Grau de Matemàtiques. Curs 2020-2021. Semestre de primavera

MÈTODES NUMÈRICS II

EXAMEN FINAL. 16 de juny de 2021 (8h-11h)

RECOMANACIÓ. Tots els exercicis tenen algun apartat senzill. És millor entregar tots els exercicis, encara que alguns estiguin fets només parcialment, que no pas fer-ne alguns completament i no fer res d'uns altres.

Exercici 1, sobre la pràctica 2 (2 punts)

Nota. En aquest exercici s'usa la mateixa notació que a l'enunciat de la pràctica 2.

Es vol integrar l'equació diferencial $y' = \frac{y}{2\ln(y)}$ des de $x = a = 1$ fins a $x = b = 4$. La condició inicial és $y(a) = e$.

(a) Utilitza el mètode d'Euler amb $n = 4$ per a obtenir aproximacions equidistants fins a $x = b$.

(b) Defineix l'algorisme de Richardson. Aplica'l amb $m = 1$ per al mètode d'Euler, de nou amb $n = 4$.

(c) Utilitza el mètode de dos passos d'Adams-Bashfort amb $n = 4$ per a aproximar la solució del problema de valors inicials donat, en punts equidistants fins a $x = b$.

Exercici 2 (2 punts)

Sigui $A\,x = b$ un sistema lineal real $n \times n$, amb $A = (a_{ij})$ no singular i tal que $a_{ii} \neq 0 \;\; \forall i$, de manera que la matriu $D = diag(A)$ també és no singular.

Per a resoldre'l, es considera la família de mètodes iteratius dependent d'un paràmetre $\omega > 0$:

$$x^{(k+1)} = (I - \omega D^{-1}A)x^{(k)} + c\ , \ \forall k \geq 0\ . \qquad (1)$$

(a) Trobeu quin ha de ser el vector c, en funció de ω, D i b, per tal que el mètode anterior, quan convergeixi, ho faci a la solució del sistema $Ax = b$.

(b) Hi ha algun valor de $\omega > 0$ per al qual les fórmules (1) són precisament les del mètode iteratiu de Jacobi?

(c) Suposem que A és simètrica, que $D = d\,I$ (múltiple de la matriu identitat) amb $d > 0$, i que el mètode de Jacobi aplicat a $Ax = b$ és convergent. Demostreu que A és definida positiva.

Indicació. Relacioneu l'espectre de A amb el de la matriu d'iteració del mètode de Jacobi.

(d) Continuant de l'apartat anterior, demostreu que existeix un interval de valors de ω de la forma $(0, a)$, amb $a > 1$, tal que, per a qualsevol ω en aquest interval, el mètode (1) és convergent. Trobeu el valor òptim de ω, en funció del valors propis de A i del valor d, així com el radi espectral de la matriu d'iteració corresponent.

Exercici 3 (2 punts)

(a) Enuncieu i demostreu els teoremes de Gerschgorin per a localitzar valors propis.

(b) Expliqueu el mètode de Jacobi per a trobar valors propis de matrius reals simètriques. No cal fer demostracions.

Exercici 4 (2 punts)

Sigui $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mitjançant $H(x,t) = 2x^3 + 4\,t\,x + t^3 - 1$. Es considera l'equació $H(x,t) = 0$ i es busquen les seves solucions x en funció del paràmetre t.

(a) Calculeu tots els punts de bifurcació i tots els punts de retorn de les corbes solució.

(b) Quan $t = 1$, una solució és $x = 0$. Demostreu que, en un entorn d'aquest punt, l'equació $H(x,t) = 0$ defineix implícitament una corba solució de la forma $x = x(t)$. Calculeu $x'(1)$ i $x''(1)$.

(c) Es vol fer continuació de la corba solució anterior, des del punt $(x_0, t_0) = (0, 1)$, cap a la zona $x < 0$. Calculeu un punt de *predicció*, $(\tilde{x}_1, \tilde{t}_1)$, a distància $h = 0.1$ de (x_0, t_0), en la direcció de la recta tangent a la corba.

(d) Es vol fer la *correcció* del punt de predicció trobat a (c) per a obtenir un nou punt (x_1, t_1) sobre la corba solució. Es decideix fer-ho aplicant el mètode de Newton al sistema que s'obté quan, a l'equació que es vol resoldre, s'afegeix la condició que el punt corregit estigui a distància $h = 0.1$ del punt conegut (x_0, t_0). Escriviu explícitament les fórmules de la iteració que cal fer.

Exercici 5 (2 punts)

Es vol fer aproximació mínim-quadràtica polinomial contínua a l'interval $[0, +\infty)$ amb funció pes $w(x) = e^{-x}$. Per tant, es defineix el producte escalar

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{+\infty} e^{-x} f(x) g(x) dx \, . \qquad (2)$$

Nota: L'espai vectorial on es treballa ha de ser un espai de funcions adequat (cal que totes les integrals que surtin existeixin i siguin finites), però no ens en preocupem.

(a) Per a cada $k \geq 0$, sigui $I_k \equiv \int_0^{+\infty} e^{-x} x^k dx$. Demostreu que es verifica $I_k = k I_{k-1}$, $\forall k \geq 1$. Deduïu una fórmula aritmètica explícita senzilla de I_k en funció de k.

(b) Calculeu els polinomis ortogonals mònics de graus 0, 1, 2 i 3, respecte al producte escalar definit per (2).

(c) Calculeu la millor aproximació de la funció $f(x) = x^3$ dins de l'espai vectorial $P_2[x]$ (polinomis de grau menor o igual que 2), segons la norma associada al producte escalar (2).

Exercici 1, sobre la pràctica 2 (2 punts)

(a) Utilitza el mètode de Euler amb $n = 4$ per obtenir aproximacions equidistants fins a $x = b$.

Primer, calculem la distància entre els punts equidistants $h = \frac{b-a}{n} = \frac{4-1}{4} = 0.75$. Llavors, apliquem la fòrmula del mètode de Euler, definida com $y_i = y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1})$ per a tota i tal que $1 \leq i \leq n$ amb $y_0 = e$.

Per tant, $y_1 = y_0 + 0.75 \cdot f(x_0, y_0) = e + 0.75 \cdot \frac{e}{2ln(e)} \approx 3.73764$, $y_2 = 3.73764 + 0.75 \cdot \frac{3.73764}{2ln(3.73764)} \approx 4.80071$, $y_3 = 4.80071 + 0.75 \cdot \frac{4.80071}{2ln(4.80071)} \approx 5.94828$ i $y_4 = 5.94828 + 0.75 \cdot \frac{5.94828}{2ln(5.94828)} \approx 7.19925$.

(b) Defineix l'algorisme de Richardson. Aplica'l amb $m = 1$ per al mètode de Euler, de nou amb $n = 4$.

Sigui un mètode d'aproximació $F(h)$ que aproxima un valor a_0 tal que es compleix la igualtat $F(h) = a_0 + a_1 h^{p_1} + a_2 h^{p_2} + a_3 h^{p_3} + \ldots$ on $p_1 < p_2 < p_3 < \ldots$. Sigui $m \in \mathbb{N}^+$, $q > 1$ uns valors fixats. Definint $A_{m',0} = F(q^{-m'} h_0)$ per a tota $0 \leq m' \leq m$, i calculant per a cada $m' = 0, 1, 2, \ldots, m$:

$$A_{m',k} = A_{m',k-1} + \frac{A_{m',k-1} - A_{m'-1,k-1}}{q^{p_k} - 1}.$$

per a $k = 1, 2, \ldots m$, llavors acceptarem com a aproximació de a_0 el valor $A_{m,m}$. Si definim una tolerància donada, ϵ, llavors acceptarem el valor $A_{m',k+1}$ com a estimació de a_0 quan $|A_{m',k} - A_{m'-1,k}| < \epsilon$

Per a utilitzar el mètode de Richardson de forma pasiva, cal calcular primer Euler amb $h_1 = q^1 \cdot h_0 = 0.5 \cdot h_0 = 0.375$. Amb aquesta h_1 calculem les aproximacions de Euler. Aquestes donen $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8) = (3.22795, 3.74444, 4.27621, 4.82800, 5.40297, 6.00350, 6.63153, 7.28879)$. Llavors, utilitzant les y amb índex parell podem aplicar Richardson. Utilitzant la fòrmula de l'algorisme queda:

$$\text{Aprox}(x = 1.75) = A_{1,1}^{x=1} = 2 \cdot A_{1,0}^{x=1} - A_{0,0}^{x=1} = 2 \cdot 3.74444 - 3.73764 = 3.75124,$$

on $Aprox(x = 1)$ és la aproximació desitjada per a $x = 1$. Similarment, $\text{Aprox}(x = 2.5) = 4.85530$, $\text{Aprox}(x = 3.25) = 6.05872$ i $\text{Aprox}(x = 4) = 7.37833$.

Nota: Alternativament es pot fer servir la implementació activa de l'algorisme, on les aproximacions influencien els valors de les següents aproximacions d'Euler.

(c) Utilitza el mètode de dos passos d'Adams-Bashfort amb $n = 4$ per aproximar la solució del problema de valors inicials donat, en punts equidistants fins a $x = b$.

El mètode d'Adams-Bashfort està definit com:

$$y_{n+2} = y_{n+1} + \frac{h}{2}(3f(x_{n+1}, y_{n+1}) - f(x_n, y_n)).$$

Amb $h = \frac{b-a}{n}$ on y_1 és la aproximació donada per el mètode de Euler. Per tant, aplicant la fòrmula, queda

$$(y_1, y_2, y_3, y_4) = (3.73764, 4.82257, 6.01523, 7.32623).$$

(2) $Ax=b$ $n\times n$, A regular, $a_{ii}\neq 0\ \forall i$, $D=\mathrm{diag}(A)$

Família: $\forall \omega>0$ $\quad x^{k+1}=(I-\omega D^{-1}A)x^k+c \quad \forall k\geq 0$

(a) c? | "consistència"

Sup. converg. a x: $x=(I-\omega D^{-1}A)x+c$; $Ax=b \Rightarrow x=A^{-1}b$ $\Big\}$ $A^{-1}b=(I-\omega D^{-1}A)A^{-1}b+c$

$$=A^{-1}b-\omega D^{-1}b+c$$

$$\Leftrightarrow \boxed{c=\omega D^{-1}b}$$

(b) ω? | el mètode és Jacobi

Deduïm Jacobi usant A i D.

$Ax=b \Leftrightarrow Dx+(A-D)x=b \Leftrightarrow Dx=(D-A)x+b \Leftrightarrow x=D^{-1}(D-A)x+b=(I-D^{-1}A)x+D^{-1}b$

Jacobi és $x^{k+1}=(I-D^{-1}A)x^k+D^{-1}b$. Això correspon a $\boxed{\omega=1}$

(c) A sim. ($\Rightarrow$ vaps reals) i $D=d\cdot I$, $d>0$.

Jacobi convergent. ¿A def. posit.?

~~Incondicionals~~

Relacionem vaps de A i vap's de la matriu d'iterac. de Jacobi: $B=I-D^{-1}A=I-\frac{1}{d}A$

λ vap de $A \Leftrightarrow \underbrace{1-\frac{1}{d}\lambda}_{\Updownarrow} \equiv \mu$ vap de B

$$d(1-\mu)=\lambda$$

Com que $\mathrm{Spec}(A)\subset\mathbb{R}$, també $\mathrm{Spec}(B)\subset\mathbb{R}$.

Jacobi convergent $\Rightarrow -1<1-\frac{1}{d}\lambda<+1 \Leftrightarrow -2<-\frac{\lambda}{d}<0 \Leftrightarrow 2>\frac{\lambda}{d}>0 \Leftrightarrow 2d>\lambda>0$

Per tant, $\boxed{\mathrm{Spec}(A)\subset(0,2d)}$

Com que A és simètrica i té tots els vaps positius $\Rightarrow$ A és def. positiva

(d) Continuant (c), ¿$\exists$ interval $I=(0,a)$ amb $a>1$ | $\forall\omega\in I$, el mètode és convergent?

Trobar també ω òptim i ρ corresponent.

* Sigui $B_\omega=(I-\omega D^{-1}A)=I-\frac{\omega}{d}A$.

Els vap's de B_ω depenen continuament de ω $\Rightarrow$ (interval) $\forall\omega$ en un entorn de $\omega=1$, el mètode és convergent.

quan $\omega=1$, converg.

Cal veure que aquest interval es pot allargar per l'esquerra fins a $\omega=0$

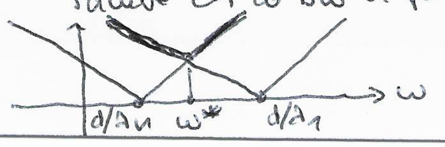
Els vap's de B_ω són $1-\frac{\omega}{d}\lambda_i$, on λ_i és vap de A ($\Rightarrow 0<\lambda_i<2d$)

Es verifica: $0<\lambda_i<2d \Leftrightarrow 0<\frac{\omega}{d}\lambda_i<2\omega \Leftrightarrow 0>-\frac{\omega}{d}\lambda_i>-2\omega \Leftrightarrow 1>1-\frac{\omega}{d}\lambda_i>1-2\omega$

Quan $\omega\in(0,1)$, és $1-2\omega\in(-1,1)$. Per tant, tots els vap's de B_ω són a $(-1,+1)\Rightarrow$ convergència

* Per a trobar ω^* òptim, considerem els vap's de A ordenats: $0<\lambda_1\leq\dots\leq\lambda_n<2d$

També els de B_ω es poden ordenar: $1-\frac{\omega}{d}\lambda_1\geq\dots\geq 1-\frac{\omega}{d}\lambda_n$



Llavors, $\rho(B_\omega)=\max\{|1-\frac{\omega}{d}\lambda_1|,|1-\frac{\omega}{d}\lambda_n|\}$ té la gràfica del dibuix

ω^* verifica $1-\frac{\omega}{d}\lambda_1=\frac{\omega}{d}\lambda_n-1 \Leftrightarrow \boxed{\omega^*=2d/(\lambda_1+\lambda_n)}$

i $\rho(B_{\omega^*})=\frac{\omega^*}{d}\lambda_n-1=\dots \Leftrightarrow \boxed{\rho=(\lambda_n-\lambda_1)/(\lambda_n+\lambda_1)}$

④ $H(x,t) = 2x^3+4tx+t^3-1$ Considerem el conjunt de solucions de $\sim$, $(x,t)\in\mathbb{R}^2$; t paràmetre.

ⓐ Quants punts de bifurcació i quants punts de retorn té H?

$D_xH = 6x^2+4t \mid D_tH = 4x+3t^2$

Bifurcació: $H=0$

$$\left.\begin{array}{l} D_xH=0 \Leftrightarrow 6x^2+4t=0 \Leftrightarrow 3x^2+2t=0 \Leftrightarrow t=-\frac{3}{2}x^2 \\ D_tH=0 \Leftrightarrow 4x+3t^2=0 \end{array}\right\} 4x+3\frac{9}{4}x^4=0 \Leftrightarrow 16x+27x^4=0 \Rightarrow \begin{array}{l} x=0 \to t=0 \\ 16+27x^3=0 \to x^3=\frac{-16}{27} \\ \to x=\frac{-2}{3}2^{1/3}\end{array}$$

Candidat $x=t=0 \to H\neq 0$ (no)

Candidat $x=-\frac{2}{3}2^{1/3}$

$$\left. t=-\frac{3}{2}x^2=-\frac{3}{2}\frac{4}{9}2^{2/3}=-\frac{2}{3}2^{2/3}\right\} \text{ Llavors } H=-2\frac{8}{27}2+4\frac{4}{9}2-\frac{8}{27}4-1=$$

$$=\frac{-32+96-32-27}{27}=\frac{5}{27}\neq 0 \quad \text{(no)}$$

$\Rightarrow \boxed{\nexists \text{ punts de bifurcació}}$

Punts de retorn

$$\left.\begin{array}{l} H=0 \\ D_xH=0 \Leftrightarrow 3x^2+2t=0 \Rightarrow t=-\frac{3}{2}x^2 \end{array}\right\} 0=2x^3+\underbrace{4x\left(-\frac{3}{2}x^2\right)}_{-6x^3}+\underbrace{\left(-\frac{3}{2}x^2\right)^3}_{-\frac{27}{8}x^6}-1 \Leftrightarrow 0=\underbrace{16x^3-48x^3}_{-32x^3}-27x^6-8=0$$

$$\Leftrightarrow 27x^6+32x^3+8=0$$

$$\Leftrightarrow x^3=\frac{-32\pm\sqrt{32^2-4\cdot 27\cdot 8}}{2\cdot 27}=\frac{-16\pm\sqrt{16^2-27\cdot 8}}{27}$$

$$=\frac{-16\pm\sqrt{40}}{27}= \begin{array}{l} \nearrow -0{,}3583498 \\ \searrow -0.82683538 \end{array}$$

$\boxed{\exists\ 2 \text{ punts de retorn}}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x\approx -0.71029 \to t\approx -0.7567678 \\ x\approx -0.9385837 \to t\approx -1.321409 \end{cases}$$

ⓑ $\boxed{x=0,\ t=1 \text{ és solució}}$

¿$\exists\, x=x(t)$ en un entorn? Calcula $x'(1), x''(1)$ i una aprox. de $x(1.1)$ usant Taylor de 2n ordre

$D_xH=6x^2+4t \to D_xH(0,1)=4\neq 0 \Rightarrow$ Sí que existeix $x=x(t) \mid \boxed{x(1)=0}$

$2x^3+4tx+t^3-1=0$

$6x^2x'+4x+4tx'+3t^2=0 \to$ En $t=1, x=0$: $4x'+3=0 \Rightarrow x'=-3/4 \Rightarrow \boxed{x'(1)=-3/4}$

$12x(x')^2+6x^2x''+8x'+4tx''+6t=0 \to$ En $t=1, x=0, x'=-3/4$: $\underbrace{8\left(-\frac{3}{4}\right)}_{-6}+4x''+6=0 \Rightarrow \boxed{x''(1)=0}$

$$\Rightarrow x(1.1)\approx x(1)+x'(1)(0.1)+\frac{1}{2}x''(1)(0.1)^2+\cancel{O(0.1)^3}$$

$$=0-\frac{3}{4}(0.1)=\boxed{-0.075}$$

ⓒ Predicció, a distància $h=0.1$ de $(x=0,t=1)$, en la direcció tg a la corba solució, cap al sentit de $x<0$

$DH(x=0,t=1)=(D_x \mid D_t)=(4,3)$ direcció normal $\Rightarrow$ la direcció tg és $\pm(3,-4)$

Si es vol que x disminueixi, cal $u=(-3,+4)$, $\|u\|_2=5$

$$\begin{pmatrix}x_1\\t_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\frac{0.1}{5}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3/50\\1+4/50\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}-3/50\\54/50\end{pmatrix}}$$

ⓓ Correcció: Escriu explícitament la recurrència de Newton pel. resoldre $\begin{cases} H(x,t)=0 \\ \|(x,t)-(0,1)\|_2^2=0.1^2 \end{cases}$

$$G\binom{x}{t}=\left\{\begin{array}{l} 2x^3+4tx+t^3-1=0 \\ x^2+(t-1)^2-0.01=0 \end{array}\right\} \qquad DG=\begin{pmatrix} 6x^2+4t & 4x+3t^2 \\ 2x & 2(t-1)\end{pmatrix}$$

La recurrència seria:

$$\boxed{\begin{pmatrix}x\\t\end{pmatrix}^{k+1}=\begin{pmatrix}x\\t\end{pmatrix}^{k}-\begin{pmatrix}6x_k^2+4t_k & 4x_k+3t_k^2\\ 2x_k & 2(t_k-1)\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2x_k^3+4t_kx_k+t_k^3-1\\ x_k^2+(t_k-1)^2-0.01\end{pmatrix} \quad \forall k\geq 0}$$

$$\begin{pmatrix}x\\t\end{pmatrix}^{0}=\begin{pmatrix}-3/50\\54/50\end{pmatrix}$$

(5) $\langle f,g\rangle = \int_0^{+\infty} e^{-x} f(x) g(x)\,dx$ ($\sim$ $\|f\| = \langle f,f\rangle^{1/2}$ norma associada)

(a) $I_k = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^k\,dx \quad \forall k \geq 0$

$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big]_0^{\infty} = 0-(-1) = 1$

$\forall k \geq 1 \quad I_k = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^k\,dx = -x^k e^{-x}\Big]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (-e^{-x}) k x^{k-1}\,dx = 0 + k\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{k-1}\,dx = k \cdot I_{k-1}$

$u = x^k \Rightarrow du = kx^{k-1}dx$
$dv = e^{-x}dx \Rightarrow v = -e^{-x}$

$\forall k \geq 1 \ \lim_{x\to+\infty} \frac{x^k}{e^x} = 0$

Per tant, $\left.\begin{matrix} I_k = k I_{k-1}, \ \forall k \geq 1 \\ I_0 = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{I_k = k!}$

(b) ¿Polinomis ortogonals mònics de graus ≤ 3? (Nota. Polin. de Laguerre)

$\boxed{\phi_0(x) = 1}$

$\phi_1(x) = x - a \mid 0 = \langle 1, x-a\rangle = \langle 1,x\rangle - a\langle 1,1\rangle = I_1 - a I_0 \Rightarrow a = \frac{I_1}{I_0} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \boxed{\phi_1(x) = x-1}$

$\phi_2(x) = x^2 - ax - b \mid 0 = \langle 1, x^2-ax-b\rangle = \langle 1,x^2\rangle - a\langle 1,x\rangle - b\langle 1,1\rangle = I_2 - I_1 a - I_0 b = 2-a-b$
$0 = \langle x, x^2-ax-b\rangle = \langle x,x^2\rangle - a\langle x,x\rangle - b\langle x,1\rangle = I_3 - I_2 a - I_1 b = 6-2a-b$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b = 2 \\ 2a+b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\phi_2(x) = x^2-4x+2}$

$\phi_3(x) = x^3 - ax^2 - bx - c \mid 0 = \langle 1, x^3-ax^2-bx-c\rangle = I_3 - I_2 a - I_1 b - I_0 c = 6-2a-b-c$
$0 = \langle x, x^3-ax^2-bx-c\rangle = I_4 - I_3 a - I_2 b - I_1 c = 24-6a-2b-c$
$0 = \langle x^2, x^3-ax^2-bx-c\rangle = I_5 - I_4 a - I_3 b - I_2 c = 120-24a-6b-2c$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b+c = 6 \\ 6a+2b+c = 24 \\ 24a+6b+2c = 120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 9 \\ b = -18 \\ c = 6 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\phi_3(x) = x^3-9x^2+18x-6}$

També es podia fer usant la fórmula de la recurrència dels pol. ortog. mònics
També es podia fer imposant ortogonalitat de cada ϕ_i amb els ϕ_j $j<i$. } Però crec que els càlculs serien més llargs

(c) ¿ millor aproximació de $f(x) = x^3$ dins de $P_2[x]$?

Busquem $a,b,c \in \mathbb{R}$ tals que $\|x^3 - (ax^2+bx+c)\|$ sigui mínima

Per la propietat minimal dels polinomis ortogonals, ha de ser $x^3 - (ax^2+bx+c) =$

$=$ el polinomi ortogonal mònic de grau 3, o sigui $\phi_3(x)$.

Per tant, usant (b) la millor aprox. és $\boxed{p_2^*(x) = 9x^2-18x+6}$

Nota. Evidentment es pot fer calculant-lo resolent les eq. normals associades al sistema de funcions bàsiques que es trii: $\begin{cases} \{1,x,x^2\} \Rightarrow \text{Sistema ple} \\ \{\phi_0,\phi_1,\phi_2\} \Rightarrow \text{Sistema diagonal} \end{cases}$