**Pregunta 1 (1.5 punt)**
El mètode de Jacobi (usant rotacions de Givens) per a trobar valors propis de matrius reals simètriques. Apliqueu-lo (cal fer una única similaritat) a la matriu $A = \begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$. 0.75

**Pregunta 2 (1 punt)**
Convergència dels mètodes d'iteració simple per a resoldre sistemes d'equacions no lineals.

**Pregunta 1:** Métodes de minimització: teoria general i descripció d'un mètode concret.

**Pregunta 2:** Resolució del problema de mínims quadrats via factorització QR.

**Pregunta 3:** Equacions normals.

**Pregunta 1 (2.5 punts):** a) Sigui $Q$ una matriu ortogonal $n \times n$ i $A$ una matriu $n \times n$. Demostreu que $\|QA\|_F = \|AQ\|_F = \|A\|_F$.

b) Sigui $B = J^T AJ$, on $J$ és la rotació de Jacobi que anula l'element $(p, q)$ de la matriu $A$. Si $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$, $N(A)^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij}^2$, demostreu que $N(B)^2 = N(A)^2 - 2a_{pq}^2$.

c) Deduïu de b) que si $(A^{(k)})_{k \ge 0})$ és la successió d'iterats del mètode clàssic de les rotacions de Jacobi, aleshores $N(A^{(k)}) \to 0$ quan $k \to \infty$.

Teoria

**Pregunta 1:** Sigui $\mathcal{M}_{n\times n}$ l'espai vectorial de les matrius reals $n \times n$.

a) Sigui $\|.\|$ una norma sobre $\mathbb{R}^n$. Si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ demostra que $\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ és una norma sobre $\mathcal{M}_{n\times n}$.

b) Demostra que $\|A\|_2 = (\rho(A^T A))^{\frac{1}{2}}$.

**Pregunta 2:** Sigui $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Demostra que existeix una matriu de Householder $P$ tal que $Px \in \langle e_1 \rangle$. És única aquesta matriu $P$?

**Pregunta 1 (2.5 punts)**
El mètode de Newton per a resoldre sistemes d'equacions: propietats, avantatges i inconvenients, variants.

**Pregunta 1:** (2 punts) El mètode de la potència.

**Pregunta 2:** (1 punt) Sigui $f : B(x_0, r) \to \mathbb{R}^n$. Demostreu que si existeix $K < 1$ tal que $\|f(x) - f(y)\| \le K\|x - y\|$, per a tot $x, y \in B(x_0, r)$ llavors $f$ té com a màxim un punt fix. Aquí $B(x_0, r)$ és una bola oberta de centre $x_0 \in \mathbb{R}^n$ i radi $r > 0$ respecte de la norma $\|\cdot\|$.

**Pregunta 1 (2.5 punts)**
Factorització QR: Definició, algorisme de Gram-Schmidt, existència i unicitat, matrius de Householder, algorisme de Householder, aplicacions de la factorització QR. No cal fer demostracions.

**Pregunta 1:** Demostra que $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$.

**Pregunta 2:** Enuncia i demostra el Teorema de Gerschgorin.

**Pregunta 3:** Considerem l'espai de funcions reals i contínues sobre l'interval $[a, b]$, i el producte escalar $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$. Sigui $\{\varphi_n\}_{n\ge 0}$ una família de polinomis ortogonals, mònics i tals que el grau de $\varphi_n$ és $n$, per a tot $n$. Demostra que $\varphi_n$ té $n$ zeros reals i simples a $]a, b[$.

**Pregunta 1:** Mètodes de minimització per a resoldre sistemes lineals.

**Pregunta 2:** Convergència del mètode de la potència. Quocient de Rayleigh. Si la matriu és simètrica, la convergència del quocient de Rayleigh és més ràpida?

**Pregunta 3:** Explica el concepte d'estabilitat d'un mètode numèric per EDO. Aplica-ho al Mètode d'Euler i al Mètode d'Euler Implícit.

**Exercici 3 (2 punts)**

(a) Enunciေu i demostreu els teoremes de Gerschgorin per a localitzar valors propis.

(b) Expliqueu el mètode de Jacobi per a trobar valors propis de matrius reals simètriques. No cal fer demostracions.

**Pregunta 1 (2.5 punts)** Definiu matriu de Householder i enunciеu i demostreu les seves propietats.