# Equations différentielles (GM3)

Hasnaa Zidani

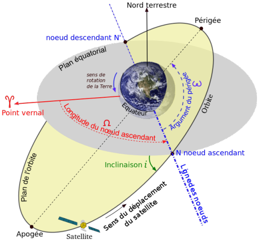
LMI - INSA Rouen

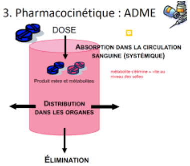
2022/2023 - CM1

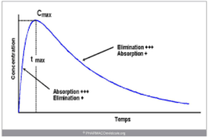
https://moodle.insa-rouen.fr/course/view.php?id=**1464**

## Equation Différentielle Ordinaire (EDO)

$$F(t, X(t), X'(t), X''(t), \cdots, X^{(n)}(t)) = 0 \quad \text{for } t \in I.$$




# De nombreuses applications !

- Une EDO modélise l'évolution d'un phénomène physique (économique ou biologique, ...) dont l'état peut être décrit par un nombre fini de variables $X(t) \in \mathbb{R}^d$.

- L'évolution du système est déterministe : connaissant les conditions initiales, on peut en déduire l'état du système à un instant futur ou passé.

- Deux méthodes de résolution
  - **Simulation numérique**: permet de prédire la solution à court terme
  - **Analyse qualitative et asymptotique**: permet de prédire le comportement général à court, moyen ou long terme (stabilité, périodicité, chaos, ...etc.)

# Objectifs du cours

- Systèmes linéaires homogènes

$$\dot{X}(t) = AX(t)$$

- Systèmes linéaires et affines

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + b(t)$$

- Equations nonlinéaires

$$\dot{X}(t) = f(t, X(t))$$

## Applications

- Mécanique classique (loi de Newton)
- Chimie (cinétique)
- Dynamiques de populations (modèle logistique, Lotka-Voltera)
- Résolution d'EDP (caractéristiques, vagues solitaires ou solitons)

# Programme de la séance

1. Continuité. Applications linéaires
2. Différentiabilité
3. Différentiabilité d'ordre deux
4. Inversion locale. Fonctions implicites

# Continuité

- Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux espaces vectoriels normés

- Dans la suite, on notera $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{E}$ contenant $x$, et $J$ une application de $\Omega \subset \mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$

- On dit que $J$ est **continue** en un point $x \in \Omega$ si

$$\forall h \in \mathbb{E} \text{ avec } x + h \in \Omega \qquad J(x+h) = J(x) + \varepsilon_0(h), \tag{1}$$

où $\varepsilon_0 : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ telle que

$$\|\varepsilon_0(h)\|_{\mathbb{F}} \to 0 \quad \text{quand} \quad \|h\|_{\mathbb{E}} \to 0.$$

- En d'autres termes, $J$ est continue si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall y \in \Omega, \quad \|y - x\|_{\mathbb{E}} < \eta \Longrightarrow \|J(y) - J(x)\|_{\mathbb{F}} < \epsilon.$$

- L'expression (1) est un **développement limité d'ordre 0** au voisinage de $x$.

# Applications linéaires

- L'espace vectoriel des applications linéaires de $\mathbb{E}$ vers $\mathbb{F}$ sera noté $\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$.
- **Dans le cas** $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, les éléments de $\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{R})$ sont appelés des **formes linéaires**.

**Lemme (Lorsque $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ sont de dimension finie)**

L'ensemble $\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ est un espace vectoriel muni de la norme

$$\|f\|_{\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})} := \sup_{x\neq 0} \frac{\|f(x)\|_{\mathbb{F}}}{\|x\|_{\mathbb{E}}} = \sup_{\|x\|_{\mathbb{E}}=1} \|f(x)\|_{\mathbb{F}} = \sup_{\|x\|_{\mathbb{E}}\leq 1} f(x).$$

♠ Lorsque la dimension de $\mathbb{E}$ est *finie*, toutes les applications linéaires sont continues. C'est faux lorsque la dimension de $\mathbb{E}$ est *infinie* !

# Programme de la séance

## Définition

Soit $(\mathbb{E}, \|\cdot\|_{\mathbb{E}})$ et $(F \|\cdot\|_{\mathbb{F}})$ deux espaces normés. Soit $J : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ une application.

- La dérivée au ***sens de Fréchet*** de $J$ en un point $x \in \mathbb{E}$, lorsqu'elle existe, est une application linéaire continue de $DJ(x) : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ telle que

$$\|J(x+h) - J(x) - DJ(x) \cdot h\|_{\mathbb{F}} = \|h\|_{\mathbb{E}}\, \varepsilon(h),$$

où $\varepsilon : \mathbb{E} \to \mathbb{R}_+$ avec $\varepsilon(h) \to 0$ lorsque $h \to 0$.

## Définition

Soit $(\mathbb{E}, \|\cdot\|_{\mathbb{E}})$ et $(F \|\cdot\|_{\mathbb{F}})$ deux espaces normés. Soit $J : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ une application.

- La dérivée au ***sens de Fréchet*** de $J$ en un point $x \in \mathbb{E}$, lorsqu'elle existe, est une application linéaire continue de $DJ(x) : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ telle que

$$\|J(x+h) - J(x) - DJ(x) \cdot h\|_{\mathbb{F}} = \|h\|_{\mathbb{E}}\, \varepsilon(h),$$

  où $\varepsilon : \mathbb{E} \to \mathbb{R}_+$ avec $\varepsilon(h) \to 0$ lorsque $h \to 0$.

- On dit que $J$ est différentiable en $x$, au *sens de Fréchet*, lorsque la dérivée $DJ(x)$ existe.

## Définition

Soit $(\mathbb{E}, \|\cdot\|_{\mathbb{E}})$ et $(F\,\|\cdot\|_{\mathbb{F}})$ deux espaces normés. Soit $J : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ une application.

- La dérivée au ***sens de Fréchet*** de $J$ en un point $x \in \mathbb{E}$, lorsqu'elle existe, est une application linéaire continue de $DJ(x) : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ telle que

$$\|J(x+h) - J(x) - DJ(x)\cdot h\|_{\mathbb{F}} = \|h\|_{\mathbb{E}}\,\varepsilon(h),$$

où $\varepsilon : \mathbb{E} \to \mathbb{R}_+$ avec $\varepsilon(h) \to 0$ lorsque $h \to 0$.

- On dit que $J$ est différentiable en $x$, au *sens de Fréchet*, lorsque la dérivée $DJ(x)$ existe.

- La fonction $J$ est dite ***continument différentiable*** en $x$ lorsque $J$ est différentiable dans un voisinage de $x$ et l'application $y \longmapsto DJ(y)$ est continue en $x$, i.e.,

$$\lim_{y\to x} \|DJ(y) - DJ(x)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})} = 0.$$

- Si $J : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ est différentiable dans un voisinage de $x \in E$, alors $J$ est continue. En effet, on a

$$\|J(x+h) - J(x)\|_F \leq \underbrace{\|DJ(x).h\|_{\mathbb{F}} + \|h\|_{\mathbb{E}}\ \varepsilon(h)}_{\varphi(h)},$$

avec $\varphi(h) \to 0$ (car $DJ(x) : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ est une application linéaire et continue).

- Par définition la dérivée au sens de Fréchet correspond à un **développement limité d'ordre 1** au voisinage de $x$, de la forme

$$\forall h \in \mathbb{E} \qquad J(x+h) = J(x) + DJ(x) \cdot h + \|h\|\ \epsilon(h).$$

avec $\epsilon : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ avec $\epsilon(h) \to 0$ lorsque $h \to 0$.

- Si la différentielle de $J$ en $x$ existe, elle est unique.

## Si $\mathbb{E} := \mathbb{R}^n$ et $\mathbb{F} := \mathbb{R}$

- Si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, alors la dérivée d'une application $J : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ en un point $x$ est une forme linéaire continue.

**Proposition - Notion du Gradient**

- Si $(\mathbb{E}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{E}})$ est de dimension finie, alors il existe $p \in \mathbb{E}$ tel que

$$DJ(x) \cdot h = \langle p, h \rangle_{\mathbb{E}} \qquad \forall h \in \mathbb{E}.$$

On appelle $p$ **le gradient** de $J$ en $x$ et on note $p = \nabla J(x)$.

## Si $\mathbb{E} := \mathbb{R}^n$ et $\mathbb{F} := \mathbb{R}^m$

- Soit $J : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ une fonction différentiable en $x \in \mathbb{E}$

**Proposition - La matrice Jacobienne**

- Si $\mathbb{E} := \mathbb{R}^n$ et $\mathbb{F} := \mathbb{R}^m$, alors il existe une unique matrice $M \in \mathbb{M}_{m,n}$ telle que

$$DJ(x) \cdot h = M\,h \qquad \forall h \in \mathbb{E} = \mathbb{R}^n.$$

- On appelle $M$ **la matrice Jacobienne (ou Jacobienne)** de $J$ en $x$ et on note

$$M = DJ(x).$$

Est-ce qu'on a une forme explicite des coefficients de la Jacobienne?

# Rappel sur les normes matricielles

- La Jacobienne ne dépend pas des normes choisies sur $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ et $\mathbb{F} = \mathbb{R}^m$
- On peut munir l'espace $A \in \mathbb{M}_{m,n}$ de la **norme induite** $\|A\|_{m,n}$ vérifie:
$$\|Ax\|_{\mathbb{R}^m} \leq \|A\|_{m,n} \|x\|_{\mathbb{R}^n} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$
- Pour toute matrice $A \in \mathbb{M}_{m,n}$, il existe $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ avec $\|\bar{x}\|_{\mathbb{R}^n} = 1$ et tel que
$$\|A\|_{m,n} = \|A\bar{x}\|_{\mathbb{R}^m}.$$
.
- Soient $A \in \mathbb{M}_{m,n}$ et $B \in \mathbb{M}_{n,r}$. On a:
$$\|AB\|_{m,r} \leq \|A\|_{m,n} \|B\|_{n,r}.$$
- Si $n = m$, on a $\|I_n\|_{n,n} = 1$.
- Rappelons enfin qu'il existe des normes matricielles qui ne sont pas induites (par exemple, la norme matricielle de **Frobenius**)

## Proposition

Soit $\mathbb{E}, \mathbb{F}, \mathbb{G}$ trois espaces normés.

- **(Somme)** Si $J_1 : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ et $J_2 : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ sont différentiables en $x \in \mathbb{E}$, alors $J_1 + J_2$ est aussi différentiable en $x$, et on a

$$D(J_1 + J_2)(x) \cdot h = DJ_1(x) \cdot h + DJ_2(x) \cdot h \qquad \forall h \in E.$$

- **(Produit)** La fonction $J_1 \times J_2$ est aussi différentiable[a] en $x$, et on a

$$D(J_1 \times J_2)(x) \cdot h = DJ_1(x) \cdot [J_2(x) \cdot h] + J_1(x) \times [[DJ_2(x) \cdot h] .$$

- Si $J_1 : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ est différentiable en $x \in \mathbb{E}$ et $J_2 : \mathbb{F} \to \mathbb{G}$ différentiable en $J_1(x)$. Alors $J_2 \circ J_1$ est différentiable en $x$, et on a

$$D(J_2 \circ J_1)(x) = DJ_2(J_1(x)) \circ DJ_1(x).$$

[a] Lorsqu'on peut définir la fonction produit !

**Théorème (la valeur moyenne)**

*Soit* $J : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ *une fonction différentiable sur* $\mathbb{E}$.

*Pour tout* $x, y \in \mathbb{E}$, *il existe* $\theta \in (0, 1)$ *tel que* $z_\theta := \theta x + (1 - \theta)y \in \mathbb{E}$ *vérifie:*

$$J(y) - J(x) = DJ(z_\theta) \cdot (y - x).$$

# Différentiabilité directionnelle

## Définition

Soit $(E, \|\cdot\|_{\mathbb{E}})$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces normés.
Soit $J : E \to F$ une fonction, et soit $x, v \in E$.
La dérivée *directionnelle* de $J$ en $x$, dans la direction $v$, est la limite suivante (lorsqu'elle existe !):

$$J'(x; v) := \lim_{t \to 0^+} \frac{J(x + tv) - J(x)}{t}.$$

- **Lorsque $J$ est Fréchet différentiable** en $x$, alors $J$ admet des dérivées directionnelles
$$J'(x; v) = DJ(x) \cdot v \quad \forall v \in E.$$
Dans ce cas, l'application $v \longmapsto J'(x; v)$ est **linéaire et continue**.

- En général, l'application $v \longmapsto J'(x; v)$ est positivement homogène:
$$J'(x; tv) = tJ'(x; v) \quad \forall t > 0.$$

- La dérivée directionnelle demande moins de régularité.

# Différentiabilité au sens de Gateaux

## Définition

On dit que la fonction $J : E \to F$ est dérivable (ou différentiable) au sens de Gateaux en $x \in E$, si elle admet des dérivées directionnelles $J'(x; v)$ pour tout $v \in E$ et s'il existe une application linéaire $dJ(x) : E \to F$ telle que :

$$\forall v \in E \qquad J'(x; v) = dJ(x) \cdot v$$

☆ Si $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}$, et si $J$ est Gateaux différentiable, on continue à identifier $dJ(x)$ avec un vecteur $p \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$dJ(x) \cdot v = \langle p, v \rangle,$$

et $p = \nabla J(x)$ est encore appelé *gradient* de $J$ en $x$.

**Remarques.**

☆ Une fonction dérivable au sens de Fréchet l'est aussi au sens de Gateaux, mais la réciproque est fausse.

Exemple: $J(x,y) = \dfrac{x^6}{(y-x^2)^2 + x^8}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$, $J(0,0) = 0$.

☆ La Gateaux-différentiabilité n'implique même pas la continuité, comme le montre le contre-exemple qui suit.

### Contre-exemple

On se place dans $E = \mathbb{R}^2$. Soient $q \geq p > 5$ deux réels. Montrer que la fonctionnelle $J$ définie par

$$J(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^p}{(y-x^2)^2 + x^q} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

est différentiable au point $(0,0)$ au sens de Gateaux, mais qu'elle n'est pas continue en ce point.

# Dérivées partielles

- On suppose que $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ et $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Soit $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle.
- Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

## Définition

Supposons que les dérivées directionnelles suivantes de $J$ en $x$ existent

$$J'(x; e_i) = \lim_{t \to 0^+} \frac{J(x + te_i) - J(x)}{t}$$

et que les applications: $\lambda \longmapsto J'(x; \lambda e_i)$ sont linéaires.

On appelle **dérivée partielle** de $J$ par rapport à $x_i$ le coefficient $\dfrac{\partial J}{\partial x_i}(x)$ tel que:

$$J'(x; e_i) = \frac{\partial J}{\partial x_i}(x)\, e_i.$$

**Lemme**

Si $J$ est Fréchet différentiable en $x$, alors

$$\nabla J(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial J}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial J}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}.$$

Parfois, on notera simplement $\partial_i J(x)$ au lieu de $\frac{\partial J}{\partial x_i}(x)$

➢ Par définition, la dérivée partielle $\partial_i J(x)$ correspond à la dérivée de

$$t \longmapsto J(x_1, \cdots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \cdots, x_n)$$

Une fonctionnelle $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ qui admet des dérivées partielles n'est pas nécessairement différentiable (ni même continue!)

## Contre-exemple

La fonction $J : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $J(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ et $J(0, 0) = 0$.

a) Justifier que $J$ est différentiable en tout point de l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

b) Montrer que $t \longmapsto J(t, 0)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

c) Montrer que $J$ admet des dérivées partielles $\partial_1 J(0, 0)$ et $\partial_2 J(0, 0)$ en $(0, 0)$.

d) Vérifier que $J$ n'est pas continue en $(0, 0)$. Conclure.

# Lien entre dérivées partielles et Fréchet différentiabilité

## Théorème

*Soit* $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *une fonctionnelle. On a l'équivalence entre les assertions suivantes.*

*(i)* $J$ *est de classe* $C^1$ *dans un voisinage de* $x$

*(ii) Il existe* $\delta > 0$ *tel que* $J$ *admet des dérivées partielles en tout point* $y \in \mathbb{B}(x, \delta)$ *et l'application*

$$y \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{\partial J}{\partial x_1}(y) \\ \vdots \\ \frac{\partial J}{\partial x_n}(y) \end{pmatrix}$$

*est continue sur* $\mathbb{B}(x, \delta)$*.*

## Le Cas où $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ et $\mathbb{F} = \mathbb{R}^m$

- Dans le cas où $\mathbb{F} = \mathbb{R}^m$, $J(x)$ correspond à un vecteur à $m$ composantes

$$J(x) = \begin{pmatrix} J_1(x) \\ J_2(x) \\ \vdots \\ J_m(x) \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad J(x) = \sum_{l=1}^{m} J_l(x) e'_l,$$

dès lors que l'on a choisi une base $(e'_l)_{1 \leq l \leq m}$ de $\mathbb{F}$.

- On peut reprendre la construction ci-dessus, et différencier chaque composante de $J$. La différentielle de $J$ en $x$ (lorsqu'elle existe) peut alors être écrite composante par composante

$$\begin{aligned}
DJ_1(x) \cdot h &= \langle \nabla J_1(x), h \rangle = \partial_1 J_1(x) h_1 + \partial_2 J_1(x) h_2 + \ldots + \partial_n J_1(x) h_n \\
DJ_2(x) \cdot h &= \langle \nabla J_2(x), h \rangle = \partial_1 J_2(x) h_1 + \partial_2 J_2(x) h_2 + \ldots + \partial_n J_2(x) h_n \\
\vdots &= \vdots \\
DJ_m(x) \cdot h &= \langle \nabla J_m(x), h \rangle = \partial_1 J_m(x) h_1 + \partial_2 J_m(x) h_2 + \ldots + \partial_n J_m(x) h_n.
\end{aligned}$$

## Le Cas où $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ et $\mathbb{F} = \mathbb{R}^m$ - Jacobienne

- La matrice associée à $DJ(x)$ dans les bases $(e_k)_{1\le k\le n}$ et $(e'_l)_{1\le l\le m}$ est appelée **matrice jacobienne de** $J$ **en** $x$, et on la note $[DJ(x)]$

$$[DJ(x)] := \begin{pmatrix} \partial_1 J_1(x) & \partial_2 J_1(x) & \dots & \partial_n J_1(x) \\ \partial_1 J_2(x) & \partial_2 J_2(x) & \dots & \partial_n J_2(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 J_m(x) & \partial_2 J_m(x) & \dots & \partial_n J_m(x) \end{pmatrix}.$$

- **Lorsque** $n = m$, son **déterminant** est appelé **jacobien** de $J$ en $x$, égal à

$$\mathbf{Det}[DJ(x)] = \begin{vmatrix} \partial_1 J_1(x) & \partial_2 J_1(x) & \dots & \partial_n J_1(x) \\ \partial_1 J_2(x) & \partial_2 J_2(x) & \dots & \partial_n J_2(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 J_n(x) & \partial_2 J_n(x) & \dots & \partial_n J_n(x) \end{vmatrix}.$$

## Quelques Propriétés utiles pour le calcul de la Jacobienne

**(Somme)** Si $J : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ et $G : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ sont de classe $C^1$ alors

$$[D(J+G)(x)] = [DJ(x)] + [DG(x)]$$

**(Composition)** Si $J : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ et $G : \mathbb{F} \to \mathbb{G}$ sont de classe $C^1$ alors

$$\Big[D(G \circ J)(x)\Big] = \Big[DG(J(x))\Big] \times \Big[DJ(x)\Big]$$

# Programme de la séance

## Définition de la différentielle seconde

➤ On supose que $J : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ est différentiable sur un **voisinage de** $x$.

## Définition de la différentielle seconde

- On supose que $J : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ est différentiable sur un **voisinage de** $x$.
- Si l'application $DJ : \mathbb{E} \to \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ est elle-même différentiable, alors sa différentielle est appelée **différentielle seconde** de $J$ en $x$, et on la note $D^2J(x)$
- On dit que $J$ est deux fois différentiable au point $x$

# Définition de la différentielle seconde

- On supose que $J : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ est différentiable sur un **voisinage de** $x$.
- Si l'application $DJ : \mathbb{E} \to \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ est elle-même différentiable, alors sa différentielle est appelée **différentielle seconde** de $J$ en $x$, et on la note $D^2J(x)$
- On dit que $J$ est deux fois différentiable au point $x$
- Noter que $D^2J(x)$ appartient à $\mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F}))$.

# Définition de la différentielle seconde

- On supose que $J : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ est différentiable sur un **voisinage de** $x$.
- Si l'application $DJ : \mathbb{E} \to \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ est elle-même différentiable, alors sa différentielle est appelée **différentielle seconde** de $J$ en $x$, et on la note $D^2J(x)$
- On dit que $J$ est deux fois différentiable au point $x$
- Noter que $D^2J(x)$ appartient à $\mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F}))$.
- **Si** la différentielle $x \longmapsto D^2J(x)$ est une application **continue** de $\mathbb{E}$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F}))$, on dit que $J$ est une application de **classe** $\mathcal{C}^2$.

# Représentation de la Hessienne

**Théorème (de Schwarz)**

*Soit $J$ une application deux fois différentiable en $x$. Alors $D^2J(x)$ est une application (bilinéaire, continue et) symétrique de $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$.*

- On peut *identifier* $\mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F}))$ à $\mathcal{L}(\mathbb{E} \times \mathbb{E}, \mathbb{F})$, et on écrit donc :

$$(D^2J(x) \cdot h) \cdot k = D^2J(x) \cdot (h, k), \qquad (h, k) \in \mathbb{E} \times \mathbb{E}.$$

Si $k = h$, on condense les notations en $D^2J(x) \cdot h^2$.

# Représentation de la Hessienne - cas $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ et $\mathbb{F} = \mathbb{R}$

- Dans ce cas, la hessienne $D^2J(x)$ est une forme bilinéaire et continue de $\mathbb{R}^{n\times n}$.

## Représentation de la Hessienne - cas $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ et $\mathbb{F} = \mathbb{R}$

- Dans ce cas, la hessienne $D^2J(x)$ est une forme bilinéaire et continue de $\mathbb{R}^{n\times n}$.
- D'après l'identification ci-dessus, il existe un **unique** élément $[D^2J(x)] \in \mathbb{M}_{n,n}$ tel que
$$D^2J(x) \cdot (h, k) = \langle [D^2J(x)]\, h, k\rangle_{\mathbb{R}^n} \qquad \forall h, k \in \mathbb{R}^n.$$

# Représentation de la Hessienne - cas $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ et $\mathbb{F} = \mathbb{R}$

- Dans ce cas, la hessienne $D^2J(x)$ est une forme bilinéaire et continue de $\mathbb{R}^{n\times n}$.
- D'après l'identification ci-dessus, il existe un **unique** élément $[D^2J(x)] \in \mathbb{M}_{n,n}$ tel que

$$D^2J(x)\cdot(h,k) = \langle [D^2J(x)]\,h, k\rangle_{\mathbb{R}^n} \qquad \forall h,k \in \mathbb{R}^n.$$

- Les coefficients de $[D^2J(x)]$ sont des dérivées partielles secondes, notées $\dfrac{\partial^2 J}{\partial x_k \partial x_l}(x)$ ou $\partial_k\partial_l J(x)$.

# Représentation de la Hessienne - cas $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ et $\mathbb{F} = \mathbb{R}$

- Dans ce cas, la hessienne $D^2J(x)$ est une forme bilinéaire et continue de $\mathbb{R}^{n\times n}$.
- D'après l'identification ci-dessus, il existe un **unique** élément $[D^2J(x)] \in \mathbb{M}_{n,n}$ tel que

$$D^2J(x) \cdot (h,k) = \langle [D^2J(x)]\, h, k\rangle_{\mathbb{R}^n} \qquad \forall h,k \in \mathbb{R}^n.$$

- Les coefficients de $[D^2J(x)]$ sont des dérivées partielles secondes, notées $\dfrac{\partial^2 J}{\partial x_k \partial x_l}(x)$ ou $\partial_k\partial_l J(x)$.
- Ici aussi, on peut montrer que

$$[D^2J(x)] = \begin{pmatrix} \partial_1\partial_1 J(x) & \partial_2\partial_1 J(x) & \dots & \partial_n\partial_1 J(x) \\ \partial_1\partial_2 J(x) & \partial_2\partial_2 J(x) & \dots & \partial_n\partial_2 J(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \partial_1\partial_n J(x) & \partial_2\partial_n J(x) & \dots & \partial_n\partial_n J(x) \end{pmatrix}.$$

# Représentation de la Hessienne - cas $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ et $\mathbb{F} = \mathbb{R}$

- Dans ce cas, la hessienne $D^2J(x)$ est une forme bilinéaire et continue de $\mathbb{R}^{n\times n}$.
- D'après l'identification ci-dessus, il existe un **unique** élément $[D^2J(x)] \in \mathbb{M}_{n,n}$ tel que
$$D^2J(x)\cdot(h,k) = \langle [D^2J(x)]\, h, k\rangle_{\mathbb{R}^n} \qquad \forall h,k \in \mathbb{R}^n.$$
- Les coefficients de $[D^2J(x)]$ sont des dérivées partielles secondes, notées $\dfrac{\partial^2 J}{\partial x_k \partial x_l}(x)$ ou $\partial_k\partial_l J(x)$.
- Ici aussi, on peut montrer que
$$[D^2J(x)] = \begin{pmatrix} \partial_1\partial_1 J(x) & \partial_2\partial_1 J(x) & \dots & \partial_n\partial_1 J(x) \\ \partial_1\partial_2 J(x) & \partial_2\partial_2 J(x) & \dots & \partial_n\partial_2 J(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \partial_1\partial_n J(x) & \partial_2\partial_n J(x) & \dots & \partial_n\partial_n J(x) \end{pmatrix}.$$
- En particulier, on peut écrire :
$$D^2J(x)\cdot(h,h') = (\nabla^2 J(x)h, h') = \sum_{i,j=1}^{n} h_i\, h'_j \partial_i\partial_j J(x)$$