Grau de Matemàtiques. Curs 2018-2019. Semestre de primavera

MÈTODES NUMÈRICS II

EXAMEN FINAL – 21 DE JUNY DE 2019

Problemes

Exercici 1 (1.5 punts)
Es vol resoldre un sistema lineal $Ax = b$, de 3 equacions i 3 incògnites, amb matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}, \quad -1<a<1$$

on a és un paràmetre real.

(a) Per quins valors de a és A definida positiva? $-\frac{1}{2}<a<1$

(b) Per quins valors de a és convergent el mètode de Jacobi aplicat al sistema? $-\frac{1}{2}<a<\frac{1}{2}$

(c) Demostreu que, si $|a| \geq 1$, llavors el mètode de Gauss-Seidel és divergent.

Contrarecíproc B_{GS} $\det(B)=a^3$ $a^3=\lambda_2\cdot\lambda_3$ $a^3\geq 1 \Rightarrow$ λ_2 ó $\lambda_3 \geq 1$

Exercici 2 (1.5 punts)

(a) Sigui A una matriu $n \times n$ tridiagonal. Se suposa que A admet factorització LU, de manera que es pot fer (almenys) un pas del mètode LR per a buscar els valors propis de A. Es considera la matriu B obtinguda, similar a A. És B també tridiagonal? Alguna de les tres diagonals no idènticament nul·les de A s'ha mantingut idènticament en B?

RU

Es considera ara el cas concret $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

(b) Feu 3 iteracions del mètode LR.

(c) No hi ha cap disc de Gerschgorin (per files) de A que sigui disjunt dels altres dos, però quasi. Es considera una similaritat CAC^{-1}, amb $C = diag(5/4, 1, \delta)$. Trobeu l'interval de valors positius de δ per als quals es verifica que un disc de Gerschgorin és disjunt dels altres dos.

Fer CAC^{-1} Discos $\Longrightarrow$ $\frac{9}{4} < 5-3\delta$

Exercici 3 (1.5 punts)
Es considera el sistema de dues equacions amb dues incògnites

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}y^2 & = & 1 \\ \frac{1}{3}x^2 + y & = & 1 \end{cases}.$$

Se sap que només té dues solucions reals, les quals són pròximes a $(0.6, 0.9)$ i $(-3.5, -3.0)$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2y \\ 2/3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & \\ & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/2 & \\ & 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Escriviu la iteració corresponent al mètode de Jacobi no lineal. Decidiu, sense calcular cap iteració, si, prenent una aproximació inicial molt pròxima a una de les solucions, convergirà a aquesta solució. Feu el mateix per al mètode de Gauss-Seidel no lineal.

Es considera ara la família d'equacions, dependents del paràmetre real λ,

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}y^2 - \lambda &= 0 \\ \frac{1}{3}x^2 + y - \lambda &= 0 \end{cases} .$$

(b) Estudieu si hi pot haver forcacions (això és, solucions (x, y, λ) en les quals la matriu jacobiana té rang menor que 2). $x = 3/2 - 3/2\, y$

(c) Una solució òbvia quan $\lambda = 0$ és $x = y = 0$. Demostreu que existeix un interval I, entorn de $\lambda = 0$, i existeixen dues funcions, $x(\lambda)$ i $y(\lambda)$, definides en I, verificant: són infinitament diferenciables, $x(0) = y(0) = 0$, i, per a cada $\lambda \in I$, $(x(\lambda), y(\lambda))$ és una solució del sistema. Trobeu $x'(0)$, $y'(0)$, $x''(0)$, $y''(0)$, $x'''(0)$ i $y'''(0)$. $x'=1$ $\quad x''=-1$

$y'=1$ $\quad y''=3/3$ Esta malament

Exercici 4 (1.5 punts) $E(x) = \sqrt{x} - ax - b$

Sigui $f(x) = \sqrt{x}$, $\forall x \in [0, 1]$. Es busca la millor aproximació de $f(x)$, a l'interval indicat, per un polinomi de grau 1.

$E(0) = -E(\alpha) = E(1)$, $\alpha = x \in [0,1]$ t.q. $E'(x) = 0 \Rightarrow$ màxim error

Min/max

(a) Quin és aquest polinomi, si s'usa la norma infinit contínua per a mesurar l'error?

(b) Quin és aquest polinomi, si s'usa la norma 2 contínua per a mesurar l'error? $\int_0^1 fg$ $\quad \sqrt{\frac{4}{15}} + \sqrt{\frac{4}{5}}X$

(c) Trobeu els polinomis ortogonals mònics de grau menor o igual que 2, associats al pes $w(x) = 1$, a l'interval $[0, 1]$.

$P_{-1} = 0 \quad P_0 = 1 \quad P_1 = X - 1/2 \quad P_2 = X^2 - X + 1/6$

$\int_0^1 x - 1/2$

$(2x+1)^2$

$2{:}2$

$0{,}47\ldots$

0.2222 $\quad 0{,}4444$

0.707

$\frac{1}{2}(x)^{-1/2} - 1 = 0$

$1 \quad y$

$\frac{2}{3}x \quad 1$

$\frac{1}{2}x^{-1/2} = 2$ $\quad -a^3 + 2a^4 + a^5 + a^4$ $\quad 1 - \frac{2}{3}yx = 0$

$x^{-1/2} = 2$ $\quad 1 = \frac{2}{3}xy$ $\quad 3/2, \lambda$

$x, \frac{3}{2x}, \lambda$

$x^{-1} = 4$ $\quad \lambda_1\lambda_2 = a^3 \quad 1$ $\quad 1 \quad \frac{3}{2}$ $\quad \frac{3}{2x} = y$

$\geq$

$\frac{2}{3} \quad 1$

Grau de Matemàtiques. Curs 2018-2019. Semestre de primavera

MÈTODES NUMÈRICS II

EXAMEN FINAL – 21 DE JUNY DE 2019

Teoria

Pregunta 1 (2.5 punts)

El mètode de Newton per a resoldre sistemes d'equacions: propietats, avantatges i inconvenients, variants.

Pregunta sobre les pràctiques (1.5 punts)

Cal fer una simulació senzilla del mètode del tir, usant Euler i secant, aplicat a un PVF similar al de la pràctica 2.

Es considera el PVF no lineal

$$y'' = 8x - 2yy' \ , \quad 1 \leq x \leq 2 \ , \quad y(1) = 3 \ , \quad y(2) = 4.5 \ .$$

Per a cada condició inicial afegida $y'(1) = t$, s'integra el corresponent PVI fins a $x = 2$, usant el mètode d'Euler amb pas constant $h = 0.25$. Així s'obté un valor aproximat de $y(2)$, el qual anomenem $y(2, t)$, ja que depèn del pendent inicial t considerat.

Per a resoldre (aproximadament) el PVF, cal trobar el valor del paràmetre t tal que

$$g(t) \equiv y(2, t) - 4.5 = 0$$

i això es fa iterativament, usant el mètode de la secant.

(a) Feu els càlculs per a trobar $y(2, 0)$ *(cas* $t = 0$*).* ~~4,44~~ 4,34375

(b) Feu els càlculs per a trobar $y(2, 1)$ *(cas* $t = 1$*).* 4,448

(c) Feu un pas del mètode de la secant aplicat a la funció $g(t)$*, amb* $t_0 = 0$ *i* $t_1 = 1$ *per a trobar una nova aproximació* t_2*.* 1,49880