

Part I

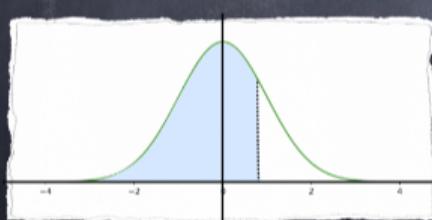
Quadrature polynomiale

Objectif :

Étant donné une fonction $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, on souhaite calculer numériquement l'intégrale

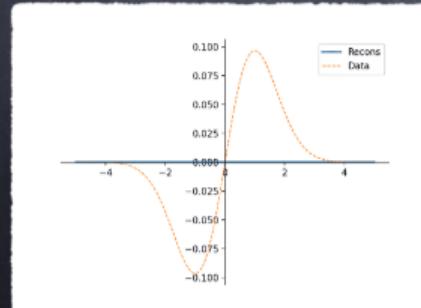
$$I = \int_a^b f(x) dx$$

Exemples d'application : ① Table de la Loi normale



$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}/\sqrt{2\pi}$$

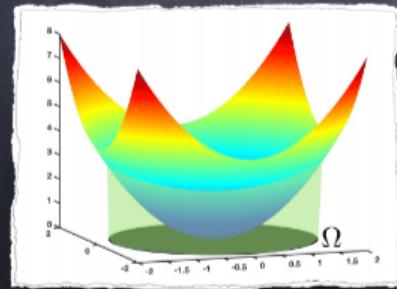
Exemples d'application : ② Table de la Loi normale



③ Calcul (numérique) de séries de Fourier (ou autre transformée)

$$a_n = \int_0^T \cos(2\pi n x) f(x) dx$$

Exemples d'application : ④ Table de la Loi normale



⑤ Calcul de séries de Fourier
⑥ Calcul de volume (méthodes des EF, GM 4)
⑦ Construction de schéma pour les EDO (cf. dernier chapitre)

1 Quadrature de Newton-Côtes

1.1 Définition

Une formule de quadrature est définie par un ensemble de **n+1 points** $a \leq x_0 < \dots < x_n \leq b$ associé à **n+1 poids** ω_i

$$I = \sum_{i=0}^n \omega_i f(x_i) + R_n(f)$$

où $R_n(f)$ est appelé le reste.

1.2 Définition

On dira qu'une formule de quadrature est exacte sur \mathbb{P}_k ssi $R_n(f) = 0 \quad \forall f \in \mathbb{P}_k$.

1.3 Proposition

La formule est exacte sur \mathbb{P}_k ssi $R_n(x^i) = 0 \quad \forall i \in \{0, \dots, k\}$.

Preuve

(sens direct) Supposons que la formule soit exacte sur $P[X^k]$ alors $\forall i \in \{0, \dots, k\}$ on a $f(x) = x^i \in P[X^k]$ et donc $R_n(f) = I - \sum_{j=0}^n w_j x_j^i = 0$

(sens indirect) Supposons maintenant que $R_n(x^i) = 0 \quad \forall i \in \{0, \dots, k\}$ où $R_n(x^i) = \int_a^b x^i dx - \sum_{j=0}^n w_j x_j^i$
Soit $f \in P[X^k] \iff f(x) = \sum_{l=0}^k a_l x^l$

$$\begin{aligned} R_n(f) &= \int_a^b \sum_{l=0}^k a_l x^l dx - \sum_{j=0}^n w_j \sum_{l=0}^k a_l x_j^l \\ &= \sum_{l=0}^k a_l \underbrace{\left[\int_a^b x^l dx - \sum_{j=0}^n w_j x_j^l \right]}_{R_n(x^l)=0} = 0 \end{aligned}$$

Méthodes de Newton-Côtes :

Considérons les points équirépartis $x_i = a + ih$, $h = \frac{b-a}{n}$

Une idée alors pour calculer I est de remplacer f par son polynôme d'interpolation $P_n f$:

$$P_n f(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i^n(x)$$

On déduit alors la formule de quadrature :

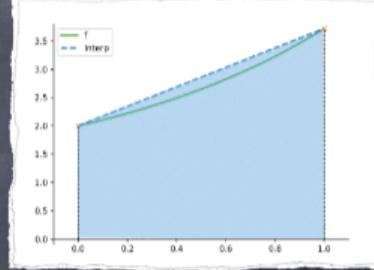
$$\begin{aligned} I &= \int_a^b \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i^n(x) + E_n f(x) dx \quad \text{où } E_n f = f(x) - P_n f(x) \\ &= \sum_{i=0}^n f(x_i) \int_a^b L_i^n(x) dx + R_n f = \sum_{i=0}^n f(x_i) \omega_i + R_n f \end{aligned}$$

Méthodes de Newton-Côtes :

② Formule des trapèzes ($n=1$)

$$I = \frac{b-a}{2} \left(f(a) + f(b) \right) + R_1(f)$$

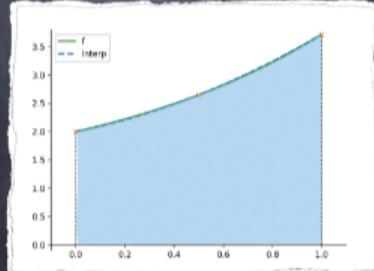
(détails au (vrai) tableau)



③ Formule de Simpson ($n=2$)

$$I = \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) + R_2(f)$$

(détails au (vrai) tableau)



Formule des Trapèze :

On cherche w_0 et w_1 tel que $I = w_0 f(a) + w_1 f(b) + R_1(f)$ avec $R_1(f)$ si

$$f \in P[X^1]$$

Or

$$\begin{aligned} R_1(f) = 0 \quad f \in P[X^1] &\iff \begin{cases} R_1(1) = 0 \\ R_1(x) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \int_a^b 1 dx - (w_0a + w_1b) = 0 \\ \int_a^b x dx - (w_0a + w_1b) = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} b-a = w_0 + w_1 \\ \frac{b^2-a^2}{2} = aw_0 + bw_1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} b-a = w_0 + w_1 \\ (b-a)w_1 = \frac{b^2-a^2}{2} - a(b-a) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} b-a = w_0 + w_1 \\ w_1 = \frac{(a-b)^2}{2(b-a)} = \frac{b-a}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Formule de Simpson :

Pour les formules de Newton Cotes, on a $w_i = \int_a^b L_i^n(x) dx$

Rappel (vue en TD) $w_i = w_{n-i}$

Une autre façon de calculer les w_i est d'utiliser le fait que $R_2(x^i) = 0 \forall i \in \{0, 1, 2\}$ (exacte sur $P[X^2]$)

$$\iff \begin{cases} \int_a^b 1 dx - (w_0 + w_1 + w_2) = 0 \\ \int_a^b x dx - (aw_0 + \frac{a+b}{2}w_1 + bw_2) = 0 \\ \int_a^b x^2 dx - (a^2w_0 + (\frac{a+b}{2})^2 w_1 + b^2w_2) = 0 \end{cases}$$

Forme générale des méthodes de Newton-Côtes :

$$I = \sum_{i=0}^n f(x_i) \omega_i + R_n f \quad \text{où} \quad \omega_i = \int_a^b L_i^n(x) dx$$

1.4 Proposition (cf TD)

Les poids ω_i vérifient $\omega_{n-i} = \omega_i$.

Preuve

On a $x_{n-i} = a + (n-i)h$ avec $h = \frac{b-a}{n} \iff a + nh - ih \iff a + b - a - ih = b - ih$

et $\frac{a+b}{2} - (x_i - \frac{a+b}{2}) = a + b - x_i = a + b - ih - a = b - ih$ donc $x_{n-i} = a + b - x_i$

Montrons que $\tilde{L}_i^n(a + b - x) - L_{n-i}^n(x)$

en effet, si on pose $v(x) = L_{n-i}^n(x) - L_i^n(a + b - x) \forall P[X^n]$

On a $v(x_j) = L_{n-i}^n(x_j) - L_i^n(a + b - x_j) = \underbrace{L_i^n(a + b - x_j)}_{x_{n-j}} = \delta_{j,n-i} - \delta_{i,n-j}$

v a $n + 1$ racines et $v \in P[X^n]$ donc $v = 0$

Par conséquent, $L_i^n(a + b - x) = L_{n-i}^n(x)$

et donc

$$\begin{aligned} w_{n-i} &= \int_a^b L_{n-i}^n(x) dx \\ &= \int_a^b L_i^n(a + b - x) dx \\ &= \int_b^a L_i^n(x) dx \\ &= \int_a^b L_i^n(x) dx = w_i \end{aligned}$$

1.5 Corollaire

Les formules de Newton-Côtes sont exactes sur \mathbb{P}_n si n est impair et sur \mathbb{P}_{n+1} si n est pair.

Preuve

Idée : Si n est paire, la formule de Newton Cotes est exacte sur $P[X^{n+1}]$

On sait déjà que par construction, elle est exacte sur $P[X^n]$, a-t-on en plus $R(x^{n+1}) = 0$?

Montrons plutôt que (équivalent) $R((x - \frac{a+b}{2})^{n+1}) = 0$, pour avoir un interval centré sur $[a, b]$

$$R((x - \frac{a+b}{2})^{n+1}) = \int_a^b (x - \frac{a+b}{2})^{n+1} dx - \underbrace{\sum_{i=0}^n w_i (x_i - \frac{a+b}{2})^{n+1}}_{S=0}$$

$$\text{En effet, } 2S = \sum_{i=0}^n w_i (x_i - \frac{a+b}{2})^{n+1} + \sum_{i=0}^n \underbrace{w_{n-i}}_{w_i} \underbrace{(x_{n-i} - \frac{a+b}{2})^{n+1}}_{-(x_i - \frac{a+b}{2})^{n+1}} = 0$$

donc $S = 0$.

1.6 Définition

Une formule de quadrature est dite convergente sur un espace de Banach V ssi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n f = 0 \quad \forall f \in V$$

1.6 Théorème (admis)

Une formule de quadrature est convergente ssi elle est

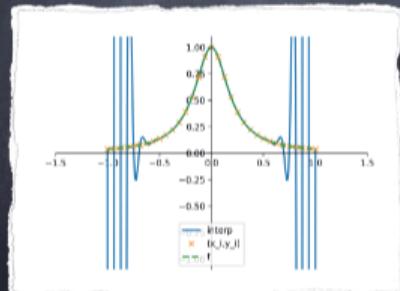
• convergente sur W un sous espace dense de V

• stable, i.e. $\exists M$ indépendant de n t.q. $\sum_{i=0}^n |\omega_i| \leq M$

Méthodes de Newton-Côtes :

Par construction, ces formules sont convergentes sur \mathbb{P} .

En revanche, elles ne sont pas stables, et donc non convergente !



On ne peut donc pas utiliser ces méthodes directement pour n grand !

Rappel du phénomène de Runge.

2 Quadrature de Gauss

2.1 Choix optimal des points

Idée :

À la différence des méthodes de N-C, nous allons chercher les positions optimales des points de quadrature.

2.1 Théorème

Une méthode de quadrature est exacte sur \mathbb{P}_{2n+1} ssi

- ① Les points vérifient $\int_a^b x^j \prod_{i=0}^n (x-x_i) dx = 0 \quad \forall j \in \{0, \dots, n\}$
- ② les poids vérifient $w_i = \int_a^b L_i^n(x) dx \quad \forall i \in \{0, \dots, n\}$

Preuve

(sens direct) Supposons la formule exacte sur $P[X^{2n+1}]$

$$\begin{aligned} \int_a^b L_k^n(x) dx &= \sum_{i=0}^n w_i \underbrace{L_k^n(x_i)}_{\delta_{ki}} \\ \iff w_k &= \int_a^b L_k^n(x) dx \end{aligned}$$

Notons $v_n(x) = \sum_{i=0}^n (x - x_i) \in P[X^{n+1}]$

On a $x^j v_n(x) \in P[X^{n+i+j}] \subset P[X^{2n+1}] \quad \forall j \in \{0, \dots, n\}$

Par conséquent $\int_a^b x^j v_n(x) dx = \sum_{i=0}^n w_i x_i^j \underbrace{v_n(x_i)}_0 = 0$

(sens indirect)

Supposons que $w_i = \int_a^b L_i^n(x) dx$ et $\int_a^b x^j v_n(x) dx = 0 \quad \forall j \in \{0, \dots, n\}$ alors on est exacte sur $P[X^n]$ au moins.

En effet, $\int_a^b p_n dx = \int_a^b \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i^n(x) dx = \sum_{i=0}^n f(x_i) \underbrace{\int_a^b L_i^n(x) dx}_{w_i}$

Soit $p \in P[X^{2n+1}]$ on a $p(x) = \underbrace{v_n(x)}_{deg=n+1} + \underbrace{d(x)}_{deg=n} + \underbrace{r(x)}_{deg=n}$ de plus $\forall q \in P[X^n]$,

$$\int_a^b q(x)v_n(x)dx = \int_a^b \sum_{j=0}^n q_j x^j v_n(x)dx$$

$$\sum_{j=0}^n q_j \int_a^b x^j v_n(x)dx = 0$$

Ainsi,

$$\int_a^b p(x)dx = \underbrace{\int_a^b d(x)v_n(x)dx}_0 + \int_a^b \underbrace{r(x)}_{deg=n} dx$$

$$= \sum_{i=0}^n w_i r(x_i)$$

Or $p(x_i) = v_n(x_i)d(x_i)+r(x_i)$ donc $\int_a^b p(x)dx = \sum_{i=0}^n w_i p(x_i) \quad \forall p \in P[X^{2n+1}]$

Remarque : Si la formule est exacte sur \mathbb{P}_k , $k \geq n$, alors les poids sont définis nécessairement comme ci-dessus.

Remarque 2 : Une formule de quadrature ne peut pas être exacte sur \mathbb{P}_{2n+2} . 1

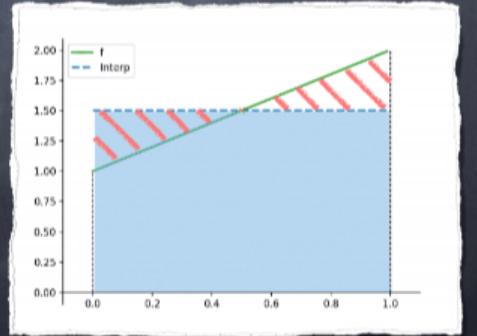
On se demande maintenant s'il existe des points vérifiant la relation précédente, et si oui, comment les déterminer.

Un exemple de méthode de Gauss (point milieu) :

Prenons le cas $n=0$, $a = -1$ et $b = 1$. La condition précédente devient alors :

$$\int_{-1}^1 (x-x_1)dx = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$$

Avec 1 point on construit une formule exacte sur \mathbb{P}_1 !



On se demande maintenant s'il existe des points vérifiant la relation précédente, et si oui, comment les déterminer.

Trouver les points x_i t.q. $\int_a^b x^j \prod_{i=0}^n (x-x_i) dx = 0 \quad \forall j \in \{0, \dots, n\}$

revient à trouver $v_n \in \mathbb{P}_{n+1}$ t.q. $v_n(x) = x^{n+1} + \dots$, vérifiant

$$\int_a^b x^j v_n(x) dx = 0 \quad \forall j \in \{0, \dots, n\}$$

et ayant des racines réelles distinctes.

Remarque :

Dans l'exemple précédent, nous avons $v_0 = x$.

2.2 Proposition

Il existe un unique polynôme de la forme $v_n = x^{n+1} + \dots$ vérifiant :

$$\int_a^b x^j v_n(x) dx = 0 \quad \forall j \in \{0, \dots, n\}$$

Preuve

Montrons l'unicité :

Supposons v_1 et v_2 2 solutions, alors $q = v_1 - v_2$ vérifie :

- $q \in P[X^n]$
- $\int_a^b q(x)x^j dx = 0 \quad \forall j \in \{0, \dots, n\}$

Remarque : $\int_a^b v_n(x)x^j dx = 0 \quad \forall j \in \{0, \dots, n\} \iff \int_a^b v_n(x)p(x)dx = 0 \quad p \in P[X^n]$

Ainsi

$$\begin{aligned} \int_a^b q(x)x^j dx &= 0 \quad \forall j \in \{0, \dots, n\} \\ \iff \int_a^b q(x)p(x)dx &= 0 \quad \forall p \in P[X^n] \end{aligned}$$

En particulier, pour $p = q \in P[X^n]$ on a $\int_a^b q^2(x)dx = 0 \iff q = 0$

Existence :

$v_n(x) = x^{n+1} + a_n x^n + \dots + a_0$
les conditions $\forall j \in \{0, \dots, n\}$

$$\begin{aligned} \int_a^b v_n(x)x^j dx &= 0 \iff \int_a^b x^{n+1}x^j dx + \sum_{i=0}^n a_i \int_a^b x^j x^i dx = 0 \\ \iff \sum_{i=0}^n a_i \underbrace{\int_a^b x^j x^i dx}_{M_{ij}} &= - \underbrace{\int_a^b x^{n+1+j} dx}_{b_j} \\ \iff Ma &= b \end{aligned}$$

où M est une matrice carré de dimension $(n+1) \times (n+1)$ et elle est injective car on a l'unicité. Donc par le théorème du rang, elle est bijective donc il existe une solution.

2.3 Proposition

Les racines de v_n sont réelles, distinctes, dans l'intervalle $[a, b]$ et symétriques par rapport à $\frac{a+b}{2}$.

Preuve

Montrons que les racines sont réelles :

Comme les coefficients de v_n sont réelles, si c est une racine, alors \bar{c} est aussi une racine.

On a de plus $\int_a^b v_n(x)x^j dx \quad \forall j \in \{0, \dots, n\}$ et $\int_a^b v_n(x)p(x)dx \quad \forall p \in P[X^n]$
On a $v_n(x) = \underbrace{(x - c)(x - \bar{c})}_{>0 \text{ car racine complexe + fonction } x^2} \prod_{i=2}^n (x - x_i)$

Pour $p(x) = \prod_{i=2}^n (x - x_i) \in P[X^n]$, on a

$$\int_a^b \underbrace{v_n(x)}_{=0} p(x)dx = \int_a^b (x - c)(x - \bar{c})p^2(x)dx$$

On a donc une contradiction , donc toutes les racines sont réelles.

Montrons que les racines sont distinctes :

Supposons $x_0 = x_1$, alors $v_n = (x - x_0)^2 \prod_{i=2}^n (x - x_i)$

Comme avant, on prend $p(x) = \prod_{i=2}^n (x - x_i)$ et on arrive à une contradiction.

Montrons que les racines sont dans $[a, b]$:

Notons les racines ordonnées $x_0 < x_1 < \dots < x_n$

Supposons que $x_i < a \quad \forall i \leq k$

$$\text{alors } v_n(x) = \underbrace{\prod_{i=0}^k (x - x_i)}_{\text{signe constant} > 0 \text{ car } x - x_i > 0 \forall i \in \{0, \dots, k\}} \prod_{i=k+1}^n (x - x_i)$$

En prenant $p(x) = \prod_{i=k+1}^n (x - x_i)$ on aura à nouveau une contradiction

De plus on a la symétrie des racines :

On montre que $v_n(x) = v_n(a + b - x)$.

Construction des v_n :

Les $(v_n)_n$ forment une base de \mathbb{P}_{n+1} (en posant $v_{-1} = 1$).

2.4 Proposition

La famille de polynôme $(v_n)_n$ vérifie

$$\int_a^b v_j(x) v_n(x) dx = 0 \quad \forall j \in \{0, \dots, n-1\}$$

Preuve : au (vrai) tableau !



On dit qu'ils forment une famille de polynôme orthogonaux

Preuve

Le résultat est direct en notant que $v_j \in P[X^n] \quad \forall j \in \{0, \dots, n-1\}$

Remarque La famille de polynôme $(v_i)_{i \in \{-1..n\}}$ forme une base de $P[X^{n+1}]$ (car tous de degrés \neq)

2.5 Théorème

La famille de polynôme $(v_n)_n$ vérifie une relation de récurrence à trois termes :

$$v_{n+1}(x) = (x + A_n) v_n(x) - B_n v_{n-1}(x)$$

Preuve

On a

$$\underbrace{xv_n}_{\deg n+1} \in P[X^{n+2}]$$

Les $(v_j)_{j \in \{-1, \dots, n+1\}}$ formant une base de $P[X^{n+2}]$, on a ($v_{-1} = 1$)

$$\begin{aligned} xv_n(x) &= \sum_{j=-1}^{n+1} \alpha_j v_j(x) \text{ } n+3 \text{ termes} \\ x(x^{n+1} + \dots) &= \alpha_{n+1}(x^{n+2} + \dots) + \dots \end{aligned}$$

Donc nécessairement, $\alpha_{n+1} = 1$.

Ainsi,

$$xv_n(x) = v_{n+1} + \sum_{j=-1}^n \alpha_j v_j(x)$$

On en déduit que

$$\int_a^b xv_n(x)v_k(x)dx = \int_a^b v_{n+1}(x)v_k(x)dx + \sum_{j=-1}^n \alpha_j \underbrace{\int_a^b v_j(x)v_k(x)dx}_{\delta_{jk} \int_a^b v_k^2(x)dx}$$

Donc pour $k \leq n-2$

$$\underbrace{\int_a^b v_n(x) \underbrace{xv_k(x)}_{\deg k+2 \leq n} dx}_{0} = \alpha_k \underbrace{\int_a^b v_k^2(x)dx}_{>0}$$

D'où $\alpha_k = 0 \forall k \leq n-2$

On obtient ainsi

$$xv_n(x) = v_{n+1} + \alpha_n v_n(x) + \alpha_{n-1} v_{n-1}(x)$$

D'où la relation de récurrence.

Construction des v_n :

Pour construire la famille des $(v_n)_n$, on peut utiliser la relation de récurrence :

$$v_{n+1}(x) = (x + A_n) v_n(x) - B_n v_{n-1}(x)$$

Ensuite, afin de déterminer les racines dans le cas général, il est utile d'utiliser le résultat suivant :

2.6 Théorème

Les racines de v_{n+1} entourent celles de v_n .

Construction des v_n :

Pour construire la famille des $(v_n)_n$, on peut utiliser la relation de récurrence :

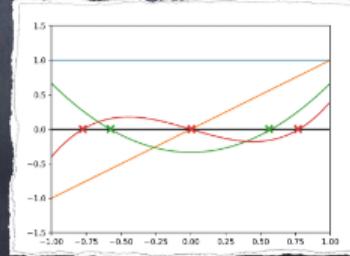
$$v_{n+1}(x) = (x + A_n) v_n(x) - B_n v_{n-1}(x)$$

Polynômes de Legendre ($[a,b] = [-1,1]$) :

Dans ce cas, on obtient :

$$v_{-1} = 1 \quad v_0 = x \quad v_1 = x^2 - \frac{1}{3}$$

$$v_2 = x^3 - \frac{3}{5}x \quad \dots$$



2.2 Analyse de convergence

2.7 Théorème

Les méthodes de Gauss sont stables et convergentes sur $C^\infty([a,b])$.

Preuve

Rappel Une formule de quadrature $I = \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) + R_n(f)$ est convergente sur $C^\infty([a,b])$ ssi

- Elle est convergente sur W dense dans $C^\infty([a,b])$ (on peut approcher n'importe quelle fonction de C^∞ par une suite d'élément de W) (l'ensemble des polynômes est dense dans C^∞).
- et elle est stable : $\exists M \text{ tq } \sum_{i=0}^n |w_i| \leq M$ où M est indépendant de n

Dans notre cas, la formule est exacte sur $P[X^{2n+1}]$ donc converge dans $W = P$ (l'ensemble des polynômes dense dans C^∞).

Il reste à montrer $\exists M \text{ tq } \sum_{i=0}^n |w_i| \leq M$.

On a $w_i = \int_a^b \underbrace{L_i^n(x)}_{\deg n} dx$

D'une part, on a $\int_a^b \underbrace{(L_i^n(x))^2}_{\in P[X^{2n+1}]} dx = \sum_{i=0}^n (L_k^n)^2(x_i) w_i + 0$ (la formule est

exacte)

Or $L_k^n(x_i) = \delta_{ik}$ donc $(L_k^n)^2(x_i) = \delta_{ik}$

Ainsi

$$w_k = \int_a^b (L_k^n)^2(x) dx$$

D'autre part, pour $f = 1 \in P[X^{2n+1}]$, on a

$$\int_a^b 1 dx = \sum_{i=0}^n w_i = b - a$$

Comme $w_i \geq 0$, on a $\sum_{i=0}^n |w_i| = \sum_{i=0}^n w_i \leq b - a$ (ici c'est même égale). Donc la formule est stable.

2.8 Proposition

Si f est $C^{2n+2}([a,b])$ alors on a :

$$R_n(f) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \int_a^b v_n^2(x) dx$$

Preuve

Posons P_n le polynôme d'Hermite associé à f tel que $P_n^j(x_i) = f^{(j)}(x_i) \forall j \in \{0, 1\} \forall i \in \{0, \dots, n\}$.

$$R_n(f) = \int_a^b f(x) - P_n(x) dx + \underbrace{\int_a^b P_n(x) dx}_{\in P[X^{2n+1}]} - \sum_{i=0}^n w_i f(x_i)$$

On a $\int_a^b P_n(x) dx = \sum_{i=0}^n w_i P_n(x_i)$ (car exacte sur $P[X^{2n+1}]$) donc $R_n(f) = \int_a^b f(x) - P_n(x) dx$
En rappelant que

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!} v_n^2(x)$$

On obtient grâce au théorème de la moyenne :

$$R_n(f) = \int_a^b \frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!} \underbrace{v_n^2(x) dx}_{\geq 0} = \frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!} \int_a^b v_n^2(x) dx$$

Quelques remarques :

Les méthodes de Gauss sont convergentes, à la différence des méthodes de Newton-Côtes.

Cependant, pour n grand, elles nécessitent le calcul d'un polynôme de haut degré et de ses racines, ce qui pose des difficultés...

Notons enfin que la méthode se généralise au calcul d'intégrale de la forme :

$$I = \int_a^b f(x) \omega(x) dx$$

où $\omega(x)$ est une fonction poids positive.

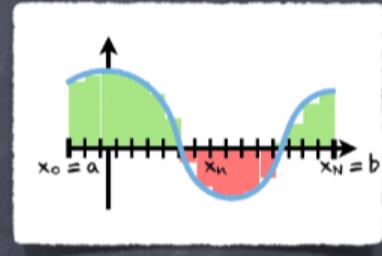
3 Méthodes composites

3.1 Construction des formules

Idée :

Revenons un peu en arrière en rappelant la construction de l'intégrale de Riemann :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N f(x_n) \frac{b-a}{N}$$



Le principe des méthodes composites est alors de diviser l'intervalle $[a,b]$ en p sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ et d'appliquer une formule de quadrature « simple » sur chaque sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$.

Méthodes composites :

Considérons une méthode de quadrature « simple » :

$$\int_{-1}^1 F(\hat{x}) d\hat{x} \simeq \sum_{i=0}^n F(\hat{x}_i) \omega_i$$

À l'aide de la relation de Chasles, on obtient facilement

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x) dx = \sum_{j=0}^{p-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x) dx \\ &= \sum_{j=0}^{p-1} \frac{x_{j+1} - x_j}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{\hat{x} + 1}{2}(x_{j+1} - x_j) + x_j\right) d\hat{x} \\ &\simeq \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{i=0}^n \frac{x_{j+1} - x_j}{2} \omega_i f(x_{i,j}) \quad \text{où } x_{i,j} = \frac{\hat{x}_i + 1}{2}(x_{j+1} - x_j) + x_j \end{aligned}$$

Méthodes composites :

Considérons une méthode de quadrature « simple » :

$$\int_{-1}^1 F(\hat{x}) d\hat{x} \simeq \sum_{i=0}^n F(\hat{x}_i) \omega_i$$

La méthode composite associée est donnée par :

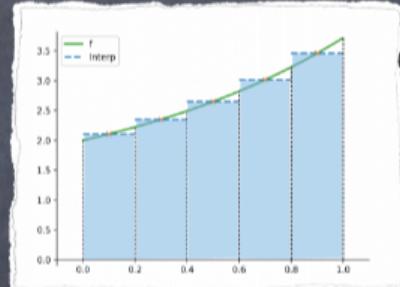
$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f(x) dx \simeq \underbrace{\sum_{j=0}^{p-1} \sum_{i=0}^n \frac{x_{j+1} - x_j}{2} \omega_i f(x_{i,j})}_{:= \bar{I}_h} \\ \text{où } x_{i,j} &= \frac{\hat{x}_i + 1}{2}(x_{j+1} - x_j) + x_j. \end{aligned}$$

Méthodes composites (cas où $x_{i+1} - x_i = h$)

② Formule du point milieu ($n=0$)

$$I_h = h \sum_{j=1}^{p-1} f\left(\frac{x_j + x_{j+1}}{2}\right)$$

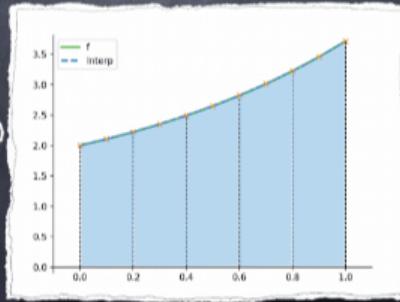
(détails au (vrai) tableau)



③ Formule de Simpson ($n=2$)

$$I_h = \frac{h}{6} \sum_{j=1}^{p-1} f(x_j) + 4f\left(\frac{x_j + x_{j+1}}{2}\right) + f(x_{j+1})$$

(détails au (vrai) tableau)



Exemple détaillé Formule du point milieu

Rappel :

$$\int_{-1}^1 f(\hat{x}) d\hat{x} \simeq f(0) \times 2$$

Cette formule est exacte sur $P[X]$.

Pour déduire la formule composite, on a

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{j=0}^{p-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x) dx$$

où $x_j = a + jh$ et $h = \frac{b-a}{p}$

On pose $x = \frac{\hat{x}+1}{2}(x_{j+1} - x_j) + x_j$ avec $\hat{x} \in [-1, 1]$

Ainsi $dx = \frac{x_{j+1}-x_j}{2} d\hat{x}$ d'où

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x) dx = \int_{-1}^1 f\left(\frac{\hat{x}+1}{2}(x_{j+1} - x_j) + x_j\right) \frac{x_{j+1} - x_j}{2} d\hat{x}$$

En appliquant la formule du point milieu, on a

$$\begin{aligned}\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx &\simeq f\left(\frac{x_{j+1}-x_j}{2} + x_j\right) \frac{x_{j+1}-x_j}{2} \times 2 \\ &\simeq (x_{j+1}-x_j)f\left(\frac{x_{j+1}+x_j}{2}\right)\end{aligned}$$

Finalement

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{j=0}^{p-1} (x_{j+1}-x_j)f\left(\frac{x_{j+1}+x_j}{2}\right)$$

3.2 Analyse de convergence

Pour simplifier, nous allons considérer dans la suite le cas $x_{i+1} - x_i = h$.

3.1 Définition

Une formule de quadrature composite est d'ordre m ssi

$$|I - I_h| = O(h^m)$$

3.2 Proposition

Si la méthode simple est exacte sur \mathbb{P}_k , $k \geq n$, et $f \in C^{k+1}$, alors :

$$|I - I_h| = O(h^{k+1})$$

Remarque : Si la formule simple n'est pas exacte sur \mathbb{P}_{k+1} , alors la formule composite sera exactement d'ordre $k+1$.

Preuve

On a (Remarque, on a pris $x_{j+1} - x_j = h$)

$$\begin{aligned}|I - I_h| &= \left| \sum_{j=0}^{p-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x) dx - \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{i=0}^n \omega_i \frac{h}{2} f(x_{ij}) \right| \\&= \left| \sum_{j=0}^{p-1} \left[\underbrace{\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x) dx - \sum_{i=0}^n \omega_i \frac{h}{2} f(x_{ij})}_{E_j} \right] \right|\end{aligned}$$

Puisque la formule simple est exacte sur $P[X^k]$, on a $\forall p \in P[X^k]$

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} p(x) dx = \sum_{i=0}^n \omega_i \frac{h}{2} p(x_{ij})$$

Posons alors p_k le polynôme de $P[X^k]$ vérifiant

$$\begin{aligned}p_k(x_{ij}) &= f(x_{ij}) \quad \forall i \in \{0, \dots, n\} \text{ } (n+1 \text{ conditions)} \\p_k(x_{lj}) &= f(x_{lj}) \quad \forall l \in \{n+1, \dots, k\} \text{ } (k-n \text{ conditions)}\end{aligned}$$

Avec x_{lj} des points d'interpolation dans $[x_j, x_{j+1}]$ différents des x_j
(On rajoute des points jusqu'au degrés d'exactitude de la formule)
Alors on a

$$E_j = \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x) - p_k(x) dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} p_k(x) dx - \sum_{i=0}^n \omega_i \frac{h}{2} f(x_{ij})$$

Et comme la formule est exacte sur $P[X^k]$, on a

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} p_k(x) dx = \sum_{i=0}^n \omega_i \frac{h}{2} \underbrace{p(x_{ij})}_{f(x_{ij})}$$

Donc

$$E_j = \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} \prod_{i=0}^n (x - x_{ij}) \prod_{l=n+1}^k (x - x_{lj}) dx$$

$$\begin{aligned}|E_j| &\leq \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{|f^{(k+1)}(\xi)|}{(k+1)!} \underbrace{\prod_{i=0}^n |(x - x_{ij})|}_{\leq h} \underbrace{\prod_{l=n+1}^k |(x - x_{lj})|}_{\leq h} dx \\&\leq \frac{\|f^{(k+1)}\|_\infty}{(k+1)!} h^{k+1} \underbrace{\int_{x_j}^{x_{j+1}} 1 dx}_h \\&\leq \frac{\|f^{(k+1)}\|_\infty}{(k+1)!} h^{k+2}\end{aligned}$$

Finalement

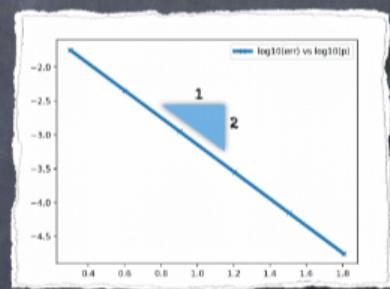
$$\begin{aligned}
 |I - I_h| &= \left| \sum_{j=0}^{p-1} E_j \right| \\
 &\leq \sum_{j=0}^{p-1} \frac{\|f^{(k+1)}\|_\infty}{(k+1)!} h^{k+2} \\
 &= \frac{\|f^{(k+1)}\|_\infty}{(k+1)!} h^{k+2} \times \underbrace{p}_{\frac{b-a}{h}} \\
 &= \frac{\|f^{(k+1)}\|_\infty}{(k+1)!} h^{k+1} (b-a)
 \end{aligned}$$

Illustration de la convergence :

② Formule du point milieu (n=0)

$$I_h = h \sum_{j=1}^{p-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$$

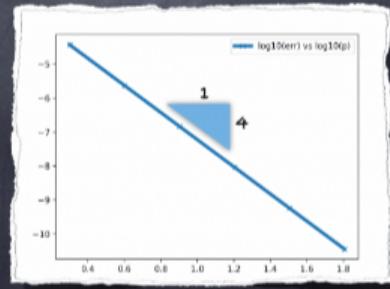
Exacte sur \mathbb{P}_1



③ Formule de Simpson (n=2)

$$I_h = \frac{h}{6} \sum_{j=1}^{p-1} f(x_i) + 4f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + f(x_{i+1})$$

Exacte sur \mathbb{P}_3



Pour résumer :

Les méthodes composites sont stables et convergentes.
Elles sont donc toujours préférées aux méthodes simples.

Pour construire une méthode composite, on procèdera ainsi :

① On établit une formule simple sur $[-1,1]$ (par exemple)

- On choisit les points de quadrature x_i

- On calcule les poids associés $\omega_i = \int_{-1}^1 L_i^n(x) dx$ ou en résolvant le système linéaire :

$$\sum_{i=0}^n \omega_i x_i^k = \int_{-1}^1 x^k dx, \quad k \in \{0, \dots, m\}$$

en cherchant m le plus grand possible.

② On établit une formule simple sur $[-1,1]$

$$\int_{-1}^1 F(\hat{x}) d\hat{x} \approx \sum_{i=0}^n F(\hat{x}_i) \omega_i$$

③ On déduit la formule composite associée.

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{i=0}^n \frac{h}{2} \omega_i f(x_{i,j})$$

4 Quelques extensions

4.1 Quadrature d'Hermite

On cherche à calculer numériquement

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

Dans les formules de quadratures présentées jusqu'ici, on utilisait uniquement des évaluations de f .

Si la fonction f est **dérivable**, une idée naturelle est alors d'utiliser également sa dérivée :

$$I = \sum_{i=0}^n \omega_i f(x_i) + \sum_{i=0}^n \omega'_i f'(x'_i) + R_n(f)$$

Remarque : Il n'est pas obligatoire d'utiliser les mêmes points d'évaluation pour f et f' .

4.1 Définition

Une formule de quadrature d'Hermite est définie par :

$$I = \sum_{i=0}^n \omega_i f(x_i) + \sum_{i=0}^n \omega'_i f'(x'_i) + R_n(f)$$

4.2 Proposition

La méthode de quadrature est exacte au plus sur \mathbb{P}_{4n+3}

Remarque : Si on a $x_i = x'_i$, la formule est alors au plus exacte sur \mathbb{P}_{2n+2} .

Remarque 2 : Il n'est cependant pas évident de déterminer les points x_i et x'_i optimaux.

Preuve

Prendre $f(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)^2 \prod_{i=0}^n (x - x'_i)^2 \in P[X^{4n+4}]$. Pour cette fonction, la formule ne peut pas être exacte.

Attention, lorsqu'on établie la formule de quadrature composite associé, il faut être vigilant à la dérivée f' !!

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{i=0}^n \frac{h}{2} \omega_i f(x_{i,j}) + \frac{h^2}{4} \omega'_0 f'(x'_{i,j})$$

Méthode simple :

$$\int_{-1}^1 \hat{f}(\hat{x}) d\hat{x} = \sum_{i=0}^n \hat{w}_i f(\hat{x}_i) + \sum_{i=0}^n \hat{w}'_i f'(\hat{x}'_i) + R(\hat{f})$$

Méthode composite :

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=0}^{p-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx$$

où $x_j = a + jh$ avec $h = \frac{b-a}{p}$

Posons $x = \frac{\hat{x}+1}{2}h + x_j \in [x_j, x_{j+1}]$ ($\hat{x} \in [-1, 1]$)

Alors,

$$\begin{aligned} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx &= \int_{-1}^1 f\left(\frac{\hat{x}+1}{2}h + x_j\right) \frac{h}{2} d\hat{x} \\ &= \frac{h}{2} \underbrace{\int_{-1}^1 f\left(\frac{\hat{x}+1}{2}h + x_j\right) d\hat{x}}_{\hat{f}(\hat{x})} \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \hat{f}'(\hat{x}) &= \frac{d}{d\hat{x}} \left(f\left(\frac{\hat{x}+1}{2}h + x_j\right) \right) \\ &= \frac{h}{2} f'\left(\frac{\hat{x}+1}{2}h + x_j\right) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx &\approx \frac{h}{2} \left(\sum_{i=0}^n \hat{w}_i f\left(\frac{\hat{x}_i+1}{2}h + x_j\right) + \sum_{i=0}^n \hat{w}'_i f'\left(\frac{\hat{x}'_i+1}{2}h + x_j\right) \right) \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{h}{2} \hat{w}_i f\left(\underbrace{\frac{\hat{x}_i+1}{2}h + x_j}_{:=x_{ij}}\right) + \sum_{i=0}^n \frac{h}{2} \hat{w}'_i f'\left(\underbrace{\frac{\hat{x}'_i+1}{2}h + x_j}_{x'_{ij}}\right) \end{aligned}$$

Un exemple de quadrature d'Hermite ($n=0$)

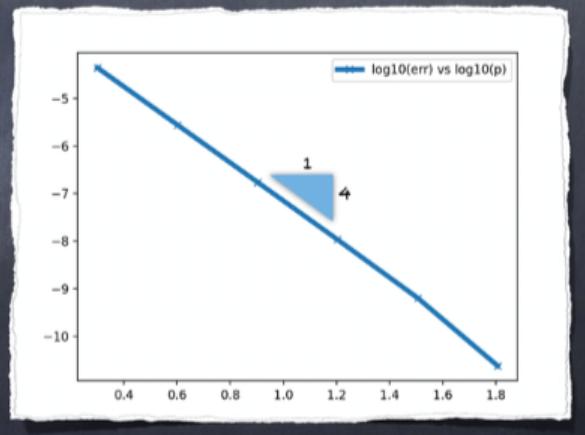
Considérons le cas suivant $I \approx \omega_0 f(x_0) + \omega'_0 f'(x'_0)$

Pour avoir une formule exacte sur \mathbb{P}_3 , on doit prendre :

$$\omega_0 = 2 \quad x_0 = -\sqrt{\frac{1}{3+2\sqrt{3}}}$$

$$\omega'_0 = -2x_0 \quad x'_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}x_0$$

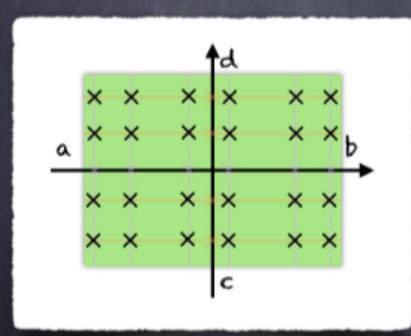
(détails au (vrai) tableau)



IV. b) En dimension supérieure

Soit Ω un sous domaine borné de \mathbb{R}^2 .

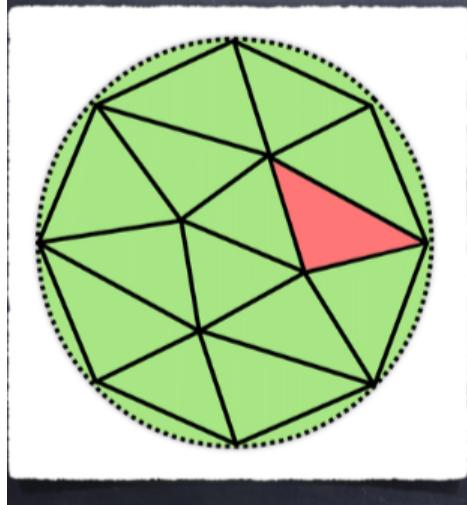
Si Ω est un **domaine cartésien**, i.e $\Omega = [a, b] \times [c, d]$, il est alors facile de construire une formule de quadrature :



$$\begin{aligned} I &= \int_a^b \int_c^d f(x,y) dy dx \\ &\simeq \sum_{i=0}^n \omega_i \int_c^d f(x_i, y) dy \\ &\simeq \sum_{i=0}^n \omega_i \sum_{j=0}^n \omega_j f(x_i, y_j) \end{aligned}$$

Soit Ω un sous domaine borné de \mathbb{R}^2 .

Dans le cas général, on doit mailler le domaine.



On applique ensuite une formule de quadrature « simple » sur chaque triangle.

La difficulté est alors d'établir une formule sur un triangle de référence.