Guillem Sánchez Gascón (No sé si estan bé)

**Grau de Matemàtiques. Curs 2018-2019. Semestre de primavera**

## MÈTODES NUMÈRICS II

## EXAMEN DE REAVALUACIÓ – 5 DE JULIOL DE 2019

### Teoria

**Pregunta 1 (1.5 punt)**
El mètode de Jacobi (usant rotacions de Givens) per a trobar valors propis de matrius reals simètriques. Apliqueu-lo (cal fer una única similaritat) a la matriu $A = \begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$. 0.75

**Pregunta 2 (1 punt)**
Convergència dels mètodes d'iteració simple per a resoldre sistemes d'equacions no lineals.

**Pregunta sobre les pràctiques (1.5 punts)**
Es considera el PVF no lineal

$$y'' = 8x - 2yy' \,, \quad 1 \le x \le 2 \,, \quad y(1) = 3 \,, \quad y(2) = 4.5 \,.$$ 1.5

Discretitzeu-lo en punts $x_i$ equiespaïats a distància $h = 0.25$, i aproximeu les derivades primeres i segones per diferències finites centrades de segon ordre, per tal d'obtenir un sistema d'equacions.

Feu una iteració del mètode de Picard per a resoldre'l. Comenceu en l'aproximació inicial que s'obté si se suposa que la solució $\underline{y(x)}$ és un polinomi de grau 1.

Expliqueu els passos que aneu fent.

$y_3 = 3.6641$ $\quad$ ~~$y_3$~~ $= 4.390625$

$y_2 = 3,1875$ $\quad$ $y_2 =$

$y_1 = 2.9921$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}_{1,2}$

**Grau de Matemàtiques. Curs 2018-2019. Semestre de primavera**

**MÈTODES NUMÈRICS II**

**EXAMEN DE REAVALUACIÓ – 5 DE JULIOL DE 2019**

**Problemes**

**Exercici 1 (1 punt)**
Es vol resoldre un sistema lineal $Ax = b$, de 2 equacions i 2 incògnites, amb matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Discutiu la convergència, o no, dels mètodes de Jacobi, de Gauss-Seidel, de SOR amb paràmetre $\omega = 1/2$, i de SOR amb paràmetre $\omega = 2/3$.

**Exercici 2 (1 punt)**

Es considera la matriu $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Feu una iteració del mètode $QR$ per a calcular els seus valors propis. Comproveu si la matriu inicial i la matriu transformada tenen, o no, el mateix polinomi característic. $\lambda=1$ $\lambda=5$

**Exercici 3 (1 punt)**
S'aplica el mètode de la potència a una matriu $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le 10}$ amb elements

$$\left| \frac{2^9+9}{2^{10}-9} \right|$$

$$a_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad i < j \\ +1 & \text{si} \quad i > j \\ 2^i & \text{si} \quad i = j \end{cases} .$$

Fiteu, inferiorment i superiorment, la raó de convergència del mètode, usant només la informació que es pot obtenir dels discs de Gerschgorin.

**Exercici 4 (1.5 punts)**
Es considera el sistema d'equacions no lineals

$$\begin{cases} 2x + yz &= 1 \\ 3y + xz &= 1 \\ 4z + xy &= 1 \end{cases} .$$

(a) Feu dues iteracions del mètode de Jacobi no lineal, començant en l'aproximació $(0, 0, 0)$. Apliqueu després el mètode d'acceleració d'Aitken a cadascuna de les components de les tres aproximacions anteriors.

Es considera ara la família de sistemes que resulta de multiplicar, en cada equació del sistema original, el terme quadràtic per un mateix paràmetre $\lambda$. El sistema original correspon al valor $\lambda = 1$.

$x' = y' = z' = -1/24$ $z'' = 5/288$ $x(1) = 271/576$

$x'' = 7/288$ $y(1) = 29/96$

$y'' = 1/48$ $\cancel{z(1) = 95/432}$ $z(1) = \frac{125}{576}$

(b) Comproveu que, quan $\lambda = 0$, el sistema té una única solució i calculeu-la; sigui $(x_0, y_0, z_0)$. Demostreu que, en un entorn de $\lambda = 0$, existeixen funcions $x(\lambda)$, $y(\lambda)$ i $z(\lambda)$, infinitament derivables, tals que $(x(0), y(0), z(0)) = (x_0, y_0, z_0)$ i $(x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda))$ és solució per a cada $\lambda$ de l'interval. Calculeu $x'(0)$, $y'(0)$, $z'(0)$, $x''(0)$, $y''(0)$ i $z''(0)$. Avalueu finalment els desenvolupaments de Taylor de grau 2 d'aquestes tres funcions en $\lambda = 1$.

Avaluar quan $\lambda = 1$ quan val $x(\lambda)$ i $y(\lambda)$

**Exercici 5 (1.5 punts)**

Sigui $f(x) = x^3$ , $\forall x \in [0, 1]$. Es busca la millor aproximació de $f(x)$, a l'interval indicat, per un polinomi de grau 1.

(a) Quin és aquest polinomi, si s'usa la norma 2 contínua per a mesurar l'error (si no se'n parla, se suposa que la funció pes és $\omega(x) \equiv 1$)? $-1/5 + 9/10\, x$

(b) Quin és aquest polinomi, si s'usa la norma 2 discreta en les 5 abscisses $\{0, 1/4, 1/2, 3/4, 1\}$ per a mesurar l'error (ídem pesos $\omega_i = 1\ \forall i$)? $\frac{77}{80}x - 23/64$

(c) Quin és aquest polinomi, si s'usa la norma infinit contínua per a mesurar l'error?

$x - \frac{\sqrt{3}}{9}$

$\langle f, g \rangle = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, g(x_i)$