k+1} - x) - (T_k^{i+1})'(x)(y_i - x)\right]$$
$$+ \frac{1}{y_{i+k+1} - y_i}\left[-T_k^i(x) - T_k^{i+1}(x)\right]$$

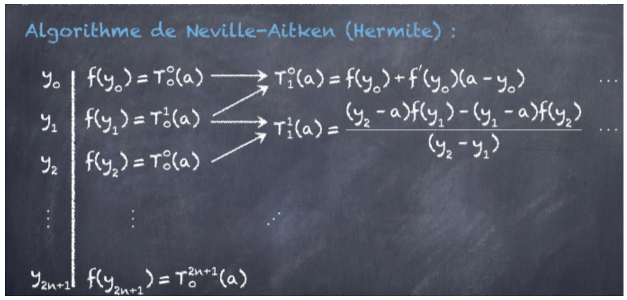
Pour $y_j = y_{j+1}$,on aura

$$-T_k^i(y_j) + T_k^{i+1}(y_j) = -f(y_j) + f(y_j) = 0\, \forall j \in \{i, .., i+k\}$$

De plus on aura ainsi

$$(\tilde{T_{k+1}^{i}})'(y_j) = \frac{(T_k^i)'(y_j)(y_{i+k+1} - x) - (T_k^i)'(y_j)(y_i - x)}{y_{i+k+1} - y_i} = f'(y_j)$$

par les mêmes arguments que dans le cas précédent sans la dérivé.



Remarque : A l'aide de cette relation, on peut aussi généraliser l'algorithme des diffèrences divisés

4.2 Interpolation multivarié