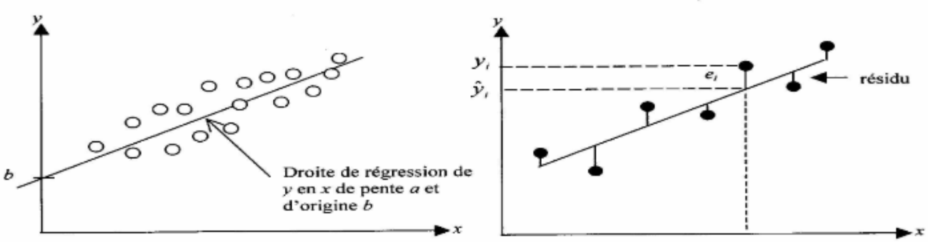
AlgoNum GM3
2022/2023

Approximation par moindres carrés discrets

AlgoNum - TD2 - MMSN



Etudiants : **DANTAS Alexandre** **DELL'OVA Fabio**
GUINES Antoine **LANGOLFF Clément**
KESSLER Aymeric

Encadrant : **Gleyse. B**

Contents

Soit $A \in M_{Nn}(\mathbb{R})$ la matrice définie par $a_{ij} = \varphi_j(x^{(i)})$, et les vecteurs $y \in \mathbb{R}^N$, $\lambda \in \mathbb{R}^n$. On définie alors l'application suivante :

$$\phi(\lambda) = \| y - A\lambda \|_2^2$$

1 Factorisation de Cholesky

On a :

$$\begin{aligned}
\phi(\lambda) &= (y - A\lambda)^t(y - A\lambda) \\
&= (y^t - \lambda^t A^t)(y - A\lambda) \\
&= y^t y - y^t A\lambda - \lambda^t A^t y + \lambda^t A^t A\lambda \\
&= \| y \|_2^2 - 2y^t A\lambda + \lambda^t A^t A\lambda
\end{aligned}$$

Car $y^t A\lambda$ et $\lambda^t A^t y$ sont des scalaires.
De plus $A^t A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ est une matrice carré, et $(A^t A)^t = A^t A$ donc $A^t A$ est symétrique. Finalement on a

$$< A^t Ax, x >_2 = x^t A^t Ax = (Ax)^t Ax = \| Ax \|_2^2 > 0 \ \forall x \neq 0$$

et on sait que les vecteurs $(\phi_j(x^{(1)}), ..., \phi_j(x^{(N)}))^t$, j=1,...,n sont linéairement indépendants.
Par conséquent, d'après le théorème du rang:

$$dim(Ker(A)) + dim(Im(A)) = n \quad et \quad dim(Im(A)) = rg(A) = n$$

donc:

$$dim(Ker(A)) = 0$$

Ainsi $A^t A$ est une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive, donc elle admet une factorisation de Cholesky de la forme :

$$A^t A = RR^t$$

avec $R \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire inférieure dont les termes diagonaux sont tous strictement positifs. Cela implique que R est inversible car son déterminant sera le produit des termes de la diagonale, qui sera donc non nul. On peut donc remplacer dans l'expression précédemment trouvée de $\phi(\lambda)$, on a :

$$\begin{aligned}\phi(\lambda) &= \| y \|_2^2 - 2y^t A\lambda + \lambda^t A^t A\lambda \\ &= \| y \|_2^2 - 2y^t A\lambda + \lambda^t RR^t\lambda \\ &= \| y \|_2^2 - 2y^t A(R^t)^{-1}R^t\lambda + \lambda^t RR^t\lambda \\ &= \| y \|_2^2 - 2b^t R^t\lambda + \lambda^t RR^t\lambda\end{aligned}$$

avec $b^t = y^t A(R^t)^{-1}$, $b \in \mathbb{R}^n$.
Calculons maintenant le produit $(\lambda^t R - b^t)(R^t\lambda - b)$. On a :

$$\begin{aligned}(\lambda^t R - b^t)(R^t\lambda - b) &= \lambda^t RR^t\lambda - b^t R^t\lambda - \lambda^t Rb + b^t b \\ &= \lambda^t RR^t\lambda - 2b^t R^t\lambda + \| b \|_2^2\end{aligned}$$

Ainsi cela nous permet d'écrire $\phi(\lambda)$ sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\phi(\lambda) &= (\lambda^t R - b^t)(R^t\lambda - b) + \| y \|_2^2 - \| b \|_2^2 \\ &= \| R^t\lambda - b \|_2^2 - \| b \|_2^2 + \| y \|_2^2\end{aligned}$$

2 Minimisation de $\phi(\lambda)$

On a montré dans la section précédente que l'on avait :

$$\phi(\lambda) = \| R^t\lambda - b \|_2^2 - \| b \|_2^2 + \| y \|_2^2$$

Or dans cette expression seul le terme $\| R^t\lambda - b \|_2^2$ dépend de λ. Le reste étant constant, cela implique que le vecteur λ réalisant le minimum de ϕ et de $\| R^t\lambda - b \|_2^2$ est le même. Donc minimiser $\phi(\lambda)$ revient à minimiser $\| R^t\lambda - b \|_2^2$. Or le minimum de $\| R^t\lambda - b \|_2^2$ est atteint lorsque $R^t\lambda = b$. Ce système linéaire possède bien une unique solution car R^t est inversible. On a donc :

$$R^t\lambda = b \Longleftrightarrow \lambda = (R^t)^{-1}b$$

$$\Longleftrightarrow \lambda = (R^t)^{-1}R^{-1}A^t y$$

$$\Longleftrightarrow \lambda = (RR^t)^{-1}A^t y$$

$$\Longleftrightarrow \lambda = (A^t A)^{-1}A^t y$$

$$\Longleftrightarrow A^t A\lambda = A^t y$$

Ainsi le minimum λ^* de $\phi(\lambda)$ peut être obtenu en résolvant l'équation ci-dessus, appelée Equation Normale.

3 Décomposition QR

On sait qu'il existe une matrice orthogonale $Q \in M_N(\mathbb{R})$ et une matrice $R \in M_{Nn}(\mathbb{R})$ de la forme $\begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $R_1 \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire supérieure, telles que $A = QR$.

3.1 R_1 est inversible

On cherche à montrer que R_1 est inversible, c'est à dire que $Ker(R_1) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\begin{aligned}
R_1 x = 0 \iff & \begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\
\iff & Rx = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\
\iff & QRx = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\
\iff & Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Or les vecteurs colonnes de A sont linéairement indépendants, donc $Ker(A) = \{0_{\mathbb{R}^N}\}$. Ainsi cela implique que $x = 0_{\mathbb{R}^n}$. Ce qui prouve que R_1est inversible.

3.2 Solution du problème (P)

Le problème (P) revient à trouver λ minimisant $\phi(\lambda) = \| y - A\lambda \|_2^2$. Or on a :

$$min_{\lambda \in \mathbb{R}^n} \| y - A\lambda \|_2^2 \iff min_{\lambda \in \mathbb{R}^n} \| y - QR\lambda \|_2^2$$
$$\iff min_{\lambda \in \mathbb{R}^n} \| Q^t y - R\lambda \|_2^2$$

car Q est orthogonale. On pose $Q^t y = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ avec $c \in \mathbb{R}^n$. On a donc :

$$\iff min_{\lambda \in \mathbb{R}^n} \| \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix} \lambda \|_2^2$$

$$\iff min_{\lambda \in \mathbb{R}^n} \| c - R_1\lambda \|_2^2 + \| d \|_2^2$$

Or d ne dépend pas de λ et comme on cherche à minimiser selon λ alors :

$$min_{\lambda \in \mathbb{R}^n} \| y - A\lambda \|_2^2 \iff min_{\lambda \in \mathbb{R}^n} \| c - R_1\lambda \|_2^2$$

Le minimum de cette expression est atteint en λ^*, c'est à dire lorsque $R_1\lambda^* = c$. Ce système possède bien une unique solution du fait que R_1 soit inversible. On calcul $\phi(\lambda^*)$, on a :

$$\begin{aligned}
\phi(\lambda^*) &= \| y - A\lambda^* \|_2^2 \\
&= \| \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix} \lambda^* \|_2^2 \\
&= \| c - R_1\lambda^* \|_2^2 + \| d \|_2^2 \\
&= \| d \|_2^2
\end{aligned}$$

4 Interprétation géométrique du problème (P)

D'après le théorème de projection le $min_{\lambda \in \mathbb{R}^n} \|y - A\lambda\|_2^2$ est atteint lorsque $A\lambda$ correspond à la projection orthognale de y sur $Im(A)$. En effet le projeté orthogonale $x \in Im(A)$ est le vecteur qui minimise la distance entre y et $Im(A)$.

$$min_{\lambda \in \mathbb{R}^n} \|y - A\lambda\|_2^2 = min_{v \in Im(A)} \|y - v\|_2^2$$

Soit x le projeté orthogonale de y sur $Im(A)$, alors $y-x \perp Im(A)$ ou encore, $y-x$ est orthogonale à chaque colonne de A. On a ainsi $(y-x)^T A_j = 0 \; \forall j \in \{1,...,n\}$.
Or

$$\sum_{i=1}^{N}(x_i - y_i)a_{ij} = 0 \iff \sum_{i=1}^{N} x_i a_{ij} = \sum_{i=1}^{N} y_i a_{ij} \; \forall j \in \{1,..,n\}$$

Mais $x \in Im(A)$ donc on peut récrire x sous la forme $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k A_k$ d'où $x_i = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_{ik}$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} a_{ij} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_{ik} &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{N} (a_{ij} a_{ik}) \lambda_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{N} (a_{ji}^T a_{ik}) \lambda_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} (a^T a)_{jk} \lambda_k
\end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{k=1}^{n} (a^T a)_{jk} \lambda_k = \sum_{i=1}^{N} a_{ji}^T y_i \; j \in \{1,...,n\}$$

On retrouve alors l'équation normale : $A^T A \lambda = A^T y$.

5 Méthode de Résolution

On présente dans cette partie la méthode de résolution des moindres carrées.

On suppose que l'on dispose d'application $(\varphi_j)_{j \in 1..n}$ linéairement indépendants ainsi que de N nuplets de points $(x^{(1)}, ..., x^{(N)})$ où chaque $x^{(i)} \in \mathbb{R}^n$. On suppose les vecteurs $(\varphi_j(x^{(1)}), ..., (\varphi_j(x^{(N)}))^t \; \forall j \in 1, ..., n$ indépendants. On cherche alors une combinaison linéaire des φ_j qui ajuste au mieux $y^{(i)} = f(x_1^{(i)}, ..., x_n^{(i)})$.

La première étape consiste à linéariser le problème et ainsi mettre le système sous forme matricielle $A\lambda = y$.

Il s'agit ensuite de trouver le minimum de $\|y - A\lambda\|_2^2$.

Pour cela, nous utilisons la décomposition QR de A où $A \in M_{nN}(\mathbb{R})$. On dispose alors d'une matrice Q orthogonale $\in M_N(\mathbb{R})$ et d'une matrice $R \in M_{Nn}(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure.

On récupére dans la matrice R, la matrice R_1de dimension n ainsi que la le vecteur c de dimension n dans la matrice $Q^T y = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.

Enfin, nous résolvons le système $R_1 \lambda = c$ par une simple méthode de remonté. L'erreur de l'approximation est obtenu en faisant la norme du vecteur d de dimsension $N - n$.

6 Applications

6.1 Droite des moindres carrées dans $\mathbb{R}^2$

On considère le cas m=1. On souhaite ajuster une fonction de la forme $y = \lambda_2 x + \lambda_1$ sur N couples de points notés $(x^{(i)}, y^{(i)})$. La méthode des moindres carrés va nous permettre de trouver la droite qui minimise toute les distances entre les points et la droite. Le système s'écrit alors sous forme matricielle :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x^{(1)} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x^{(N)} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y^{(1)} \\ \vdots \\ y^{(N)} \end{bmatrix}$$

On note $\varphi_1(x) = 1$ et $\varphi_2(x) = x$. C'est fonction sont linéairement indépendantes car elle forment la base canonique des polynômes de degré 1.

On suppose les vecteurs $(\varphi_j(x^{(1)}), ..., (\varphi_j(x^{(N)})^t \; \forall j \in 1, 2$ indépendants.

D'après la partie précédente le vecteur minimisant la différence entre les 2 membres de cette équation peut s'obtenir en résolvant l'équation normale : $A^T A \lambda = A^T y$

$$\begin{aligned} A^T A &= \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x^{(1)} & \cdots & x^{(N)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & x^{(1)} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x^{(N)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N 1 & \sum_{i=1}^N x^{(i)} \\ \sum_{i=1}^N x^{(i)} & \sum_{i=1}^N \left[x^{(i)}\right]^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

et ainsi on obtient

$$A^T A\lambda = A^T y$$

$$\begin{bmatrix} N & \sum_{i=1}^N x^{(i)} \\ \sum_{i=1}^N x^{(i)} & \sum_{i=1}^N \left[x^{(i)}\right]^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N y_i \\ \sum_{i=1}^N x^{(i)} y_i \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} N\lambda_1 + \lambda_2 \sum_{i=1}^N x^{(i)} & = \sum_{i=1}^N y_i \\ \lambda_1 \sum_{i=1}^N x^{(i)} + \lambda_2 \sum_{i=1}^N \left[x^{(i)}\right]^2 & = \sum_{i=1}^N x^{(i)} y_i \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 & = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^N y_i - \lambda_2 \sum_{i=1}^N x^{(i)}\right) \\ \lambda_2 N \sum_{i=1}^N \left[x^{(i)}\right]^2 - \lambda_2 \left(\sum_{i=1}^N x^{(i)}\right)^2 & = N \sum_{i=1}^N x^{(i)} y_i - \sum_{i=1}^N x^{(i)} \sum_{i=1}^N y_i \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 & = \overline{y} - \lambda_2 \overline{x} \\ \lambda_2 & = \frac{N \sum_{i=1}^N x^{(i)} y_i - \sum_{i=1}^N x^{(i)} \sum_{i=1}^N y_i}{N \sum_{i=1}^N \left[x^{(i)}\right]^2 - \left(\sum_{i=1}^N x^{(i)}\right)^2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 & = \overline{y} - \lambda_2 \overline{x} \\ \lambda_2 & = \frac{N^2\left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x^{(i)} y_i - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x^{(i)} \times \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i\right]}{N^2\left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[x^{(i)}\right]^2 - \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x^{(i)}\right)^2\right]} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 & = \overline{y} - \lambda_2 \overline{x} \\ \lambda_2 & = \frac{\sigma_{x,y}}{\sigma_x^2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 & = \overline{y} - \frac{\sigma_{x,y}}{\sigma_x^2} \overline{x} \\ \lambda_2 & = \frac{\sigma_{x,y}}{\sigma_x^2} \end{cases}$$

La droite des moindres carrés est ainsi définit par

$$y = \frac{\sigma_{x,y}}{\sigma_x^2} x + \overline{y} - \frac{\sigma_{x,y}}{\sigma_x^2} \overline{x}$$

Vérifions que le point de coordonnées $(\overline{x}, \overline{y})$ appartient à cette droite :

$$\frac{\sigma_{x,y}}{\sigma_x^2} \overline{x} + \overline{y} - \frac{\sigma_{x,y}}{\sigma_x^2} \overline{x} = \overline{y}$$

6.2 Approximation d'un phénomène physique

1) On suppose qu'un phénomène physique suit approxivement la relation $g(x_1x_2,...,x_n) \simeq x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}...x_n^{\lambda_n}$. On dispose de N nuplets $(x_1,...,x_n)$ et N valeurs $g(x_1x_2,...,x_n)$ associé à ces nuplets avec $n < N$. En passant au logarithme, nous pouvons linéariser le problème afin d'appliquer la méthode des moindres carrées. En effet, on a :

$$ln(g(x_1x_2,...,x_n)) \simeq ln(x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}...x_n^{\lambda_n}) = \lambda_1 ln(x_1) + \lambda_2 ln(x_2) + ... + \lambda_n ln(x_n)$$

Il suffit ensuite d'écrire le système sous forme matricielle :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} ln(x_1^{(1)}) & \dots & ln(x_n^{(1)}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ln(x_1^{(N)}) & \dots & ln(x_n^{(N)}) \end{bmatrix}}_{A} \times \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \simeq \underbrace{\begin{bmatrix} ln(g(x_1^{(1)},...,x_n^{(1)})) \\ \vdots \\ ln(g(x_1^{(N)},...,x_n^{(N)})) \end{bmatrix}}_{y}$$

On pose alors les fonctions $\varphi_j(x)$, définies par : $\varphi_j(x) = ln(x_j)\ \forall j \in 1,..,n$. On suppose les vecteurs $(\varphi_j(x^{(1)}),...,(\varphi_j(x^{(N)})^t\ \forall j \in 1,...,n$ indépendants et que les fonctions φ_j sont indépendantes.

2) On dispose du jeu de données suivant

x_1	1,0	1,436	2,52	5,12
x_2	1,39	2,0	3,72	5,12
$g(x_1,x_2)$	1,9	5,6	33,75	134,22

Le système dépendant de 3 paramètres avec une fonction g dépendant de 2 paramètres, nous avons donc à approximer les données par un plan dans $\mathbb{R}^3$.

On a alors comme matrice

$$A = \begin{bmatrix} ln(1,0) & ln(1,39) \\ ln(1,436) & ln(2,0) \\ ln(2,52) & ln(3,72) \\ ln(5,12) & ln(5,12) \end{bmatrix}$$

Montrons que les vecteurs colonne de A sont indépendants. Soient $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} ln(1,0) \\ ln(1,436) \\ ln(2,52) \\ ln(5,12) \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} ln(1,39) \\ ln(2,0) \\ ln(3,72) \\ ln(5,12) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La première ligne du système nous donne :

$$\alpha_1 ln(1,0) + \alpha_2 ln(1,39) = 0$$

Or $ln(1,0) = 0$ donc on obtient que $\alpha_2 = 0$. Ainsi en prenant la ligne 2, comme $\alpha_2 = 0$, il vient que : $\alpha_1 ln(1,436) = 0 \implies \alpha_1 = 0$. Ainsi on peut conclure que les vecteurs colonnes de A sont linéairement indépendants.
On cherche $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ qui minimise $\|y - A\lambda\|_2^2$ avec :

$$y = \begin{bmatrix} ln(1,9) \\ ln(5,6) \\ ln(33,75) \\ ln(134,22) \end{bmatrix}$$

En résolvant l'équation normale, on trouve $\lambda_1 = 1.0684741810570004$ et $\lambda_2 = 1.929940764255137$.

L'erreur au sens de la somme des écarts quadratiques est donnée par $\epsilon = \|g(x_1, x_2) - (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)\|_2^2$.

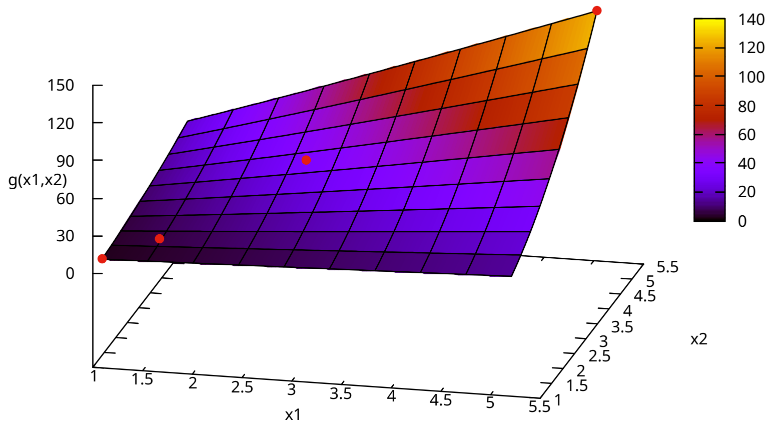
$$\epsilon = \phi(\lambda^*) = \| \ y - A\lambda^* \ \|_2^2$$

$$\epsilon = \| \begin{bmatrix} ln(1,9) \\ ln(5,6) \\ ln(33,75) \\ ln(134,22) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ln(1,0) & ln(1,39) \\ ln(1,436) & ln(2,0) \\ ln(2,52) & ln(3,72) \\ ln(5,12) & ln(5,12) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} \|_2^2$$

$$\epsilon = 0.008067044338762949$$

```
Lambdas 1 et 2 :
1.0684741810569958 1.92994076425514
Erreur au sens des moindres carrés :
0.008067044338762843
```

Résultat numérique



Représantation de la surface approximant le phénomène physique décrit par les points

6.3 Approximation d'un phénomène physique 2

On suppose qu'un phénomène physique admet approximativement la relation suivante $ln(v) \simeq a\frac{x}{z} + be^x$. On suppose que l'on dispose de N couples (x, z) de points. et N valeurs $v(x, z)$.

Posons la matrice

$$A\lambda = \begin{bmatrix} \frac{x^{(1)}}{z^{(1)}} & e^{x^{(1)}} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{x^{(N)}}{z^{(N)}} & e^{x^{(N)}} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

On pose $\varphi_1(x, y) = \frac{x}{z}$ et $\varphi_2(x, y) = e^x$, ces fonctions sont linéairement indépendantes.

On suppose les vecteurs $(\varphi_1(x^{(1)}), ..., (\varphi_j(x^{(N)})^t \ \forall j \in 1, 2$ indépendants.

On prend ensuite le vecteur

$$y = \begin{bmatrix} ln(v^{(1)}) \\ \vdots \\ ln(v^{(N)}) \end{bmatrix}$$

et on applique la méthode vu dans la partie théorique. L'erreur commise au sens des moindres carrées est alors donné par $\epsilon = \|y - A\lambda^*\|_2^2$.

6.4 Ajustement d'un cercle dans le plan

6.4.1 Cercle

Pour ajuster des points dans le plan, nous reprenons l'équation d'un cercle $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$. Que nous transformons ainsi : $-2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = -(x^2 + y^2)$. On peut réecrire cette expression pour l'adapté au problème des moindres carré.

$$\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 = -(x^2 + y^2)$$

Avec $\lambda_1 = -2a$,$\lambda_2 = -2b$,$\lambda_3 = a^2 + b^2 - r^2$
le système peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_N & y_N & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(x_1^2 + y_1^2) \\ \vdots \\ -(x_N^2 + y_N^2) \end{bmatrix}$$

On pose $\varphi_1(x,y) = x$, $\varphi_2(x,y) = y$ et $\varphi_3(x,y) = 1$. Ces fonctions sont linéairement indépendantes car forme la base canonique des polynômes à deux indéterminées On suppose les vecteurs $(\varphi_1(x^{(1)}), ..., (\varphi_j(x^{(N)})^t \ \ \forall j \in 1,2,3$ indépendants.
On dispose dans notre cas de 4 points $(0,0)$, $(4,0)$, $(0,4)$, $(5,6)$. On a donc la matrice A suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

Montrons que les vecteurs colonne de A sont linéairement indépendants. Soient $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La ligne 1 nous donne $\alpha_3 = 0$, puis on déduit de la ligne 2 que $\alpha_2 = 0$ et finalement la ligne 3 nous donne $\alpha_1 = 0$. Ainsi les vecteurs colonne de A sont linéairement indépendants.
Après résolution du système, on trouve

$$\lambda_1 = -5.619047619047616$$
$$\lambda_2 = -5.7539682539682575$$
$$\lambda_3 = 3.777777777777786$$

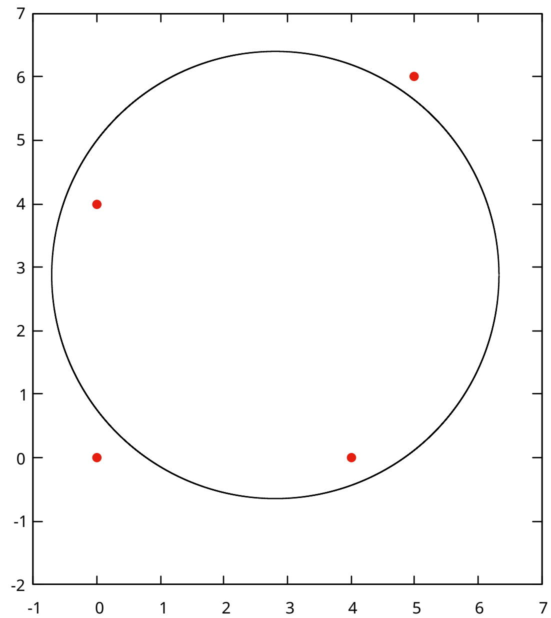
.

On résout ensuite le système pour trouver l'origine et le rayon du cercle. Ainsi

$$a = 2.809523809523808$$
$$b = 2.8769841269841288$$
$$r = 3.5203244062759347$$

```
Lambda 1, 2 et 3 :
-5.619047619047617 -5.753968253968256 3.7777777777777755
Coordonnées du centre du cercle et son rayon :
2.8095238095238084 2.876984126984128 3.5203244062759365
erreur
6.057921483348293
```

Résultats numériques



Approximation de quatre points par un cercle

L'erreur d'approximation étant donnée dans la matrice $Q^T y$, nous avons $\epsilon = 6.057921483348293$.

6.4.2 Ellipse

On dispose de l'équation d'une ellipse $ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + h = 0$.

On peut réécrire cette équation sous la forme en supposant $c \neq 0$:

$$\frac{a}{c}x^2 + 2\frac{b}{c}xy + \frac{d}{c}x + \frac{e}{c}y + \frac{h}{c} = y^2$$

On pose alors $f(x, y) = y^2$.

Le système s'écrite sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} \varphi_1(x^{(1)}, y^{(1)}) & \dots & \varphi_5(x^{(1)}, y^{(1)}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1(x^{(10)}, y^{(10)}) & \dots & \varphi_5(x^{(10)}, y^{(10)}) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y^{2(1)} \\ \vdots \\ y^{2(10)} \end{bmatrix}$$

Où

$$\begin{cases} \varphi_1(x,y) & = x^2 \\ \varphi_2(x,y) & = xy \\ \varphi_3(x,y) & = x \\ \varphi_4(x,y) & = y \\ \varphi_5(x,y) & = 1 \end{cases}$$

On suppose les vecteurs $(\varphi_1(x^{(1)}), ..., (\varphi_j(x^{(N)})^t \ \forall j \in 1, ..., 5$ indépendants, et on dispose de dix couples de points (x, y), donc $N = 10$.

On veut alors montrer que les φ_j sont indépendants pour pouvoir trouver une solution.

Soit $(x, y) \neq (0, 0)$ et $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) \in \mathbb{R}^5$
$\sum_{i=1}^{5} \alpha_i \varphi_i(x, y) = 0$

$$\iff \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \alpha_1 & \frac{\alpha_2}{2} \\ \frac{\alpha_2}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} + \alpha_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha_5 & = 0 \\ \begin{bmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} & = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \alpha_1 & \frac{\alpha_2}{2} \\ \frac{\alpha_2}{2} & 0 \end{bmatrix} & = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\iff \alpha = 0$$

Les φ_j sont bien indépendants, on peut donc appliquer la méthodes des moindres carrées comme précédemment puis résoudre le système pour trouver a,b,c,d,e et h.