Projet MSRO
GM3 2022 - 2023

# Représentation du module de la transformé de Fourier

**Étudiants :**
LANGOLFF Clément
KESSLER Aymeric

**Enseignant-responsable du projet :**
Fortier Natalie

La fonction indiacatrice peut être représentée par une fonction recangulaire.
Posons $y(t) = 1_{[0,1]}(t)$

$$1_{[0,1]}(t) = \begin{cases} 1 & si\ 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

$$\iff 1_{[0,1]}(t) = \begin{cases} 1 & si\ -\frac{1}{2} \leq t - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \\ 0 & sinon \end{cases}$$

$$\iff 1_{[0,1]}(t) = rect_{\frac{1}{2}}(t - \frac{1}{2})$$

Calculons maintenant la transformée de Fourier de la fonction indicatrice entre 0 et 1 :

$$\begin{aligned} Y(f) &= \int rect_{\frac{1}{2}}(t - \frac{1}{2})e^{-2\pi jft}dt \\ &= \int rect_{\frac{1}{2}}(u)e^{-2\pi jf(u+\frac{1}{2})}du \\ &= e^{-\pi jf} \int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi jf(u+\frac{1}{2})}du \\ &= e^{-\pi jf} sinc(f)\ (décalage\ temporelle) \end{aligned}$$

De même pour $z(t) = 1_{[0,2]}(t)$ , on trouve $Z(f) = 2e^{-2\pi jf} sinc(2f)$.
La transformée de Fourier est stable par addition, donc

$$x(t) = y(t) + z(t) \rightarrow^{TF} X(f) = e^{-\pi jf} sinc(f) + 2e^{-2\pi jf} sinc(2f)$$

.

Or

$$\begin{aligned} X(f) &= e^{-\pi jf} \frac{sin(\pi f)}{\pi f} + e^{-2\pi jf} \frac{sin(2\pi f)}{\pi f} \\ &= e^{-\pi jf} \frac{sin(\pi f)}{\pi f} + e^{-2\pi jf} \frac{2sin(\pi f)cos(\pi f)}{\pi f} \\ &= e^{-\pi jf} sinc(f) \left[1 + 2e^{-\pi jf} cos(\pi f)\right] \end{aligned}$$

On calcule ensuite le module de $X(f)$

$$\begin{aligned} |X(f)| &= |e^{-\pi jf} sinc(f) \left[1 + 2e^{-\pi jf} cos(\pi f)\right] | \\ &= |sinc(f)| \quad \underbrace{|1 + 2e^{-\pi jf} cos(\pi f)|}_{\sqrt{Z\overline{Z}}\ avec\ Z=1+2e^{-\pi jf} cos(\pi f)} \end{aligned}$$

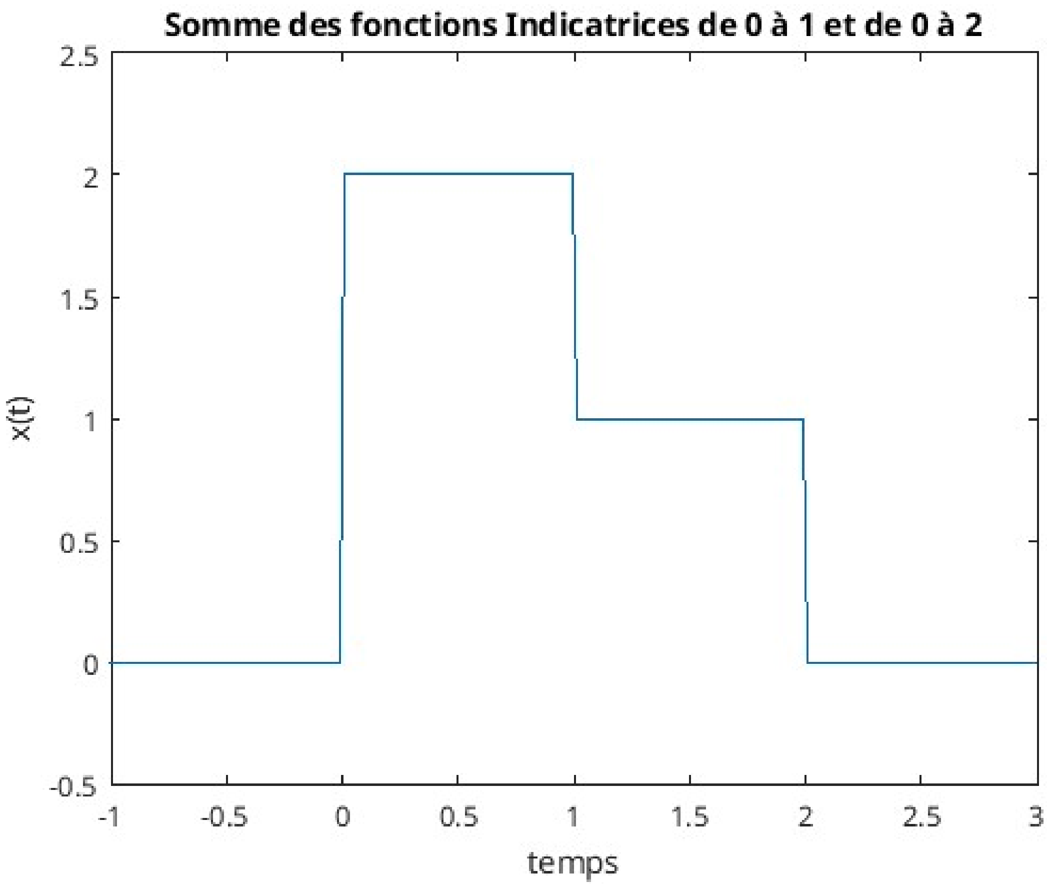
or

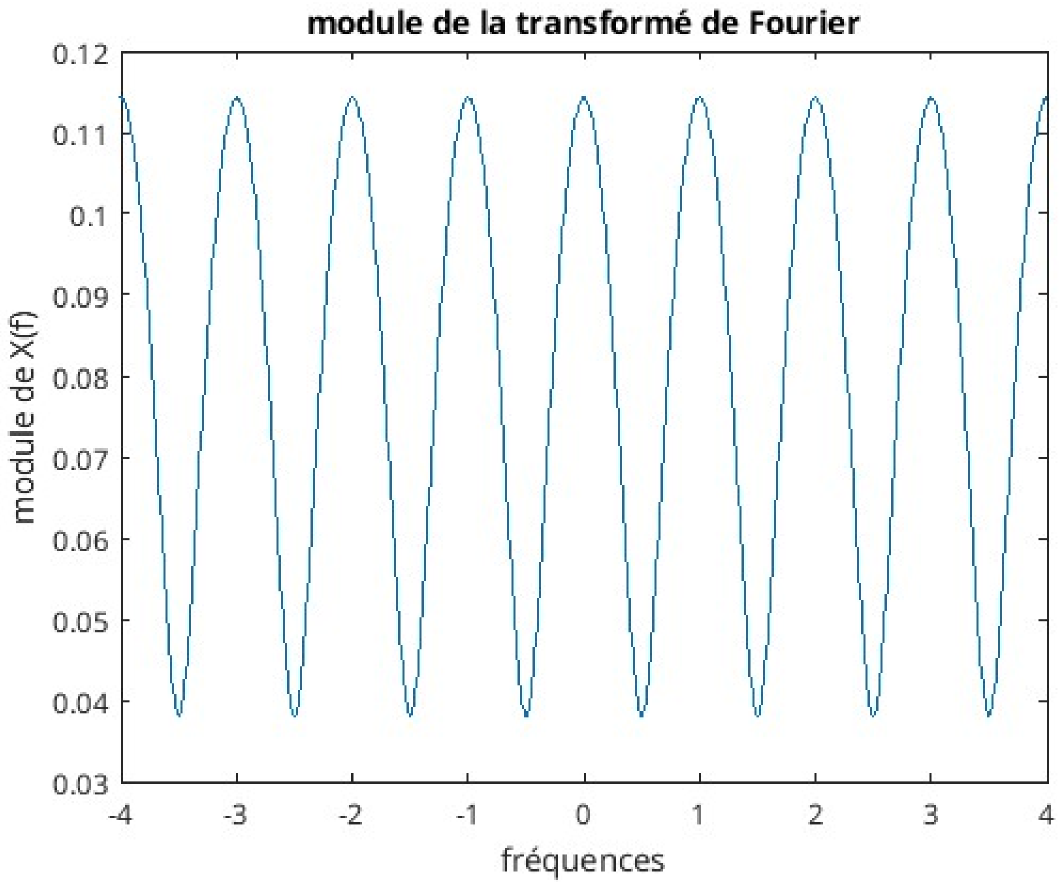
$$\begin{aligned} (1 + 2e^{-\pi jf} cos(\pi f))(1 + 2e^{\pi jf} cos(\pi f) &= 1 + 2cos(\pi f) \left[e^{-\pi jf} + e^{\pi jf}\right] + 4cos^2(\pi f) \\ &= 1 + 4cos^2(\pi f) + 4cos^2(\pi f) \\ &= 1 + 8(\frac{1 + cos(2\pi f)}{2}) \\ &= 5 + 4cos(2\pi f) \end{aligned}$$

Ainsi

$$|X(f)| = |sinc(f)|\sqrt{5 + 4cos(2\pi f)}$$

Nous donnons par la suite une représentation graphique du signal $x(t)$ ainsi que le graphe du module de sa transformée de Fourier.




module de la transformé de Fourier
module de X(f)
fréquences
0.12
0.11
0.1
0.09
0.08
0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4