Grau de Matemàtiques. Curs 2021-2022. Semestre de primavera

MÈTODES NUMÈRICS II

EXAMEN FINAL. 2 de juny de 2022

Exercici 1, sobre la pràctica 2 (1 punt)

S'ha fet un torneig de tenis entre 4 jugadors: J_1, J_2, J_3, J_4. Cada jugador ha jugat contra uns altres dos jugadors, al millor de 3 sets. Els resultats han estat:

J_1 ha guanyat J_2 per 2 sets a 0.

J_1 ha guanyat J_3 per 2 sets a 1.

J_2 ha guanyat J_4 per 2 sets a 0.

J_3 ha guanyat J_4 per 2 sets a 1.

Es construeix una matriu $A = (a_{ij})$, 4×4, associada als resultats anteriors, de la manera següent:

Si J_i ha guanyat J_j per 2 a 0, es posa $a_{ij} = 20$.

Si J_i ha guanyat J_j per 2 a 1, es posa $a_{ij} = 10$.

La resta d'elements de la matriu es posen igual a 1.

S'aplica el mètode de la potència a la matriu A, de la manera explicada a l'enunciat de la pràctica 2:

- Es calcula un vector inicial x i un vector inicial normalitzat v.
- Es van actualitzant els vectors x i v.

(a) Escriviu la matriu A.

(b) Quins són els vectors inicials x i v?

(c) Feu la primera iteració del mètode (cal actualitzar x i v).

(d) Feu una segona iteració del mètode (cal tornar a actualitzar x i v).

Nota. Escriviu totes les components de tots els vectors en forma de fracció.

Exercici 2, teoria (3 punts)

(a) Enuncieu els dos teoremes de Gerschgorin sobre localització de valors propis, i demostreu el primer teorema.

(b) Sistemes no lineals: convergència per a contraccions (no cal fer demostracions).

(c) Polinomis de Txebixev: definició i propietats (no cal fer demostracions).

Exercici 3 (2 punts)

Es considera un sistema $Ax = b$, de 5 equacions i incògnites, amb

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Es vol resoldre pel mètode de Jacobi. Calculeu la matriu d'iteració J, així com $\|J\|_\infty$.

Siguin $c \neq 0$ i $C = diag(1, 1, c, c, 1)$. Calculeu la matriu $\tilde{J} = CJC^{-1}$. Per quins valors de $c > 0$ es verifica $\|\tilde{J}\|_\infty < 1$? Quin valor $c > 0$ fa mínim $\|\tilde{J}\|_\infty$? Quant val aquest mínim?

Es pot deduir del resultat anterior que el mètode de Jacobi, aplicat a $Ax = b$, convergeix? Raoneu-ho.

(b) Es vol resoldre també pel mètode de Gauss-Seidel. Calculeu la matriu d'iteració G i el valor $\|G\|_\infty$. Useu aquest valor per a deduir quants iterats k de Gauss-Seidel cal fer per a assegurar que l'aproximació $x^{(k)}$ té un error, en norma infinit, menor que 10^{-10}, si comencem en $x^{(0)} = 0 \in \mathbb{R}^5$.

Feu també uns càlculs similars a (a). Sigui $c \neq 0$ i $C = diag(1,1,c,c,1)$. Calculeu la matriu $\tilde{G} = CGC^{-1}$. Per quins valors de $c > 0$ es verifica $\|\tilde{G}\|_\infty < 1$? Quin valor $c > 0$ fa mínim $\|\tilde{G}\|_\infty$? Quant val aquest mínim?

Exercici 4 (2 punts)

Es considera l'equació de Kepler, $f(E,M) \equiv E - e\sin(E) - M = 0$, amb $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, la qual relaciona les anomalies (angles) mitjana M i excèntrica E de la posició d'un planeta en el seu moviment entorn del Sol. L'equació és vàlida per a òrbites el·líptiques i la constant $e \in [0,1)$ és l'excentricitat de l'òrbita.

És evident que l'equació anterior defineix explícitament $M = M(E) = E - e\sin(E)$, $\forall E \in \mathbb{R}$. Ens preguntem si també defineix ímplicitament $E = E(M)$.

(a) Demostreu que, per a qualssevols valors (E_0, M_0) que verifiquin $f(E_0, M_0) = 0$, existeix un interval $I = (M_0 - \delta, M_0 + \delta)$ (per a algun valor $\delta > 0$), i existeix una funció $E = g(M)$, $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe C^∞, tals que es verifica $E_0 = g(M_o)$ i $f(g(M), M) = 0$, $\forall M \in I$.

Raoneu si l'interval I pot ser tota la recta real.

(b) Es considera el cas particular $E_0 = M_0 = 0$. Sigui $E = g(M)$ en un entorn de $M = 0$ tal que $f(g(M), M) = 0$ ($\forall M$ en l'entorn). Calculeu els valors $g'(0)$, $g''(0)$ i $g'''(0)$ (en funció de e). Useu-los per a fer una estimació del valor $E = g(1)$ en el cas de la Terra ($e = 0.0167$).

(c) Resoleu directament $E - 0.0167\sin(E) - 1 = 0$ per iteració simple. Heu d'usar una funció d'iteració adequada. Cal que trobeu E amb 6 decimals correctes. Escriviu tots els iterats que feu.

Exercici 5 (2 punts)

Es considera l'espai vectorial $E = C^0_{\mathbb{R}}([0,1])$ amb el producte escalar $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Es vol estudiar el problema de la millor aproximació de funcions de E per funcions d'uns subespais formats per funcions poligonals, tal com s'exposa a continuació.

(a) Siguin $n > 1$ natural, i $h = 1/n$. Es defineixen $n+1$ abscisses equidistants: $x_j = jh$ ($\forall j = 0 \div n$).

Per a cada $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$, es considera la funció $\varphi_j(x)$ determinada per les condicions següents:

- $\varphi_j \in E$.
- $\varphi_j(x)$ pren el valor 1 en l'abscisa x_j, i pren el valor 0 en les n abscisses x_k's diferents de x_j.
- $\varphi_j(x)$, restringida a cada interval $[x_k, x_{k+1}]$, és un polinomi de grau menor o igual que 1 ($\forall k = 0 \div n-1$).

Dibuixeu les gràfiques de les $n+1$ funcions anteriors. Demostreu que són linealment independents. El subespai vectorial que generen serà anomenat E_n^*.

Nota. Cada funció φ_j depèn de j, i també de n (per exemple, la funció φ_0 dels cas $n = 2$ no és la mateixa que la funció φ_0 dels cas $n = 3$). Però no escrivim explícitament la dependència de n.

(b) En el cas $n = 2$, doneu fórmules explícites per a les funcions φ_0, φ_1 i φ_2; concretament, per a cada $\varphi_j(x)$, heu de donar una fórmula per a $x \in [0, 1/2]$ i una altra per a $x \in [1/2, 1]$.

(c) Continuant amb el cas $n = 2$, trobeu una base ortogonal de l'espai E_2^*; i trobeu la millor aproximació de la funció $f(x) = x$ per una funció de E_2^*.

(d) Tornem al cas $n > 1$ qualsevol. Calculeu la matriu de Gram $(\langle \varphi_i, \varphi_j\rangle)_{i,j=0\div n}$ associada a les funcions poligonals de l'apartat (a).

Indicació. Tots els seus elements tenen una expressió senzilla en funció de h. Molts són 0.