MÈTODES NUMÈRICS II. Curs 2022/23. Semestre de primavera

EXERCICI PRÀCTIC 2

Objectiu

Generar punts d'una corba de $\mathbb{R}^3$, la qual està definida implícitament com la intersecció de dues superfícies. Cal usar el mètode de continuació de solucions explicat als apunts.

Preliminars matemàtics

Es considera un sistema real de 2 equacions amb 3 incògnites:

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0(x_0, x_1, x_2) = 0 \\ H_1(x_0, x_1, x_2) = 0 \ , \end{array} \right. \tag{1}$$

on $H \equiv (H_0, H_1) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ és de classe C^1. Donat $X \in \mathbb{R}^3$, escriurem

$$DH(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial H_0}{\partial x_0}(X) & \frac{\partial H_0}{\partial x_1}(X) & \frac{\partial H_0}{\partial x_2}(X) \\ \frac{\partial H_1}{\partial x_0}(X) & \frac{\partial H_1}{\partial x_1}(X) & \frac{\partial H_1}{\partial x_2}(X) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \nabla H_0(X) \\ \nabla H_1(X) \end{pmatrix} .$$

Sigui $P \in \mathbb{R}^3$ un punt solució *regular* de (1); o sigui, $H(P) = 0 \in \mathbb{R}^2$, i $DH(P) \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ té rang 2. Pel Teorema de la Funció Implícita, el sistema (1) defineix una única corba regular Γ de punts solució en un entorn del punt P.

Es volen anar trobant altres punts d'aquesta corba Γ, de manera que la distància (lineal) entre cada dos punts consecutius sigui un valor constant $h > 0$ (petit). Això es farà aplicant l'*algorisme predictor-corrector* que s'explica seguidament (adaptat dels apunts).

A part del punts inicial sobre la corba i de la distància h, cal saber també el nombre de punts (N) que es volen calcular i el sentit de la continuació.

Naturalment, caldrà aturar el mètode de continuació sense haver obtingut tots els N punts si, en algun moment, falla la predicció o falla la correcció.

Predicció. Es fa en la direcció tangent a la corba Γ en el punt P.

Si $DH(P)$ té rang menor que 2 (o sigui, si $\nabla H_0(P)$ i $\nabla H_1(P)$ són linealment dependents) llavors no està ben definida la direcció tangent i no es pot fer la predicció. A la pràctica, aquesta condició cal comprovar-la amb una determinada tolerància.

Si $DH(P)$ té rang 2, llavors la direcció tangent a la corba Γ en el punt P ve donada pel producte vectorial $V = \nabla H_0(P) \times \nabla H_1(P)$. Aleshores, la predicció d'un nou punt Q a distància h de P és

$$Q = P + sig \cdot h \cdot \frac{V}{\|V\|_2} \ ,$$

on $sig \in \{-1, +1\}$ serveix per a fixar un dels dos sentits de la direcció tangent.

Correcció. Es troba un nou punt $X = (x_0, x_1, x_2) \in \Gamma$, a distància h de P, resolent el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} H_0(x_0, x_1, x_2) = 0 \\ H_1(x_0, x_1, x_2) = 0 \\ \|X - P\|_2^2 = h^2 \ . \end{array} \right. \tag{2}$$

Això es fa usant el mètode iteratiu de Newton en dimensió 3, prenent el punt predit Q com a aproximació inicial de X.

Cal haver fixat d'entrada uns paràmetres de convergència del mètode de Newton: la precisió desitjada entre dues aproximacions successives i el nombre màxim d'iteracions permeses. Si no hi ha convergència del mètode de Newton segons aquests paràmetres, cal aturar la continuació.

Enunciat

Feu un programa en C que implementi el mètode de continuació exposat. Cal que el programa compleixi les indicacions següents.

- Definiu una funció `void H(double x[3], double Hx[2])` per a avaluar la funció H en el punt x.

- Definiu una funció `void DH(double x[3], double DHx[2][3])` per a avaluar la matriu DH en el punt x.

- Fixeu (o llegiu) els valors:

  `h`: distància que es vol que hi hagi entre punts consecutius de la corba,

  `N`: quantitat de punts de la corba que es volen calcular,

  `prec`: precisió que es demana al mètode de Newton entre iterats consecutius,

  `kmax`: nombre màxim d'iteracions permeses al mètode de Newton,

- Llegiu un punt inicial $x \in \mathbb{R}^3$ que sigui de la corba i un valor $sig \in \{+1, -1\}$. Comproveu que siguin correctes i aneu calculant nous punts de la corba pel mètode predictor-corrector explicat fins que, o bé s'han obtingut N punts nous, o bé ha fallat la predicció o la correcció d'un nou punt.

- Feu una funció `int prediccio(int sig, double h, double x[3])` on s'implementi la predicció. Quan s'invoca, `x[]` conté un punt conegut de la corba. Si es pot fer correctament la predicció, aquesta es posa a `x[]` i es retorna el valor 0; si no es pot fer, es retorna el valor 1.

- Feu una funció

```
int correccio(double h, double x0[3], double x[3], int kmax, double prec)
```

on s'implementi la correcció. Quan s'invoca, `x0[]` conté l'últim punt conegut sobre la corba i `x[]` conté la predicció del nou punt. Si la correcció funciona bé, el nou punt de la corba es posa a `x[]` i es retorna el valor 0. Si Newton no convergeix, es retorna el valor 1.

- Feu una funció `int resoldre(double A[3][3], double b[3], double x[3])` per a resoldre sistemes lineals $Ax = b$ de 3 equacions i incògnites. Aquesta funció s'invocarà des de la funció de correcció. Si el determinant de la matriu és no nul (amb una certa tolerància), la solució ha de ser a `x[]` i cal retornar el valor 0; en cas contrari es retorna el valor 1.

- Heu d'escriure en un fitxer els punts de la corba que aneu trobant.

Entrega i avaluació

Heu d'entregar el vostre programa a la tasca del Campus Virtual abans de les 24h del dia 26 de maig. Per a assegurar-vos que està bé, intenteu reproduir els resultats d'algun exemple del qual conegueu la solució.

Recordeu que l'examen final contindrà una pregunta sobre les dues pràctiques fetes, amb un valor de 1,5 punts.

Exemple

Per a les equacions:

$$x_0^2 + 1.1x_1^2 + 0.9x_2^2 - 0.9 = 0 \ , \quad x_0^2 - 1.2x_1^2 - (x_0 - 1) - x_2 = 0 \ ,$$

(un el·lipsoide i un paraboloide hiperbòlic) i les dades

$$\text{punt inicial } P = (0,0,1) \ , \quad sig = +1 \ , \quad h = 0.01 \ , \quad N = 650 \ , \quad prec = 10^{-8} \ , \quad kmax = 8 \ ,$$

no fallen mai ni la predicció ni la correcció. Els punts que s'obtenen són:

```
  0 +0.000000e+00 +0.000000e+00 +1.000000e+00
  1 -5.887739e-05 -9.999640e-03 +9.999389e-01
  2 -2.353548e-04 -1.999640e-02 +9.997556e-01
  3 -5.289693e-04 -2.998742e-02 +9.994502e-01
  4 -9.389543e-04 -3.996987e-02 +9.990227e-01
  5 -1.464246e-03 -4.994095e-02 +9.984735e-01
  6 -2.103495e-03 -5.989792e-02 +9.978026e-01
  7 -2.855076e-03 -6.983812e-02 +9.970104e-01
  8 -3.717101e-03 -7.975895e-02 +9.960971e-01
  9 -4.687442e-03 -8.965790e-02 +9.950632e-01
 10 -5.763738e-03 -9.953258e-02 +9.939089e-01
 11 -6.943424e-03 -1.093807e-01 +9.926347e-01
 12 -8.223742e-03 -1.192000e-01 +9.912410e-01
 13 -9.601766e-03 -1.289884e-01 +9.897284e-01
 14 -1.107442e-02 -1.387439e-01 +9.880972e-01
 15 -1.263850e-02 -1.484647e-01 +9.863481e-01
 16 -1.429068e-02 -1.581491e-01 +9.844816e-01
 17 -1.602756e-02 -1.677953e-01 +9.824981e-01
 18 -1.784565e-02 -1.774018e-01 +9.803984e-01
 19 -1.974142e-02 -1.869673e-01 +9.781830e-01
 20 -2.171128e-02 -1.964903e-01 +9.758525e-01
...
631 -2.376321e-02 +2.060226e-01 +9.733935e-01
632 -2.172249e-02 +1.965434e-01 +9.758392e-01
633 -1.975223e-02 +1.870206e-01 +9.781703e-01
634 -1.785604e-02 +1.774554e-01 +9.803864e-01
635 -1.603750e-02 +1.678491e-01 +9.824867e-01
636 -1.430016e-02 +1.582031e-01 +9.844708e-01
637 -1.264749e-02 +1.485189e-01 +9.863380e-01
638 -1.108291e-02 +1.387983e-01 +9.880878e-01
639 -9.609736e-03 +1.290430e-01 +9.897196e-01
640 -8.231174e-03 +1.192547e-01 +9.912329e-01
641 -6.950302e-03 +1.094356e-01 +9.926272e-01
642 -5.770046e-03 +9.958769e-02 +9.939021e-01
643 -4.693164e-03 +8.971316e-02 +9.950570e-01
644 -3.722225e-03 +7.981433e-02 +9.960917e-01
645 -2.859588e-03 +6.989361e-02 +9.970056e-01
646 -2.107385e-03 +5.995352e-02 +9.977985e-01
647 -1.467504e-03 +4.999663e-02 +9.984701e-01
648 -9.415706e-04 +4.002563e-02 +9.990200e-01
649 -5.309380e-04 +3.004324e-02 +9.994481e-01
650 -2.366707e-04 +2.005226e-02 +9.997542e-01
```

La primera columna indica la numeració dels punts. Les altres tres són les components x_0, x_1 i x_2 dels punts que es van trobant.