



**TECHNIQUES**  
**DE L'INGÉNIEUR**

Réf. : **A142 V1**

Date de publication :  
**10 novembre 1993**

# Analyse harmonique, distributions, convolution

Cet article est issu de : **Sciences fondamentales | Mathématiques**

par **Thomas LACHAND-ROBERT**

**Pour toute question :**  
Service Relation clientèle  
Techniques de l'Ingénieur  
Immeuble Pleyad 1  
39, boulevard Ornano  
93288 Saint-Denis Cedex

**Par mail :**  
infos.clients@teching.com  
**Par téléphone :**  
00 33 (0)1 53 35 20 20

Document téléchargé le : **23/12/2022**

Pour le compte : **7200035676 - insa rouen normandie // 195.220.135.37**

© Techniques de l'Ingénieur | tous droits réservés

# Analyse harmonique, distributions, convolution

par **Thomas LACHAND-ROBERT**

Ancien élève de l'École Polytechnique  
Maître de Conférences à l'Université de Paris VI

<b>1. Historique</b> .....	A 142 - 3
1.1 Naissance des séries trigonométriques.....	— 3
1.2 Fourier et l'équation de la chaleur .....	— 3
1.3 La question des fonctions « arbitraires ».....	— 4
1.4 Convolution.....	— 5
<b>2. Notations</b> .....	— 6
<b>3. Distributions</b> .....	— 6
3.1 Bases mathématiques .....	— 6
3.2 Fonctions indéfiniment dérivables à support compact.....	— 8
3.3 Espace des distributions .....	— 9
3.4 Propriétés des distributions.....	— 9
3.5 Convolution.....	— 11
3.6 Exemples de distributions .....	— 12
<b>4. Transformation de Fourier</b> .....	— 13
4.1 Transformée de Fourier d'une fonction .....	— 13
4.2 Transformée d'une distribution .....	— 13
4.3 Propriétés de la transformation de Fourier .....	— 14
<b>5. Séries de Fourier</b> .....	— 16
5.1 Fonctions et distributions périodiques .....	— 16
5.2 Expression des séries de Fourier .....	— 17
5.3 Propriétés des coefficients de Fourier .....	— 19
5.4 Spectre d'une fonction périodique ou quasi périodique.....	— 22
<b>6. Calcul pratique</b> .....	— 23
6.1 Calcul des coefficients de Fourier .....	— 23
6.2 Calcul de la somme d'une série de Fourier .....	— 25
6.3 Calcul d'une transformée de Fourier .....	— 25
6.4 Transformée de Fourier rapide.....	— 25
<b>7. Extensions de la notion de transformée de Fourier</b> .....	— 27
7.1 Transformation de Laplace .....	— 27
7.2 Transformation de Hankel.....	— 29
7.3 Ondelettes .....	— 29
<b>Références bibliographiques</b> .....	— 30

**L'**analyse harmonique est, à l'origine, la branche des mathématiques qui traite des **signaux périodiques**, ou **quasi périodiques** (avec une définition que nous préciserons dans le cours de cet article). Introduite par Fourier pour l'étude de l'équation de la chaleur, où il remporta un grand succès, elle est très vite devenue un outil essentiel non seulement du mathématicien (pour la résolution de certaines équations, comme les équations des ondes ou les équations de convolution), mais aussi du physicien (pour les phénomènes d'ondes ou de propagation, l'optique, etc.), de l'astronome (mécanique céleste, spectroscopie), de l'électricien (équations des circuits électriques) ; elle trouve des applications

même en musique (car les sons sont précisément des signaux sonores périodiques), d'où elle tire d'ailleurs son attribut d'harmonique. Ces applications n'ont rien perdu de leur importance, mais elles se sont augmentées de bien d'autres depuis qu'on a généralisé le concept de **décomposition en série de Fourier**, applicable aux seules fonctions périodiques, en une **transformation de Fourier**, utilisable sur un bien plus grand nombre de fonctions.

Les idées de base de l'analyse harmonique sont très simples, et peuvent essentiellement se résumer dans cette profession de foi : tout ramener à des fonctions de base dont les propriétés sont bien connues (fonctions sinus et cosinus, ou exponentielle), en exprimant les « fonctions générales » sous la forme de sommes, ou plus généralement d'intégrales, de telles « fonctions élémentaires ». Mais leur application pratique pose un certain nombre de difficultés tant sur le plan théorique (qu'est-ce au juste qu'une « fonction générale » ?) que sur le plan pratique (comment réaliser une telle **décomposition**, ou au contraire comment recomposer la fonction à partir de son expression dans ces fonctions élémentaires ; quelles sont les propriétés de l'image décomposée d'une fonction, etc.). Ces problèmes ont été énormément débattus par les mathématiciens depuis le siècle dernier, mais ce n'est qu'assez récemment qu'une solution pleinement satisfaisante a été trouvée, en fournissant un cadre élémentaire et général à la transformation de Fourier (et à bien d'autres questions mathématiques par ailleurs) : la théorie des distributions, conçue par L. Schwartz dans les années 50. Nous en exposerons donc en premier les principaux éléments, un peu comme on place le décor avant de commencer la pièce de théâtre. Nous évoquerons au passage le concept important de **convolution** de deux fonctions ou de deux distributions, qui joue un rôle essentiel par exemple en électronique ou en optique.

Nous expliquerons ensuite, dans la troisième section, la notion de transformée de Fourier, ainsi que ses propriétés usuelles. Les séries de Fourier, bien qu'antérieures historiquement, ne seront expliquées que dans la quatrième section, car leurs propriétés résultent très simplement de celles de la transformation de Fourier.

Le calcul pratique des transformées de Fourier, ou des séries de Fourier, est abordé dans la cinquième section. Il existe un certain nombre de méthodes algébriques permettant de passer d'une fonction à sa transformée, et réciproquement ; de plus, les transformées d'un grand nombre de fonctions sont connues : nous en avons donné une liste assez longue, mais nullement exhaustive : il existe de gros tomes entièrement constitués de telles listes ! De nos jours, les ordinateurs permettent de calculer numériquement la transformée de Fourier d'une fonction définie par un certain nombre de valeurs (des mesures de laboratoire par exemple) ; aussi avons nous jugé important de parler de l'algorithme de **transformation de Fourier rapide** (bien connu sous son acronyme **TFR**).

La notion de transformation de Fourier a connu bien des développements depuis sa création, et la sixième section aborde un certain nombre d'entre eux : on y parle notamment de la **transformation de Laplace**, qui permet le traitement de fonctions qui n'ont pas de transformée de Fourier, et s'applique bien à la résolution de certaines équations différentielles, ainsi que d'une nouveauté très prometteuse qui prend beaucoup d'extension depuis sa création vers 1980 : la **transformée en ondelettes**.

Avant d'aborder ce programme, nous donnons une présentation de l'histoire assez mouvementée de l'analyse harmonique. Celle-ci a évidemment un intérêt propre, mais également un but pédagogique ; car si nous avons expliqué les raisons qui rendent souhaitable un exposé basé sur les notions les plus générales et les plus exactes mathématiquement, seule la chronologie des découvertes permet de bien comprendre les raisons qui ont poussé de si nombreux savants à explorer ou approfondir ces domaines, en utilisant souvent des méthodes très approximatives – pour ne pas dire douteuses –, en l'absence de ces justifications théoriques précises qui sont données dans le reste de cet article.

# 1. Historique

L'histoire de l'analyse harmonique et des séries harmoniques est, à elle seule, un petit condensé de l'histoire des mathématiques ; car elle fait intervenir la plupart des grands mathématiciens depuis le dix-huitième siècle, et les a forcés progressivement à définir précisément ce qui était pour eux des éléments intuitifs, comme les fonctions, la continuité, les nombres, etc. De plus, elle touche à des points extrêmement délicats, mais avérés cruciaux lorsqu'ils furent mis en évidence, comme la continuité uniforme, l'infini, ou l'intégration. De nombreux débats naquirent des différences de points de vue relatifs à ces objets. Ces querelles paraissent un peu étranges à un mathématicien moderne, homme vivant dans un univers entièrement défini par les travaux « refondateurs » du début du siècle ; mais ce sont elles qui ont engendré un besoin de préciser avec le plus de détails les fondements des mathématiques.

## 1.1 Naissance des séries trigonométriques

La nécessité de rigueur est particulièrement illustrée par les travaux de Leonhard Euler (1707-1783). Mathématicien génial, peut-être le plus grand de tous, en tous cas le plus prolifique, Euler s'est penché sur tous les sujets significatifs de son temps, et en a créé bien d'autres ; mais il était d'un tempérament formaliste, et se souciait peu de donner un sens précis aux termes qu'il manipulait. En particulier, il fit grand usage des séries infinies, sans s'inquiéter de leur convergence. Ainsi, dans la série :

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

Euler substitue  $z = e^{ix}$  et obtient, en séparant les parties réelles et imaginaires :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \cos x + \cos 2x + \dots \\ \frac{1}{2} \cot \frac{x}{2} &= \sin x + \sin 2x + \dots \end{aligned}$$

sans prendre garde que ces séries ne convergent pas en général ; et il n'hésite pas à dériver ou intégrer de manière entièrement formelle ces égalités. Euler obtint ainsi de nombreux résultats relatifs à des sommes de séries trigonométriques, avec des méthodes pour le moins discutables : de tels calculs sont justifiables de nos jours, mais avec un certain nombre de précautions, et en employant la théorie des distributions.

De même, ayant obtenu par des méthodes différentes la formule fondamentale :

$$\frac{x}{2} = \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx + \dots \quad (1)$$

Euler ne semble pas noter que le membre de gauche n'est pas une fonction périodique ; et s'il constate que l'identité est fautive pour  $x = \pi$  (on obtient dans ce cas  $\frac{\pi}{2} = 0$ ), il ne peut en comprendre la raison, car il s'agit d'un problème de convergence non uniforme. (On sait à présent que l'égalité (1) n'est valable que si  $|x| < \pi$ .)

C'est encore Euler qui initia la représentation des fonctions par des séries trigonométriques en examinant le cas particulier de la fonction  $f(x) = (1 - \nu \cos x)^{-k}$ , où  $\nu$  est proche de 1 : désirant trouver des valeurs numériques approchées de la primitive de  $f$ , Euler rejette

le développement en puissances du cosinus, qui converge trop lentement, et propose d'écrire  $f$  sous la forme :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kx \quad (2)$$

Il obtient dans le cas particulier des relations de récurrences sur les coefficients indéterminés  $a_k$ , et intègre ensuite la série terme à terme.

Bien que connaissant la formule d'orthogonalité :

$$\int_0^{\pi} \cos px \cos qx \, dx = 0 \quad \text{si} \quad p \neq q \quad (3)$$

Euler ne trouve pas l'expression intégrale des coefficients  $a_k$ . C'est donc Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) qui obtiendra :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \, dx \\ a_1 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos x \, dx \end{aligned} \quad (4)$$

et Alexis Clairaut (1713-1765) généralisera en 1754 la seconde formule sous la forme :

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \quad \forall k \geq 1 \quad (5)$$

La forme la plus générale de ces formules intégrales, y compris pour les développements en sinus, sera finalement donnée par Fourier.

## 1.2 Fourier et l'équation de la chaleur

Jean-Baptiste-Joseph Fourier (1768-1830) présente en 1807 à l'Académie des sciences un travail sur la propagation de la chaleur ; celui-ci est rejeté comme insuffisamment rigoureux par les trois plus grands mathématiciens français de l'époque, les « trois L » : Laplace, Lagrange et Legendre. Cependant l'Académie encourage l'auteur en désignant précisément la propagation de la chaleur comme sujet de son grand prix en 1812 ; Fourier en effet présente une version remaniée de son travail en 1811 et gagne le prix. Mais encore une fois, les critiques de rigueur qui lui sont adressées empêchent la publication de ce texte (l'Académie le publiera seulement en 1824 lorsque Fourier en sera devenu secrétaire...). Fourier cependant continue ses travaux, et publie finalement en 1822 son ouvrage fondamental, la *Théorie analytique de la chaleur*, qui contient des considérations à la fois physiques et mathématiques sur le sujet, et en particulier les bases essentielles de l'analyse harmonique (qui, de ce fait, est souvent appelée *analyse de Fourier*).

Le problème principal exposé par Fourier est le suivant : considérons une plaque métallique mince et plane, pouvant être représentée mathématiquement par un domaine  $D$  du plan  $xOy$  ; dans l'exemple de Fourier, ce domaine est :

$$D = \left\{ (x, y), x \leq 0, -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

c'est-à-dire une lame semi-infinie de largeur constante. La température  $u$  de la plaque dépend du temps  $t$  et du point  $(x, y)$  où elle est déterminée, et vérifie l'équation aux dérivées partielles (dite de nos jours, « équation de la chaleur ») :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (6)$$

où le coefficient positif  $K$  dépend du matériau. À cette équation, il faut ajouter des conditions aux bords, qui sont : une température fixe  $u_0$  sur les deux bords semi-infinis et une autre température  $u_1$  sur l'extrémité de la lame. En choisissant de manière adéquate l'échelle de température, on peut prendre  $u_0 = 0$  et  $u_1 = 1$  et l'on a donc :

$$\begin{aligned} u\left(x, \frac{\pi}{2}\right) &= u\left(x, -\frac{\pi}{2}\right) = 0 && \text{pour tout } x < 0 \\ u(0, y) &= 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x, y) = 0 && \text{pour tout } y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ \end{aligned} \quad (7)$$

(La dernière condition est implicite dans le travail de Fourier : la température  $u_0$  est en fait la « température ambiante ».)

En particulier, lorsque l'équilibre thermique est atteint,  $u$  ne dépend plus de  $t$  et l'équation de la chaleur se réduit à l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (8)$$

que Fourier propose de résoudre en séparant les variables, c'est-à-dire en posant  $u(x, y) = f(x)g(y)$ . En substituant dans (8), on obtient :

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = -\frac{g''(y)}{g(y)}$$

et comme le membre de gauche ne dépend que de  $x$ , celui de droite que de  $y$ , tous deux doivent être égaux à une constante  $M$ . La résolution de  $g''(y) = -Mg(y)$ , avec les conditions résultant de (7),

c'est-à-dire  $g\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) = 0$ , implique que  $M = m^2$ , avec  $m$  un entier

impair positif arbitraire ; on a alors  $g(y) = \cos my$ . La condition sur  $f$  résultant de la limite dans (7) implique que  $f(x) = e^{-mx}$ .

Cependant  $u(x, y) = e^{-mx} \cos my$  n'est pas solution du problème, car elle ne vérifie pas la dernière condition au bord, à savoir  $u(0, y) = 1$ . Pour parvenir à ce résultat, Fourier suggère, puisqu'il possède une famille de solutions partielles indexée par un entier impair, et puisque l'équation de Laplace est linéaire, de chercher la solution sous la forme d'une somme de solutions élémentaires, soit :

$$u(x, y) = a_0 e^{-x} \cos y + a_1 e^{-3x} \cos 3y + \dots + a_k e^{-(2k+1)x} \cos(2k+1)y + \dots$$

La dernière condition aux bords donne alors une équation liant les coefficients :

$$1 = a_0 \cos y + a_1 \cos 3y + \dots + a_k \cos(2k+1)y + \dots$$

Dans un premier temps, Fourier a dérivé terme à terme cette égalité une infinité de fois, a posé  $y = 0$  et obtenu un système d'une infinité d'équations à une infinité d'inconnues, et finalement l'égalité fondamentale :

$$\begin{aligned} \forall y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \\ \frac{\pi}{4} = \cos y - \frac{1}{3} \cos 3y + \dots + \frac{(-1)^k}{2k+1} \cos(2k+1)y + \dots \end{aligned} \quad (9)$$

ce qui entraîne  $a_k = \frac{4(-1)^k}{(2k+1)\pi}$ . Conscient du caractère peu rigoureux de cette étape, Fourier l'améliora ultérieurement en considérant les sommes partielles :

$$\psi_k(y) = \cos y - \frac{1}{3} \cos 3y + \dots + \frac{(-1)^k}{2k+1} \cos(2k+1)y$$

En dérivant et en sommant, on obtient  $\psi'_k(y) = \frac{\sin 2ky}{2 \cos y}$  ; une intégration par parties, suivie d'un passage à la limite  $k \rightarrow \infty$  redonne l'égalité (9).

### 1.3 La question des fonctions « arbitraires »

Dans la fin de son traité, Fourier écrit qu'une fonction périodique de période  $2\pi$  « arbitraire », même discontinue, est égale à une série trigonométrique dont les coefficients sont donnés par une relation intégrale semblable à celle donnée par Clairaut ; il définit ainsi une telle fonction : *une suite de valeurs données, assujetties ou non à une loi commune, et qui répondent à toutes les valeurs de  $x$  [dans un intervalle].* Il n'est pas le premier à l'affirmer : Euler avait la même opinion, et entendait par cette notion de fonction arbitraire une fonction dont le graphe était une ligne tracée au hasard sur une feuille de papier.

Bien des mathématiciens de cette époque sont d'une opinion contraire, à l'image de Lagrange, qui estime qu'une fonction doit être définie en termes d'opérations successives sur la variable, ou en employant des fonctions usuelles (ce qui est plutôt proche de ce qu'on appelle de nos jours les fonctions *analytiques*).

Ce débat ne se fait pas dans l'abstrait : il est en fait la conséquence de résultats obtenus au dix-huitième siècle sur l'équation des cordes vibrantes (équation régissant le mouvement vertical d'une corde tendue et fixée à ses extrémités). Celle-ci est écrite pour la première fois en 1746 par d'Alembert : c'est, en notations modernes :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (10)$$

où  $c$  est une constante pour une corde homogène.

Dès 1715, Brook Taylor (1685-1731) avait trouvé l'harmonique fondamentale de la corde vibrante (sans écrire l'équation), soit  $u(x, t) = \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi c t}{a}$ , où  $a$  est la longueur de la corde. Plus généralement, des sinus de degrés supérieurs donnent aussi des solutions. Cependant, ces réponses sont incomplètes, car on savait par expérience que la forme d'une corde vibrante n'est pas forcément une sinusoïde.

D'Alembert donne la solution générale de l'équation en écrivant :

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) \quad (11)$$

avec  $f$  et  $g$  deux fonctions « arbitraires ». Euler approuve ce résultat, et montre que la vibration est périodique lorsque la forme initialement donnée à la corde est sinusoïdale ; comme ce n'est pas toujours le cas, il admet (après avoir longtemps pensé le contraire) qu'une fonction « arbitraire », définie seulement par un graphe tracé au hasard sur une feuille de papier, puisse être solution du problème à la place de  $f$  ou  $g$ , s'opposant ainsi à d'Alembert, qui ne considérerait dans ces fonctions arbitraires que les fonctions analytiques.

Daniel Bernoulli (1700-1782) est du même avis que Euler, et va même plus loin : il considère que toute superposition de solutions fondamentales sous la forme d'une série infinie :

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{k\pi c t}{a} \quad (12)$$

est aussi solution du problème, et que c'est là l'expression la plus générale des solutions. Une telle affirmation implique notamment que toute fonction « arbitraire » (au sens des fonctions  $f$  et  $g$  obtenues ci-avant) peut s'écrire comme la somme d'une série trigonométrique. Ce point de vue est assez exact, et le plus proche

des résultats modernes sur la question ; cependant, D. Bernoulli fut longtemps le seul à le défendre, car même Euler refusait d'admettre que la solution donnée par (12) était la plus générale possible.

Avec les affirmations de Fourier, la situation devenait franchement confuse. C'est un jeune allemand venu finir ses études à Paris, et qui discuta longuement avec Fourier, Peter Gustav Lejeune-Dirichlet (1805-1859), qui parvint le premier à éclaircir la situation en donnant des conditions suffisantes précises pour qu'une fonction ait une série de Fourier : une fonction périodique de période  $2\pi$ , bornée, continue par morceaux (nombre fini de discontinuités sur un intervalle borné) et monotone par morceaux (nombre fini de maximums et minimums sur un intervalle borné) possède une série de Fourier, qui converge vers  $f(x)$  en tout point  $x$  où  $f$  est continue. Ces conditions seront plus tard étendues par Leopold Féjer (1880-1959), en considérant la limite des moyennes arithmétiques de premiers termes de la suite de Fourier, donnant le théorème moderne qui porte son nom (théorème 7).

Pour le montrer, Dirichlet démontre d'abord l'identité :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^c \frac{\sin kx}{\sin x} f(x) dx = \frac{\pi}{2} f(0) \quad (13)$$

où  $c > 0$  est une constante quelconque, et  $f$  vérifie les conditions précédemment énoncées. Cette identité va jouer un rôle semblable à celui de la fonction  $\psi_k$  dans la preuve de Fourier (qui dans son exemple fondamental considérait la fonction  $f = 1$ ). Dirichlet prouve ensuite que la série de Fourier de  $f$  converge en tout point vers  $[f(x+) + f(x-)]/2$ , la moyenne des limites à gauche et à droite de  $f$ , ce qui permet de conclure en tous les points de continuité ( $f(x+) = f(x-)$ ), et d'ajouter que pour les autres, la définition de  $f$  doit être modifiée pour que  $f(x)$  soit égale à cette moyenne, si l'on souhaite qu'elle coïncide partout avec sa série de Fourier.

Dirichlet exhiba aussi une fonction (qui porte son nom) qui ne satisfait pas les conditions requises, et ne coïncide pas avec sa série de Fourier : il s'agit de la fonction caractéristique de  $\mathbb{Q}$ , qui vaut 1 pour les valeurs rationnelles de la variable, et 0 pour les irrationnelles. Cependant, les conditions de Dirichlet ne sont pas nécessaires : il existe des fonctions égales à leur série de Fourier, et qui ne les satisfont pas. Le problème général posé depuis lors, trouver les conditions nécessaires complètes pour que la série de Fourier d'une fonction  $f$  existe et converge vers  $f(x)$ , est encore non résolu de nos jours.

En fait, les séries trigonométriques ont été la source d'innombrables exemples de cas possibles ; ainsi, Bernhard Riemann (1826-1866) exhibe dans un ouvrage *Sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique* en 1854, un exemple célèbre de fonction continue qui n'est pas différentiable sur toutes les valeurs rationnelles. Ces travaux amènent aussi Riemann à définir la méthode d'intégration qui porte son nom, et à montrer que pour une fonction bornée et intégrable, les coefficients  $a_k, b_k$  de la série de Fourier tendent vers zéro quand  $k$  tend vers l'infini. Il montre aussi qu'une fonction peut être intégrable sans être représentable par sa série de Fourier ; qu'il existe des fonctions non intégrables, égales en un nombre infini de points aux valeurs limites d'une série trigonométrique, etc. Plus tard, c'est Georg Cantor (1845-1918) qui sera amené par des considérations similaires sur les séries trigonométriques à sa célèbre théorie sur les ensembles de points.

Le débat sur les fonctions arbitraires, et plus généralement sur le concept de fonction et sur ses extensions possibles, se prolongera jusqu'au milieu du vingtième siècle sous des formes et pour des motifs divers. Il peut être considéré comme complètement clos avec la théorie des distributions (extension de la notion de fonction), qui fournit en particulier une caractérisation précise des distributions ayant une transformée de Fourier (extension de la série trigonométrique), même si certains points restent à éclaircir dans le domaine purement fonctionnel.

## 1.4 Convolution

Le produit de convolution fait partie de ces instruments dont l'usage fut découvert avant leur nature réelle. Il semble que Siméon-Denis Poisson (1781-1840) fut l'un des premiers à écrire un produit de convolution ; il montre en effet que la fonction :

$$G(x, t) = \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)$$

a la propriété de permettre la résolution de l'équation de la chaleur (à une dimension) :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

en écrivant la solution sous la forme :

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x-y, t) f(y) dy$$

(c'est-à-dire exactement  $u(\cdot, t) = G(\cdot, t) * f$ ). Cette idée fut ensuite généralisée à d'autres équations aux dérivées partielles à coefficients constants.

De même, Dirichlet utilise dans ses preuves la régularisée d'une fonction  $f$  par les noyaux  $\rho_n(x) = \sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right) / \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ , c'est-à-dire les fonctions :

$$(\rho_n * f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(x-y)}{\sin \frac{x-y}{2}} f(y) dy$$

Ce type d'« intégrale singulière » sera souvent utilisé par la suite, et c'est Weierstrass qui donnera le principe général de la régularisation d'une fonction par une suite similaire.

Dans ces exemples, le noyau joue un rôle particulier, très différent de celui de la fonction d'application  $f$ . Les propriétés de symétrie du produit de convolution sont découvertes par Vito Volterra (1860-1940) ; celui-ci étudie d'abord le « produit de composition » de deux fonctions de deux variables, soit :

$$(F * G)(x, y) = \int_x^y F(x, t) G(t, y) dx dy$$

qu'il considère simplement comme une généralisation « par passage du fini à l'infini » du produit de deux matrices. Puis il s'intéresse au cas particulier où  $F$  et  $G$  ne dépendent que de  $(y-x)$ , c'est-à-dire que  $F(x, y) = f(y-x)$  et  $G(x, y) = g(y-x)$ . Il montre alors que le produit de composition est dans le même cas, et que  $(F * G)(x, y) = h(y-x)$ , avec :

$$h(t) = \int_0^t f(t-s)g(s)ds$$

ce qui est l'une des définitions possibles du produit de convolution. Comme  $F$  et  $G$  jouaient le même rôle au départ, cette formule est invariante par permutation de  $f$  et  $g$ .

Les séries de Fourier, et plus tard la transformation de Fourier, sont surtout utilisées pour la résolution de problèmes linéaires. Il fallut donc attendre assez longtemps avant que quelqu'un examine le produit de deux transformées de Fourier. C'est Tchebychev apparemment qui en parle le premier à propos de « lois de probabilités » (car le produit de convolution de deux lois de probabilités est la loi de probabilité composée). Puis P.-J. Daniell, en 1920, montre explicitement que la transformation de Fourier échange le produit de convolution et le produit ordinaire des fonctions ou des mesures.



Finalement, le produit de convolution deviendra un outil essentiel dans l'étude des distributions après leur introduction par L. Schwartz, et ces deux notions, ainsi que la transformation de Fourier, se retrouveront intimement liées.

## 2. Notations

Dans cet article,  $N$  désigne un entier supérieur ou égal à 1, et  $\mathbb{R}^N$  est l'espace à  $N$  dimensions euclidien ; dans la pratique, on a généralement  $N = 1, 2$  ou  $3$ , mais pas nécessairement : en relativité,  $N = 4$ , et l'on peut avoir à travailler dans des espaces de phases avec  $N > 4$ . Les éléments de  $\mathbb{R}^N$  sont des vecteurs  $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ . Il est commode de les noter comme dans le cas où  $N = 1$  ; par exemple, leur norme euclidienne sera écrite avec des barres de valeur absolue :

$$|x| \quad \text{désigne} \quad \sqrt{x_1^2 + \dots + x_N^2} \quad (14)$$

le vecteur nul  $(0, \dots, 0)$  sera plus simplement noté  $0$ , et nous noterons le produit scalaire de deux vecteurs  $x = (x_1, \dots, x_N)$  et  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)$  comme une simple multiplication :

$$x\xi \quad \text{désigne} \quad x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \dots + x_N\xi_N \quad (15)$$

Les intégrales seront aussi écrites de manière simplifiée :

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x) dx \quad \text{désigne} \quad \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \dots \int_{\mathbb{R}} f(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N$$

De même, il est commode d'avoir une notation compacte pour les dérivées d'ordre élevé ; si  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$  est un  $N$ -uplet de nombres entiers positifs, alors  $|\alpha|$  désigne la somme de ces nombres  $\alpha_1 + \dots + \alpha_N$ , et :

$$D^\alpha f \quad \text{désigne} \quad \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}$$

Les fonctions considérées seront indifféremment à valeurs réelles ou complexes ; dans le premier cas,  $|f(x)|$  est la valeur absolue de  $f(x)$ , dans le second c'est son module. Les éléments du corps de valeur des fonctions,  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , seront appelés des *scalaires*.

Enfin rappelons que si  $c = a + ib$  est un nombre complexe, son module est noté  $|c| = \sqrt{a^2 + b^2}$ , son conjugué  $\bar{c} = a - ib$  et ses parties réelles et imaginaires  $\operatorname{Re} c = a$ ,  $\operatorname{Im} c = b$ .

## 3. Distributions

Nous ne donnerons ici que les aspects essentiels de la théorie des distributions, nécessaires à la théorie de l'analyse harmonique ; certains points mathématiques importants mais difficiles, comme la description exacte de la topologie de l'espace  $\mathcal{D}$ , ont été volontairement passés sous silence. De même, bien que la théorie puisse se faire sur un ouvert quelconque de l'espace  $\mathbb{R}^N$ , nous nous limiterons au cas de l'espace entier, seul réellement utile dans le cas de l'analyse harmonique.

### 3.1 Bases mathématiques

Nous donnons d'abord quelques éléments essentiels, sur lesquels le lecteur pourra trouver des détails dans d'autres articles, notamment *Analyse fonctionnelle* [A 101].

#### 3.1.1 Espaces vectoriels topologiques

Rappelons qu'un ensemble  $E$  est un *espace vectoriel* s'il est doté d'une addition et d'une loi de multiplication de ses éléments par des scalaires ayant les propriétés usuelles (en particulier, l'addition est commutative et possède un élément neutre noté  $0$ ). Dans la suite, les espaces de fonctions considérés sont tous des espaces vectoriels, car on peut évidemment ajouter deux fonctions (et  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ ), ou les multiplier par un scalaire  $\lambda$  (avec  $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$  par définition).

Lorsqu'un espace est doté d'une *topologie*, on peut parler de la « proximité » de ses éléments et notamment d'une *suite convergente* vers un élément de cet espace. En particulier, un espace possédant une norme est un espace topologique : dans ce cas, une suite  $(e_n)$  converge vers un élément  $e$  si et seulement si la norme de  $e_n - e$  tend vers zéro lorsque  $n$  tend vers l'infini. Les espaces que nous utiliserons seront dotés des topologies adéquates, mais certaines sont complexes et nous ne les détaillerons pas.

#### 3.1.2 Continuité, dualité

Rappelons qu'une application  $\Phi$  d'un espace topologique  $F$  vers un autre  $G$  est *continue* si et seulement si pour toute suite convergente  $(\phi_n)$  d'éléments de  $F$ , la suite image  $\Phi(\phi_n)$  est convergente dans  $G$ . Par ailleurs, une application d'un espace vectoriel vers un autre est linéaire si elle conserve la somme et le produit par un scalaire  $\lambda$  :  $\Phi(\phi + \psi) = \Phi(\phi) + \Phi(\psi)$  et  $\Phi(\lambda\phi) = \lambda\Phi(\phi)$ . Nous nous intéressons ici plus particulièrement aux applications linéaires continues de  $F$  vers le corps des scalaires  $\mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ), qui est bien sûr un espace vectoriel. Une telle application est appelée une *forme linéaire*, et l'ensemble des formes linéaires continues sur  $F$  est appelé le *dual topologique* de  $F$  ; on le note  $F'$  (le prime ne désigne nullement une dérivée dans ce contexte).

Si  $\Phi$  est un élément de  $F'$ , alors à tout élément  $\phi \in F$ ,  $\Phi$  associe un scalaire  $\Phi(\phi)$ . Toutefois, pour mettre en valeur le fait que  $\Phi \in F'$ , on notera dans la suite ce réel  $\langle \Phi, \phi \rangle$  ; les crochets sont parfois appelés *crochets de dualité*.

L'espace  $F'$  est lui-même un espace vectoriel, avec la définition habituelle de la somme des fonctions et de leur multiplication par un scalaire. On peut le doter d'une topologie dérivée de celle de  $F$  de la façon suivante : une suite  $(\Phi_n)$  d'éléments de  $F'$  sera considérée comme convergente vers  $\Psi \in F'$  si et seulement si, pour tout élément  $\phi \in F$ , la suite de scalaires  $\langle \Phi_n, \phi \rangle$  converge vers  $\langle \Psi, \phi \rangle$ .

Récapitulons les conséquences de la linéarité, de la continuité, et de la topologie de  $F'$  :

$$\begin{aligned} \forall \phi, \psi \in F, \forall \Phi, \Psi \in F', \forall \lambda \in \mathbb{C}, \\ \langle \Phi, \phi + \psi \rangle &= \langle \Phi, \phi \rangle + \langle \Phi, \psi \rangle \\ \langle \Phi + \Psi, \phi \rangle &= \langle \Phi, \phi \rangle + \langle \Psi, \phi \rangle \\ \langle \Phi, \lambda\phi \rangle &= \lambda \langle \Phi, \phi \rangle = \langle \lambda\Phi, \phi \rangle \\ \forall (\phi_n) \subset F, \quad \lim \phi_n = \psi &\Rightarrow \lim \langle \Phi, \phi_n \rangle = \langle \Phi, \psi \rangle \\ \forall (\Phi_n) \subset F', \quad \lim \Phi_n = \Psi &\Rightarrow \lim \langle \Phi_n, \phi \rangle = \langle \Psi, \phi \rangle \end{aligned} \quad (16)$$

On voit les symétries qui existent entre les éléments de  $F$  et ceux de son dual : en cela la notation des crochets est particulièrement agréable. On ne perdra toutefois pas de vue que cette notation n'est pas symétrique : il ne faut pas écrire  $\langle \phi, \Phi \rangle$ , car cela n'a pas de sens en général, le dual de  $F'$  n'étant pas forcément égal à  $F$ .

### 3.1.3 Intégrale de Lebesgue

Nous allons beaucoup utiliser les intégrales dans le cours de cet article, aussi n'est-il pas inutile de rappeler quelques éléments de la théorie de l'intégration (détaillée par ailleurs dans l'article *Analyse fonctionnelle* [A 101]). On utilisera toujours l'intégrale de Lebesgue, dont les propriétés sont assez proches de celles de Riemann (apprise au lycée), mais avec quelques éléments en plus. On a en particulier la linéarité :  $\int (f+g) = \int f + \int g$ ,  $\int \lambda f = \lambda \int f$ , si  $\lambda$  est un scalaire. L'intégrale d'une fonction est, en valeur absolue, toujours plus petite que l'intégrale de la valeur absolue :

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} f(x) dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)| dx \quad (17)$$

On dispose de formules de changements de variables, qui permettent notamment de montrer l'invariance des intégrales sur  $\mathbb{R}^N$  par symétrie, rotation ou translation : si  $a$  est un vecteur fixé, et  $R$  une rotation de  $\mathbb{R}^N$ , alors :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} f(x-a) dx &= \int_{\mathbb{R}^N} f(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} f(R(x)) dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(-x) dx \end{aligned} \quad (18)$$

On a aussi la formule de compression, vraie pour tout scalaire  $\lambda \neq 0$  :

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(\lambda x) dx = |\lambda|^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) dx \quad (19)$$

Rappelons enfin le théorème de Fubini, qui permet « d'échanger l'ordre des intégrales » : si  $f(x, y)$  est une fonction définie sur  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ , et que  $\int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x, y)| dx dy$  est fini, alors :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \left( \int_{\mathbb{R}^N} f(x, y) dx \right) dy &= \iint_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} f(x, y) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left( \int_{\mathbb{R}^N} f(x, y) dy \right) dx \end{aligned} \quad (20)$$

### 3.1.4 Espaces fonctionnels

Dans l'analyse harmonique, on utilise de nombreux espaces fonctionnels : nous en donnons quelques uns ici, dont les définitions résultent essentiellement des propriétés de l'intégrale de Lebesgue.

Pour qu'on puisse calculer des intégrales, une fonction doit être *mesurable* ; c'est la propriété minimale que nous demanderons dans la suite aux *fonctions*, et lorsque nous utiliserons ce terme, nous sous-entendrons l'adjectif *mesurable*.

#### 3.1.4.1 Fonctions bornées

Une fonction  $f$  est dite *bornée* s'il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $x \in \mathbb{R}^N$ ,  $|f(x)| < C$  (la plus petite constante  $C$  qui vérifie cette propriété est notée  $\sup |f|$ ). Elle est *localement bornée* si elle est bornée sur toute partie bornée de  $\mathbb{R}^N$  ; les fonctions bornées sont localement bornées, mais la réciproque est fautive : par exemple la fonction définie par  $f(x) = |x|$  est localement bornée, mais pas globalement bornée, car lorsque  $x$  s'éloigne indéfiniment de 0 dans  $\mathbb{R}^N$ , on a  $|x|$  qui tend vers  $+\infty$ .

#### 3.1.4.2 Fonctions localement intégrables et sommables

Une fonction  $f$  est dite *localement intégrable* si, pour toute partie bornée  $A \subset \mathbb{R}^N$ , l'intégrale  $\int_A |f(x)| dx$  existe et est finie. On notera particulièrement que toute fonction continue, ou même continue par morceaux, est localement bornée et intégrable. Certaines fonctions non continues ne sont pas localement intégrables : c'est le cas de la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 1/x$  si  $x \neq 0$ , et  $f(0) = 0$ , qui ne peut être intégrée sur un intervalle contenant 0. La fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = |x|^{-1/2}$  si  $x \neq 0$ , et  $f(0) = 0$ , donne au contraire un exemple de fonction localement intégrable qui n'est pas localement bornée.

Une fonction  $f$  est dite *intégrable* (ou *sommable*), si l'intégrale  $\int_{\mathbb{R}^N} |f(x)| dx$  existe et est finie (noter la valeur absolue). Bien des fonctions localement intégrables ne sont pas sommables. Par exemple la fonction constante de valeur 1 est localement intégrable (car continue), mais pas sommable, car  $\int_{\mathbb{R}^N} 1 dx = +\infty$ . Nous admettrons la propriété suivante.

**Propriété 1.** *Le produit d'une fonction localement bornée et d'une fonction localement intégrable est localement intégrable. Le produit d'une fonction bornée et d'une fonction sommable est une fonction sommable et de plus :*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x)g(x)| dx \leq (\sup |f|) \int_{\mathbb{R}^N} |g(x)| dx \quad (21)$$

#### 3.1.4.3 Fonctions de carré intégrable

Une fonction  $f$  est dite *de carré intégrable* si  $f^2$  est sommable, c'est-à-dire si l'intégrale  $\int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^2 dx$  existe et est finie. Par exemple, la fonction  $f(x) = 1/(1+|x|^N)$ , définie sur  $\mathbb{R}^N$ , est de carré intégrable (mais non sommable) ; la fonction  $|x|^{-N/3}$  est sommable et de carré intégrable, mais non bornée.

On voit que les ensembles de fonctions sommables, de carré intégrable, ou bornées sont distincts, et qu'il existe des fonctions se trouvant dans l'un et pas les autres. Cependant, nous avons la propriété 2 qui est une variante de la précédente propriété.

**Propriété 2.** *Si  $f$  est une fonction bornée et sommable, alors  $f$  est de carré intégrable, et l'on a :*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^2 dx \leq (\sup |f|) \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)| dx \quad (22)$$

#### 3.1.4.4 Fonctions caractéristiques, ensembles négligeables

Un exemple simple de fonction non continue est donné par la fonction caractéristique d'une partie (mesurable)  $A \subset \mathbb{R}^N$  : il s'agit de la fonction notée  $\chi_A$  définie par :

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (23)$$

Les fonctions caractéristiques d'un ensemble borné sont bien sûr bornées et sommables, et donc de carré intégrable (d'ailleurs  $\chi_A^2 = \chi_A$ , car ces fonctions ne prennent que les valeurs 0 ou 1).



On appelle *mesure de A* la valeur  $|A| = \int_{\mathbb{R}^N} \chi_A(x) dx$ , qui est finie si et seulement si  $A$  est borné. Les ensembles dont la mesure est nulle ne sont pas forcément vides : c'est le cas des ensembles formés d'un nombre fini de points par exemple, ou si  $N \geq 2$ , d'un ensemble fini de courbes continues, ou encore du bord d'un ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^N$  ; ces ensembles sont dits *négligeables*.

### 3.1.4.5 Espaces de Lebesgue

L'une des particularités de l'intégrale, c'est « d'oublier » les ensembles négligeables ; c'est-à-dire que si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions telles que  $f \neq g$  seulement sur un ensemble négligeable (on dit que  $f$  et  $g$  sont *égales presque partout*), alors leurs intégrales sur  $\mathbb{R}^N$  sont égales.

Dans la suite, il sera très utile de ne définir une fonction que « presque partout », c'est-à-dire sans en préciser la valeur sur un ensemble négligeable : cela ne change pas les propriétés intégrales de cette fonction. En particulier, on notera  $L^1$  l'ensemble des fonctions sommables « définies presque partout » ; c'est-à-dire que cet ensemble a ceci de particulier que deux fonctions  $y$  sont considérées comme égales si elles sont égales presque partout. De même, on notera  $L^\infty$  (respectivement  $L^2$ ) l'ensemble des fonctions bornées (respectivement de carré intégrable) définies presque partout.

Ces trois ensembles sont des espaces vectoriels ; de plus, ils peuvent être dotés de normes définies de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^1} &= \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)| dx \\ \|f\|_{L^\infty} &= \sup \text{ess } |f(x)| \\ \|f\|_{L^2} &= \left[ \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (24)$$

(le « sup ess » qui apparaît est la plus petite constante qui domine  $|f|$  sur  $\mathbb{R}^N$  privé d'un ensemble négligeable.)

Une fonction vérifiant  $\|f\|_{L^1} = 0$  est égale à 0 (fonction nulle) dans  $L^1$ , ce qui signifie en pratique qu'elle est *nulle presque partout* ; il en est de même dans  $L^2$  ou  $L^\infty$ .

Les propriétés 1 et 2 peuvent se résumer dans ces formules :

$$\begin{aligned} \forall f \in L^1, \forall g \in L^\infty, \quad \|fg\|_{L^1} &\leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^\infty} \\ \forall f \in L^1 \cap L^\infty, \quad \|f\|_{L^2}^2 &\leq \|f\|_{L^1} \|f\|_{L^\infty} \end{aligned} \quad (25)$$

### 3.1.4.6 Produit scalaire de $L^2$

L'espace  $L^2$  est spécial, car il possède un produit scalaire (hermitien dans le cas de fonctions à valeurs complexes) défini ainsi :

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^N} \overline{f(x)} g(x) dx \quad (26)$$

Ce produit scalaire possède toutes les propriétés habituelles et fait de  $L^2$  un *espace hilbertien* ; il correspond à la norme définie plus haut en ce sens que  $\|f\|_{L^2} = \sqrt{\langle f, f \rangle_{L^2}}$ .

Cette norme vérifie les propriétés habituelles, notamment l'inégalité triangulaire :

$$\|f+g\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} + \|g\|_{L^2} \quad (27)$$

et l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\langle f, g \rangle_{L^2}| \leq \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2} \quad (28)$$

### 3.1.4.7 Duals des espaces de Lebesgue

L'inégalité (28) montre que le produit scalaire est continu par rapport à ses deux arguments. Par conséquent, si l'on fixe un élément  $f \in L^2$ , l'application :

$$\begin{aligned} T_f: \quad L^2 &\rightarrow \mathbb{C} \\ g &\rightarrow T_f(g) = \langle \overline{f}, g \rangle_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^N} \overline{f(x)} g(x) dx \end{aligned} \quad (29)$$

est une forme linéaire continue : c'est un élément du dual de  $L^2$ . Nous admettrons la proposition 1.

**Proposition 1.** Pour toute forme linéaire continue  $\Phi$  définie sur  $L^2$ , il existe  $f \in L^2$  telle que  $\forall g \in L^2, \langle \Phi, g \rangle = \langle \overline{f}, g \rangle_{L^2}$  (c'est-à-dire  $\Phi = T_f$ ).

En d'autres termes, le dual de  $L^2$  est en bijection avec lui-même : dans la suite, nous assimilerons  $T_f$  à  $f$ , pour ne pas garder des notations distinctes, et nous dirons plus simplement que le dual de  $L^2$  est  $L^2$  lui-même ; et nous écrirons  $\langle f, g \rangle$  au lieu de  $\langle \overline{f}, g \rangle_{L^2}$  : le produit scalaire et le produit de dualité se confondent dans  $L^2$ , à la conjugaison près dans le cas de fonctions complexes (pour les fonctions réelles, on a bien sûr  $\overline{f} = f$ ).

De la même façon, et en utilisant la première formule dans (25), on voit qu'une fonction  $f \in L^1$  (respectivement  $\in L^\infty$ ) peut être considérée comme une forme linéaire continue sur  $L^\infty$  (resp. sur  $L^1$ ), en assimilant encore  $T_f$  à  $f$  ; cela nous permettra d'écrire :

$$\forall f \in L^1, \forall g \in L^\infty, \quad \langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} f(x) g(x) dx = \langle g, f \rangle \quad (30)$$

Dans ce cas, on peut montrer que le dual de  $L^1$  est  $L^\infty$  ; par contre le dual de  $L^\infty$  est plus grand que  $L^1$ .

## 3.2 Fonctions indéfiniment dérivables à support compact

Pour définir les distributions, nous aurons besoin de fonctions « les plus régulières possibles ». De telles fonctions seront non seulement continues, mais même indéfiniment dérivables. De plus, on souhaite qu'elles soient sommables et bornées, ainsi que toutes leurs dérivées. Pour cela, définissons d'abord le support d'une fonction.

Pour toute fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^N$ , on appelle *ouvert d'annulation* de  $f$  le plus grand ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^N$  sur lequel  $f$  s'annule ; son complémentaire est un ensemble fermé, appelé le *support* de  $f$ , et noté  $\text{supp } f$ . Si une fonction ne s'annule pas, ou seulement en certains points isolés ou sur un ensemble négligeable, son ouvert d'annulation est réduit à l'ensemble vide, et dans ce cas son support est  $\mathbb{R}^N$  tout entier. Par contre, le support d'une fonction caractéristique  $\chi_A$  est la fermeture de l'ensemble  $A$  (c'est-à-dire  $A$  plus sa frontière).

Une fonction est dite *à support compact* si son support est borné (les ensembles compacts de  $\mathbb{R}^N$  coïncident avec les ensembles fermés et bornés) ; une telle fonction est exactement égale à la fonction nulle « près de l'infini », c'est-à-dire si l'on s'éloigne suffisamment d'un point donné.

On notera  $C_c$  l'ensemble des fonctions continues à support compact. Par exemple, la fonction  $f_0$  définie sur  $\mathbb{R}^N$  par  $f_0(x) = 1 - |x|$ , si  $|x| \leq 1$ , et  $f_0(x) = 0$  sinon, appartient à  $C_c$ ; en effet, son support est la boule unité fermée  $\bar{B}_1 = \{x \in \mathbb{R}^N, |x| \leq 1\}$ , qui est bien bornée, et elle est continue (notamment parce que  $f_0(x) = 0$  si  $x$  est au bord de  $B_1$ ).

Plus généralement, pour tout entier  $k \geq 0$ , nous noterons  $C_c^k$  l'ensemble des fonctions  $k$  fois continûment dérivables, et de support compact; l'ensemble  $C_c^\infty$  des fonctions indéfiniment dérivables et à support compact sera noté simplement  $\mathcal{D}$ . Ses éléments seront parfois appelés des *fonctions de test*.

Il n'est pas évident *a priori* qu'il existe de telles fonctions de test. En effet, on peut voir que chacun des espaces  $C_c^k$  est non vide: il contient par exemple la fonction  $f_k$  définie par  $f_k(x) = (1 - |x|^2)^{k+1}$ , si  $|x| \leq 1$ , et 0 sinon. Mais aucune de ces fonctions n'est dans  $\mathcal{D}$ , car la  $k$ -ième dérivée de  $f_k$  par rapport à l'une quelconque des variables  $x_1, \dots, x_N$  n'est pas dérivable au bord de  $B_1$ .

Nous admettrons que la fonction suivante :

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} \exp \frac{1}{|x|^2 - 1} & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (31)$$

appartient à  $\mathcal{D}$  (son support est aussi  $\bar{B}_1$ ). Dans ce cas, les fonctions  $\varepsilon_{a,\lambda}$  définies pour tout  $a \in \mathbb{R}^N$  et tout scalaire  $\lambda$  par translation et homothétie :  $\varepsilon_{a,\lambda}(x) = \varepsilon\left(\frac{x-a}{\lambda}\right)$  sont aussi des éléments de  $\mathcal{D}$ , avec pour support la boule de rayon  $|\lambda|$  et de centre  $a$ . Nous verrons au paragraphe 3.5 un moyen différent d'engendrer d'autres fonctions de  $\mathcal{D}$  à partir de la fonction  $\varepsilon$ .

### 3.3 Espace des distributions

L'espace  $\mathcal{D}$  peut être doté d'une topologie (assez complexe, mais qui en fait un espace complet); son dual topologique (§ 3.1.2)  $\mathcal{D}'$  est appelé *espace des distributions*, et ses éléments des *distributions*.

Rappelons les conséquences d'une telle définition: si  $T$  est une distribution, alors elle associe à toute fonction de test  $\varphi \in \mathcal{D}$  un scalaire noté  $\langle T, \varphi \rangle$  (de même qu'une fonction  $f$  associe à un vecteur  $x$  un scalaire  $f(x)$ ). Cette association se fait de manière linéaire, c'est-à-dire que l'on a, pour toute distribution  $T$ :

$$\begin{aligned} \forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}, \forall \lambda \in \mathbb{C}, \\ \langle T, \varphi + \psi \rangle = \langle T, \varphi \rangle + \langle T, \psi \rangle \quad \text{et} \quad \langle T, \lambda \varphi \rangle = \lambda \langle T, \varphi \rangle \end{aligned} \quad (32)$$

et continue, c'est-à-dire que si  $(\varphi_n)$  est une suite qui converge vers  $\varphi$  (au sens de la topologie de  $\mathcal{D}$ ), alors  $\langle T, \varphi_n \rangle$  converge vers  $\langle T, \varphi \rangle$  (au sens des suites de nombres réels ou complexes).

Les fonctions de test, et plus généralement toutes les fonctions continues (même de support non compact), ou simplement localement intégrables, sont des distributions, au sens suivant: si  $f$  est localement intégrable, on pose :

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \varphi(x) dx \quad (33)$$

Cette valeur est toujours définie, car  $\varphi$  est nulle en dehors d'un ensemble borné (son support). On vérifie facilement les propriétés de linéarité (qui résultent simplement de celles de l'intégrale); les propriétés de continuité résultent de la façon dont la topologie de  $\mathcal{D}$  est définie. Notons par ailleurs que, puisque la définition des fonctions comme distributions passe par une intégrale, deux fonctions égales presque partout sont égales (tout court) en tant que distributions (nous avons fait une remarque semblable à propos des fonctions de  $L^2$ , mais dans ce cas cela résultait de la définition de cet espace).

On voit donc que  $\mathcal{D}'$  est un ensemble « très grand » puisqu'il contient au moins toutes les fonctions localement intégrables (et donc les espaces  $L^1$ ,  $L^2$  et  $L^\infty$  définis précédemment). Nous donnerons au paragraphe 3.6 des exemples de distributions qui ne sont même pas des fonctions localement intégrables.

### 3.4 Propriétés des distributions

L'espace des distributions est un espace vectoriel: on peut définir la somme de deux distributions  $T$  et  $S$ , simplement par la relation naturelle  $\langle T + S, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle + \langle S, \varphi \rangle$ , pour toute fonction test  $\varphi$ ; de même, on peut définir le produit de  $T$  par un scalaire  $\lambda$ , par  $\langle \lambda T, \varphi \rangle = \lambda \langle T, \varphi \rangle$ . Nous avons vu ci-dessus que cet espace contient entre autre l'espace  $C^0$  des fonctions continues, qui à son tour contient  $\mathcal{D}$ . En fait, nous avons une chaîne d'inclusions infinie :

$$\begin{aligned} \mathcal{D} \subset C^\infty \subset \dots \subset C^k \subset C^{k-1} \subset \dots \subset C^1 \\ \subset C^0 \subset \mathcal{M}^0 \subset \dots \subset \mathcal{M}^k \subset \dots \subset \mathcal{D}' \end{aligned} \quad (34)$$

Les espaces  $\mathcal{M}^k$  sont des espaces de mesures, qui seront expliqués au paragraphe 3.6.2.

#### 3.4.1 Support

Une distribution  $T$  est dite nulle sur un ouvert  $A \subset \mathbb{R}^N$ , si et seulement si pour toute fonction de test  $\varphi$  dont le support est entièrement inclus dans  $A$ , on a  $\langle T, \varphi \rangle = 0$ . Le plus grand ouvert (éventuellement vide) qui vérifie une telle propriété est appelé *l'ouvert d'annulation* de  $T$ ; son complémentaire est un ensemble fermé, appelé le *support* de  $T$ . Dans le cas des fonctions usuelles, considérées comme distributions, ces définitions coïncident avec celles données au paragraphe 3.2.

La propriété importante à retenir est la suivante.

**Propriété 3.** Si  $T$  est une distribution,  $\varphi$  une fonction de test, et que leurs supports ne se coupent pas ( $\text{supp } T \cap \text{supp } \varphi = \emptyset$ ), alors  $\langle T, \varphi \rangle = 0$ .

Une distribution peut évidemment avoir un support compact; on note  $\mathcal{E}'$  l'ensemble de ces distributions; c'est un espace qui contient notamment  $C_c$ . Cet espace est en fait le dual de l'espace  $\mathcal{E} = C^\infty$  des fonctions indéfiniment dérivables (à support quelconque).

#### 3.4.2 Multiplication par une fonction indéfiniment dérivable

Nous avons vu que l'on pouvait multiplier une distribution  $T$  par un scalaire. Montrons que l'on peut multiplier  $T$  par une fonction indéfiniment dérivable  $\theta$  (à support compact ou non). En effet, si  $\theta \in C^\infty$  et  $\varphi \in \mathcal{D}$ , alors le produit  $\theta\varphi$  appartient à  $\mathcal{D}$ : en effet le produit de deux fonctions  $C^\infty$  est encore  $C^\infty$ , et le support du produit est l'intersection des supports des deux fonctions, et est donc borné puisque c'est le cas de celui de  $\varphi$ .

Dès lors, nous pouvons parfaitement calculer la valeur  $\langle T, \theta\varphi \rangle$  ; par définition, la distribution  $\theta T$ , produit de  $T$  par  $\theta$ , est la distribution définie par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad \langle \theta T, \varphi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle T, \theta\varphi \rangle \quad (35)$$

Notons que cette définition est cohérente avec celle de la multiplication des fonctions usuelles ; en effet, si  $T$  est une fonction  $f$ , alors la dernière égalité se ramène simplement à la commutativité de la multiplication :

$$\int_{\mathbb{R}^N} [\theta f](x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^N} \theta(x) f(x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(x) [\theta \varphi](x) dx \quad (36)$$

Cette notion de cohérence sera cruciale dans la suite ; les distributions ont été inventées pour étendre la notion de fonction : on souhaite donc que les propriétés des fonctions soient également conservées, avec le moins de restrictions possible. Cette exigence nous incitera dans la suite à étudier d'abord les propriétés des fonctions en relation avec le crochet de dualité ; puis à essayer de les étendre à toutes les distributions. Bien que cette idée paraisse simpliste, les succès emportés sont évidents, comme on va le voir dans les paragraphes suivants.

### 3.4.3 Dérivation

Nous considérons tout d'abord le cas où  $N = 1$  (pour ne pas avoir à préciser par rapport à quelle coordonnée on dérive).

On peut toujours dériver une fonction de test  $\varphi$  (puisque  $\mathcal{D}$  est inclus dans  $C^\infty$ ), et sa dérivée est encore une fonction de test. De plus, si  $f$  est une fonction de classe  $C^1$ , c'est une distribution, ainsi que sa dérivée  $f'$  ; on a, en faisant une intégration par parties :

$$\langle f', \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f'(x) \varphi(x) dx = - \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi'(x) dx = - \langle f, \varphi' \rangle \quad (37)$$

(il n'y a pas de terme de bord, car  $\varphi$  est nulle hors de son support).

Cette relation peut être généralisée pour toute distribution : par définition, la dérivée d'une distribution  $T$  est la distribution  $T'$  définie par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad \langle T', \varphi \rangle = - \langle T, \varphi' \rangle \quad (38)$$

(ne pas oublier le signe moins !).

On voit ici l'une des propriétés surprenantes des distributions : toute distribution est dérivable ; mieux encore, toute distribution est indéfiniment dérivable, car ce processus peut se répéter autant de fois que nécessaire. En appliquant la formule (38) récursivement, on trouve que la dérivée  $k$ -ième de  $T$ , notée  $T^{(k)}$ , vérifie :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad \langle T^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^k \langle T, \varphi^{(k)} \rangle \quad (39)$$

Ce procédé peut par ailleurs être étendu au cas où  $N > 1$ , avec la définition naturelle de la dérivée de  $T$  par rapport à  $x_1$  (par exemple) :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_1}, \varphi \right\rangle = - \left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right\rangle \quad (40)$$

Ici encore, on peut réitérer la formule (éventuellement en changeant de coordonnée). En particulier, comme pour une fonction  $C^\infty$  on peut changer l'ordre des coordonnées dans les dérivations, on en déduit que cela est vrai aussi des distributions ; par exemple on a :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 T}{\partial x_2 \partial x_1} \quad (41)$$

(alors que ce n'est pas forcément vrai au sens habituel, pour certaines fonctions).

Dans tous les cas, si  $f$  est une fonction  $k$  fois continûment dérivable, la définition de ses dérivées jusqu'à l'ordre  $k$  inclus au sens des distributions coïncide avec la définition habituelle des dérivées de  $f$  ; ce qui est nouveau, c'est que la définition de la dérivée au sens des distributions permet de définir des dérivées d'ordre supérieur à  $k$ . Par exemple, on peut dériver au sens des distributions une fonction qui n'est pas continue : on en verra des exemples au paragraphe 3.6.

### 3.4.4 Translation, rotation, symétrie, homothétie

Si  $\varphi$  est une fonction de test et  $a$  un élément de  $\mathbb{R}^N$ , on peut définir la fonction *translatée de  $\varphi$  par  $a$* , notée  $\tau_a[\varphi]$ , en posant  $\tau_a[\varphi](x) = \varphi(x - a)$ . C'est aussi une fonction de test (dont le support est l'ensemble obtenu par une translation de vecteur  $a$  du support de  $\varphi$ ). De même, le *symétrique de  $\varphi$*  est la fonction de test notée  $\sigma[\varphi]$  définie par  $\sigma[\varphi](x) = \varphi(-x)$  ; si  $R$  est une rotation de  $\mathbb{R}^N$ , on peut définir l'*image par rotation  $R$  de  $\varphi$* , notée  $\rho_R[\varphi]$ , par  $\rho_R[\varphi](x) = \varphi(R(x))$ . Enfin, si  $\lambda$  est scalaire, on peut définir l'*homothétie de  $\varphi$  de rapport  $\lambda$* , noté  $h_\lambda[\varphi]$ , par la relation  $h_\lambda[\varphi](x) = \varphi(\lambda x)$ .

À présent, si  $f$  est une fonction continue, toutes ces transformations peuvent aussi être appliquées à  $f$ , et l'on obtient encore une fonction continue à chaque fois ; on a par un changement de variable ( $y = x - a$ ) :

$$\begin{aligned} \langle \tau_a[f], \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} f(x - a) \varphi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} f(y) \varphi(y + a) dy = \langle f, \tau_{-a}[\varphi] \rangle \end{aligned} \quad (42)$$

(bien noter qu'au passage la translation change de sens).

Il est donc tout naturel d'étendre cette relation à toutes les distributions : par définition, la translatée d'une distribution  $T$  de vecteur  $a$  est la distribution notée  $\tau_a[T]$  définie par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad \langle \tau_a[T], \varphi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle T, \tau_{-a}[\varphi] \rangle \quad (43)$$

De même, on peut définir le symétrique, l'image par rotation ou homothétie de  $T$  :

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad \langle \sigma[T], \varphi \rangle &\stackrel{\text{def}}{=} \langle T, \sigma[\varphi] \rangle \\ \langle \rho_R[T], \varphi \rangle &\stackrel{\text{def}}{=} \langle T, \rho_R[\varphi] \rangle \\ \langle h_\lambda[T], \varphi \rangle &\stackrel{\text{def}}{=} |\lambda|^{-N} \langle T, h_{\frac{1}{\lambda}}[\varphi] \rangle \end{aligned} \quad (44)$$

(noter ici encore les inversions dans les deux dernières formules, où  $\bar{R}$  désigne la rotation inverse de  $R$ , ainsi que l'apparition du terme  $|\lambda|^{-N}$ , comme dans la formule (19)).

### 3.4.5 Produit tensoriel

Il est parfois utile de construire des distributions sur un espace  $\mathbb{R}^N$  à partir de distributions sur des espaces plus petits ; il existe pour cela un outil très simple, appelé *produit tensoriel*. Dans ce paragraphe, nous écrirons  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ , etc., les ensembles de distributions afin de mettre en valeur la dimension des espaces vectoriels de base.

Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions définies respectivement sur  $\mathbb{R}^M$  et  $\mathbb{R}^N$ , on appelle produit tensoriel de  $f$  par  $g$ , et l'on note  $f \otimes g$ , la fonction définie sur  $\mathbb{R}^{M+N} = \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^M, \forall y \in \mathbb{R}^N, \quad (f \otimes g)(x, y) = f(x)g(y) \quad (45)$$

On a ici assimilé les éléments de  $\mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N$ , qui sont des couples de vecteurs  $(x, y) = ((x_1, \dots, x_M), (y_1, \dots, y_N))$  aux vecteurs de  $\mathbb{R}^{M+N}$  de la forme  $(x_1, \dots, x_M, y_1, \dots, y_N)$ . Le produit tensoriel est donc une multiplication ordinaire, mais avec des fonctions ayant des variables différentes.

Il est facile de voir que si  $f$  et  $g$  sont des fonctions localement intégrables respectivement sur  $\mathbb{R}^M$  et  $\mathbb{R}^N$ , alors  $f \otimes g$  est localement intégrable sur  $\mathbb{R}^{M+N}$ ; c'est donc une distribution. De plus, si  $\varphi$  et  $\psi$  sont des éléments respectivement de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^M)$  et  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ , alors  $\varphi \otimes \psi$  appartient à  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{M+N})$ . On peut donc calculer :

$$\begin{aligned} \langle f \otimes g, \varphi \otimes \psi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^M} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) g(y) \varphi(x) \psi(y) dy dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^M} f(x) \varphi(x) dx \int_{\mathbb{R}^N} g(y) \psi(y) dy \quad (46) \\ &= \langle f, \varphi \rangle \langle g, \psi \rangle \end{aligned}$$

Cela suggère d'étendre le produit tensoriel aux distributions. On utilise pour cela la propriété 4.

**Propriété 4.** Soit  $T$  un élément de  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^M)$ , et  $U$  un élément de  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ ; il existe une unique distribution de  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{M+N})$ , appelée le produit tensoriel de  $T$  par  $U$ , et notée  $T \otimes U$ , qui vérifie :

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^M), \forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N), \\ \langle T \otimes U, \varphi \otimes \psi \rangle = \langle T, \varphi \rangle \langle U, \psi \rangle \quad (47) \end{aligned}$$

Naturellement,  $T \otimes U$  peut être calculée en toute fonction  $\theta$  de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{M+N})$ ; en particulier, si les deux distributions sont des fonctions localement intégrables  $f$  et  $g$ , on a :

$$\begin{aligned} \langle f \otimes g, \theta \rangle &= \int_{\mathbb{R}^M} \left( \int_{\mathbb{R}^N} g(y) \theta(x, y) dy \right) f(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left( \int_{\mathbb{R}^M} f(x) \theta(x, y) dx \right) g(y) dy \quad (48) \end{aligned}$$

## 3.5 Convolution

Nous avons un peu utilisé jusqu'à présent la multiplication des fonctions, mais nous ne l'avons pas vraiment étendue aux distributions, sauf pour la multiplication par une fonction  $C^\infty$  : le produit de deux distributions quelconques n'est pas possible en général. Par contre, il existe une autre sorte de produit de fonctions, appelé le *produit de convolution*, qui joue un rôle important en analyse harmonique ainsi que dans certains domaines de la physique, comme l'électronique. Nous en expliquons ici la nature et l'extension possible aux distributions.

### 3.5.1 Convolution des fonctions

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions de carré intégrable; pour tout  $x \in \mathbb{R}^N$ , la fonction  $\tau_x[g]$ , définie, rappelons-le, par la relation  $\tau_x[g](y) = g(y - x)$ , est aussi de carré intégrable, et on peut donc en calculer le produit scalaire avec  $f$ , obtenant ainsi un nombre :

$$(f * g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \langle f, \tau_x[g] \rangle_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^N} f(y) g(x - y) dy \quad (49)$$

La fonction  $f * g$  ainsi obtenue est appelée le produit de convolution de  $f$  et  $g$ ; c'est une fonction sommable (mais pas forcément de carré intégrable), et qui vérifie en outre :

$$\int_{\mathbb{R}^N} |(f * g)(x)| dx \leq \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2} \quad (50)$$

La convolution est bilinéaire, distributive par rapport à l'addition, exactement comme la multiplication usuelle; elle n'admet cependant pas d'élément neutre parmi les fonctions localement intégrables (alors que la fonction identiquement égale à 1 est l'élément neutre de la multiplication). Elle est aussi symétrique ( $f * g = g * f$ ), bien que cela ne soit pas évident dans la définition : il faut faire un changement de variable d'intégration  $z = x - y$ .

### 3.5.2 Convolution des distributions

Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions de carré intégrable,  $f * g$  est une fonction sommable, donc une distribution; pour toute fonction test  $\varphi$ , on a par un changement de variable ( $z = x - y$ ) :

$$\begin{aligned} \langle f * g, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} f(y) g(x - y) \varphi(x) dy dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} f(y) g(z) \varphi(y + z) dy dz \quad (51) \\ &= \langle f \otimes g, \varphi^\Delta \rangle \end{aligned}$$

où  $\varphi^\Delta$  est la fonction de  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$  définie par  $\varphi^\Delta(x, y) = \varphi(x + y)$ .

Cela suggère de définir le produit de convolution de deux distributions  $T$  et  $U$  par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad \langle T * U, \varphi \rangle = \langle T \otimes U, \varphi^\Delta \rangle \quad (52)$$

Cette définition pose toutefois un problème, car  $\varphi^\Delta$  est  $C^\infty$  mais à support *non compact*; en conséquence, le membre de droite de (52) n'a en général aucun sens. Nous admettrons cependant que si  $T$  ou  $U$  a un support compact, alors l'intersection du support de  $T \otimes U$  avec celui de  $\varphi^\Delta$  est compact, et dans ce cas on peut définir la valeur  $\langle T \otimes U, \varphi^\Delta \rangle$ .

Plus généralement, si  $T_1, T_2, \dots, T_k$  sont des distributions dont *une seule* (au plus) a un support non compact, alors on peut définir la distribution  $T_1 * T_2 * \dots * T_N$ . Le produit ainsi obtenu est commutatif, mais aussi associatif (c'est-à-dire que  $(T_1 * T_2) * T_3 = T_1 * (T_2 * T_3)$ ) et l'on peut donc faire le produit dans l'ordre que l'on veut. Nous verrons plus loin qu'il possède un élément neutre, le delta de Dirac.

Lorsqu'on a affaire à des fonctions intégrables, la relation (51) reste vraie. Elle permet de déduire une des propriétés importantes de ce produit de convolution.

**Propriété 5.** La dérivée (resp. la translatée) de  $T * U$  est la convolution de  $T$  par la dérivée (resp. la translatée) de  $U$ , ou l'inverse :

$$\begin{aligned} D^\alpha(T * U) &= T * (D^\alpha U) = (D^\alpha T) * U \\ \tau_a[T * U] &= T * \tau_a[U] = \tau_a[T] * U \quad (53) \end{aligned}$$

Plus généralement, on dérive ou on translate un produit de  $k$  termes  $T_1 * T_2 * \dots * T_k$  en dérivant ou en translatant l'un quelconque d'entre eux.

### 3.5.3 Régularisation

Le support de  $T * U$  est inclus dans  $\text{supp } T + \text{supp } U$ , où l'addition ne désigne pas ici l'union des ensembles, mais leur somme vectorielle ; c'est-à-dire que  $A + B$  est l'ensemble formé de tous les vecteurs qui peuvent s'écrire sous la forme  $a + b$ , avec  $a \in A$  et  $b \in B$ . En particulier, si  $T$  et  $U$  sont de support compact tous les deux, alors  $T * U$  aussi. Cette propriété, ajoutée à la formule de dérivation précédente, permet de déduire l'important théorème suivant.

**Théorème 1.** Soit  $\phi$  une fonction  $C^\infty$ , et  $T$  une distribution ; si  $T$  ou  $\phi$  a un support compact, alors  $T * \phi$  existe et est une fonction  $C^\infty$  ; si tous deux ont un support compact, alors  $T * \phi$  appartient à  $\mathcal{D}$ . On a de plus, pour tout  $x \in \mathbb{R}^N$ , la valeur explicite de cette fonction :

$$(T * \phi)(x) = \langle T, \tau_x[\phi] \rangle = \langle \sigma[T], \tau_x[\phi] \rangle \quad (54)$$

Bien sûr, on peut dériver ce produit en utilisant les formules (53) et (54) :

$$D^\alpha(T * \phi)(x) = (T * D^\alpha \phi)(x) = \langle \sigma[T], \tau_x[D^\alpha \phi] \rangle \quad (55)$$

On voit que ce théorème permet d'engendrer une infinité de fonctions de  $\mathcal{D}$ , à partir d'une seule : en effet, si  $\phi \in \mathcal{D}$ , et  $f$  est une fonction à support compact quelconque (même pas forcément continue), alors  $f * \phi$  appartient à  $\mathcal{D}$ . Or il est très facile d'obtenir une fonction à support compact : il suffit de prendre n'importe quelle fonction, et de la multiplier par  $\chi_A$ , où  $A$  est un ensemble borné quelconque : le support du produit est inclus dans  $A$ , donc borné.

Nous avons vu qu'il existait au moins une fonction dans  $\mathcal{D}$ , la fonction  $\varepsilon$  ; ce théorème nous apprend qu'il en existe en fait beaucoup d'autres.

## 3.6 Exemples de distributions

Voyons à présent quelques exemples de distributions, autres que des fonctions localement intégrables.

### 3.6.1 Delta de Dirac et dérivées

Plaçons-nous d'abord en dimension 1 ( $N = 1$ ), et considérons la fonction  $H$  définie de la manière suivante :

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (56)$$

C'est la fonction caractéristique de l'intervalle  $[0, +\infty[$ , mais on l'appelle aussi *fonction de Heaviside*. Il s'agit d'une fonction localement intégrable et bornée, mais qui n'est pas dérivable en 0, au sens usuel. Cependant, elle est dérivable comme distribution, puisque toutes les distributions sont dérivables. Mais, dans ce cas, quelle est sa dérivée ?

Rappelons que la dérivée de  $H$  est définie par la formule (38) ; on a ici :

$$\begin{aligned} \langle H', \varphi \rangle &= - \langle H, \varphi' \rangle = - \int_{\mathbb{R}} H(x) \varphi'(x) dx \\ &= - \int_0^{+\infty} \varphi'(x) dx = \varphi(0) \end{aligned} \quad (57)$$

(car  $\varphi$  est nulle en  $+\infty$ ). Par conséquent, la dérivée de  $H$  est la distribution qui à toute fonction test  $\varphi$  associe sa valeur en 0, soit  $\varphi(0)$ . Cette distribution particulière est appelée le *delta de Dirac*, et notée  $\delta$ . Contrairement à la fonction de Heaviside, il est possible de la définir plus généralement en dimension  $N$  par la formule :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad \langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) \quad (58)$$

De par la définition de  $\delta$ , et du support, on voit que celui de  $\delta$  est le point 0 tout seul :  $\text{supp } \delta = \{0\}$ . Naturellement, le point 0 n'est choisi que par convention ; si on le remplace par un autre point  $a \in \mathbb{R}^N$ , on note  $\delta_a$  la distribution obtenue, qui vérifie  $\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$ . En fait  $\delta_a$  n'est autre que la translatée de  $\delta$ , c'est-à-dire  $\tau_a[\delta]$ .

Le fait que le support de  $\delta$  soit réduit à un point isolé, qui est un ensemble négligeable, montre que cette distribution n'est pas une fonction. En effet, les fonctions de support négligeable sont nulles presque partout et, par conséquent, sont égales à 0 dans  $\mathcal{D}'$  ; pourtant,  $\delta \neq 0$  dans  $\mathcal{D}'$ , puisqu'il existe évidemment des fonctions  $\varphi \in \mathcal{D}$  vérifiant  $\varphi(0) \neq 0$ .

**Propriété 6.** La distribution  $\delta$  est l'élément neutre du produit de convolution ; autrement dit, pour toute distribution  $T$ ,  $\delta * T$  existe et est égal à  $T$ . Plus généralement,  $\delta_a * T$  existe et  $\delta_a * T = \tau_a[T]$ .

Les produits existent car  $\delta$  et  $\delta_a$  ont des supports compacts. Nous verrons par la transformée de Fourier pourquoi cette propriété est réalisée.

À son tour, le delta de Dirac est dérivable : quelles sont ses dérivées successives ? Cela se déduit facilement maintenant de la définition des dérivées des distributions :

$$\langle D^\alpha \delta, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle \delta, D^\alpha \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \varphi(0) \quad (59)$$

Les dérivées de  $\delta$  sont donc, au signe près, les distributions qui associent à une fonction de test la valeur de ses dérivées en 0 (en  $a$  si l'on dérive  $\delta_a$ ). Toutes ces distributions ont le même support que  $\delta$ , le point 0 seul.

On a aussi facilement la formule suivante :

$$(D^\alpha \delta) * T = \delta * (D^\alpha T) = D^\alpha T \quad (60)$$

Par conséquent, dériver une distribution, c'est faire une convolution avec la distribution particulière  $D^\alpha \delta$ .

Nous utiliserons abondamment dans la suite le delta de Dirac. Signalons tout de suite que cette notation est employée depuis longtemps par les physiciens, qui l'écrivent à la façon d'une fonction  $\delta(x)$ , en disant qu'elle est « infinie en 0 et nulle ailleurs », et que l'on a toujours  $\int \delta(x) \varphi(x) dx = \varphi(0)$ . Cette notation est abusive et nous l'éviterons pour notre part : cela n'a pas de sens mathématique de parler de la « valeur d'une distribution » en tel ou tel point, sauf quand elle coïncide avec une fonction continue, ce qui n'est pas le cas de  $\delta$ .

### 3.6.2 Mesures

Rappelons qu'on a noté  $C_c^0$  l'ensemble des fonctions continues à support compact ; cet ensemble peut être doté d'une norme, par exemple  $\|f\|_{C_c^0} = \sup f$ . Pour tout  $f \in C_c^0$ , il existe une suite de fonctions de tests  $(\varphi_n)$  qui converge vers  $f$  au sens de cette topologie (c'est-à-dire que la norme de  $f - \varphi_n$  tend vers zéro) : on dit que c'est une suite régularisante de  $f$ .



Si  $T$  est une distribution telle que pour toute fonction  $f \in C_c^0$ , et pour toute suite régularisante  $(\varphi_n)$  de  $f$ , la suite  $\langle T, \varphi_n \rangle$  possède une limite, alors cette limite est indépendante de  $f$ ; on la note  $\langle T, f \rangle$  (par extension), et on dit que  $T$  est une *mesure de Radon*. L'ensemble  $\mathcal{M}^0$  des mesures de Radon est un espace plus grand que  $C_c^0$ , mais contenu dans  $\mathcal{D}'$ ; c'est le dual topologique de  $C_c^0$ .

Ce procédé peut être répété pour les fonctions de  $C_c^k$  (fonctions  $k$ -fois continûment dérivables à support compact), engendrant à chaque fois un espace  $\mathcal{M}^k$ , dual de  $C_c^k$ , plus grand quand  $k$  augmente (c'est-à-dire inversement par rapport aux espaces  $C_c^k$ , qui sont de plus en plus petits quand  $k$  augmente). Une distribution qui se trouve dans  $\mathcal{M}^k$ , mais pas dans  $\mathcal{M}^{k-1}$ , est dite d'ordre  $k$ .

Le delta de Dirac est un exemple de mesure de Radon; c'est une distribution d'ordre 0. Pour toute fonction continue  $f$ , on a encore  $\langle \delta, f \rangle = f(0)$ . Une dérivée  $D^\alpha \delta$  de  $\delta$  est une distribution d'ordre  $|\alpha|$ . Plus généralement, si  $\mu$  est une mesure de Radon, alors  $D^\alpha \mu$  appartient à  $\mathcal{M}^{|\alpha|}$ .

Toutes les fonctions localement intégrables sont des mesures de Radon. Donnons-en d'autres exemples. Soit  $\Sigma$  une hypersurface de  $\mathbb{R}^N$  (c'est-à-dire un morceau d'une variété de dimension  $N-1$ : penser à une courbe de  $\mathbb{R}^2$ , ou à une surface ordinaire de  $\mathbb{R}^3$ ); on peut définir la mesure surfacique de  $\Sigma$ , notée  $\mu_\Sigma$ , sous la forme :

$$\forall \phi \in C_c^0, \quad \langle \mu_\Sigma, \phi \rangle = \int_\Sigma \phi(x) d\sigma \quad (61)$$

Ici l'intégrale s'entend comme une intégrale de surface : elle n'est donc pas nécessairement nulle, bien que  $\Sigma$  soit négligeable dans  $\mathbb{R}^N$ .

Alors  $\mu_\Sigma$  est une mesure de Radon, dont le support est exactement  $\Sigma$ . Ce procédé peut s'appliquer à tout morceau d'une variété de  $\mathbb{R}^N$  (par exemple à une courbe dans  $\mathbb{R}^3$ ).

De plus, on peut montrer que le produit d'une fonction continue  $f$  par une mesure de Radon  $\mu$  est une mesure de Radon  $f\mu$  définie par :

$$\forall \phi \in C_c^0, \quad \langle f\mu, \phi \rangle = \langle \mu, f\phi \rangle \quad (62)$$

(à rapprocher de la définition du produit d'une distribution par une fonction  $C^\infty$ ). Par exemple, le produit  $f\mu_\Sigma$  est appelé la mesure surfacique de poids  $f$  sur  $\Sigma$ . Ces mesures surfaciques sont très utiles en physique, par exemple quand on veut considérer le potentiel engendré par un conducteur parfait chargé : dans ce cas, la distribution de charge peut commodément être considérée comme une mesure surfacique de poids  $\rho(x)$  (la valeur des charges), portée par la surface  $\Sigma$  qui est le bord du conducteur parfait.

$c = a + ib$  peut être définie à partir de la somme d'une série, ou plus simplement à l'aide des fonctions exponentielles, cosinus et sinus réelles, par la formule :

$$e^{a+ib} = e^a (\cos b + i \sin b) \quad (63)$$

que l'on emploiera surtout dans le cas où  $a = 0$ , sous la forme  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ ; dans ce cas, le module d'un tel nombre est égal à 1, c'est donc une fonction bornée de  $\theta$ .

## 4.1 Transformée de Fourier d'une fonction

Soit  $f$  une fonction sommable sur  $\mathbb{R}^N$ . Le produit de  $f$  par une fonction bornée est encore une fonction sommable : par conséquent, pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^N$ , on peut calculer la valeur :

$$\widehat{f}(\xi) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{-ix\xi} dx \quad (64)$$

**Proposition 2.** La fonction  $\widehat{f}$  est bornée et uniformément continue par rapport à  $\xi$ . On l'appelle la transformée de Fourier de  $f$ .

La transformée de Fourier d'une fonction sera aussi notée  $\mathcal{F}(f)$  ou  $\mathcal{F}f$ ; l'opérateur  $\mathcal{F}$  est appelé *transformation de Fourier*.

## 4.2 Transformée d'une distribution

La formule (64) ne peut s'appliquer qu'à des fonctions sommables. Une fonction qui n'est que bornée, par exemple, fera habituellement diverger l'intégrale. Ainsi la fonction constante 1, les fonctions trigonométriques, et *a fortiori* des fonctions non bornées comme les polynômes, ne peuvent « passer » dans cette formule. Pourtant, il est hautement souhaitable, comme on le verra dans nos applications, de pouvoir calculer les transformées de Fourier de telles fonctions : il faut donc généraliser le concept de transformée de Fourier; la conséquence est que nous n'obtiendrons plus des fonctions, mais des distributions. Il est donc naturel de se poser la question suivante : peut-on généraliser le concept de transformée de Fourier à toutes les fonctions continues (au moins), et même à toutes les distributions ?

La réponse est malheureusement négative; par exemple la fonction  $e^x$  (dans le cas  $N = 1$ ) ne peut pas avoir de transformée de Fourier, même au sens des distributions. Pour posséder une transformée de Fourier, la distribution ne doit pas « croître trop vite » à l'infini. Nous allons donc dans un premier temps définir des sous-ensembles de  $\mathcal{D}'$  adaptés à la transformation de Fourier.

### 4.2.1 Fonctions à décroissance rapide

Soit  $\phi$  une fonction indéfiniment dérivable, et vérifiant la propriété suivante :

$$\forall k \geq 0, \forall \alpha \in \mathbb{N}^N, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^k D^\alpha \phi(x) = 0 \quad (65)$$

Autrement dit, la fonction  $\phi$  ainsi que toutes ses dérivées tendent vers 0 à l'infini plus rapidement que n'importe quelle puissance négative de  $|x|$  : un exemple de telle fonction est donné par  $\phi(x) = e^{-|x|}$ , en vertu de la règle selon laquelle « l'exponentielle l'emporte sur les polynômes à l'infini ».

## 4. Transformation de Fourier

Nous abordons maintenant la transformation de Fourier, qui est la base même de l'analyse harmonique moderne. Nous nous plaçons encore dans l'espace  $\mathbb{R}^N$ , bien qu'en pratique on ait souvent  $N = 1$ ; nos notations cependant sont conçues de telle sorte que la différence avec ce cas plus simple soit très petite (voir le paragraphe sur les notations) : car il n'y a pas de difficulté supplémentaire dans le cas général.

La transformation de Fourier utilise abondamment l'exponentielle complexe, aussi n'est-il peut-être pas inutile d'en rappeler les propriétés élémentaires. L'exponentielle d'un nombre complexe

Les fonctions  $C^\infty$  réalisant (65) sont dites *fonctions à décroissance rapide* ; l'ensemble de ces fonctions est noté  $\mathcal{S}$  ; c'est un espace vectoriel dont les propriétés sont proches de celles de  $\mathcal{D}$ . Les fonctions de  $\mathcal{D}$  sont identiquement nulles à l'infini, puisque de support compact, donc en particulier elles appartiennent à  $\mathcal{S}$ .

Par ailleurs, les fonctions de  $\mathcal{S}$  sont sommables. On peut donc en calculer les transformées de Fourier.

**Proposition 3.** *La transformée de Fourier d'une fonction de  $\mathcal{S}$  est encore une fonction de  $\mathcal{S}$ .*

On dit aussi que l'espace  $\mathcal{S}$  est *stable* par la transformation de Fourier. Cette propriété est remarquable : en effet, ce n'est pas le cas de  $\mathcal{D}$  (la transformée de Fourier d'une fonction de test n'a aucune raison de s'annuler lorsque  $|\xi|$  est grand), ni de l'espace des fonctions sommables, car la transformée d'une telle fonction est une fonction bornée, mais pas forcément sommable. Nous verrons cependant plus loin qu'un autre espace est stable par  $\mathcal{F}$  : il s'agit de l'espace  $L^2$  des fonctions de carré intégrable.

## 4.2.2 Distributions tempérées

Soit  $\phi$  et  $\psi$  deux fonctions de  $\mathcal{S}$  ; elles-mêmes et leurs transformées de Fourier sont en particulier des fonctions de  $L^2$  ; leur produit tensoriel est dans  $L^1$ , et par conséquent la formule de Fubini (20) s'applique. On peut donc calculer le scalaire suivant, et changer l'ordre des intégrales :

$$\begin{aligned} \langle \psi, \hat{\phi} \rangle_{L^2} &= \int_{\mathbb{R}^N} \psi(\xi) \left( \int_{\mathbb{R}^N} \phi(x) e^{-ix\xi} dx \right) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \phi(x) \left( \int_{\mathbb{R}^N} \psi(\xi) e^{-ix\xi} d\xi \right) dx = \langle \hat{\psi}, \phi \rangle_{L^2} \end{aligned} \quad (66)$$

Il est donc naturel de définir la transformée de Fourier d'une distribution  $T$  en posant  $\langle \hat{T}, \phi \rangle = \langle T, \hat{\phi} \rangle$ . Le problème dans ce cas est que  $\hat{\phi}$  appartient à  $\mathcal{S}$ , mais pas forcément à  $\mathcal{D}$ , et que par conséquent le second membre n'a pas de sens en général. Pour qu'il en ait un, il faut que  $T$  appartienne à l'espace  $\mathcal{S}'$ , dual de  $\mathcal{S}$ . Cet espace  $\mathcal{S}'$  est aussi l'ensemble des distributions  $T$  telles que pour toute fonction  $\phi \in \mathcal{S}$ , et toute suite  $(\phi_n)$  d'éléments de  $\mathcal{D}$  ayant pour limite  $\phi$ , la suite  $\langle T, \phi_n \rangle$  ait une limite finie, notée  $\langle T, \phi \rangle$ . Une distribution appartenant à  $\mathcal{S}'$  est appelée une *distribution tempérée*.

Pour toute distribution tempérée  $T$ , on peut donc définir la transformée de Fourier de  $T$ , notée aussi  $\hat{T}$ , par la formule :

$$\forall \phi \in \mathcal{S}, \quad \langle \hat{T}, \phi \rangle = \langle T, \hat{\phi} \rangle \quad (67)$$

On a la conséquence naturelle de la proposition 3.

**Proposition 4.** *La transformée de Fourier d'une distribution tempérée est aussi une distribution tempérée.*

## 4.2.3 Caractérisation des distributions tempérées

Les distributions (et donc *a fortiori* les fonctions) ayant un support compact sont des distributions tempérées : c'est donc le cas par exemple du delta de Dirac et de toutes ses dérivées.

Parmi les fonctions, les polynômes sont des éléments de  $\mathcal{S}'$ , quel que soit leur degré (à cause du  $\forall k$  dans la formule (65)). Mais l'exponentielle ne l'est pas, car  $e^{-|x|} \in \mathcal{S}$  (§ 4.2.1) tandis que l'intégrale  $\int_{\mathbb{R}} e^x e^{-|x|} dx$  diverge.

Plus généralement, tout produit d'une fonction bornée par un polynôme est une fonction appartenant à  $\mathcal{S}'$ , et les dérivées de ces fonctions sont des distributions tempérées. Il est possible de démontrer que toute distribution tempérée est de cette forme : dérivée d'une fonction tempérée, elle-même produit d'un polynôme par une fonction bornée.

## 4.3 Propriétés de la transformation de Fourier

Nous donnerons ultérieurement un certain nombre de transformées de Fourier de fonctions usuelles. Certaines se calculent directement par la formule (64), mais beaucoup d'entre elles se déduisent de quelques-unes à l'aide des propriétés de la transformation de Fourier que nous allons à présent examiner, et qui doivent être vues aussi bien comme des éléments constitutifs de cette transformée que comme des règles de calculs.

### 4.3.1 Linéarité

La transformation de Fourier est linéaire, comme le crochet de dualité ; on a donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f+g) &= \mathcal{F}(f) + \mathcal{F}(g) = \hat{f} + \hat{g} \\ \mathcal{F}(\lambda f) &= \lambda \mathcal{F}(f) = \lambda \hat{f} \end{aligned} \quad (68)$$

### 4.3.2 Cotransformation de Fourier

Nous appellerons *conjuguée de la transformation de Fourier* la transformation  $\overline{\mathcal{F}}$  définie par  $\overline{\mathcal{F}}(\phi) = \overline{\mathcal{F}(\phi)}$ , et *cotransformation de Fourier* la transformation  $\mathcal{F}^{-1}$  définie par :

$$\mathcal{F}^{-1}(\phi) = \frac{1}{(2\pi)^N} \overline{\mathcal{F}}(\phi) = \frac{1}{(2\pi)^N} \overline{\mathcal{F}(\overline{\phi})} \quad (69)$$

Dans le cas où  $\phi$  est une fonction sommable, on a notamment :

$$\mathcal{F}^{-1}(\phi)(x) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} \phi(\xi) e^{+ix\xi} d\xi \quad (70)$$

La notation s'explique par le théorème suivant.

**Théorème 2.** *La cotransformation de Fourier est l'inverse de la transformation de Fourier ; c'est-à-dire que pour toute distribution  $T \in \mathcal{S}'$ , on a :*

$$\mathcal{F}^{-1}(\hat{T}) = \mathcal{F}^{-1} \mathcal{F}(T) = T = \mathcal{F} \mathcal{F}^{-1}(T) \quad (71)$$

Cette formule est parfois appelée formule de réciprocité. Pour l'établir, il suffit de la montrer pour une fonction  $\varphi \in \mathcal{S}$  (à cause de (67)). Dans ce cas, elle se ramène à une utilisation de la formule de Fubini (20) et à un passage à la limite ; nous donnons ce calcul important dans le cas de la dimension 1 :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}^{-1}(\widehat{\varphi})(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(\xi) e^{+ix\xi} d\xi \\
 &= \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A \widehat{\varphi}(\xi) e^{+ix\xi} d\xi \\
 &= \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A \left( \int_{\mathbb{R}} \varphi(y) e^{-iy\xi} dy \right) e^{+ix\xi} d\xi \\
 &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi(y) \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A e^{i(x-y)\xi} d\xi \right) dy \\
 &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi(y) \frac{\sin[(x-y)A]}{\pi(x-y)} dy \\
 &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi\left(x - \frac{z}{A}\right) \frac{\sin z}{\pi z} dz \\
 &= \varphi(x) \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin z}{\pi z} dz = \varphi(x)
 \end{aligned}$$

car la dernière intégrale est exactement égale à 1 (c'est la raison d'être du coefficient  $1/2\pi$ ).

**Remarque 1.** La définition de la transformation de Fourier n'est pas fixée dans les textes scientifiques : certains auteurs préfèrent des définitions légèrement différentes. On trouvera par exemple les écritures suivantes :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}(f) &= \int_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{-i2\pi x\xi} dx \\
 \text{et} \quad \mathcal{F}^{-1}(f) &= \int_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{+i2\pi x\xi} dx \\
 \mathcal{F}(f) &= (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{-ix\xi} dx \\
 \text{et} \quad \mathcal{F}^{-1}(f) &= (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{+ix\xi} dx
 \end{aligned}$$

(éventuellement les  $+$  et  $-$  sont inversés). Ces définitions sont plus symétriques (en particulier, dans ces cas, la cotransformée est aussi la conjuguée de  $\mathcal{F}$ ), mais elles obligent à promener des facteurs  $2\pi$  dans toutes les formules. La formule (64) que nous utilisons ici semble la plus répandue ; en particulier, c'est celle que l'on trouve généralement dans les tables de transformées.

### 4.3.3 Formule du retard, rotation, symétrie, homothétie

Si  $\varphi$  est une fonction de  $\mathcal{S}$ , alors  $\tau_a[\varphi]$  aussi et l'on a :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}(\tau_a[\varphi]) &= \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x-a) e^{-ix\xi} dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(y) e^{-i(a+y)\xi} dy \\
 &= e^{-ia\xi} \widehat{\varphi}(\xi)
 \end{aligned} \tag{72}$$

De même, ou en utilisant  $\mathcal{F}^{-1}$ , on a  $\mathcal{F}(e^{-iax}\varphi(x)) = \widehat{\varphi}(\xi+a) = \tau_{-a}\widehat{\varphi}$ . La transformation de Fourier change donc une translation en une multiplication par la fonction exponentielle  $\omega_a$  définie par  $\omega_a(x) = e^{-iax}$ , et réciproquement. Ces formules se généralisent à l'identique dans  $\mathcal{S}'$ , et l'on a donc les formules dites *de retard* :

$$\begin{aligned}
 \forall T \in \mathcal{S}', \quad \widehat{\tau_a[T]} &= \omega_a \widehat{T} \\
 \widehat{\omega_a T} &= \tau_{-a}[\widehat{T}]
 \end{aligned} \tag{73}$$

Des résultats similaires peuvent être obtenus pour les rotations, symétries et homothéties (§ 3.4.4) :

$$\begin{aligned}
 \forall T \in \mathcal{S}', \quad \widehat{\sigma[T]} &= \sigma[\widehat{T}] \\
 \widehat{\rho_R[T]} &= \rho_R[\widehat{T}] \\
 \widehat{h_\lambda[T]} &= |\lambda|^{-N} h_{\frac{1}{\lambda}}[\widehat{T}]
 \end{aligned} \tag{74}$$

### 4.3.4 Dérivation et multiplication monomiale

Si  $\varphi$  est une fonction de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , sa dérivée aussi et l'on a par une intégration par parties :

$$\begin{aligned}
 \widehat{\varphi'}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \varphi'(x) e^{-ix\xi} dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) i\xi e^{-ix\xi} dx = i\xi \widehat{\varphi}(\xi)
 \end{aligned} \tag{75}$$

Inversement, la transformée de Fourier de  $x \mapsto x\varphi(x)$  est  $i\widehat{\varphi'}$ . Ces formules se généralisent en dimension  $N$ , y compris aux distributions de  $\mathcal{S}$ . En effet, si pour tout  $N$ -uplet de nombres entiers positifs  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$  on note  $X^\alpha$  la fonction dite *monôme d'ordre  $\alpha$*  définie par :

$$X^\alpha(x) = x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_N^{\alpha_N} \tag{76}$$

alors pour toute distribution  $T \in \mathcal{S}'$ ,  $X^\alpha T$  appartient encore à  $\mathcal{S}'$  et l'on a :

$$\begin{aligned}
 \widehat{X^\alpha T} &= i^{|\alpha|} D^\alpha \widehat{T} \\
 D^\alpha \widehat{T} &= i^{|\alpha|} \widehat{X^\alpha T}
 \end{aligned} \tag{77}$$

En d'autres termes, la transformation de Fourier échange dérivation et multiplication par un monôme.

### 4.3.5 Multiplication et convolution

Si  $\varphi$  et  $\psi$  sont deux fonctions de  $\mathcal{S}$ , alors  $\widehat{\varphi}$ ,  $\widehat{\psi}$  et leur produit également appartiennent à  $\mathcal{S}$  et l'on a :

$$\begin{aligned}
 \widehat{\varphi}(\xi) \widehat{\psi}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) e^{-ix\xi} dx \int_{\mathbb{R}^N} \psi(y) e^{-iy\xi} dy \\
 &= \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) \psi(y) e^{-i(x+y)\xi} dx dy \\
 &= \int_{\mathbb{R}^N} \left( \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) \psi(z-x) dx \right) e^{-iz\xi} dz \\
 &= \int_{\mathbb{R}^N} (\varphi * \psi)(z) e^{-iz\xi} dz \\
 &= \mathcal{F}(\varphi * \psi)
 \end{aligned} \tag{78}$$

Une formule similaire existe pour  $\mathcal{F}^{-1}$ , et on peut aussi appliquer  $\mathcal{F}^{-1}$  aux deux membres de (78) ; enfin, on peut remplacer l'une des fonctions par un élément arbitraire de  $\mathcal{S}'$ . On obtient alors les égalités suivantes :

$$\forall T \in \mathcal{S}', \forall \varphi \in \mathcal{S} \quad \widehat{\varphi * T} = \widehat{\varphi} \widehat{T} \quad \widehat{\varphi T} = \frac{1}{(2\pi)^N} \widehat{\varphi} * \widehat{T} \quad (79)$$

En d'autres termes, la transformation de Fourier (et aussi la cotransformation) échangent la multiplication et le produit de convolution.

### 4.3.6 Formules de Parseval et Plancherel

Soit  $\varphi$  et  $\psi$  deux fonctions de  $\mathcal{S}$ . On peut calculer :

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \psi \rangle_{L^2} &= \int_{\mathbb{R}^N} \overline{\varphi}(x) \psi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \overline{\varphi}(x) \mathcal{F}^{-1} \widehat{\psi}(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \overline{\varphi}(x) \left( \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{\psi}(\xi) e^{+ix\xi} d\xi \right) dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{\psi}(\xi) \left( \int_{\mathbb{R}^N} \overline{\varphi}(x) e^{+ix\xi} dx \right) d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{\psi}(\xi) \widehat{\overline{\varphi}}(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^N} \langle \widehat{\varphi}, \widehat{\psi} \rangle_{L^2} \end{aligned}$$

Cette formule reste vraie pour deux fonctions de  $L^2$  ; elle est connue sous le nom de *formule de Plancherel* :

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \frac{1}{(2\pi)^N} \langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle_{L^2} \quad (80)$$

Lorsque  $g = f$ , on obtient la *formule de Parseval* en prenant la racine carrée :

$$\|\widehat{f}\|_{L^2} = (2\pi)^{\frac{N}{2}} \|f\|_{L^2} \quad (81)$$

Il en résulte notamment que si  $f$  est de carré intégrable, alors  $\widehat{f}$  aussi, ainsi que  $\mathcal{F}^{-1}(f)$ . Par conséquent, l'espace  $L^2$  est globalement invariant par la transformation de Fourier, comme  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'$ .

Les formules (79) peuvent être employées plus généralement quand les deux membres ont un sens. Par exemple, si  $f$  et  $g$  sont des fonctions de  $L^2$ , alors leurs transformées aussi et  $f * g \in L^1$  ; on a donc au sens des fonctions sommables ordinaires  $\mathcal{F}(f * g) = \widehat{f} \widehat{g}$ , et ce produit appartient à  $L^\infty$ .

Inversement, la formule de Plancherel est vraie pour le crochet de dualité de  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'$  :

$$\forall T \in \mathcal{S}', \forall \varphi \in \mathcal{S}, \quad \langle T, \varphi \rangle = \frac{1}{(2\pi)^N} \langle \widehat{T}, \widehat{\varphi} \rangle \quad (82)$$

### 4.3.7 Delta de Dirac et monômes

Nous avons dit que le delta de Dirac appartient à  $\mathcal{S}'$ , car c'est une distribution de support compact. Quelle est sa transformée de Fourier ? Un calcul simple le montre :

$$\langle \widehat{\delta}, \varphi \rangle = \langle \delta, \widehat{\varphi} \rangle = \widehat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) dx = \langle 1, \varphi \rangle \quad (83)$$

Donc  $\widehat{\delta}$  est la fonction constante 1. Inversement, la transformée de Fourier de 1 est  $(2\pi)^N \delta$ . Cela n'a en fait rien d'étonnant, si l'on se rappelle que  $\delta$  est l'élément neutre du produit de convolution (§ 3.6.1) ; comme la transformation de Fourier échange ce produit avec le produit ordinaire, l'image de  $\delta$  est nécessairement l'élément neutre du produit des fonctions, c'est-à-dire la fonction constante 1 (remplacer  $\varphi$  par  $\delta$  ou 1 respectivement dans la première et seconde ligne de la formule (79)).

Rappelons que les dérivations sont des convolutions avec les dérivées de  $\delta$  (formule (60)) ; en comparant avec (77), on a :

$$i|\alpha| X^\alpha \widehat{T} = \widehat{D^\alpha T} = \mathcal{F}((D^\alpha \delta) * T) = \widehat{D^\alpha \delta} \widehat{T} \quad (84)$$

Comme cela est vrai pour toute distribution  $T \in \mathcal{S}'$ , on en déduit :

$$\begin{aligned} \widehat{D^\alpha \delta} &= i|\alpha| X^\alpha \\ \widehat{X^\alpha} &= (2\pi)^N i|\alpha| D^\alpha \delta \end{aligned} \quad (85)$$

ce qui généralise les formules de transformation de  $\delta$  et 1 (cas particulier où  $\alpha = 0$ ).

On remarquera que les monômes, qui sont des fonctions non bornées, n'ont pas de transformée de Fourier au sens des fonctions : c'est pourquoi on obtient ici des distributions.

### 4.3.8 Exponentielle et translation

Nous avons utilisé précédemment la fonction  $\omega_a$  définie par  $\omega_a(x) = e^{-iax}$ , et obtenu les formules de retard (73) ; en tenant compte de celles de  $\delta$ , on obtient :

$$\widehat{\omega_a} = \mathcal{F}(\omega_a \cdot 1) = \tau_{-a} \widehat{1} = (2\pi)^N \tau_{-a}[\delta] = (2\pi)^N \delta_{-a} \quad (86)$$

En inversant la formule, on obtient les transformées de  $\delta_a$  et de ses dérivées, soit en toute généralité :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(D^\alpha \delta_a) &= i|\alpha| X^\alpha \omega_{-a} \\ \mathcal{F}(X^\alpha \omega_a) &= (2\pi)^N D^\alpha \delta_{-a} \end{aligned} \quad (87)$$

## 5. Séries de Fourier

Dans toute cette section, la dimension  $N$  de l'espace de définition des fonctions est égale à 1 ; il est possible de définir des séries de Fourier en dimension  $N > 1$ , mais c'est peu utile en pratique.

### 5.1 Fonctions et distributions périodiques

#### 5.1.1 Généralités

Considérons une fonction  $f$  continue et périodique, de période  $2\pi$  ; c'est-à-dire vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x + 2\pi) = f(x) \quad (88)$$

C'est en particulier une distribution sur  $\mathbb{R}$ , et comme elle est bornée, c'est un élément de  $\mathcal{S}'$  ; elle a donc une transformée de Fourier. Celle-ci ne peut être une fonction (sauf si  $f = 0$ ), car une fonction périodique ne peut être décroissante à l'infini. Nous allons voir que  $\widehat{f}$  est en fait une somme de deltas de Dirac régulièrement espacés.

Le fait que  $f$  soit périodique peut être exprimé sous la forme :

$$\tau_{2\pi}[f] = f \quad (89)$$

Plus généralement, toute distribution vérifiant cette relation sera aussi dite périodique, de période  $2\pi$ .

En utilisant les relations données dans la section précédente sur la transformation de Fourier, la translation, la multiplication par les exponentielles imaginaires  $\omega_{\alpha}$ , etc., on trouve, pour toute fonction test  $\varphi$ , et toute distribution périodique  $T$  :

$$\begin{aligned}\langle \omega_{2\pi} \widehat{T}, \varphi \rangle &= \langle \widehat{T}, \omega_{2\pi} \varphi \rangle \\ &= \langle T, \widehat{\omega_{2\pi} \varphi} \rangle \\ &= \langle T, \tau_{-2\pi}[\widehat{\varphi}] \rangle \\ &= \langle \tau_{2\pi}[T], \widehat{\varphi} \rangle \\ &= \langle T, \widehat{\varphi} \rangle \\ &= \langle \widehat{T}, \varphi \rangle\end{aligned}\quad (90)$$

ce qui signifie que  $\omega_{2\pi} \widehat{T} = \widehat{T}$ , ou encore  $(\omega_{2\pi} - 1) \widehat{T} = 0$  au sens des distributions. Cela implique que le support de  $\widehat{T}$  est inclus dans l'ensemble d'annulation de la fonction  $\omega_{2\pi}(x) - 1 = e^{-i2\pi x} - 1$ , c'est-à-dire l'ensemble des nombres entiers  $\mathbb{Z}$ . Chaque entier est une racine simple de l'équation  $e^{-i2\pi x} = 1$ , et on peut donc montrer en théorie des distributions que, dans ces cas,  $\widehat{T}$  est une mesure, et même une somme de deltas de Dirac localisés ces racines. On a donc finalement la proposition 5.

**Proposition 5.** Si  $T$  est une distribution bornée périodique, de période  $2\pi$ , alors il existe une suite doublement infinie de nombres complexes  $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  telle que :

$$\widehat{T} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta_n \quad (91)$$

Les nombres  $c_n$  sont appelés les *coefficients de Fourier* de  $T$ .

Rappelons à présent que  $2\pi\delta_n$  est la transformée de Fourier de  $\omega_n$ . Par conséquent, en inversant la relation (91), on obtient :

$$T = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \omega_{-n} \quad (92)$$

au sens des distributions. La somme de fonctions exponentielles à droite est appelée la *série de Fourier* de  $T$ .

### 5.1.2 Peigne de Dirac

Dans la suite, on considérera surtout les séries de Fourier de fonctions, mais une distribution joue un rôle intéressant dans le cadre de cette théorie : il s'agit du *peigne de Dirac*, défini par :

$$\mathcal{W} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta_{2\pi m} \quad (93)$$

C'est donc une distribution de période  $2\pi$  ; sa transformée de Fourier peut donc s'écrire sous la forme  $\widehat{\mathcal{W}} = 2\pi \sum c_n \delta_n$ . Par ailleurs, comme la transformée de Fourier de  $\delta_a$  est  $\omega_{-a}$ , et comme  $\tau_b[\omega_a] = e^{iab} \omega_a$ , on a :

$$\widehat{\mathcal{W}} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \omega_{-2\pi m} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi} \omega_{-2\pi m} = \tau_1[\widehat{\mathcal{W}}] \quad (94)$$

Autrement dit,  $\widehat{\mathcal{W}}$  est de période 1. Donc tous les coefficients  $c_n$  sont égaux dans ce cas, et l'on a  $\widehat{\mathcal{W}} = 2\pi c \sum \delta_n$ . Le coefficient inconnu  $c$  peut être déterminé en prenant une fonction de test particulière. En effet, considérons la fonction  $g(x) = e^{-\pi x^2}$ . Sa transformée de Fourier (tableau 2) est égale à  $\widehat{g}(\xi) = e^{-\xi^2/4\pi}$ . On a alors :

$$\begin{aligned}S \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi m^2} &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(2\pi m) = \langle \mathcal{W}, \widehat{g} \rangle \\ &= \langle \widehat{\mathcal{W}}, g \rangle = 2\pi c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(n) = 2\pi c S\end{aligned}$$

et par conséquent  $c = 1/2\pi$ . On a donc finalement :

$$\widehat{\mathcal{W}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_n \quad (95)$$

qui est donc aussi un peigne de Dirac, mais de période 1 et non  $2\pi$ . Plus généralement, un peigne de période  $p$  est changé par  $\mathcal{F}$  en un peigne de période  $2\pi/p$ , multiplié par  $2\pi/p$ .

Comme pour toute fonction  $\varphi \in \mathcal{S}$ ,  $\langle \widehat{\mathcal{W}}, \varphi \rangle = \langle \mathcal{W}, \widehat{\varphi} \rangle$ , on a donc :

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}, \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{\varphi}(2\pi n) \quad (96)$$

C'est la *formule sommatoire de Poisson*. Par exemple, si on l'applique à la fonction  $\varphi(x) = e^{-\pi a x^2}$ , dont la transformée est (tableau 2)  $\widehat{\varphi}(\xi) = e^{-\xi^2/4\pi a} / \sqrt{a}$ , on obtient :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi a n^2} = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi}{a} n^2} \quad (97)$$

Si  $a < 1$ , la somme de droite converge nettement plus vite que celle de gauche ; et inversement si  $a > 1$ . De telles considérations sont utiles lorsqu'on doit calculer une valeur approchée de telles sommes, à l'aide d'un ordinateur par exemple.

## 5.2 Expression des séries de Fourier

Nous allons maintenant revenir dans un cadre un peu plus classique, en ne considérant guère que les séries de Fourier des fonctions. Diverses questions se posent immédiatement, notamment sur leur convergence au sens usuel des séries, et non seulement des distributions.

### 5.2.1 Théorème de Dirichlet

Lorsque  $T = f$  est une fonction, le problème de savoir si la série à droite de (92) est convergente, et si sa limite est égale à  $f$ , est une question extrêmement difficile : car le fait qu'elles soient égales au sens des distributions ne suffit pas pour conclure dans ce sens. Nous nous contenterons du résultat suivant, largement convenable dans les applications courantes (notamment en physique), et qui ne s'applique qu'aux fonctions continues et monotones par morceaux, c'est-à-dire telles que l'on puisse partager l'intervalle  $[0, 2\pi]$  en un nombre fini de sous-intervalles, sur chacun desquels  $f$  est continue,



et croissante ou décroissante. Une telle fonction a notamment comme propriété de posséder une limite à droite et à gauche en tout point  $a$  ; on les note  $f(a+)$  et  $f(a-)$  :

$$f(a+) \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \quad f(a-) \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \quad (98)$$

**Théorème 3.** Soit  $f$  une fonction de période  $2\pi$ , bornée, continue par morceaux, monotone par morceaux. Alors, en tout point  $x$  où  $f$  est continue, elle est égale à sa série de Fourier, qui est convergente :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} \quad (99)$$

Si  $f$  est discontinue en  $x$ , alors la série converge vers  $[f(x-) + f(x+)]/2$ , la moyenne des limites à gauche et à droite de  $f$ .

Ce théorème est dû à P.G. Lejeune Dirichlet (§ 1.3) équation n° (13) ; dans la suite, les conditions imposées aux fonctions en hypothèse seront appelées les *conditions de Dirichlet*. Toutes les fonctions usuelles que nous considérerons les satisfont, sauf mention explicite du contraire. On retiendra qu'une telle fonction est localement intégrable et est une mesure sur  $\mathbb{R}$ .

## 5.2.2 Calcul des coefficients de Fourier

Comme une fonction de Dirichlet est localement intégrable, on peut calculer pour tout entier  $m$  :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx} dx = \langle \omega_m f, \chi_{[-\pi, \pi]} \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \omega_m f, \widehat{\chi_{[-\pi, \pi]}} \rangle \quad (100)$$

Rappelons que dans nos notations,  $\chi_{[-\pi, \pi]}$  est la fonction caractéristique de l'intervalle  $[-\pi, \pi]$ , qui vaut 1 sur cet intervalle et 0 ailleurs. Sa transformée de Fourier est facile à calculer :

$$\begin{aligned} \widehat{\chi_{[-\pi, \pi]}}(\xi) &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\xi x} dx \\ &= \left[ \frac{e^{-i\xi x}}{-i\xi} \right]_{-\pi}^{\pi} = 2 \frac{\sin \pi \xi}{\xi} \end{aligned} \quad (101)$$

Cette fonction est nulle pour  $\xi \in \mathbb{Z}$ , sauf si  $\xi = 0$ , où elle vaut  $2\pi$  (par passage à la limite).

Par ailleurs, nous avons  $\tau_a[\delta_b] = \delta_{b+a}$  et donc :

$$\begin{aligned} \widehat{\omega_m f} &= \tau_{-m}[\widehat{f}] \\ &= \tau_{-m} \left[ 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta_n \right] \\ &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta_{n-m} \\ &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{n+m} \delta_n \end{aligned} \quad (102)$$

(grâce à un changement d'indice pour la dernière égalité). Par conséquent, on a encore :

$$\frac{1}{2\pi} \langle \widehat{\omega_m f}, \widehat{\chi_{[-\pi, \pi]}} \rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{n+m} \langle \delta_n, \widehat{\chi_{[-\pi, \pi]}} \rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{n+m} \widehat{\chi_{[-\pi, \pi]}}(n)$$

Dans cette somme, seul le terme correspondant à  $n = 0$  est non nul (et vaut  $2\pi c_m$ ) car, pour les autres entiers,  $\widehat{\chi_{[-\pi, \pi]}}$  est nulle. Donc, en remontant à (100), nous avons montré l'égalité fondamentale :

$$c_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx} dx \quad (103)$$

qui donne la valeur des coefficients de Fourier d'une fonction satisfaisant les conditions de Dirichlet, sous la forme d'une intégrale. Cette égalité est bien connue des physiciens qui en font un usage fréquent ; on notera cependant qu'elle ne s'applique pas à n'importe quelle fonction périodique. Par ailleurs, on se convaincra aisément que les bornes de l'intégrale peuvent être changées en n'importe quel intervalle de longueur  $2\pi$  (par exemple  $[0, 2\pi]$ , car celle-ci n'est rien d'autre que la moyenne sur une période de  $f\omega_m$ ).

## 5.2.3 Coefficients de Fourier réels

Jusqu'à présent, les fonctions ou distributions considérées étaient à valeurs dans  $\mathbb{C}$ . Dans la pratique, on emploie souvent des fonctions à valeurs réelles ; dans ce cas, une égalité comme (99) est peu naturelle, car elle fait intervenir les coefficients  $c_n$  qui ne sont pas réels en général (comme il apparaît clairement dans (103)). Nous allons donc nous ramener à une écriture entièrement en coefficients réels.

Pour cela, observons d'abord que si  $f$  est une fonction réelle, alors prendre le conjugué du membre de droite de (103) est équivalent à changer  $m$  en son opposé ; en d'autres termes, on a :

$$\overline{c_m} = c_{-m} \quad (104)$$

et en particulier  $\overline{c_0} = c_0$ , donc  $c_0$  est réel. D'une façon générale, si l'on écrit  $c_m = (a_m - ib_m)/2$ , nous avons  $c_0 = a_0/2$  et :

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{-1} (a_{-n} + ib_{-n}) e^{inx} + \frac{1}{2} a_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - ib_n) e^{inx} \\ &= \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \Re[(a_n - ib_n) e^{inx}] \end{aligned}$$

Par conséquent, si  $f$  est réelle, elle vérifie en tous ses points de continuité :

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (105)$$

Par ailleurs, une simple séparation de (103) en parties réelle et imaginaire donne :

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx \\ b_m &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx \end{aligned} \quad (106)$$

**Remarque :** certains auteurs préfèrent écrire directement  $a_0$ , au lieu de  $a_0/2$  dans (105) ; dans ce cas, ce coefficient est donné par une formule un peu différente, avec  $1/2\pi$  au lieu de  $1/\pi$  devant l'intégrale ; dans le paragraphe 1.3, équation n° (13), ce sont ces conventions qui sont employées, à la suite de d'Alembert.

Il résulte de ces expressions intégrales que si  $f$  est une fonction paire ( $f(x) = f(-x)$ ), les coefficients  $b_n$  sont nuls ; et que si  $f$  est impaire ( $f(-x) = -f(x)$ ), les coefficients  $a_n$  sont nuls.

## 5.3 Propriétés des coefficients de Fourier

Nous allons à présent donner les propriétés principales des séries de Fourier, vues à travers leurs coefficients. Beaucoup de ces propriétés sont proches de celles de la transformation de Fourier ; cela n'est pas dû seulement au fait qu'elles s'en déduisent, mais aussi à une identité formelle si l'on change l'espace de définition des fonctions. En effet, nous avons défini les distributions sur  $\mathbb{R}$  ; mais on peut les définir sur n'importe quelle variété. Nous ne souhaitons pas ici entrer dans les détails, mais signalons tout de même une variété importante ici : c'est le *tore du premier ordre*  $\mathbb{T}$ , qui peut être vu comme l'intervalle  $[-\pi, \pi]$  dans lequel  $-\pi$  et  $\pi$  sont formellement identifiés (la représentation géométrique de cet ensemble serait donc un cercle). À toute distribution périodique sur  $\mathbb{R}$  correspond une unique distribution sur le tore  $\mathbb{T}$  (par exemple, au peigne de Dirac  $\mathcal{W}$  dans  $\mathbb{R}$  correspond le delta de Dirac  $\delta$  sur le tore), et beaucoup des propriétés des unes sont vérifiées similairement par les autres. Cependant, le tore  $\mathbb{T}$  est compact (et donc toutes les fonctions et distributions sur  $\mathbb{T}$  sont à support compact), alors que  $\mathbb{R}$  ne l'est pas ; c'est pourquoi la transformation de Fourier sur  $\mathbb{T}$  se ramène à une somme dénombrable (série), mais pas sur  $\mathbb{R}$ .

Dans la suite, on utilisera parfois la représentation sur le tore comme substitut à celle dans  $[-\pi, \pi]$ , notamment pour mettre en valeur le fait que  $\pi$  et  $-\pi$  ne sont pas des « extrémités » : ils ne jouent aucun rôle privilégié. De plus, on écrira parfois  $\int_{\mathbb{T}}$  au lieu de  $\int_{-\pi}^{\pi}$ , pour les mêmes raisons.

### 5.3.1 Fonctions de carré intégrable

En particulier, il sera commode de noter  $L^2(\mathbb{T})$  l'espace des fonctions de carré intégrable sur le tore, c'est-à-dire telles que :

$$\|f(x)\|_{L^2(\mathbb{T})} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(x)|^2 dx < +\infty \quad (107)$$

Cet espace est doté du produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{T})} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \overline{f(x)} g(x) dx \quad (108)$$

On remarquera que toutes les fonctions satisfaisant les conditions de Dirichlet sont de carré intégrable.

Les  $\omega_a$  sont dans  $L^2(\mathbb{T})$ , et l'on peut donc calculer :

$$c_n = \langle \omega_{-n}, f \rangle_{L^2(\mathbb{T})} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x) e^{-inx} dx \quad (109)$$

Une telle définition peut être faite dans bien des espaces différenciables, mais la série  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$  ne coïncidera pas habituellement avec  $f$ . Voici donc pourquoi ce théorème donne une caractérisation particulièrement frappante des fonctions de carré intégrable.

**Théorème 4.** Si  $f$  est une fonction de carré intégrable, et si la suite  $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  est définie par (109), alors la distribution

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \omega_{-n}$  converge vers  $f$  dans l'espace  $L^2(\mathbb{T})$ , c'est-à-dire que :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{n=-N}^{+N} c_n \omega_{-n} \right\|_{L^2(\mathbb{T})} = 0 \quad (110)$$

En particulier, la fonction  $x \mapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$  est définie presque partout. Il est aussi possible de montrer que les coefficients obtenus par (109) sont identiques à ceux résultant de la transformation de Fourier dans le domaine des distributions.

### 5.3.2 Égalités de Parseval et Plancherel

En utilisant (110) et le fait que :

$$\langle \omega_n, \omega_p \rangle_{L^2(\mathbb{T})} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} e^{i(p-n)x} dx = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq n \\ 1 & \text{si } p = n \end{cases} \quad (111)$$

on trouve que la série  $\sum_{n=-N}^N |c_n|^2$  converge précisément vers la norme de  $f$  :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \quad (112)$$

Cette relation est connue sous le nom d'égalité de Parseval (comparer avec (81)).

Cette égalité se généralise facilement avec une deuxième fonction  $g \in L^2(\mathbb{T})$ , dont on notera  $\gamma_n$  les coefficients de Fourier :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{c_n} \gamma_n = \langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{T})} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)} g(x) dx \quad (113)$$

C'est l'égalité de Plancherel (comparer avec (80)).

Remarquons par ailleurs que l'égalité de Parseval implique que  $c_n$  tend vers zéro quand  $n$  tend vers  $\pm \infty$  (sinon la série n'est pas convergente).

### 5.3.3 Convolution

Il existe aussi un produit de convolution dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{T})$  et  $L^2(\mathbb{T})$ . Dans ce dernier espace, il est défini par :

$$(f *_{\mathbb{T}} g)(x) = \langle \sigma[\overline{f}], \tau_x[g] \rangle_{L^2(\mathbb{T})} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(y) g(x-y) dy \quad (114)$$

et une définition cohérente dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{T})$  peut être obtenue comme pour  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ . Un calcul simple montre alors que les coefficients de Fourier de  $f *_{\mathbb{T}} g$  sont les produits de ceux de  $f$  et de ceux de  $g$  :

$$c_n[f *_{\mathbb{T}} g] = c_n[f] \cdot c_n[g] \quad (115)$$

Inversement, chaque fois que l'on peut faire le produit de deux fonctions ou distributions  $f, g$  sur  $\mathbb{T}$ , les coefficients de Fourier du produit sont le « produit de convolution discret » de ceux de  $f$  et  $g$  :

$$c_n[fg] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_{n-k}[f] c_k[g] \quad (116)$$

### 5.3.4 Dérivation des séries de Fourier

Une égalité de distribution comme (92) peut être dérivée  $k$  fois, puisque toutes les distributions sont indéfiniment dérivables. On a donc au sens des distributions :

$$T^{(k)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(in)^k \omega_{-n} \quad (117)$$

ce qui prouve que les coefficients de Fourier des dérivées sont donnés par :

$$c_n[T^{(k)}] = i^k n^k c_n[T] \quad (118)$$

Naturellement (117) n'est pas forcément vraie au sens des fonctions. Cependant, si  $T = f$  est une fonction  $k$  fois dérivable, et que la dérivée  $k$ -ième satisfait les conditions de Dirichlet, alors elle est égale presque partout à sa série de Fourier qui est donnée par :

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^k n^k c_n e^{inx} \quad (119)$$

### 5.3.5 Ordre de grandeur des coefficients de Fourier

Il est souvent utile, notamment pour des calculs numériques, d'avoir une idée de la façon dont les coefficients de Fourier d'une fonction se comportent à l'infini. Nous avons déjà vu que les coefficients d'une fonction de  $L^2(\mathbb{T})$  convergent vers zéro à l'infini, car ils sont de carré sommable. L'ensemble  $L^2(\mathbb{T})$  est dense dans l'ensemble des fonctions sommables sur  $\mathbb{T}$ . On a donc le théorème 5.

**Théorème 5. [Riemann-Lebesgue]** Si  $f$  est une fonction de période  $2\pi$  sommable sur  $[-\pi, \pi]$  (c'est-à-dire  $\int_{-\pi}^{\pi} |f| < +\infty$ ), alors ses coefficients de Fourier  $c_n$  tendent vers zéro quand  $n$  tend vers l'infini.

Notons que, par contre, les coefficients d'une distribution peuvent très bien être non bornés. Par exemple, il résulte de (117) et de (95) que les coefficients de Fourier de la dérivée  $k$ -ième du peigne de Dirac sont  $i^k n^k$ , suite évidemment divergente.

Remarquons cependant que si  $f$  est  $k$  fois dérivable, puisque la limite des coefficients de Fourier de  $f^{(k)}$  est nulle d'après ce théorème, et en utilisant (99), on a  $\lim n^k c_n = 0$ . En fait, on peut préciser exactement ce comportement de la façon suivante.

**Théorème 6.** Si  $f$  est une fonction de période de  $2\pi$ ,  $k-2$  fois continûment dérivable, et que  $f^{(k-1)}$  vérifie les conditions de Dirichlet sans être continue, alors les coefficients de Fourier  $c_n$  de  $f$  tendent vers zéro exactement comme  $1/n^k$  (c'est-à-dire que la suite  $n^k c_n$  est bornée et ne tend pas vers zéro).

En particulier, les fonctions vérifiant les conditions de Dirichlet, et qui ne sont pas continues, ont des coefficients de Fourier qui tendent vers l'infini exactement comme  $1/n$ .

### 5.3.6 Intégration des séries de Fourier

La primitive d'une fonction périodique n'est pas périodique en général ; autrement dit, l'intégration n'est pas définie sur tout l'espace  $\mathcal{D}'(\mathbb{T})$  (au contraire de  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ), mais seulement sur le sous-espace des fonctions de moyenne nulle, c'est-à-dire vérifiant :

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \langle f, 1 \rangle_{\mathbb{T}} \quad (120)$$

(la première écriture n'a de sens que pour les fonctions, la seconde vaut pour toute distribution sur  $\mathbb{T}$ ).

Dans ce cas, le coefficient  $c_0$  est nul, puisque  $c_0 = \langle f, 1 \rangle_{\mathbb{T}}$ . On peut alors intégrer terme à terme (92) et (99).

**Proposition 6.** Soit  $T$  une distribution sur  $\mathbb{T}$  de moyenne nulle ( $\langle T, 1 \rangle_{\mathbb{T}} = 0$ ) ; alors il existe une distribution  $S$  sur  $\mathbb{T}$  telle que  $S' = T$ , et si  $T$  est développée en série de Fourier selon la formule (92), alors :

$$S = a + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (-i) \frac{c_n}{n} \omega_{-n} \quad (121)$$

où  $a$  est une constante arbitraire.

Dans le cas d'une fonction de moyenne nulle, on a en intégrant terme à terme (99) :

$$\int_0^x f(t) dt = \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} i \frac{c_n}{n} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (-i) \frac{c_n}{n} e^{inx} \quad (122)$$

Cette relation n'est valable que si la première somme converge (elle est alors la constante d'intégration  $a$  de la relation précédente), ce qui est le cas par exemple si  $f$  satisfait les conditions de Dirichlet (car dans ce cas, la suite  $n c_n$  est bornée, donc  $\sum c_n/n$  converge) ou est de carré sommable.

Si  $f$  est à valeurs réelles, la première série se ramène simplement à  $\sum b_n/n$ , et l'on obtient :

$$\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \frac{a_n}{n} \sin nx - \frac{b_n}{n} \cos nx \right] \quad (123)$$

ce qui est l'intégration formelle de (105) (dans le cas  $a_0 = 0$ ).

Le problème est plus complexe quand la moyenne de  $f$  n'est pas nulle, car elle n'a pas de primitive dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{T})$ . Pourtant, il est très utile de pouvoir intégrer les séries de telles fonctions, ne serait-ce que pour des raisons de calcul explicite. Considérons donc une fonction  $f$  telle que :

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt \neq 0 \quad (124)$$

et définissons une fonction  $F$ , « primitive dans  $\mathbb{T}$  » de  $f$ , par la relation :

$$F(x) = \begin{cases} \int_0^x f(t) dt & \text{si } x \in [-\pi, \pi] \\ \text{période } 2\pi \end{cases} \quad (125)$$

Une telle fonction est discontinue : pour tout entier  $k$ , elle a un saut en  $\pi + 2k\pi$ , égal à  $\delta F = F(\pi-) - F(-\pi+) = 2\pi c_0$ . Plus exactement, on a :

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt - 2\pi c_0 H_{\mathbb{T}}(x + \pi) \quad (126)$$

où  $H_{\mathbb{T}}(x)$  est la fonction discontinue à valeurs entières, définie par  $H_{\mathbb{T}}(x) = k$  (entier) si et seulement si  $2k\pi \leq x \leq 2(k+1)\pi$  ( $H_{\mathbb{T}}$  est l'équivalent de la fonction de Heaviside dans  $\mathbb{T}$ , d'où la notation).

On peut dériver (126) au sens des distributions, en notant que la dérivée de  $H_{\mathbb{T}}$  est le delta de Dirac dans  $\mathbb{T}$ , c'est-à-dire le peigne de Dirac dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  :

$$\begin{aligned} F' &= f - 2\pi c_0 \tau_{-\pi} [\mathcal{W}] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \omega_{-n} - c_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tau_{-\pi} [\omega_{-n}] \\ &= \sum_{n \neq 0} (c_n - (-1)^n c_0) \omega_{-n} \end{aligned} \quad (127)$$

Cette fonction est de moyenne nulle, on peut donc intégrer cette relation comme dans (122), et l'on obtient la valeur de  $F(x)$  (en tenant compte de ce que  $\sum_{n \neq 0} (-1)^n c_0 / n = 0$ , puisque les termes négatifs et positifs s'annulent réciproquement) :

$$\int_0^x f(t) dt = \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} i \frac{c_n}{n} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (-i) \frac{c_n - (-1)^n c_0}{n} e^{inx} \quad (128)$$

$$(-\pi < x < \pi)$$

Noter que la formule est fautive pour  $x = \pm \pi$ , car  $F$  n'est pas continue en ces points ; par ailleurs, si  $x$  est en dehors de l'intervalle  $]-\pi, \pi[$ , il faut ajouter  $2\pi c_0 H_{\mathbb{T}}(x + \pi)$  au membre de droite.

Donnons un cas particulier important de cette relation : si l'on considère la fonction  $f = 1$  (dont les coefficients vérifient évidemment  $c_0 = 1$ ,  $c_n = 0$  si  $n \neq 0$ ), on trouve que :

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=-\infty}^{-1} i \frac{(-1)^n}{n} e^{inx} + \sum_{n=1}^{+\infty} i \frac{(-1)^n}{n} e^{inx} \\ &= 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2in} \end{aligned}$$

et donc comme  $F(x) = \int_0^x 1 dt = x$ , on obtient :

$$\frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} \quad \text{si } -\pi < x < \pi \quad (129)$$

Dans le cas réel, on a :

$$\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \frac{a_n - (-1)^n a_0}{n} \sin nx - \frac{b_n}{n} \cos nx \right] \quad (130)$$

$$(-\pi < x < \pi)$$

ce qui peut être vu comme une combinaison de (129) et de l'intégration formelle de (105).

Dans certains cas, on préfère intégrer à partir d'autres bornes (par exemple  $\pi$ ). Un raisonnement similaire donne (dans le cas réel) :

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n} \quad (0 < x < 2\pi) \quad (131)$$

et par conséquent, en intégrant (105) :

$$\int_{\pi}^x f(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{b_n}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \frac{a_n - a_0}{n} \sin nx - \frac{b_n}{n} \cos nx \right] \quad (132)$$

$$(0 < x < 2\pi)$$

(noter le domaine de validité différent).

### 5.3.7 Convergence en moyenne arithmétique

Nous l'avons déjà dit : une fonction est toujours égale à sa série de Fourier, au sens des distributions, mais pas forcément au sens des fonctions. En particulier, il existe des fonctions continues, par exemple, dont la série de Fourier est presque partout divergente sur  $[-\pi, \pi]$ . Bien que de tels cas « pathologiques » soient rares dans les applications, ils réduisent beaucoup la généralité des résultats susceptibles d'être obtenus sur les séries de Fourier.

Pourtant, pour toute fonction continue  $f$  sur  $[-\pi, \pi]$ , de période  $2\pi$ , on peut calculer des coefficients  $c_n$  par la formule (103). Considérons alors le polynôme trigonométrique :

$$S_m[f](x) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{n=-m}^m c_n e^{inx} \quad (133)$$

(la  $m$ -ième somme partielle de la série de Fourier). Nous avons, en remplaçant  $c_n$  par son expression intégrale en  $f$  :

$$\begin{aligned} S_m[f](x) &= \sum_{n=-m}^m e^{inx} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \theta_m(x-t) dt \\ &= (f *_{\mathbb{T}} \theta_m)(x) \end{aligned} \quad (134)$$

avec par définition :

$$\begin{aligned} \theta_m(x) &= \sum_{n=-m}^m e^{inx} \\ &= 2 \left[ \frac{1}{2} + \cos x + \dots + \cos mx \right] \\ &= \frac{\sin \frac{2m+1}{2} x}{\sin x/2} \end{aligned} \quad (135)$$

Cette fonction porte le nom de *noyau de Dirichlet*. Le fait qu'elle ne soit pas de signe constant implique que, bien  $\theta_m$  converge vers le delta de Dirac de  $\mathbb{T}$  au sens des distributions lorsque  $m \rightarrow +\infty$  (ce qui implique que  $S_m[f]$  converge vers  $f$  dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{T})$ ),  $S_m[f]$  ne converge pas uniformément vers  $f$ , et donc pas point par point.

Considérons à présent la moyenne arithmétique des  $m$  premières sommes partielles  $S_n$  :

$$T_m[f] \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{S_0 + S_1 + \dots + S_m}{m+1} \quad (136)$$

On a bien sûr  $T_n[f] = f *_{\mathbb{T}} \rho_m$ , avec :

$$\begin{aligned} \rho_m(x) &= \frac{\theta_0 + \dots + \theta_m}{m+1} \\ &= 2 \left[ \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{m+1}\right) \cos x + \dots + \left(1 - \frac{m}{m+1}\right) \cos mx \right] \\ &= \frac{1}{n+1} \left[ \frac{\sin \frac{m+1}{2} x}{\sin x/2} \right]^2 \end{aligned} \quad (137)$$

C'est le *noyau de Césaro*, et il a la particularité d'être positif et de converger aussi vers  $\delta$  dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{T})$  : de ce fait, on a le théorème 7.

**Théorème 7. [Fejer]** La suite  $T_m[f]$  des moyennes arithmétiques des sommes partielles de la série de Fourier d'une fonction continue  $f$  converge uniformément vers  $f$  dans  $[-\pi, \pi]$ .

On dit aussi que la série  $\sum c_n e^{-inx}$  converge au sens de Césaro vers  $f$ . Ce théorème montre également que toute fonction continue périodique est la limite d'une suite de polynômes trigonométriques.

## 5.4 Spectre d'une fonction périodique ou quasi périodique

Pour une distribution périodique donnée  $T$ , l'ensemble des entiers  $n$  tels que  $c_n \neq 0$  est appelée le *spectre de  $T$* , on le dit *discret*, car il contient seulement un nombre dénombrable de points. Nous nous proposons ici d'examiner d'autres distributions ou fonctions de spectre discret.

### 5.4.1 Distributions de période quelconque

Nous savons qu'une distribution de période  $2\pi$  est la somme d'une série de Fourier, au sens des distributions. Naturellement, cela s'étend à une distribution  $T$  de période  $p \neq 2\pi$ , simplement en considérant la distribution homothétique  $T_1 = h_{p/2\pi}[T]$ ; un calcul simple

montre que  $\widehat{T}_1$  est une suite de deltas de Dirac espacés de  $2\pi/p$ , et donc que  $T_1$  est la somme d'une série d'exponentielles de période  $p$ . En particulier, une fonction  $f$  assez régulière est une somme de série trigonométrique de la forme :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i \frac{2\pi}{p} nx} \quad (138)$$

avec :

$$c_n = \frac{1}{p} \int_0^p f(x) e^{-i \frac{2\pi}{p} nx} dx \quad (139)$$

Une adaptation immédiate du théorème de Fejer montre que toute fonction continue de période  $p$  est la limite d'une suite de polynômes trigonométriques.

### 5.4.2 Fonction quasi périodique

Une fonction ou une distribution  $T$  sera dite *quasi périodique* si sa transformée de Fourier peut s'écrire sous la forme d'une série de deltas de Dirac, en nombre dénombrable, c'est-à-dire si l'on a une suite de nombres complexes  $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  et une suite de réels  $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  tels que :

$$\widehat{T} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta_{\sigma_n} \quad (140)$$

ou encore, de manière équivalente :

$$T = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \omega_{\sigma_n} \quad (141)$$

L'ensemble  $S_T$  des  $\sigma_n$  tels que  $c_n \neq 0$  est appelé le *spectre de  $T$* . Les éléments du spectre sont parfois appelés (en s'inspirant de la physique), les *modulations propres* de  $T$  ( $\sigma_n/2\pi$  est une *fréquence propre*). Les coefficients  $c_n$  et la série sont appelés respectivement *coefficients* et *série de Fourier généralisés* de  $T$ .

En particulier, toute distribution périodique est quasi périodique, et la somme de deux distributions périodiques, même de périodes différentes, est quasi périodique (plus généralement, la somme de deux distributions quasi périodiques l'est aussi). Par exemple, la fonction  $f(x) = \cos x + \cos \pi x$  est quasi périodique ; son spectre est l'ensemble  $\{1, -1, \pi, -\pi\}$ .

### 5.4.3 Convergence quadratique

Naturellement, on peut poser le même problème que dans le cas des fonctions périodiques : une fonction  $f$  quasi périodique est-elle la somme de sa série de Fourier généralisée ? Nous nous limiterons ici au cas où  $f$  est localement de carré intégrable. Dans ce cas, il est facile de vérifier que :

$$c(\sigma) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^R f(t) e^{-i\sigma t} dt \quad (142)$$

existe pour tout  $\sigma \in \mathbb{R}$ , et est nul si et seulement si  $\sigma$  n'est pas dans le spectre de  $f$ . Dans le cas contraire, on a  $c(\sigma_n) = c_n$ , autrement dit l'expression (142) donne la valeur des coefficients  $c_n$ .

**Théorème 8. [Besicovitch]** Soit  $f$  une fonction quasi périodique, de spectre  $\{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ , de coefficients de Fourier généralisés  $c_n = c(\sigma_n)$ . Si  $f$  est localement de carré intégrable, alors :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 < +\infty \quad (143)$$

et pour tout réel  $a > 0$  la série  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\sigma_n x}$  converge vers  $f$  au sens de  $L^2(-a, a)$  (convergence quadratique).

### 5.4.4 Exemple

Les signaux quasi périodiques sont relativement fréquents en physique, notamment lors de phénomènes faisant intervenir des fréquences d'oscillations différentes (par exemple une fréquence d'impulsion donnée par l'expérimentateur et une fréquence propre particulière à un système). Il est parfois utile d'écrire de telles fonctions sous la forme d'une série d'exponentielles.

Considérons par exemple la fonction :

$$f(t) = \cos[at + k \sin(bt)] \quad (144)$$

représentant un signal à modulation de phase sinusoïdale, de support  $\cos(at)$ . Cette fonction n'est pas périodique, mais nous allons voir qu'elle est quasi périodique ; calculons :

$$\begin{aligned} c(\sigma) &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^R f(t) e^{-i\sigma t} dt \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{4R} \int_{-R}^R [e^{i(at + k \sin(bt))} + e^{-i(at + k \sin(bt))}] e^{-i\sigma t} dt \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{4R} \int_{-R}^R [e^{-i(\sigma-a)t} e^{i k \sin(bt)} + e^{-i(\sigma+a)t} e^{-i k \sin(bt)}] dt \\ &= \lim_{R' \rightarrow +\infty} \frac{1}{4R'} \int_{-R'}^{R'} [e^{-i(\frac{\sigma-a}{b})x} e^{i k \sin x} + e^{-i(\frac{\sigma+a}{b})x} e^{-i k \sin x}] dx \end{aligned}$$

(en posant  $x = bt$ ,  $R' = bR$ ).

D'après le tableau 1, les coefficients de Fourier  $\gamma_n[k]$  de  $e^{i k \sin x}$  s'expriment à l'aide des fonctions de Bessel :

$$\gamma_n[k] = \begin{cases} J_n(k) & \text{si } n \text{ est pair} \\ -i J_n(k) & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \quad (145)$$



En substituant  $e^{\pm iksinx} = \sum \gamma_n[k] e^{inx}$  dans la relation précédente, on peut échanger les signes  $\Sigma$  et  $\int$  car les séries convergent uniformément (fonctions indéfiniment dérivables) ; de plus :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^R e^{isx} dx = \begin{cases} 0 & \text{si } s \neq 0 \\ 1 & \text{si } s = 0 \end{cases} \quad (146)$$

donc finalement on obtient :

$$c(\sigma) = \begin{cases} \gamma_n[k] & \text{si } \sigma = a + nb, n \text{ entier} \\ \gamma_n[-k] & \text{si } \sigma = -a + nb, n \text{ entier} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (147)$$

ce qui termine le calcul. Le spectre de  $f$  est l'ensemble dénombrable  $(a + b\mathbb{Z}) \cup (-a + b\mathbb{Z})$ , ce qui montre que  $f$  est bien quasi périodique.

## 6. Calcul pratique

Nous avons donné, en ordre dispersé au cours de l'énumération des propriétés des transformées et séries de Fourier, des propriétés diverses qui en permettent le calcul pratique dans certains cas. Nous allons ici résumer ces *règles de calcul*, et donner des transformées de Fourier, ou les coefficients de Fourier d'un certain nombre de fonctions. Ces listes, données dans les tableaux 1 et 2, ne sont nullement exhaustives : il existe de gros tomes entièrement remplis de telles tables de correspondance (voyez par exemple [2]).

### 6.1 Calcul des coefficients de Fourier

Étant donnée une fonction périodique  $f$ , nous souhaitons calculer ses coefficients de Fourier. La solution immédiate consiste à calculer, si possible, l'intégrale :

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \quad (148)$$

Pour une fonction réelle paire, on a :

$$b_n = 0, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos nt dt \quad (149)$$

et pour une fonction impaire, on a :

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin nt dt \quad (150)$$

Ces calculs sont parfois difficiles. Il est souvent utile d'intégrer par parties, ce qui revient à utiliser les formules donnant les coefficients de la dérivée :

$$\begin{aligned} c_n[f'] &= inc_n[f] \\ a_n[f'] &= -nb_n[f], \quad b_n[f'] = na_n[f] \end{aligned} \quad (151)$$

(Pour l'emploi de la primitive, se reporter au paragraphe 5.3.6).

La dernière solution consiste à utiliser une table des coefficients de Fourier, ce qui évite de refaire le calcul ; si la fonction recherchée n'y apparaît pas, elle est peut-être donnée simplement sous une forme un peu différente. Voici quelques formules utiles ( $\alpha$  désigne une constante réelle ou complexe) :

$$\begin{aligned} c_n[f(t+\alpha)] &= e^{in\alpha} c_n[f] \\ c_n[\alpha f] &= \alpha c_n[f] \\ c_n[\bar{f}] &= \bar{c}_{-n}[f] \end{aligned} \quad (152)$$

**Tableau 1 – Coefficients de Fourier de fonctions diverses**

Fonction $f(x)$	Coefficients de Fourier
$\frac{x}{2} \quad (-\pi < x < \pi)$	$a_n = 0, b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$
$\frac{\pi-x}{2} \quad (0 < x < 2\pi)$	$a_n = 0, b_n = \frac{1}{n}$
$-\ln\left[2\sin\frac{x}{2}\right] \quad (0 < x < 2\pi)$	$a_n = \frac{1}{n}, b_n = 0$
$\begin{cases} \frac{\pi}{4} & \text{si } 0 < x < \pi \\ -\frac{\pi}{4} & \text{si } -\pi < x < 0 \end{cases}$	$a_n = 0, b_{2n} = 0$ $b_{2n+1} = \frac{1}{2n+1}$
$ x  \quad (-\pi < x < \pi)$	$a_0 = \pi, a_{2n} = 0, b_n = 0$ $a_{2n+1} = -\frac{4}{\pi(2n+1)^2}$
$\frac{(\pi- x )^2}{4} \quad (-\pi < x < \pi)$	$a_0 = \frac{\pi^2}{6}, a_n = \frac{1}{n^2}, b_n = 0$
$x^2 \quad (-\pi < x < \pi)$	$a_0 = \frac{2\pi^2}{3}, a_n = (-1)^n \frac{4}{n^2}$ $b_n = 0$
$\frac{\pi}{4}  \cos x $	$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}, b_n = 0$
$\frac{\pi}{4}  \sin x $	$a_n = -\frac{1}{4n^2-1}, b_n = 0$
$\cos \alpha x \quad (-\pi < x < \pi), \alpha \notin \mathbb{Z}$	$a_n = (-1)^n \frac{2\alpha \sin \alpha \pi}{\pi(\alpha^2 - n^2)}, b_n = 0$
$\operatorname{ch} \alpha x \quad (-\pi < x < \pi)$	$a_n = (-1)^n \frac{2\alpha \operatorname{sh} \alpha \pi}{\pi(\alpha^2 + n^2)}, b_n = 0$
$\frac{1-\alpha^2}{1-2\alpha \cos x + \alpha^2} \quad  \alpha  < 1$	$a_n = 2\alpha^n, b_n = 0$
$\frac{\alpha \sin x}{1-2\alpha \cos x + \alpha^2} \quad  \alpha  < 1$	$a_n = 0, b_n = \alpha^n$
$\pi x (\pi -  x ) \quad (-\pi < x < \pi)$	$a_n = 0, b_n = \frac{8}{n^3}$
$\frac{\sin x}{\alpha^2 - \cos^2 x} \quad \alpha > \frac{5}{4}$	$a_n = 0, b_{2n} = 0$ $b_{2n+1} = \frac{1}{4^n(\alpha^2 - 1)^{n+1}}$
$e^{i\alpha \sin x}$	$a_{2n} = J_{2n}(\alpha), a_{2n+1} = 0$ $b_{2n} = 0, b_{2n+1} = J_{2n+1}(\alpha)$

Le tableau 1 donne une liste de quelques coefficients de Fourier de fonctions diverses ; ces fonctions sont toujours supposées de période  $2\pi$ , on n'en a donc donné la définition que sur un intervalle de cette longueur. Beaucoup de ces fonctions sont discontinues : on suppose alors que, aux points de discontinuités, elles ont pour valeur la moyenne de leurs limites à droite et à gauche, de façon à coïncider avec la somme de leur série de Fourier. Ces points n'ont pas été

Tableau 2 – Transformée de Fourier de fonctions diverses

Fonction $f(x)$	Transformée $\hat{f}(\xi)$
$\begin{cases} 1 & \text{si } -a < x < a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$2 \frac{\sin a\xi}{\xi}$
$\begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < a \\ -1 & \text{si } -a < x < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$-2i \frac{1 - \cos a\xi}{\xi}$
$\begin{cases} a -  x  & \text{si } -a < x < a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\frac{1 - \cos a\xi}{2\xi^2}$
$\frac{1}{x}$	$-i\pi$
$\frac{1}{\sqrt{ x }}$	$\sqrt{\frac{2\pi}{ \xi }}$
$\frac{1}{a^2 + x^2}$ $\text{Re } a > 0$	$\frac{\pi}{a} e^{-a \xi }$
$\frac{x}{a^2 + x^2}$ $\text{Re } a > 0$	$-i\pi \operatorname{sgn}(\xi) e^{-a \xi }$
$\frac{1}{x(a^2 + x^2)}$ $\text{Re } a > 0$	$-i \frac{\pi}{a^2} \operatorname{sgn}(\xi) (1 - e^{-a \xi })$
$\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$ $\text{Re } a > 0$	$2K_0(a\xi)$
$\frac{1}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}$ $\text{Re } a > 0$ $\text{Re } b > 0$	$\pi \frac{ae^{-b \xi } - be^{-a \xi }}{ab(a^2 - b^2)}$
$\frac{1}{x^4 + a^4}$ $a \in \mathbb{R}$	$\frac{\pi}{a^3} e^{-\frac{a}{\sqrt{2}} \xi } \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{\sqrt{2}} \xi \right)$
$\sqrt{\frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x^2 + a^2}}$ $\text{Re } a > 0$	$\sqrt{\frac{2\pi}{ \xi }} e^{-a \xi }$
$ x ^{-\nu}$ $0 < \operatorname{Re} \nu < 1$	$\frac{\pi \xi ^{\nu-1}}{\Gamma(\nu) \sin \frac{\nu\pi}{2}}$
$\frac{e^{-a x } - e^{-b x }}{ x }$ $\text{Re } a > 0$ $\text{Re } b > 0$	$\ln \frac{\xi^2 + a^2}{\xi^2 + b^2}$
$ x ^{\nu-1} e^{-a x }$ $\text{Re } a > 0, \operatorname{Re} \nu > 0$	$\Gamma(\nu) \frac{\cos[\nu \arctan \frac{\xi}{a}]}{(a^2 + \xi^2)^{\frac{\nu}{2}}}$
$e^{-ax^2}$ $\text{Re } a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\xi^2/4a}$
$\begin{cases} \ln x  & \text{si } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$-2 \frac{\operatorname{Si}(\xi)}{\xi}$ avec $\operatorname{Si}(\xi) = \int_0^\xi \frac{\sin x}{x} dx$ (sinus intégral)

Tableau 2 – Transformée de Fourier de fonctions diverses

Fonction $f(x)$	Transformée $\hat{f}(\xi)$
$\frac{\ln x }{x}$	$i\pi \operatorname{sgn}(\xi) \ln(\gamma \xi )$
$\ln\left(1 + \frac{a^2}{x^2}\right)$ $\text{Re } a > 0$	$2\pi \frac{1 - e^{-a \xi }}{ \xi }$
$\frac{x \sin ax}{x^2 + b^2}$ $a > 0, \operatorname{Re} b > 0$	$\pi e^{ab} \operatorname{ch}(b\xi) - \pi e^{-b \xi } \operatorname{sh}(ab)$
$\frac{ \sin ax }{x}$ $a > 0$	$-i \operatorname{sgn}(\xi) \ln \left  \frac{\xi + a}{\xi - a} \right $
$\frac{\sin^2 ax}{x^2}$ $a > 0$	$\begin{cases} \pi(a -  \xi /2) & \text{si }  \xi  < 2a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
$\frac{\sin ax}{x^2}$ $a > 0$	$\begin{cases} -i\pi\xi & \text{si }  \xi  < a \\ -i\pi a \operatorname{sgn}(\xi) & \text{sinon} \end{cases}$
$\frac{\sin \pi x}{1 - x^2}$	$\begin{cases} -i\pi \sin \xi & \text{si }  \xi  < \pi \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
$\frac{\cos ax}{x}$ $a > 0$	$\begin{cases} -i\pi \operatorname{sgn}(\xi) & \text{si }  \xi  > a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
$\sin(ax^2)$ $a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2a}} \left[ \cos \frac{\xi^2}{4a} - \sin \frac{\xi^2}{4a} \right]$
$\cos(ax^2)$ $a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2a}} \left[ \cos \frac{\xi^2}{4a} + \sin \frac{\xi^2}{4a} \right]$
$\arctan \frac{x}{a}$ $a > 0$	$-i\pi \frac{e^{-a \xi }}{\xi}$
$\operatorname{arccot} \frac{x}{a}$ $a > 0$	$-i\pi \frac{1 - e^{-a \xi }}{\xi}$

reprécisés dans le tableau. Par ailleurs, il arrive que les coefficients diffèrent suivant la parité de l'indice ; dans ce cas, on a écrit les valeurs de  $a_{2n}$  et  $a_{2n+1}$ , ou  $b_{2n}$  et  $b_{2n+1}$ , séparément, pour indiquer les coefficients pairs ou impairs.

Précisons enfin que les deux tableaux 1 et 2 utilisent des « fonctions spéciales », qui sont tabulées (fonctions de Bessel, fonction Gamma, constante d'Euler  $\gamma$ , etc.) ; on en trouvera la définition dans [2] ; nous avons aussi employé la fonction  $\operatorname{sgn}$  définie par :

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (153)$$

## 6.2 Calcul de la somme d'une série de Fourier

La résolution de certains problèmes à l'aide de séries de Fourier donne généralement une solution par l'intermédiaire de ses coefficients ; retrouver ensuite la fonction à laquelle ces coefficients correspondent est donc le problème inverse de celui examiné dans le paragraphe précédent : il s'agit de calculer la somme d'une série de Fourier.

Plusieurs voies sont possibles pour cela. En premier lieu, on peut chercher à reconnaître une suite de coefficients dans le tableau 1. Certaines adaptations peuvent être nécessaires, comme des dérivations ou des intégrations, qui mèneront à la suite recherchée.

Par ailleurs, on peut utiliser les techniques habituelles des séries. L'une des plus utiles dans le cadre des séries de Fourier est l'emploi des séries entières. En effet, si :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} \quad (154)$$

alors on peut écrire  $f(x) = c_0 + g_1(e^{ix}) + g_2(e^{-ix})$ , avec :

$$g_1(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n z^n, \quad g_2(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} z^n \quad (155)$$

Par conséquent  $g_1$  et  $g_2$  sont des séries entières : si l'on sait les sommer (c'est généralement plus simple, en utilisant les facilités inhérentes aux fonctions analytiques), et que leur rayon de convergence est au moins égal à 1, on peut obtenir  $f$  en remplaçant ensuite  $z = e^{ix}$ .

Dans la pratique, on a souvent des coefficients réels, et il est alors commode d'employer les parties réelles et imaginaires. Voici un exemple ; on cherche :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \sin nx \quad (156)$$

On a immédiatement :

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{Im} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{n!} e^{inx} = \operatorname{Im} [\exp(\alpha e^{ix}) - 1] \\ &= e^{\alpha \cos x} \sin(\alpha \sin x) \end{aligned} \quad (157)$$

car on reconnaît la série entière :

$$e^{az} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} z^n \quad (158)$$

## 6.3 Calcul d'une transformée de Fourier

Nous examinons à présent le problème du calcul pratique de la transformée de Fourier d'une fonction (ou parfois d'une distribution) donnée. Rappelons d'abord la définition (en dimension 1) :

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx \quad (159)$$

Cette écriture permet parfois un calcul direct (en utilisant éventuellement le théorème des résidus, par exemple).

Le tableau 2 montre un certain nombre de fonctions avec leur transformée de Fourier. La liste est ici plus longue, car  $f$  n'est plus astreinte à être périodique.

Si une fonction cherchée n'est pas dans la liste, on peut utiliser les règles suivantes (données précédemment sous des formes concises) :

$$\mathcal{F}[f(x-a)] = e^{-ia\xi} \widehat{f}(\xi)$$

$$\mathcal{F}[e^{-iax} f(x)] = \widehat{f}(\xi + a)$$

$$\mathcal{F}[f(-x)] = \widehat{f}(-\xi)$$

$$\mathcal{F}[f(ax)] = \frac{1}{a} \widehat{f}\left(\frac{\xi}{a}\right)$$

$$\mathcal{F}[x^n f(x)] = i^n \frac{d^n}{d\xi^n} \widehat{f}(\xi)$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{d}{dx} f(x)\right] = i\xi \widehat{f}(\xi)$$

Notons aussi que le tableau 2 peut être lu dans les deux sens ; en effet, la transformée de Fourier inverse  $\mathcal{F}^{-1}$  est  $1/2\pi$  de la conjuguée de la transformée de la fonction conjuguée. En particulier, on a :

$$\mathcal{F}[\widehat{f}(x)] = 2\pi f(-\xi) \quad (160)$$

Autrement dit : si vous cherchez la transformée d'une fonction donnée à droite du tableau 2 (comme fonction de  $\xi$ ), utilisez la correspondante à gauche après changement du signe de la variable et multiplication par  $2\pi$ . Cette remarque explique aussi qu'il n'y a pas de « problème inverse » de la recherche d'une transformée de Fourier, contrairement au cas des séries.

## 6.4 Transformée de Fourier rapide

Comme le lecteur l'aura peut-être noté, les formules données dans les tableaux 1 et 2 sont parfois fort complexes ; leur obtention peut être très difficile, et faire intervenir des fonctions spéciales dont l'allure n'est pas aussi connue que celle des fonctions trigonométriques.

C'est pourquoi l'irruption des ordinateurs a profondément changé le statut de l'analyse harmonique. Ces machines permettent en effet de calculer (de manière approchée évidemment) des transformées de Fourier de toutes sortes de fonctions. Certes, elles n'en sont pas encore à donner des expressions analytiques de la transformée (sauf dans certains cas avec des logiciels de calcul formel), mais inversement elles n'exigent pas non plus une telle expression de la fonction à transformer : une suite de valeurs en différents points suffit à obtenir une approximation suffisante, ce qui est très précieux dans tous les domaines appliqués, où un signal est typiquement caractérisé par un échantillonnage.

Considérons donc le problème suivant : à l'aide d'un appareil de mesure, une quantité  $f$  a été évaluée en  $N$  points différents  $x_0, x_2, \dots, x_{N-1}$ . On souhaite faire une analyse harmonique du signal  $f$ , autrement dit, on veut l'écrire sous la forme d'un polynôme trigonométrique.

Il est facile de montrer qu'il existe  $N$  coefficients  $c_0, \dots, c_{N-1}$  complexes tels que pour tout  $k \in \{0, \dots, N-1\}$  :

$$f(x_k) = \sum_{j=0}^{N-1} c_j e^{ijx_k} \quad (161)$$

Cependant, les coefficients  $c_j$  ne sont pas très faciles à calculer numériquement, car (161) est un système linéaire de  $N$  équations à  $N$  inconnues dont la résolution peut être très longue si  $N$  est grand (ce qui est le cas habituellement dans la pratique).

On peut simplifier considérablement le problème en supposant l'échantillonnage *régulier*, c'est-à-dire les  $x_k$  sont régulièrement espacés, de la forme  $x_k = x_0 + \alpha k$ . Quitte à changer l'unité de  $x_k$  et son origine, on peut supposer  $x_0 = 0$ , et  $\alpha = 2\pi/N$ . Si l'on pose  $f_k = f(x_k) = f(2\pi k/n)$ , il faut donc trouver les coefficients  $c_j$  tels que :

$$\forall k, \quad f_k = \sum_{j=0}^{N-1} c_j e^{i2\pi \frac{jk}{N}} \quad (162)$$

Par analogie avec le cas des fonctions périodiques arbitraires, on dira que le vecteur  $\mathbf{f} = (f_0, \dots, f_{N-1})$  est la *transformée de Fourier discrète* du vecteur  $\mathbf{c} = (c_0, \dots, c_{N-1})$ , et on écrira plus brièvement  $\mathbf{f} = \mathcal{F}_N(\mathbf{c})$ . Le problème revient donc à inverser cette transformation discrète.

Ce système se résout explicitement ; en effet, on a la relation fondamentale suivante :

$$\sum_{j=0}^{N-1} e^{i2\pi \frac{jm}{N}} = \begin{cases} N & \text{si } m = 0 \\ 0 & \text{si } m \neq 0, m \text{ entier} \end{cases} \quad (163)$$

Une simple substitution et une inversion montrent alors que la solution suivante est correcte :

$$c_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-i2\pi \frac{kj}{N}} \quad (164)$$

En d'autres termes, l'inverse de la transformation de Fourier discrète  $\mathcal{F}_N$  est  $\mathcal{F}_N^{-1}$ , définie par  $\mathcal{F}_N^{-1}(\mathbf{f}) = \frac{1}{N} \overline{\mathcal{F}(\mathbf{f})}$ , ce qui est l'exact analogue de la formule d'inversion de la transformation de Fourier continue.

Notre problème revient donc en fait à calculer une transformée de Fourier discrète, plus une division par  $N$  et des passages aux conjugués. Un tel calcul revient à déterminer  $N$  coefficients, que nous noterons désormais  $\hat{f}_k$ , à partir de  $N$  autres  $f_j$  donnés, en utilisant les formules :

$$\hat{f}_k = \sum_{j=0}^{N-1} f_j \omega^{\frac{jk}{N}} \quad (165)$$

où  $\omega = e^{i2\pi/N}$  est la première racine  $N$ -ième de l'unité ( $\omega^N = 1$ ).

Ce calcul reste cependant assez long, car il exige environ  $N^2$  opérations (additions ou multiplications). Dans une application, on a facilement  $N = 1\,000$ , et on arrive donc au million d'opérations.

Il est possible de ramener ce million à environ 10 000 en utilisant un algorithme de *transformée de Fourier rapide* (aussi connu sous son acronyme TFR ; en anglais, *Fast Fourier Transform*, ou FFT). Cette méthode, qui exige  $N \ln_2 N$  opérations et non  $N^2$ , a d'abord été conçue par Cooley et Tukey en 1965 ; elle a connu différentes variantes depuis, et reste très utilisée dans tous les domaines où l'analyse harmonique est employée. L'algorithme est assez facile à « câbler », et il existe donc de nombreux microprocesseurs spécialisés dans cette tâche.

Examinons d'abord la méthode sur un exemple très simple, avec  $N = 4$  ; on a alors, en tenant compte que  $\omega^4 = 1$  :

$$\begin{aligned} \hat{f}_0 &= f_0 + f_1 + f_2 + f_3 \\ \hat{f}_1 &= f_0 + \omega f_1 + \omega^2 f_2 + \omega^3 f_3 \\ \hat{f}_2 &= f_0 + \omega^2 f_1 + f_2 + \omega^2 f_3 \\ \hat{f}_3 &= f_0 + \omega^3 f_1 + \omega^2 f_2 + \omega f_3 \end{aligned} \quad (166)$$

Un calcul direct donne donc 12 opérations (en comptant comme telle la combinaison « multiplication par une puissance de  $\omega$  suivie d'une addition »).

Mais considérons à présent les quatre nombres intermédiaires suivants :

$$\begin{aligned} g_0 &= f_0 + f_2 \\ g_1 &= f_0 + \omega^2 f_2 \\ g_2 &= f_1 + f_3 \\ g_3 &= f_1 + \omega^2 f_3 \end{aligned} \quad (167)$$

Ils se déduisent de  $\mathbf{f}$  par 4 opérations seulement. En examinant les deux derniers systèmes, on remarque que :

$$\begin{aligned} \hat{f}_0 &= g_0 + g_2 \\ \hat{f}_1 &= g_1 + \omega g_3 \\ \hat{f}_2 &= g_0 + \omega^2 g_2 \\ \hat{f}_3 &= g_1 + \omega^3 g_3 \end{aligned} \quad (168)$$

et donc  $\hat{\mathbf{f}}$  se déduit de  $\mathbf{g}$  par encore 4 opérations supplémentaires, soit un total de 8 à partir de  $\mathbf{f}$ , au lieu de 12.

Cette méthode se généralise lorsque  $N = 2^n$ , en faisant  $n$  étapes, à chacune de laquelle  $N$  valeurs sont calculées chacune par une combinaison unique de valeurs obtenues à l'étape précédente. (On peut adapter l'algorithme au cas où  $N$  n'est pas une puissance de deux, mais nous ne l'examinerons pas ici.)

Naturellement, le problème est de savoir quelles opérations faire à chaque étape. L'idée est de décomposer les indices  $j$  et  $k$  en base 2, c'est-à-dire d'écrire :

$$j = [j_{n-1}, j_{n-2}, \dots, j_0] = j_{n-1} 2^{n-1} + \dots + 2j_1 + j_0 \quad (169)$$

avec chacun des  $j_\alpha$  égal à 0 ou 1 (un *bit* de  $j$ ). Les vecteurs sont maintenant indexés par  $n$  bits, et on les écrira sous la forme  $f_{[j_{n-1}, \dots, j_0]}$ .

La formule (165) peut s'écrire :

$$\hat{f}_{[k_{n-1}, \dots, k_0]} = \sum_{j_{n-1}=0}^1 \sum_{j_{n-2}=0}^1 \dots \sum_{j_0=0}^1 f_{[j_{n-1}, \dots, j_0]} \omega^{jk} \quad (170)$$

et l'on peut aussi écrire (puisque  $\omega^{2^n} = 1$ ) :

$$\begin{aligned} \omega^{jk} &= \omega^{(2^{n-1}j_{n-1} + \dots + j_0)(2^{n-1}k_{n-1} + \dots + k_0)} \\ &= \omega^{2^{n-1}j_{n-1}k_0} \omega^{2^{n-2}j_{n-2}(2k_1 + k_0)} \dots \omega^{j_0(2^{n-1}k_{n-1} + \dots + k_0)} \end{aligned} \quad (171)$$

À présent, nous définissons  $n+1$  vecteurs  $\mathbf{f}^{(i)}$  ( $0 \leq i \leq n$ ) par récurrence, en posant  $\mathbf{f}^{(0)} = \mathbf{f}$  (le vecteur de départ), et :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{(i)}_{[k_0, \dots, k_{i-2}, \underline{k_{i-1}}, j_{n-i-1}, \dots, j_0]} \\ = \sum_{j_{n-i}=0}^1 \mathbf{f}^{(i-1)}_{[k_0, \dots, k_{i-2}, \underline{j_{n-i}}, j_{n-i-1}, \dots, j_0]} \omega^{2^{n-i}j_{n-i}(2^{i-1}k_{i-1} + \dots + k_0)} \end{aligned}$$

(le bit modifié est souligné). On voit que chacun de ces coefficients se calcule en faisant une multiplication par une puissance de  $\omega$  (la puissance  $2^{n-i}(2^{i-1}k_{i-1} + \dots + k_0)$ , dans le cas  $j_{n-i} = 1$  ; dans l'autre cas, c'est la puissance zéro, donc il n'y a pas de produit), et une addition, soit au total  $N$  opérations pour chaque  $\mathbf{f}^{(i)}$ .

Une comparaison avec les formules précédentes montre que finalement :

$$\hat{\mathbf{f}}_k = \hat{\mathbf{f}}_{[k_{n-1}, \dots, k_0]} = \mathbf{f}^{(n)}_{[k_0, \dots, k_{n-1}]} \quad (172)$$

c'est-à-dire qu'on trouve  $\hat{\mathbf{f}}$  en permutant les coefficients de  $\mathbf{f}^{(n)}$ , ce qui termine le calcul (cette permutation peut aussi se faire pas à pas au cours du calcul).

Il existe diverses variantes et astuces permettant d'accélérer encore le calcul. Par exemple, on a intérêt à calculer au départ toutes les puissances de  $\omega$ , jusqu'à  $\omega^{N-1}$ , en les plaçant dans un tableau (et on fera le calcul avec des sinus et cosinus, non des multiplications

successives, pour éviter des erreurs d'arrondis accumulées) ; par la suite, il suffira de consulter ce tableau en cours de calcul (en tenant compte de  $\omega^N = 1$ ). Pour économiser la mémoire, on aura intérêt à faire le calcul « sur place », c'est-à-dire en employant toujours le même tableau de mémoire pour les  $i^{(l)}$  successifs. Pour d'autres remarques et des comparaisons de vitesses entre différentes méthodes, voyez [9] par exemple.

## 7. Extensions de la notion de transformée de Fourier

La transformée de Fourier s'est montrée si utile, dans de si nombreuses applications, que de nombreux mathématiciens en ont donné des généralisations, ou ont décrit d'autres transformations ayant des propriétés similaires. Nous en donnons quelques-unes dans cette section.

### 7.1 Transformation de Laplace

Cette transformation est en fait antérieure, historiquement, à celle de Fourier. Elle fut utilisée par Laplace dans le cas de fonctions réelles en 1812 ; son inverse fut explicitée par Poisson en 1820. Elle fut ultérieurement généralisée et, de nos jours, la transformée de Fourier peut en être considérée comme un cas particulier. Cependant, la transformée de Laplace des distributions ne peut être définie aussi simplement. Nous donnons ci-après un bref aperçu de ses différentes caractéristiques, sans preuve ni détails.

#### 7.1.1 Définition

Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ , à valeurs complexes, localement intégrable. Pour tout nombre complexe  $p$ , posons :

$$\tilde{f}(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt \quad (173)$$

Une telle intégrale ne converge pas toujours, donc  $\tilde{f}$  n'est définie que sur une partie du plan complexe que nous noterons  $DL(f)$ .

Il est facile de voir que si  $\tilde{f}(a + ib)$  converge absolument, alors  $\tilde{f}(p)$  converge pour tout  $p$  tel que  $\operatorname{Re} p > a$ , et l'intégrale est encore absolument convergente car :

$$|f(t)e^{-pt}| = |f(t)e^{-t\operatorname{Re} p}| \leq |f(t)e^{-at}| \quad (174)$$

En fait, on peut montrer que cela reste vrai même si  $\tilde{f}(a + ib)$  converge simplement. Donc il y a trois possibilités pour  $DL(f)$  :

- $DL(f)$  est l'ensemble vide ;
- $DL(f)$  est le plan complexe entier ;
- l'intérieur de  $DL(f)$  est un demi-plan : il existe un réel  $a$  tel que :

$$\{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z > a\} \subset DL(f) \subset \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z \geq a\} \quad (175)$$

Dans le premier cas, on dira que  $f$  n'a pas de transformée de Laplace (c'est le cas de la fonction  $f(x) = e^{x^2}$  par exemple), et on posera  $a = +\infty$  ; dans les deux autres, on écrira  $\tilde{f} = \mathcal{L}f$ , et on appellera cette fonction la transformée de Laplace de  $f$ . La valeur  $a$  indiquée plus haut s'appelle l'abscisse de sommabilité de  $\tilde{f}$ . Dans le cas où  $DL(f) = \mathbb{C}$ , on posera  $a = -\infty$ , ce qui reste cohérent avec (175).

Il est facile de voir que s'il existe deux réels  $\alpha, \beta$ , tels que  $|f(t)| \leq \beta e^{\alpha t}$ , pour tout  $t > 0$ , alors, l'abscisse de sommabilité de  $\tilde{f}$  est inférieure ou égale à  $\alpha$ . De telles fonctions sont dites « à croissance exponentielle » (au plus), et ont donc toujours une transformée de Laplace sur une partie de  $\mathbb{C}$ .

On trouvera dans le tableau 3 les transformées de Laplace de quelques fonctions simples. D'autres peuvent être trouvées dans [2]. Seules les définitions des fonctions sur  $\mathbb{R}_+$  sont données dans le tableau : elles sont nulles sur  $\mathbb{R}_-$  (donc par exemple 1 et la fonction de Heaviside  $H$  sont identiques de ce point de vue).

Tableau 3 – Transformée de Laplace de fonctions diverses

Fonction $f(t)$	Transformée de Laplace $\tilde{f}(p)$
1	$\frac{1}{p}$
$t^n$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$e^{at}$	$\frac{1}{p-a}$
$e^{at}t^n$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
$\cos at$	$\frac{p}{p^2 + a^2}$
$\sin at$	$\frac{a}{p^2 + a^2}$
$\operatorname{ch} at$	$\frac{p}{p^2 - a^2}$
$\operatorname{sh} at$	$\frac{a}{p^2 - a^2}$

#### 7.1.2 Propriétés fondamentales

■ Comme la transformée de Fourier, la transformation de Laplace est linéaire :

$$\mathcal{L}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{L}(f) + \beta \mathcal{L}(g) \quad (176)$$

■ Il existe des formules de d'homothétie, translation, etc., ressemblant beaucoup à celles de la transformation de Fourier ; attention cependant : on suppose ici que  $f$  est définie seulement sur  $\mathbb{R}_+$  ; sur  $\mathbb{R}_-$ , on posera  $f=0$  pour permettre de l'employer dans les calculs :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(\alpha t)] &= \frac{1}{\alpha} \tilde{f}\left(\frac{p}{\alpha}\right) \\ \mathcal{L}[f(t-\alpha)] &= e^{-\alpha p} \tilde{f}(p) \\ \mathcal{L}[e^{at}f(t)] &= \tilde{f}(p-a) \end{aligned} \quad (177)$$

■ La transformée de Laplace de  $f$  est holomorphe dans l'intérieur de  $DL(f)$  ; c'est-à-dire que si  $a$  est l'abscisse de sommabilité de  $f$ ,  $\tilde{f}$  est holomorphe dans le demi-plan  $\{\operatorname{Re} z > a\}$ . On notera que parfois  $\tilde{f}$  est la restriction à un demi-plan d'une fonction définie sur une plus grande partie de  $\mathbb{C}$  (par exemple, si  $f = H$ , la fonction de Heaviside,



$\tilde{H}(p) = 1/p$  ; il ne faut pas en déduire que  $\hat{f}$  est définie sur cette partie ( $\tilde{H}$  n'est définie que sur  $\{\operatorname{Re} z > 0\}$ ). Dans ces cas, on trouvera facilement l'abscisse de sommabilité : c'est la plus grande des parties réelles des pôles de la fonction.

On a au sens des dérivations complexes, dans le demi-plan  $\{\operatorname{Re} z > a\}$  :

$$\frac{d^n}{dp^n} \tilde{f}(p) = \int_0^\infty (-t)^n f(t) e^{-pt} dt \quad (178)$$

En particulier, l'abscisse de sommabilité de  $t^n f(t)$  est identique à celle de  $f$ .

■ (Théorème de la valeur initiale) Supposons que  $f(t)$  a une limite à droite  $f(0+)$  lorsque  $t \rightarrow 0$ . Alors :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} p \tilde{f}(p) = f(0+) \quad (179)$$

( $p$  est pris réel dans la limite). Même si  $f$  n'a pas de limite à droite en 0, on peut montrer que  $\tilde{f}(p)$  tend vers 0 quand  $\operatorname{Re} p \rightarrow \infty$ .

■ (Théorème de la valeur finale) Supposons que  $f(t)$  a une limite  $f(+\infty)$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ . Alors :

$$\lim_{p \rightarrow 0} p \tilde{f}(p) = f(+\infty) \quad (180)$$

( $p$  est pris réel dans la limite).

Ces deux théorèmes permettent de fixer les constantes d'intégration, lorsqu'on a calculé une transformée de Laplace par l'intermédiaire de ses dérivées.

■ Si  $f$  est une fonction dérivable, ayant une limite à droite en 0, et dont la dérivée est localement sommable, alors :

$$\mathcal{L}[f'](p) = p \tilde{f}(p) - f(0+) \quad (181)$$

Cette formule se généralise aux éventuelles dérivées d'ordre ultérieur, sous la forme :

$$\mathcal{L}[f^{(n)}](p) = p^n \tilde{f}(p) - p^{n-1} f(0+) - p^{n-2} f'(0+) - \dots - f^{(n-1)}(0+)$$

■ Soit  $f, g$  deux fonctions définies sur  $\mathbb{R}_+$ , et posons  $f(t) = g(t) = 0$  si  $t < 0$ . Les fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  ainsi obtenues ont un produit de convolution toujours défini, car il se ramène à une intégrale sur un intervalle borné :

$$f * g(t) = \int_{-\infty}^\infty f(t-u) g(u) du = \int_0^t f(t-u) g(u) du \quad (182)$$

Alors, dans l'intersection des domaines de sommabilité de  $\tilde{f}$  et  $\tilde{g}$ , la transformée de Laplace de  $f * g$  est définie et l'on a :

$$\mathcal{L}(f * g) = \tilde{f} \tilde{g} \quad (183)$$

### 7.1.3 Transformée de Laplace d'une distribution

Soit  $T$  une distribution sur  $\mathbb{R}$ , dont le support est inclus dans  $\mathbb{R}_+$ , et qui est la  $n$ -ième dérivée (au sens des distributions) d'une fonction continue  $f$ . On pose comme définition de la transformée de Laplace de  $T$  :

$$\tilde{T}(p) = p^n \tilde{f}(p) \quad (184)$$

Par exemple, le delta de Dirac  $\delta$  est la dérivée de  $H$ , la fonction de Heaviside. Comme :

$$\tilde{H}(p) = \int_0^\infty e^{-pt} dt = \frac{1}{p} \quad (185)$$

on obtient que :

$$\tilde{\delta} = 1 \quad (186)$$

comme dans le cas de la transformation de Fourier. (Ce n'est bien sûr pas un hasard : comme  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{F}$  changent toutes deux la convolution en produit ordinaire, elles doivent changer l'élément neutre du produit de convolution  $\delta$  en celui du produit ordinaire, 1.)

La plupart des propriétés décrites précédemment pour les fonctions restent vraies pour ces distributions. L'une d'entre elles appelle cependant un commentaire : si  $f$  est une fonction dérivable, nous avons vu que la transformée de Laplace de  $f'$  est  $\mathcal{L}(f') = p \tilde{f}(p) - f(0+)$  ; par ailleurs, la dérivée au sens des distributions de  $f$  a pour transformée de Laplace  $p \tilde{f}(p)$ , dans notre définition : où est passé le terme  $f(0+)$  ? Il n'y a aucune contradiction si l'on se rappelle que nous avons supposé que  $f$  était nulle sur  $\mathbb{R}_-$  ; si  $f(0+) \neq 0$ , alors  $f$  n'est pas continue en 0, et on peut écrire (sachant que  $f(0-) = 0$ ) :

$$f = g - f(0+)H \quad (187)$$

où  $g$  est continue. En dérivant au sens des distributions, on trouve :

$$f' = g' - f(0+)\delta \quad (188)$$

et en prenant la transformée de Laplace, on peut dire que la transformée de  $g'$  est  $p \tilde{g}(p)$  parce que  $g$  est continue ; mais ce n'est pas vrai de  $f$  et :

$$\mathcal{L}[f'] = p \tilde{g}(p) - f(0+) \quad (189)$$

Finalement,  $\tilde{g} = \tilde{f}$  car  $f$  et  $g$  sont égales sur  $\mathbb{R}_+$ . On a donc bien retrouvé la formule (181).

### 7.1.4 Utilité de la transformation de Laplace

En se limitant au cas de fonctions définies sur  $\mathbb{R}_+$ , la transformation de Laplace peut être vue comme une généralisation de celle de Fourier : il suffit de prendre  $p = i\xi$  dans la définition pour voir que  $\hat{f}(\xi) = \tilde{f}(i\xi)$  ; cela suppose cependant que l'abscisse de sommabilité de  $f$  soit négative. Comme cette condition n'a pas besoin d'être vérifiée pour que  $\tilde{f}$  existe sur une partie au moins du plan, il existe des fonctions qui n'ont pas de transformée de Fourier, mais ont une transformée de Laplace : c'est le cas par exemple de  $e^t$  (de transformée  $1/(p-1)$ , définie si  $\operatorname{Re} p > 1$ ). Dans les applications, il peut être utile d'employer la transformée de Laplace là où celle de Fourier n'existe pas, même au sens des distributions.

L'inconvénient de cette transformation est qu'elle est bien plus difficile à inverser. La formule d'inversion exige en effet une intégration dans le plan complexe :

$$f(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{f}(p) e^{pt} dp \quad (190)$$

où  $c$  est un réel supérieur à l'abscisse de sommabilité. Ce calcul peut être assez difficile.

De plus, toute fonction n'est pas une transformée de Laplace (puisque'elle doit au moins être holomorphe). L'opérateur  $\mathcal{L}^{-1}$  est donc techniquement difficile à caractériser et à employer. Pour

trouver une fonction à partir de sa transformée de Laplace, il est préférable d'utiliser une table de transformation. Avec l'aide du tableau 3, on peut trouver l'inverse de Laplace de n'importe quelle fraction rationnelle en  $p$ , à condition de la décomposer en éléments simples.

Donnons un exemple simple d'utilisation de la transformation de Laplace. On cherche à résoudre l'équation différentielle :

$$y''(t) - y(t) = 2e^t, \quad y(0) = y'(0) = 1 \quad (191)$$

La transformée de Laplace de  $2e^t$  est  $2/(p-1)$  ; celle de  $\mathcal{L}(y'')$  est  $p^2\tilde{y}(p) - py(0) - y'(0) = p^2\tilde{y}(p) - p - 1$ . Donc on a :

$$p^2\tilde{y}(p) - p - 1 - \tilde{y}(p) = \frac{2}{p-1} \quad (192)$$

soit en réarrangeant et en simplifiant :

$$y(p) = \frac{1}{(p-1)^2} + \frac{p}{p^2-1} \quad (193)$$

Ces deux fonctions figurent dans le tableau 3 ; on obtient finalement la solution de (191) en revenant en arrière :

$$y(t) = te^t + \cosh t \quad (194)$$

## 7.2 Transformation de Hankel

Soit  $F(x_1, x_2)$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  et radiale, c'est-à-dire que  $F(x_1, x_2) = f(r)$ , où  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ . En utilisant des coordonnées polaires  $(r, \theta)$  pour  $x$  et  $(\rho, \phi)$  pour  $\xi$ , de sorte que :

$$x\xi = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 = r\rho[\cos \theta \cos \phi + \sin \theta \sin \phi] = r\rho \cos(\theta - \phi)$$

on voit que la transformée de Fourier de  $F$  est :

$$\begin{aligned} \hat{F}(\rho, \phi) &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{+\infty} f(r) e^{-ir\rho \cos(\theta - \phi)} r dr d\theta \\ &= 2\pi \int_0^{+\infty} r f(r) J_0(\rho r) dr \end{aligned} \quad (195)$$

en posant :

$$J_0(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iu \cos t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(ucos t) dt \quad (196)$$

En particulier,  $\hat{F}$  est une fonction radiale aussi, que l'on peut écrire sous la formule  $\hat{F}(\xi) = g(\rho)$ , avec :

$$g(\rho) = \mathcal{H}[f](\rho) = 2\pi \int_0^{+\infty} r f(r) J_0(\rho r) dr \quad (197)$$

On appelle  $\mathcal{H}$  la transformation de Hankel. La fonction  $J_0$  qui intervient dans sa définition est la fonction de Bessel de première espèce et d'indice 0, qui peut être exprimée de différentes façons, et notamment par (196).

Connaissant l'inverse de la transformation de Fourier, il est facile de trouver l'inverse de la transformation de Hankel. On obtient :

$$f(r) = \mathcal{H}^{-1}[g](r) = \frac{1}{(2\pi)^2} \mathcal{H}[g](r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \rho g(\rho) J_0(\rho r) d\rho \quad (198)$$

D'une façon générale, les propriétés de cette transformation sont très proches de celles de la transformation de Fourier dont elle est issue.

Un calcul similaire en trois dimensions donne :

$$\begin{aligned} g(\rho) &= \frac{4\pi}{\rho} \int_0^{+\infty} r f(r) \sin(\rho r) dr \\ f(r) &= \frac{1}{2\pi^2 r} \int_0^{+\infty} \rho g(\rho) \sin(\rho r) d\rho \end{aligned} \quad (199)$$

Cette transformation, d'usage moins fréquent, ne porte pas de nom particulier.

## 7.3 Ondelettes

Développées dans les années 80 par Y. Meyer à la demande de J. Morlet, les ondelettes ont connu de grands succès depuis leur création, et sont porteuses de bien des promesses. Elles sont un renouveau inespéré de l'analyse harmonique. Nous ne pouvons pas détailler ici cette théorie, qu'on trouvera décrite dans [8], mais essayons de donner quelques principes directeurs.

Si on se donne une fonction  $\phi$  très régulière (habituellement  $C^\infty$ ) et bornée, on peut pour toute fonction intégrable  $f$  calculer :

$$F(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \phi(at + b) dt \quad (200)$$

(c'est la *transformation de Morlet*). Le fait de passer d'une fonction d'une variable à une fonction de deux implique que la transformation est redondante : il y a plusieurs façons de retrouver  $f$  à partir de  $F$ .

Le cas particulier le plus intéressant est celui des ondelettes, où l'on considère seulement les valeurs entières de  $b$ , et puissances de 2 pour  $a$  ; plus exactement on pose pour tous les  $j, k$  dans  $\mathbb{Z}$  :

$$c_{j,k} = 2^{j/2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \phi(2^j t - k) dt \quad (201)$$

Ce sont les coefficients en ondelettes de  $f$ . Si  $\phi$ , la « mère des ondelettes », est habilement choisie (il y a plusieurs possibilités), la famille de fonctions  $\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \phi(2^j t - k)$  est orthonormale et engendre  $L^2(\mathbb{R})$ . Par conséquent, toute fonction de carré intégrable est déterminée de manière unique par ses coefficients en ondelettes.

Les ondelettes permettent un traitement du signal comme l'analyse harmonique classique, mais d'une manière plus fine et souvent plus expressive. Par exemple, si l'on considère un signal sonore  $f(t)$  enregistré sur une certaine durée  $A$  ; on peut prolonger  $f$  en lui imposant d'être périodique et de période  $A$ , les coefficients de Fourier de la fonction obtenue donneront des indications sur la présence et l'intensité des harmoniques dans le signal (ainsi, pour un signal sonore, sur la présence de sons aigus ou graves, etc.).

Les coefficients en ondelettes, du fait de leur nature « bidimensionnelle » donneront une double information : à la fois sur les fréquences harmoniques contenues dans le signal et sur la position dans le temps de ces fréquences (c'est-à-dire le comportement local en temps de  $f$ ) : on saura par exemple qu'à tel instant le signal sonore  $f$  est dominé par des sons aigus, puis que ceux-ci disparaissent progressivement, etc. De plus, ces caractéristiques peuvent être visualisées sur un graphe bidimensionnel, dans lequel on placera par exemple l'échelle des « fréquences » (coefficient  $k$ ) verticalement, et l'échelle des « temps » (coefficient  $j$ ) horizontalement. Ce genre de graphe est très parlant lorsqu'on en a l'habitude.

Les ondelettes ont bien d'autres propriétés que nous ne pouvons décrire ici. Signalons que leur domaine d'application s'étend rapidement : analyse harmonique, filtres numériques, reconnaissance de la parole, traitement de l'image, examen d'objets fractals, etc. De plus, il existe un algorithme de transformée en ondelettes rapides, qui permet d'utiliser cet outil de manière efficace sur ordinateur.

## Références bibliographiques

- [1] ARSAC (J.). – *Transformation de Fourier et théorie des distributions*. Dunod (Exemples physiques) (1961).
- [2] BATEMAN (H.). – *Tables of Integrals transforms*. McGraw-Hill, New-york (1954).
- [3] BESICOVITCH (A.S.). – *Almost periodic functions*. Cambridge University Press (1932), réimpression Dover Publ. (Livre classique sur les fonctions quasi périodiques) (1954).
- [4] COOLEY (J.W.) et TUKEY (J.W.). – *An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series*. *Mathematica Compositio* **19**, pp. 297-301. (C'est l'article original sur la transformée de Fourier rapide) (1965).
- [5] CHURCHILL (R.V.). – *Fourier series and boundary value problems*. MacGraw-Hill, deuxième édition, (Séries de Fourier et nombreux exemples tirés des équations aux dérivées partielles. Lecture agréable pour un ingénieur) (1963).
- [6] DAUTRAY (R.) et LIONS (J.-L.). – *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*. Masson, 9 tomes, (Livre très classique, dont le titre est expressif. Présentation très claire.) (1987).
- [7] LEBESGUE (H.). – *Leçons sur les séries trigonométriques professées au Collège de France*, A. Blanchard (Ouvrage lumineux et simple, œuvre d'une très grand mathématicien), réédité en 1975.
- [8] MEYER (Y.). – *Ondelettes et opérateurs*. Hermann, 3 tomes (1990).
- [9] MORGENSTERN (J.) et DURAND (G.). – *Transformations de Fourier rapides*. Journées X-UPS, (Une revue des différents algorithmes numériques de calcul de la transformation) (1989).
- [10] SCHWARTZ (L.). – *Théorie des distributions*. Hermann, Paris, (Par leur créateur, tout ce qu'il faut savoir sur les distributions. Essentiellement mathématique, avec certains passages très techniques de topologie) (1966).
- [11] SCHWARTZ (L.). – *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*, Hermann, Paris, (Plus appliqué que le précédent, avec des exemples dans des problèmes d'équations aux dérivées partielles) (1961).

# Gagnez du temps et sécurisez vos projets en utilisant une source actualisée et fiable



RÉDIGÉE ET VALIDÉE  
PAR DES EXPERTS




MISE À JOUR  
PERMANENTE



100 % COMPATIBLE  
SUR TOUS SUPPORTS  
NUMÉRIQUES



SERVICES INCLUS  
DANS CHAQUE OFFRE

- + de 340 000 utilisateurs chaque mois
- + de 10 000 articles de référence et fiches pratiques
- Des Quiz interactifs pour valider la compréhension 

## SERVICES ET OUTILS PRATIQUES



### Questions aux experts\*

Les meilleurs experts techniques et scientifiques vous répondent



### Articles Découverte

La possibilité de consulter des articles en dehors de votre offre



### Dictionnaire technique multilingue

45 000 termes en français, anglais, espagnol et allemand



### Archives

Technologies anciennes et versions antérieures des articles



### Info parution

Recevez par email toutes les nouveautés de vos ressources documentaires

\*Questions aux experts est un service réservé aux entreprises, non proposé dans les offres écoles, universités ou pour tout autre organisme de formation.

## Les offres Techniques de l'Ingénieur



### INNOVATION

- Éco-conception et innovation responsable
- Nanosciences et nanotechnologies
- Innovations technologiques
- Management et ingénierie de l'innovation
- Smart city – Ville intelligente



### MATÉRIAUX

- Bois et papiers
- Verres et céramiques
- Textiles
- Corrosion – Vieillessement
- Études et propriétés des métaux
- Mise en forme des métaux et fonderie
- Matériaux fonctionnels. Matériaux biosourcés
- Traitements des métaux
- Élaboration et recyclage des métaux
- Plastiques et composites



### MÉCANIQUE

- Frottement, usure et lubrification
- Fonctions et composants mécaniques
- Travail des matériaux – Assemblage
- Machines hydrauliques, aérodynamiques et thermiques
- Fabrication additive – Impression 3D



### ENVIRONNEMENT – SÉCURITÉ

- Sécurité et gestion des risques
- Environnement
- Génie écologique
- Technologies de l'eau
- Bruit et vibrations
- Métier : Responsable risque chimique
- Métier : Responsable environnement



### ÉNERGIES

- Hydrogène
- Ressources énergétiques et stockage
- Froid industriel
- Physique énergétique
- Thermique industrielle
- Génie nucléaire
- Conversion de l'énergie électrique
- Réseaux électriques et applications



### GÉNIE INDUSTRIEL

- Industrie du futur
- Management industriel
- Conception et production
- Logistique
- Métier : Responsable qualité
- Emballages
- Maintenance
- Traçabilité
- Métier : Responsable bureau d'étude / conception



### ÉLECTRONIQUE – PHOTONIQUE

- Électronique
- Technologies radars et applications
- Optique – Photonique



### TECHNOLOGIES DE L'INFORMATION

- Sécurité des systèmes d'information
- Réseaux Télécommunications
- Le traitement du signal et ses applications
- Technologies logicielles – Architectures des systèmes
- Sécurité des systèmes d'information



### AUTOMATIQUE – ROBOTIQUE

- Automatique et ingénierie système
- Robotique



### INGÉNIERIE DES TRANSPORTS

- Véhicule et mobilité du futur
- Systèmes aéronautiques et spatiaux
- Systèmes ferroviaires
- Transport fluvial et maritime



### MESURES – ANALYSES

- Instrumentation et méthodes de mesure
- Mesures et tests électroniques
- Mesures mécaniques et dimensionnelles
- Qualité et sécurité au laboratoire
- Mesures physiques
- Techniques d'analyse
- Contrôle non destructif



### PROCÉDÉS CHIMIE – BIO – AGRO

- Formulation
- Bioprocédés et bioproductions
- Chimie verte
- Opérations unitaires. Génie de la réaction chimique
- Agroalimentaire



### SCIENCES FONDAMENTALES

- Mathématiques
- Physique Chimie
- Constantes physico-chimiques
- Caractérisation et propriétés de la matière



### BIOMÉDICAL – PHARMA

- Technologies biomédicales
- Médicaments et produits pharmaceutiques



### CONSTRUCTION ET TRAVAUX PUBLICS

- Droit et organisation générale de la construction
- La construction responsable
- Les superstructures du bâtiment
- Le second œuvre et l'équipement du bâtiment
- Vieillessement, pathologies et réhabilitation du bâtiment
- Travaux publics et infrastructures
- Mécanique des sols et géotechnique
- Préparer la construction
- L'enveloppe du bâtiment
- Le second œuvre et les lots techniques