Introduction

On considère la transformation linéaire d'un vecteur g de $\mathbb{C}^N = \mathbb{C}^{2^M-1}$ de la forme

$$g = \begin{pmatrix} g_0 \\ \vdots \\ g_k \end{pmatrix} \quad k \in [[0, 2^{M-1}]]$$

par un vecteur $G \in \mathbb{C}^N$ de la forme

$$G = \begin{pmatrix} G_0 \\ \vdots \\ G_k \end{pmatrix} \quad j \in [[0, 2^{M-1}]]$$

tel que

$$G_j = \sum_{k=0}^{2^M-1} g_k W_N^{jk}$$

avec $W_N^{jk} = e^{\frac{2I\pi}{2^M}}$ $I\mathbb{C}$ tel que $I^2 = -1$.

G est lié à g par la matrice S de taille $N \times N$ tel que $G = Sg$ avec

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N^1 & W_N^2 & \dots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & \ddots & \ddots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)^2} \end{pmatrix}$$

On reconnaît ici une matrice de Vandermond $V(1, W_N, ..., W_N^{N-1})$.

Remarquons que S est symétrique.

1 La transformation est inversible

Montrons que cette transformation est inversible, c'est à dire que le determinant de S est diffèrent de 0.

Remarquons d'abord que si deux lignes de cette matrice sont identiques, alors le déterminant est nul.

Soit

$$V(1, W_N^1, ..., W_N^{(N-1)}) = det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N^1 & W_N^2 & \dots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & \ddots & \ddots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)^2} \end{vmatrix}$$

Montrons la relation suivante :

$$V(1, W_N^1, ..., W_N^{(N-1)}) = V(1, W_N^1, ..., W_N^{(N-2)}) \prod_{k=0}^{N-2} (W_N^{(N-1)} - W_N^k)$$

Posons

$$\begin{aligned}
Q(x) &= V(1, W_N^1, ..., W_N^{(N-2)}, x) \\
&= det \begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\
1 & W_N^1 & W_N^2 & \dots & W_N^{N-1} \\
1 & W_N^2 & \ddots & \ddots & W_N^{2(N-1)} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
1 & W_N^{N-2} & W_N^{2(N-2)} & \dots & W_N^{(N-1)(N-2)} \\
1 & x^1 & x^2 & \dots & x^{(N-1)}
\end{pmatrix} \\
&= x^{(N-1)} \underbrace{det \begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\
1 & W_N^1 & W_N^2 & \dots & W_N^{N-2} \\
1 & W_N^2 & \ddots & \ddots & W_N^{2(N-2)} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
1 & W_N^{N-2} & W_N^{2(N-2)} & \dots & W_N^{(N-2)^2}
\end{pmatrix}}_{|S_{N-2}|}
\end{aligned}$$

Donc $Q \in P[X^{N-1}]$. Par construction de Q, on a $Q(1) = Q(W_N^1) = ...Q(W_N^{(N-2)}) = 0$ car cela correspond à 2 lignes égales et donc un déterminant nul.

Donc

$$\begin{aligned}
Q(x) &= C \times \prod_{k=0}^{N-2} (x - W_N^k) \\
&= Cx^{N-1} + ...
\end{aligned}$$

Par identification, on a

$$C = |S_{N-2}|$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
Q(W_N^{(N-1)}) &= V(1, W_N^1, ..., W_N^{(N-1)}) \\
&= V(1, W_N^1, ..., W_N^{(N-2)}) \prod_{k=0}^{N-2} (W_N^{(N-1)} - W_N^k) \\
&= V(1, W_N^1, ..., W_N^{(N-3)}) \prod_{k=0}^{N-3} (W_N^{(N-2)} - W_N^k) \prod_{k=0}^{N-2} (W_N^{(N-1)} - W_N^k) \\
&= V(1, W_N^1) \prod_{k=0}^{2} (W_N^3 - W_N^k) \times ... \times \prod_{k=0}^{N-2} (W_N^{(N-1)} - W_N^k) \\
&= 1 \times (W_N^1 - 1) \times ... \times \prod_{k=0}^{N-2} (W_N^{(N-1)} - W_N^k)
\end{aligned}$$

Comme $W_N^i \neq W_N^j \ \forall i \neq j$ tel que $i, j \in \{0, ..., N-1\}$, alors on a $Q(W_N^{(N-1)}) = V(1, W_N^1, ..., W_N^{(N-1)}) \neq 0$. Donc cette transformation est inversible.

2 Inverse de la transformation S

Montrons que la matrice $\frac{1}{N} V(1, W_N^{-1}, ..., W_N^{1-N})$ est la matrice inverse de S.

Pour cela, calculons leur produit

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\
1 & W_N^1 & W_N^2 & \dots & W_N^{N-1} \\
1 & W_N^2 & \ddots & \ddots & W_N^{2(N-1)} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)^2}
\end{pmatrix} \times \frac{1}{N} \begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\
1 & W_N^{-1} & W_N^{-2} & \dots & W_N^{1-N} \\
1 & W_N^{-2} & \ddots & & W_N^{2(1-N)} \\
\vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\
1 & W_N^{1-N} & W_N^{2(1-N)} & \dots & W_N^{(1-N)^2}
\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{N} \begin{pmatrix}
\sum_{i=0}^{N-1} 1 & \sum_{i=0}^{N} W_N^{-i} & \dots & \sum_{i=0}^{N-1} W_N^{-(N-1)i} \\
\sum_{i=0}^{N-1} W_N^i & \ddots & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \vdots \\
\sum_{i=0}^{N-1} W_N^{(N-1)i} & \dots & \dots & \sum_{i=0}^{N-1} W_N^{i^2}
\end{pmatrix}$$

Or

- $W_N^{i^2} = e^{\frac{4I\pi i}{2^M}} = \left(e^{2I\pi i}\right)^{2^{1-M}} = 1$

- $\sum_{i=0}^{N} W_N^{-i} = \frac{1-e^{\frac{2I\pi i}{2^M}\times 2^M}}{1-e^{\frac{2I\pi i}{2^M}}} = 0$

$$= \frac{1}{N}\begin{pmatrix} N & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & N \end{pmatrix} = I_N$$

3 Cas où $M = 3$

On se place dans le cas $M = 3$, alors $N = 2^3 = 8$. $S_{jk} = W_8^{jk}$

$$S = \begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & W_8^1 & W_8^2 & W_8^3 & W_8^4 & W_8^5 & W_8^6 & W_8^7 \\
1 & W_8^2 & W_8^4 & W_8^6 & W_8^8 & W_8^{10} & W_8^{12} & W_8^{14} \\
1 & W_8^3 & W_8^6 & W_8^9 & W_8^{12} & W_8^{15} & W_8^{18} & W_8^{21} \\
1 & W_8^4 & W_8^8 & W_8^{12} & W_8^{16} & W_8^{20} & W_8^{24} & W_8^{28} \\
1 & W_8^5 & W_8^{10} & W_8^{15} & W_8^{20} & W_8^{25} & W_8^{30} & W_8^{35} \\
1 & W_8^6 & W_8^{12} & W_8^{18} & W_8^{24} & W_8^{30} & W_8^{36} & W_8^{42} \\
1 & W_8^7 & W_8^{14} & W_8^{21} & W_8^{28} & W_8^{35} & W_8^{42} & W_8^{49}
\end{pmatrix}$$

Remarquons que nous pouvons réecrire cette matrice grâce au cercle trigonométrique puisque, par exemple, $W_8^p = \left(e^{\frac{2\pi I}{8}}\right)^p = e^{\frac{2p\pi I}{8}}$

$$S = \begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & W_8^1 & W_8^2 & W_8^3 & W_8^4 & W_8^5 & W_8^6 & W_8^7 \\
1 & W_8^2 & W_8^4 & W_8^6 & W_8^0 & W_8^2 & W_8^4 & W_8^6 \\
1 & W_8^3 & W_8^6 & W_8^1 & W_8^4 & W_8^7 & W_8^2 & W_8^5 \\
1 & W_8^4 & W_8^0 & W_8^4 & W_8^0 & W_8^4 & W_8^0 & W_8^4 \\
1 & W_8^5 & W_8^2 & W_8^7 & W_8^4 & W_8^1 & W_8^6 & W_8^3 \\
1 & W_8^6 & W_8^4 & W_8^2 & W_8^0 & W_8^6 & W_8^4 & W_8^2 \\
1 & W_8^7 & W_8^6 & W_8^5 & W_8^4 & W_8^3 & W_8^2 & W_8^1
\end{pmatrix}$$

On a

- $W_8^4 = \left(e^{\frac{2I\pi}{8}}\right)^4 = e^{I\pi} = -1$
- $W_8^2 = \left(e^{\frac{2I\pi}{8}}\right)^2 = e^{I\frac{\pi}{2}} = i$
- $W_8^6 = \left(e^{\frac{2I\pi}{8}}\right)^6 = e^{I\frac{3\pi}{2}} = -i$

$$S = \begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & W_8^1 & i & W_8^3 & -1 & W_8^5 & -i & W_8^7 \\
1 & i & -1 & -i & 1 & i & -1 & -i \\
1 & W_8^3 & -i & W_8^1 & -1 & W_8^7 & i & W_8^5 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & W_8^5 & i & W_8^7 & -1 & W_8^1 & -i & W_8^3 \\
1 & -i & -1 & i & 1 & i & -1 & i \\
1 & W_8^7 & -i & W_8^5 & -1 & W_8^3 & i & W_8^1
\end{pmatrix}$$

4 Calcul de $T^{(M)}$dans le cas $M = 3$

On intoduit la transformation qui à un nombre binaire de la forme $(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_N)$ associe la transformation $r:\ (\lambda_N, \lambda_{N-1}, ..., \lambda_0)$.

Notons en binaire l'indice des lignes de la matrice S

$$\begin{array}{cccc}
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & W_8^1 & i & W_8^3 & -1 & W_8^5 & -i & W_8^7 \\
1 & i & -1 & -i & 1 & i & -1 & -i \\
1 & W_8^3 & -i & W_8^1 & -1 & W_8^7 & i & W_8^7 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & W_8^5 & i & W_8^7 & -1 & W_8^1 & -i & W_8^3 \\
1 & -i & -1 & i & 1 & -i & -1 & i \\
1 & W_8^7 & -i & W_8^7 & -1 & W_8^3 & i & W_8^1
\end{pmatrix} &
\begin{matrix} 000\ (0) \\ 001\ (1) \\ 010\ (2) \\ 011\ (3) \\ 100\ (4) \\ 101\ (5) \\ 110\ (6) \\ 111\ (7) \end{matrix} &
\rightarrow &
\begin{matrix} 000\ (0) \\ 100\ (4) \\ 010\ (2) \\ 110\ (6) \\ 001\ (1) \\ 101\ (5) \\ 011\ (3) \\ 111\ (7) \end{matrix}
\end{array}$$

On associe alors la matrice de permutation P qui permet d'effectuer la permutation des lignes précédentes

$$P = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

Alors

$$P \times S = \begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & i & -1 & -i & 1 & i & -1 & -i \\
1 & -i & -1 & i & 1 & -i & -1 & i \\
1 & W_8^1 & i & W_8^3 & -1 & W_8^7 & -i & W_8^5 \\
1 & W_8^5 & i & W_8^7 & -1 & W_8^3 & -i & W_8^1 \\
1 & W_8^3 & -i & W_8^1 & -1 & W_8^5 & i & W_8^7 \\
1 & W_8^7 & -i & W_8^5 & -1 & W_8^1 & i & W_8^3
\end{pmatrix}$$

Remarquons que $W_8^7 = -W_8^3$ et $W_8^5 = -W_8$ (cercle trigonomètrique)

Donc

$$T^{(3)} = P \times S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & \vdots & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i & \vdots & 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -i & -1 & i & \vdots & 1 & -i & -1 & i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & W_8 & i & W_8^3 & \vdots & -1 & -W_8 & -i & -W_8^3 \\ 1 & -W_8 & i & -W_8^3 & \vdots & -1 & W_8 & -i & W_8^3 \\ 1 & W_8^3 & -i & W_8 & \vdots & -1 & -W_8^3 & i & -W_8 \\ 1 & -W_8^3 & -i & -W_8 & \vdots & -1 & W_8^3 & i & W_8 \end{pmatrix}$$

On pose alors

$$T^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}$$

et

$$L^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W_8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W_8^3 \end{pmatrix}$$

$L^{(2)}$est une matrice diagonale de taille 4.
Montrons en effet que $T^{(2)}$ est bien égale à la matrice donné ci-dessus. Dans une premier temps, déterminons P la matrice qui effectue la permutation miroir de S. On a :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}}_{S} \begin{matrix} 00\ (0) \\ 01\ (1) \\ 10\ (2) \\ 11\ (3) \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 00\ (0) \\ 10\ (2) \\ 01\ (1) \\ 11\ (3) \end{matrix}$$

D'où la matrice de permutation suivante :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi on peut écrire :

$$T^{(2)} = PS$$

$$T^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}$$

$$T^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}$$

Par conséquent on a bien :

$$\begin{aligned} T^{(2)} \times L^{(2)} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W_8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W_8^3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & W_8 & i & W_8^3 \\ 1 & -W_8 & i & -W_8^3 \\ 1 & iW_8 & -i & -iW_8^3 \\ 1 & -iW_8 & -i & iW_8^3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Or $iW_8 = e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{\frac{3i\pi}{4}} = W_8^3$ et $iW_8^3 = e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{3\pi}{4}} = e^{\frac{5i\pi}{4}} = -e^{\frac{i\pi}{4}} = -W_8$ ainsi on retrouve bien :

$$T^{(2)} \times L^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & W_8 & i & W_8^3 \\ 1 & -W_8 & i & -W_8^3 \\ 1 & W_8^3 & -i & W_8 \\ 1 & -W_8^3 & -i & -W_8 \end{pmatrix}$$

On peut réecrire $T^{(3)}$ sous la forme :

$$T^{(3)} = \begin{pmatrix} T^{(2)} & T^{(2)} \\ T^{(2)} L^{(2)} & -T^{(2)} L^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^{(2)} & 0 \\ 0 & T^{(2)} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_d^{(2)} & I_d^{(2)} \\ L^{(2)} & -L^{(2)} \end{pmatrix}$$

5 Suite

Soit $u_0 \in \mathbb{C}^N$

$$\begin{aligned} T^{(3)} u_0 &= \begin{pmatrix} T^{(2)} & 0 \\ 0 & T^{(2)} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_d^{(2)} & I_d^{(2)} \\ L^{(2)} & -L^{(2)} \end{pmatrix} u_0 \\ &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} T^{(1)} & 0 \\ 0 & T^{(1)} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_d^{(1)} & I_d^{(1)} \\ L^{(1)} & -L^{(1)} \end{pmatrix} u_0 & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} T^{(1)} & 0 \\ 0 & T^{(1)} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_d^{(1)} & I_d^{(1)} \\ L^{(1)} & -L^{(1)} \end{pmatrix} u_0 \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} I_d^{(2)} & I_d^{(2)} \\ L^{(2)} & -L^{(2)} \end{pmatrix} u_0 \end{aligned}$$

Cherchons $T^{(1)}$

$$T^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^{(1)} & T^{(1)} \\ T^{(1)}L^{(1)} & -T^{(1)}L^{(1)} \end{pmatrix}$$

Où $T^{(1)}$est de taille 4 et $L^{(1)}$est une matrice diagonale de taille 4.
Par identification, on trouve

$$T^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et

$$L^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

Calculons $u_1 = \begin{pmatrix} I_d^{(2)} & I_d^{(2)} \\ L^{(2)} & -L^{(2)} \end{pmatrix} u_0$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W_8 & 0 & 0 & 0 & W_8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W_8^3 & 0 & 0 & 0 & W_8^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{0,0} \\ u_{0,1} \\ u_{0,2} \\ u_{0,3} \\ u_{0,4} \\ u_{0,5} \\ u_{0,6} \\ u_{0,7} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_{0,0} + u_{0,4} \\ u_{0,1} + u_{0,5} \\ u_{0,2} + u_{0,6} \\ u_{0,3} + u_{0,7} \\ u_{0,0} + u_{0,4} \\ W_8(u_{0,1} + u_{0,5}) \\ i(u_{0,2} + u_{0,6}) \\ W_8^3(u_{0,3} + u_{0,7}) \end{pmatrix}$$

Coût d'opération : On utilise une arithmétique complexe. On a ici 8 additions et 3 opérations complexes, soit 11 opérations.

Calculons $u_2 = \begin{pmatrix} I_d^{(1)} & I_d^{(1)} \\ L^{(1)} & -L^{(1)} \end{pmatrix} u_0$

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & & \dots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & & & & \\ 1 & 0 & -1 & 0 & & & & \vdots \\ 0 & i & 0 & -i & & & & \\ & & & & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & & & & 0 & 1 & 0 & 1 \\ & & & & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & & \dots & & 0 & i & 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,0} \\ u_{1,1} \\ u_{1,2} \\ u_{1,3} \\ u_{1,4} \\ u_{1,5} \\ u_{1,6} \\ u_{1,7} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_{1,0} + u_{1,2} \\ u_{1,1} + u_{1,3} \\ u_{1,0} - u_{1,2} \\ i(u_{1,1} - u_{1,3}) \\ u_{1,4} + u_{1,6} \\ u_{1,5} + u_{1,7} \\ u_{1,4} - u_{1,6} \\ i(u_{1,5} - u_{1,7}) \end{pmatrix}$$

Coût d'opération : 8 additions/soustractions + 2 multiplications

Calcul de $T^{(3)}u_0$

$$T^{(3)}u_0 = \begin{pmatrix} T^{(1)} & 0 & & 0 \\ 0 & T^{(1)} & & \\ & & T^{(1)} & 0 \\ 0 & & 0 & T^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{2,0} \\ u_{2,1} \\ u_{2,2} \\ u_{2,3} \\ u_{2,4} \\ u_{2,5} \\ u_{2,6} \\ u_{2,7} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & & & & & 0 \\ 1 & -1 & & & & & & \\ 0 & & 1 & 1 & & & & \\ & & 1 & -1 & & & & \\ & & & & 1 & 1 & & \\ & & & & 1 & -1 & & 0 \\ & & & & & & 1 & 1 \\ 0 & & & & & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{2,0} \\ u_{2,1} \\ u_{2,2} \\ u_{2,3} \\ u_{2,4} \\ u_{2,5} \\ u_{2,6} \\ u_{2,7} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_{2,0} + u_{2,1} \\ u_{2,0} - u_{2,1} \\ u_{2,2} + u_{2,3} \\ u_{2,2} - u_{2,3} \\ u_{2,4} + u_{2,5} \\ u_{2,4} - u_{2,5} \\ u_{2,6} + u_{2,7} \\ u_{2,6} - u_{2,7} \end{pmatrix}$$

Coût d'opération : 8 additions/soustractions

On voit ici très clairement l'interêt de cette méthode puisque les coûts de calculs ont été très nettement diminués, il y n'y a notamment plus de calcul exponentielle à effectuer et donc moins d'erreur d'approximation.