Grau de Matemàtiques. Curs 2020-2021. Semestre de primavera

MÈTODES NUMÈRICS II

EXAMEN FINAL. 16 de juny de 2021 (8h-11h)

RECOMANACIÓ. Tots els exercicis tenen algun apartat senzill. És millor entregar tots els exercicis, encara que alguns estiguin fets només parcialment, que no pas fer-ne alguns completament i no fer res d'uns altres.

Exercici 1, sobre la pràctica 2 (2 punts)

Nota. En aquest exercici s'usa la mateixa notació que a l'enunciat de la pràctica 2.

Es vol integrar l'equació diferencial $y' = \frac{y}{2\ln(y)}$ des de $x = a = 1$ fins a $x = b = 4$. La condició inicial és $y(a) = e$.

(a) Utilitza el mètode d'Euler amb $n = 4$ per a obtenir aproximacions equidistants fins a $x = b$.

(b) Defineix l'algorisme de Richardson. Aplica'l amb $m = 1$ per al mètode d'Euler, de nou amb $n = 4$.

(c) Utilitza el mètode de dos passos d'Adams-Bashfort amb $n = 4$ per a aproximar la solució del problema de valors inicials donat, en punts equidistants fins a $x = b$.

Exercici 2 (2 punts)

Sigui $A\,x = b$ un sistema lineal real $n \times n$, amb $A = (a_{ij})$ no singular i tal que $a_{ii} \neq 0 \;\; \forall i$, de manera que la matriu $D = diag(A)$ també és no singular.

Per a resoldre'l, es considera la família de mètodes iteratius dependent d'un paràmetre $\omega > 0$:

$$x^{(k+1)} = (I - \omega D^{-1} A) x^{(k)} + c \; , \; \forall k \geq 0 \; . \qquad (1)$$

(a) Trobeu quin ha de ser el vector c, en funció de ω, D i b, per tal que el mètode anterior, quan convergeixi, ho faci a la solució del sistema $Ax = b$.

(b) Hi ha algun valor de $\omega > 0$ per al qual les fórmules (1) són precisament les del mètode iteratiu de Jacobi?

(c) Suposem que A és simètrica, que $D = d\,I$ (múltiple de la matriu identitat) amb $d > 0$, i que el mètode de Jacobi aplicat a $Ax = b$ és convergent. Demostreu que A és definida positiva.

Indicació. Relacioneu l'espectre de A amb el de la matriu d'iteració del mètode de Jacobi.

(d) Continuant de l'apartat anterior, demostreu que existeix un interval de valors de ω de la forma $(0, a)$, amb $a > 1$, tal que, per a qualsevol ω en aquest interval, el mètode (1) és convergent. Trobeu el valor òptim de ω, en funció del valors propis de A i del valor d, així com el radi espectral de la matriu d'iteració corresponent.

Exercici 3 (2 punts)

(a) Enunicieu i demostreu els teoremes de Gerschgorin per a localitzar valors propis.

(b) Expliqueu el mètode de Jacobi per a trobar valors propis de matrius reals simètriques. No cal fer demostracions.

Exercici 4 (2 punts)

Sigui $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mitjançant $H(x,t) = 2x^3 + 4\,t\,x + t^3 - 1$. Es considera l'equació $H(x,t) = 0$ i es busquen les seves solucions x en funció del paràmetre t.

(a) Calculeu tots els punts de bifurcació i tots els punts de retorn de les corbes solució.

(b) Quan $t = 1$, una solució és $x = 0$. Demostreu que, en un entorn d'aquest punt, l'equació $H(x,t) = 0$ defineix implícitament una corba solució de la forma $x = x(t)$. Calculeu $x'(1)$ i $x''(1)$.

(c) Es vol fer continuació de la corba solució anterior, des del punt $(x_0, t_0) = (0, 1)$, cap a la zona $x < 0$. Calculeu un punt de *predicció*, $(\tilde{x}_1, \tilde{t}_1)$, a distància $h = 0.1$ de (x_0, t_0), en la direcció de la recta tangent a la corba.

(d) Es vol fer la *correcció* del punt de predicció trobat a (c) per a obtenir un nou punt (x_1, t_1) sobre la corba solució. Es decideix fer-ho aplicant el mètode de Newton al sistema que s'obté quan, a l'equació que es vol resoldre, s'afegeix la condició que el punt corregit estigui a distància $h = 0.1$ del punt conegut (x_0, t_0). Escriviu explícitament les fórmules de la iteració que cal fer.

Exercici 5 (2 punts)

Es vol fer aproximació mínim-quadràtica polinomial contínua a l'interval $[0, +\infty)$ amb funció pes $w(x) = e^{-x}$. Per tant, es defineix el producte escalar

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{+\infty} e^{-x} f(x) g(x) dx \,. \qquad (2)$$

Nota: L'espai vectorial on es treballa ha de ser un espai de funcions adequat (cal que totes les integrals que surtin existeixin i siguin finites), però no ens en preocupem.

(a) Per a cada $k \geq 0$, sigui $I_k \equiv \int_0^{+\infty} e^{-x} x^k dx$. Demostreu que es verifica $I_k = k I_{k-1}$, $\forall k \geq 1$. Deduïu una fórmula aritmètica explícita senzilla de I_k en funció de k.

(b) Calculeu els polinomis ortogonals mònics de graus 0, 1, 2 i 3, respecte al producte escalar definit per (2).

(c) Calculeu la millor aproximació de la funció $f(x) = x^3$ dins de l'espai vectorial $P_2[x]$ (polinomis de grau menor o igual que 2), segons la norma associada al producte escalar (2).