**Grau de Matemàtiques. Curs 2021-2022. Semestre de primavera**

**MÈTODES NUMÈRICS II**

**EXAMEN PARCIAL. 5 d'abril de 2022**

**Entregueu exercicis diferents en fulls diferents**

**Poseu el nom complet a la part de dalt de cada full**

**Exercici 1** (1 **punt)**

Heu de fer la primera iteració d'un programa similar al que heu fet a la pràctica 1, però en un cas més senzill: només cal ajustar 3 dades, i la funció d'ajust depèn només de 2 paràmetres.

Es considera la taula

| $x_k$ | -1.0 | 0.0 | +1.0 |
|---|---|---|---|
| $y_k$ | 0.3 | 0.6 | 0.8 |

Es volen ajustar aquestes dades per una funció sigmoide de la família

$$f_{a,b}(x) = \frac{1}{1 + a\ \exp(-bx)} \qquad (a, b \in \mathbb{R}) ,$$

de la millor manera possible, usant el mateix criteri i el mateix mètode que a la pràctica 1.

(a) Si els paràmetres inicials són $a_0 = 1$ i $b_0 = 1$, quant val l'error inicial?

(b) Feu una iteració d'actualització dels paràmetres $a_0$ i $b_0$ usant pas $h = 0.1$. Com que hi ha 2 paràmetres (i no 3), heu de considerar només 4 possibilitats (i no 6).

**Exercici 2** (3 **punts)**

Es considera un sistema lineal real $4 \times 4$, $A\,x = y$, amb

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ b & 0 & 1 & a \\ 0 & b & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

on $a, b \in \mathbb{R}$ són paràmetres.

(a) Escriviu la matriu d'iteració del mètode de Jacobi, $B_J = B_J(a, b)$, i calculeu $Spec(B_J)$ i $\rho(B_J)$ (radi espectral), en funció de $a$ i $b$.

(b) Escriviu la matriu d'iteració del mètode de Gauss-Seidel, $B_G = B_G(a, b)$, i calculeu $Spec(B_G)$ i $\rho(B_G)$ (radi espectral), en funció de $a$ i $b$.

(c) Es fixen els paràmetres als valors $a = 1/2$ i $b = 3/4$. Comproveu que tant Jacobi com Gauss-Seidel són convergents (doneu els radis espectrals respectius amb 6 decimals). Trobeu valors $p, q \in \mathbb{N}$ per als quals es pugui fer la següent afirmació respecte a la convergència dels dos mètodes: *p iterats de Jacobi equivalen a q iterats de Gauss-Seidel.*

**Exercici 3** (3 **punts**)

Es vol obtenir informació sobre els valors propis d'una matriu real quadrada $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n}$, els elements de la qual verifiquen: $a_{i,i} = i \;\; (\forall i)$, $a_{i,j} \in \{-0.2, +0.2\} \;\; (\forall i \neq j)$.

(a) En el cas $n = 2$ i en el cas $n = 3$, useu els discs de Gerschgorin per a deduir que $A$ té $n$ valors propis diferents, reals i positius. Per a cadascun dels 2 casos, heu de donar intervals reals que continguin exactament un valor propi.

A partir d'ara es considera el cas $n = 4$, en el qual no es pot fer un raonament com a l'apartat anterior. Es decideix fer una similaritat de la forma $B_c = S_c\, A\, S_c^{-1}$ amb $S_c = diag(c, c, 1, 1)$ i $c > 0$ adequat.

(b) Trobeu quins són els valors del paràmetre $c$ per als quals la matriu $B_c$ té el disc de Gerschgorin $D_1$ (per files) disjunt de la resta de discs.

(c) Es fa la similaritat anterior amb $c = 0.4$. S'aplica el mètode de la potència inversa (sense desplaçament) a la matriu $B_c$, per tal de trobar el valor propi dominant de $B_c^{-1}$ (demostreu que això es pot fer, o sigui, que $B_c$ és invertible). Usant només la informació que donen els discs de Gerschgorin de $B_c$, trobeu fites inferior i superior de la raó asimptòtica de convergència.

**Exercici 4** (3 **punts**)

Expliqueu el mètode LR per a calcular els valors propis d'una matriu real quadrada, tal com està exposat als apunts del campus virtual.

**Entregueu exercicis diferents en fulls diferents**

**Poseu el nom complet a la part de dalt de cada full**