Grau de Matemàtiques. Curs 2020-2021. Semestre de primavera

MÈTODES NUMÈRICS II

EXAMEN PARCIAL. 9 d'abril de 2021

Exercici 1 (relacionat amb la pràctica 1, 1.5 punts)

Heu d'imitar el que fa el vostre programa en un cas molt senzill.

Es considera el PVF

$$
\begin{aligned}
&y''(x) + 6y'(x) - 50y(x) = 100x \quad \forall x \in [0,1] \ ,\\
&y(0) = 1 \ ,\\
&y(1) = 1 \ .
\end{aligned}
$$

Es discretitza el problema usant diferències centrades de segon ordre per a $y'(x)$ i $y''(x)$, amb pas de discretització $h = 0.2$.

(a) Escriviu explícitament el sistema lineal que cal resoldre.

(b) Prenent com a aproximació inicial el vector amb totes les components nul·les, feu tres iterats del mètode de Jacobi. Calculeu la $\| \ \|_\infty$ de la matriu d'iteració de Jacobi.

(c) Prenent com a aproximació inicial el vector amb totes les components nul·les, feu dos iterats del mètode de Gauss-Seidel.

Exercici 2 (tema 1, 4 punts)

Es considera el sistema lineal real 3×3, $A\,x = b$, amb $b = (1,2,3)^T$ i

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & c & 0 \\ 0 & 1 & c \\ c & 0 & 1 \end{pmatrix} \ ,
$$

on $c \in \mathbb{R}$, $c \neq -1$, és un paràmetre. Es vol estudiar l'ús dels mètodes iteratius habituals (Jacobi, Gauss-Seidel i SOR) en aquest cas.

(a) Sigui B_J la matriu d'iteració del mètode de Jacobi. Calculeu, en funció de c, els seus valors propis ($Spec(B_J)$) i el seu radi espectral ($\rho(B_J)$). Per quins valors de c és convergent el mètode de Jacobi?

(b) En el cas concret $c = -0.5$, si es comença amb l'aproximació inicial $x^{(0)} = (0,0,0)^T$, feu una previsió de les iteracions k que caldria fer del mètode de Jacobi per tal que s'obtingui $\|x^{(k)} - x\|_\infty < 10^{-9}$, on x és la solució del sistema.

(c) Sigui B_1 la matriu d'iteració del mètode de Gauss-Seidel. Calculeu $Spec(B_1)$ i $\rho(B_1)$, en funció de c. Per quins valors de c és convergent el mètode de Gauss-Seidel? Per als valors de c tals que tant Jacobi com Gauss-Seidel són convergents, quin ho farà més ràpidament?

(d) Es considera finalment el mètode SOR. Trobeu la matriu d'iteració B_ω, així com el seu polinomi característic (els dos depenen de ω i de c). Seguidament, es considera el cas concret $c = -0.5$ i es vol estudiar la convergència quan $\omega \approx 1$. Vegeu que, tant si ω és lleugerament inferior a 1 com si ω és lleugerament superior a 1, es verifica $\rho(B_\omega) > \rho(B_1)$ (per tant, SOR no millora la convergència de Gauss-Seidel, almenys a prop de $\omega = 1$).

Indicació. Per a l'última part, deduïu que, en un entorn de $\omega = 1$, els tres valors propis de B_ω són simples: $\lambda_i = \lambda_i(\omega)$; després, calculeu $\lambda_i'(1)$, per tal conèixer el comportament de les gràfiques de $\lambda_i(\omega)$ quan $\omega \approx 1$.

Exercici 3 (tema 2, 4.5 punts)

Sigui $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le 10}$, real, simètrica i verificant

$$a_{ii} = 1 + 2i\ , \quad |a_{ij}| \le 1/8\ , \quad \forall i\ , \quad \forall j \ne i\ .$$

Per a cada $i \in \{1, 2, \ldots, 10\}$, sigui $D_i(A)$ el disc de Gerschgorin associat a la fila i de la matriu A. Observeu que no es pot assegurar que siguin disjunts. També, per a cada $i \in \{1, 2, \ldots, 10\}$ i cada $\alpha > 0$, sigui $S_{i,\alpha} = (s_{kj})$ la matriu 10×10 que difereix de la identitat només en l'element s_{ii}, el qual val α.

(a) Per a cada i, es fa la similaritat $B = S_{i,\alpha} A S_{i,\alpha}^{-1}$ amb $\alpha = 0.2$. És el disc $D_i(B)$ disjunt de la resta de discs $D_j(B)$?

(b) Useu (a) per a separar els 10 valors propis de A; o sigui, doneu 10 subconjunts del pla complex, tals que cadascun contingui exactament un valor propi de A.

(c) S'aplica el mètode de la potència a la matriu A per a trobar el seu valor propi dominant i un vector propi associat. Fiteu, inferiorment i superiorment, la raó asimptòtica de convergència.

(d) S'aplica el mètode de Jacobi clàssic a la matriu A per a trobar tots els seus valors propis i una base de vectors propis. Trobeu una fita superior del nombre de similaritats que cal fer per tal d'obtenir una matriu tal que la norma 2 del vector format amb tots els elements no diagonals sigui menor que 10^{-6}.

(e) Es repeteix (a) amb $\alpha > 0$ arbitrari. Trobeu l'interval de valors de α per als quals es pot assegurar que el disc $D_i(B)$ és disjunt de la resta de discs $D_j(B)$.

Nota. Aquest interval ha de contenir el valor $\alpha = 0.2$ usat en els dos primers apartats.

Solució Exercici 1: Parcial Mètodes Numèrics II

Rubén Bautista Ballester

Abril 2021

Hem de resoldre el problema de valors a la frontera

$$y''(x) + 6y'(x) - 50y(x) = 100x \quad \forall x \in [0,1], \tag{1}$$

amb condicions $y(0) = 1, y(1) = 1$.

Primer ho posem en la forma donada a l'enunciat de l'exercici, amb el coeficient de $y''(x)$ igual a -1:

$$-y''(x) - 6y'(x) + 50y(x) = -100x \tag{2}$$

d'on s'obté:

$$p(x) = -6, q(x) = 50 > 0, r(x) = -100x \tag{3}$$

Com $a = 0, b = 1$ amb pas $h = 0.2$ llavors $n = 4$ (punts interiors) amb $x_i = i \cdot h$. A més a més, com p i q són constants, deduïm:

$$\begin{aligned} b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 1 + \frac{h^2}{2}q(x_i) = 1 + \frac{0.2^2}{2} \cdot 50 = 2, \\ a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{h}{2}p(x_i)\right) = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{0.2}{2} \cdot (-6)\right) = -0.2, \\ c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{h}{2}p(x_i)\right) = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{0.2}{2} \cdot (-6)\right) = -0.8. \end{aligned} \tag{4}$$

D'altra banda, aplicant les formules obtenim:

$$\begin{aligned} r &= \frac{h^2}{2}\left(r(x_1) - \frac{2a_1\alpha}{h^2}, r(x_2), r(x_3), r(x_4) - \frac{2c_n\beta}{h^2}\right) \\ &= \frac{0.2^2}{2}\left(-100 \cdot 0.2 - \frac{2 \cdot (-0.2)}{0.2^2}, -100 \cdot 0.4, -100 \cdot 0.6, -100 \cdot 0.8 - \frac{2 \cdot (-0.8)}{0.2^2}\right) \\ &= (-0.2, -0.8, -1.2, -0.8) \end{aligned} \tag{5}$$

Per tant, el sistema a resoldre és $Au = r$ on

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -0.8 & 0 & 0 \\ -0.2 & 2 & -0.8 & 0 \\ 0 & -0.2 & 2 & -0.8 \\ 0 & 0 & -0.2 & 2 \end{bmatrix} \tag{6}$$

D'altra banda, volem calcular $\|B_j\|_\infty$. Sabem que

$$\begin{aligned} B_j &= -D^{-1}(L+U)) \\ &= -\frac{1}{2}I(L+U) \\ &= -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -0.8 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0 & -0.8 & 0 \\ 0 & -0.2 & 0 & -0.8 \\ 0 & 0 & -0.2 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{7}$$

i per tant:

$$\|B_j\|_\infty = \frac{1}{2} \cdot max(0.8, 0.2 + 0.8, 0.2) = \frac{1}{2}. \tag{8}$$

Finalment, aplicant les fòrmules de Jacobi i de Gauss Seidel de teoria (o aplicant el exercici del laboratori) obtenim:

- Mètode de Jacobi:
  1. $(-0.1, -0.4, -0.6, -0.4)$,
  2. $(-0.26, -0.65, -0.8, -0.46)$,
  3. $(-0.36, -0.746, -0.849, -0.48)$.
- Mètode de Gauss-Seidel:
  1. $(-0.1, -0.41, -0.641, -0.4641)$,
  2. $(-0.264, -0.6828, -0.85392, -0.485392)$.

② $Ax=b$, 3×3, $A = \begin{pmatrix} 1 & c & 0 \\ 0 & 1 & c \\ c & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{R}$, $c \neq -1$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

ⓐ Jacobi

$A = D+L+U$, $D = I$

$B_J = -D^{-1}(L+U) = -(L+U) = \begin{pmatrix} 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & -c \\ -c & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ pol caracter. $p(\lambda) = (-\lambda)^3 - c^3 = -\lambda^3 - c^3$

Vap's?

$p(\lambda)=0 \Leftrightarrow \lambda^3 + c^3 = 0$. Arrel "a vista": $\lambda = -c$.

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 0 & 0 & c^3 \\ -c & & -c & c^2 & -c^3 \\ \hline & 1 & -c & c^2 & 0 \end{array}$$

$\lambda^2 - c\lambda + c^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{c \pm \sqrt{c^2-4c^2}}{2} = c\,\dfrac{1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$ $\Rightarrow \boxed{\mathrm{Spec}(B_J) = \left\{-c,\ c\,\frac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}\right\}}$

Els 3 vap's tenen mòdul $|c|$ (són les arrels cúbiques de -1, multiplicades per c) $\Rightarrow \boxed{\rho(B_J) = |c|}$

Per tant, Jacobi convergent $\Leftrightarrow |c|<1 \Leftrightarrow \boxed{c \in (-1,+1)}$

ⓑ $\underline{c=-0.5} \Rightarrow \|B_J\|_\infty = 0.5$

Jacobi és $x^{k+1} = B_J x^k + D^{-1}b$. Usarem $\|x^k - x\|_\infty \leq \dfrac{\beta^k}{1-\beta}\|x^1 - x^0\|_\infty$ on $\beta = \|B_J\|_\infty = 0.5$

$x^0 = 0 \Rightarrow x^1 = D^{-1}b = b \Rightarrow \|x^1 - x^0\|_\infty = \|b\|_\infty = 3$

És suficient imposar $\dfrac{0.5^k}{1-0.5}\cdot 3 < 10^{-9} \Leftrightarrow 0.5^k < \dfrac{0.5}{3}10^{-9} \Leftrightarrow k \geq \dfrac{-9+\log_{10}(0.5)-\log_{10}(3)}{\log_{10}(0.5)} \approx 32.5$

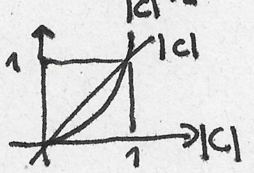
$\Rightarrow \boxed{k=33}$ iteracions seran suficients.

ⓒ Gauss-Seidel : $x^{(k+1)} = -(D+L)^{-1}Ux^{(k)} + (D+L)^{-1}b$

$B_1 = -(D+L)^{-1}U = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}}_{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -c & 0 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & -c \\ 0 & c^2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ pol. caract. $p(\lambda) = (-\lambda)(\lambda^2 + c^3)$

Vap's: $p(\lambda)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda^2 = c^3 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{-c^3}$ (reals, o complexos, depenent de c) $\Rightarrow \boxed{\mathrm{Spec}(B_1) = \{0, \pm\sqrt{-c^3}\}}$

i $\boxed{\rho(B_1) = |c|^{3/2}}$



GS convergent $\Leftrightarrow |c|^{3/2} < 1 \Leftrightarrow \boxed{c \in (-1,+1)}$ (igual que Jacobi)

En el cas que J i GS convergeixen $\Rightarrow |c|<1 \Rightarrow |c|^{3/2} < |c| \Rightarrow \boxed{\text{GS més ràpid que J}}$

(d) SOR : $B_\omega = (I+\omega D^{-1}L)^{-1}\left[(1-\omega)I-\omega D^{-1}U\right] \underset{D=I}{=} (I+\omega L)^{-1}\left[(1-\omega)I-\omega U\right] \Rightarrow$

$$\Rightarrow B_\omega = \underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\c\omega&0&1\end{pmatrix}^{-1}}_{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-c\omega&0&1\end{pmatrix}} \begin{pmatrix}1-\omega&-c\omega&0\\0&1-\omega&-c\omega\\0&0&1-\omega\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}1-\omega&-c\omega&0\\0&1-\omega&-c\omega\\-c\omega(1-\omega)&c^2\omega^2&1-\omega\end{pmatrix} \equiv B_\omega}$$

Pol. caract. $\quad p(\lambda) = (1-\omega-\lambda)^3 - c^3\omega^3(1-\omega) + c^3\omega^3(1-\omega-\lambda) = \boxed{(1-\omega-\lambda)^3 - c^3\omega^3\lambda \equiv p(\lambda)}$

Nota. Es comprova que, quan $\omega=1$, $\begin{cases} B_\omega \text{ és la de GS} \\ p(\lambda) \text{ és el de GS}\end{cases}$

Fem $c=-0.5=-\frac{1}{2} \Rightarrow p(\lambda) = (1-\omega-\lambda)^3 + \frac{1}{8}\omega^3\lambda$

Quan $\omega=1$: $p(\lambda) = -\lambda^3+\frac{1}{8}\lambda \Rightarrow$ Vap's: $\begin{cases}\lambda=0\\ \lambda^2=\frac{1}{8} \Rightarrow \lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{8}}\end{cases}$ (3 vap's reals diferents)

Per continuïtat de les arrels respecte els coeficients,

$\forall\omega$ en un entorn de 1, hi haurà 3 vap's reals diferents $\begin{cases}\lambda_1(\omega) \mid \lambda_1(1)=0\\ \lambda_2(\omega) \mid \lambda_2(1)=\frac{1}{\sqrt{8}}\\ \lambda_3(\omega) \mid \lambda_3(1) = -\frac{1}{\sqrt{8}}\end{cases}$

Per a ω suficientment pròxim a 1, serà $\rho(B_\omega) = \text{màx}\{|\lambda_2(\omega)|, |\lambda_3(\omega)|\}$

Cal veure que aquest valor és $> \rho(B_1) = \frac{1}{\sqrt{8}}$.

Seguim la indicació: calculem $\lambda_i'(1)$.

Se sap $\quad [1-\omega-\lambda(\omega)]^3 + \frac{1}{8}\omega^3\lambda(\omega) = 0 \quad \forall\omega\approx 1$

Derivant respecte ω: $3[1-\omega-\lambda(\omega)]^2[-1-\lambda'(\omega)] + \frac{1}{8}\left[3\omega^2\lambda(\omega)+\omega^3\lambda'(\omega)\right] = 0$

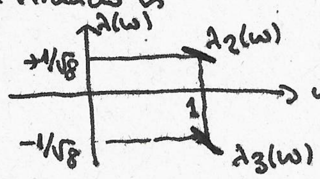
Fent $\omega=1$: $-3\lambda(1)^2[1+\lambda'(1)] + \frac{1}{8}[3\lambda(1)+\lambda'(1)] = 0 \Leftrightarrow -24\lambda(1)^2 - 24\lambda(1)^2\lambda'(1) + 3(1) + \lambda'(1) = 0$

$$\Rightarrow \lambda'(1) = \frac{3\lambda(1)-24\lambda(1)^2}{24\lambda(1)^2-1}$$

Si $\lambda(1) = +\frac{1}{\sqrt{8}}$ llavors $\lambda'(1) = \dfrac{3/\sqrt{8}-3}{3-1} \approx -0.97 < 0$

Si $\lambda(1) = -\frac{1}{\sqrt{8}}$ llavors $\lambda'(1) = \dfrac{-3/\sqrt{8}-3}{3-1} \approx -2.03 < 0$

$\Rightarrow$ La situació és



Per tant,

si $\omega<1$, $\omega\approx 1 \Rightarrow \lambda_2(\omega) > \lambda_2(1) = \frac{1}{\sqrt{8}}$

si $\omega>1$, $\omega\approx 1 \Rightarrow \lambda_3(\omega) < \lambda_3(1) = -\frac{1}{\sqrt{8}}$

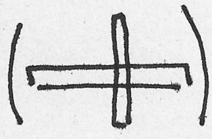
$\Rightarrow \boxed{\forall\omega\approx 1,\ \omega\neq 1 \quad \rho(B_J) > \rho(B_1) = \frac{1}{\sqrt{8}}}$

tal com volíem demostrar

③ $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le 10}$ real, simètrica (⇒ Vap's reals)

$a_{ii}=1+2i$, $|a_{ij}|\le 1/8\ \forall j\ne i$ (⇒ discs de Gerschgorin $\left\{\begin{array}{l}\text{centres a distància}=2\\ \text{radis} \le 9/8\end{array}\right\}$ ⇒ No es pot assegurar disjunció)

$\forall i, \forall \alpha>0 \quad S_{i,\alpha}=\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & \alpha & & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} & \leftarrow i \\ \uparrow & \\ i & \end{array}$

ⓐ $\forall i,\ B=S_{i,\alpha}A\,S_{i,\alpha}^{-1}=$  ← fila i: $*\alpha$ resultat igual que A excepte:

↑ columna i: $*\left(\frac{1}{\alpha}\right)$

$D_{i-1}(B)$ té centre $1+2(i-1)$ i radi $\le 8\cdot\frac{1}{8}+1\cdot\frac{1}{8\alpha}=1+\frac{1}{8\alpha}$

$D_i(B)$ " $1+2i$ " $\le 9\cdot\frac{\alpha}{8}=\frac{9\alpha}{8}$

$D_{i+1}(B)$ " $1+2(i+1)$ " $\le 8\cdot\frac{1}{8}+1\cdot\frac{1}{8\alpha}=1+\frac{1}{8\alpha}$

Volem $D_i\cap D_{i-1}=\emptyset$. És suficient $1+2(i-1)+1+\frac{1}{8\alpha}<1+2i-\frac{9\alpha}{8} \Leftrightarrow \frac{9\alpha}{8}+\frac{1}{8\alpha}<1$ } mateixa condició

Volem $D_i\cap D_{i+1}=\emptyset$. És suficient $1+2i+\frac{9\alpha}{8}<1+2(i+1)-1-\frac{1}{8\alpha} \Leftrightarrow \frac{9\alpha}{8}+\frac{1}{8\alpha}<1$

⇒ És suficient $\boxed{\frac{9\alpha}{8}+\frac{1}{8\alpha}<1}$ (*)

Quan $\boxed{\alpha=0.2=1/5}$ $\Rightarrow \frac{9\alpha}{8}+\frac{1}{8\alpha}=\frac{9}{40}+\frac{5}{8}=\frac{9+25}{40}=\frac{34}{40}<1 \Rightarrow$ $\boxed{\text{Cert}}$

Notes:

1) En els casos $i=1$ o $i=n$ → $\exists!$ disc "veí" del D_i (en lloc de 2)

2) Per a veure que D_i és disjunt dels altres discs, cal mirar-los tots, i no només els "veïns".
Però, si s'imposen les condicions, resulta que surten condicions més laxes

Exemple: D_{i+2} té centre $1+2(i+2)$ i radi $\le 8\cdot\frac{1}{8}+1\cdot\frac{1}{8\alpha}=1+\frac{1}{8\alpha}$

Si volem $D_i\cap D_{i+2}=\emptyset$, és suficient $1+2i+\frac{9\alpha}{8}<1+2(i+2)-1-\frac{1}{8\alpha} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{9\alpha}{8}+\frac{1}{8\alpha}<3$ (cert si (*) és cert)

ⓑ Separació dels valors propis de A usant ⓐ

$\forall i$, fem ⓐ amb $\alpha=0.2$ ⇒ El disc $D_i(B)$ és disjunt de la resta de discs ⇒

⇒ $D_i(B)$ conté un únic vap de B (⇔ vap de A)

A més, com que A és sim. ⇒ vap's reals ⇒ tenim intervals en el lloc de discs.

$D_i(B)$ està contingut en l'interval d'extrems $(1+2i)\mp\frac{9\alpha}{8}\underset{\alpha=0.2}{=}(1+2i)\mp 0.225$

$\Rightarrow \boxed{\exists\lambda_i\in[2i+0.775,\ 2i+1.225] \quad \forall i=1\div 10}$

[$\forall i=1\div 20$: centre $1+2i$; radi $\le 0.225=\frac{9}{40}$; diàmetre $\le\frac{9}{20}$]

ⓒ Potència. La raó asimpt. de converg. és $r = \left| \dfrac{\text{2on vap dominant}}{\text{vap dominant}} \right|^2$ ← ja que A simètrica

Vap dominant: $\lambda_{10} \in [20.775, 21.225]$

2on dominant: $\lambda_9 \in [18.775, 19.225]$

Llavors $r \begin{cases} \geq \left(\dfrac{18.775}{21.225}\right)^2 = \left(\dfrac{751}{849}\right)^2 \approx 0.884572^2 \approx \boxed{0.782464} \\ \leq \left(\dfrac{19.225}{20.775}\right)^2 = \left(\dfrac{769}{831}\right)^2 \approx 0.925391^2 \approx \boxed{0.856349} \end{cases}$

ⓓ Jacobi clàssic: $\begin{cases} A_0 = A \\ \forall k \geq 1 \quad A_k = J_k A_{k-1} J_k^T \end{cases}$, on $J_k \equiv$ rotació que elimina l'element no diagonal de mòdul màxim

Se sap que és convergent i, si $N(A) = \sqrt{\sum_i \sum_{j \neq i} a_{ij}^2}$ (norma-2 dels elem. no diagonals)

llavors $N(A_k)^2 \leq \left(1 - \dfrac{1}{\tilde{N}}\right)^k N(A_0)^2$, on $\tilde{N} = \dfrac{n(n-1)}{2}$

Per tant, $N(A_k) \leq \left(1 - \dfrac{1}{\tilde{N}}\right)^{k/2} \cdot N(A_0)$

En aquest cas: $\left.\begin{cases} \tilde{N} = \dfrac{10 \cdot 9}{2} = 45 \Rightarrow 1 - \dfrac{1}{\tilde{N}} = 1 - \dfrac{1}{45} = \dfrac{44}{45} \\ N(A_0) \leq \sqrt{\dfrac{10 \cdot 9}{8^2}} = \sqrt{\dfrac{90}{64}} = \sqrt{\dfrac{45}{32}} \end{cases}\right\} \Rightarrow N(A_k) \leq \left(\dfrac{44}{45}\right)^{k/2} \sqrt{\dfrac{45}{32}}$

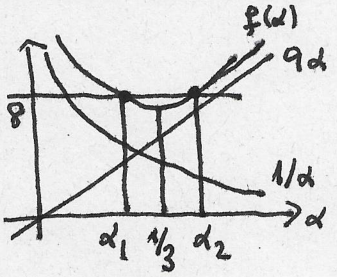
Si es vol $N(A_k) < 10^{-6}$, és suficient imposar $\left(\dfrac{44}{45}\right)^{k/2} \sqrt{\dfrac{45}{32}} < 10^{-6}$

Prenent $\log_{10}$: $\dfrac{k}{2} \underbrace{\log\left(\dfrac{44}{45}\right)}_{<0} + \dfrac{1}{2} \log\left(\dfrac{45}{32}\right) < -6$

Aïllant: $k \geq \dfrac{-12 - \log(45/32)}{\log(44/45)} \approx 1244.7 \Rightarrow \boxed{k = 1245}$

ⓔ ¿ Interval de valors de $\alpha > 0$ | $D_i(B)$ és disjunt dels altres $D_j(B)$?

La condició suficient trobada a ⓑ és $\dfrac{9\alpha}{8} + \dfrac{1}{8\alpha} < 1 \iff \underbrace{9\alpha + \dfrac{1}{\alpha}}_{\equiv f(\alpha)} < 8 \quad (*)$



Estudiem $f(\alpha)$ per a $\alpha > 0$

$\lim_{\alpha \to 0^+} f(\alpha) = +\infty$

$f'(\alpha) = 9 - 1/\alpha^2$; $f''(\alpha) = -2/\alpha^3 < 0 \ \forall \alpha > 0$

Extrem: $0 = f'(\alpha) \iff \alpha = 1/3$, mínim de $f(\alpha)$

i $f\left(\frac{1}{3}\right) = 9 \frac{1}{3} + 3 = 6 < 8$

Resolem $f(\alpha) = 8 \Rightarrow 9\alpha + \dfrac{1}{\alpha} = 8 \Rightarrow 9\alpha^2 - 8\alpha + 1 = 0 \Rightarrow \alpha = \dfrac{8 \pm \sqrt{28}}{18} = \dfrac{4 \pm \sqrt{7}}{9} = \begin{cases} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{cases}$

La condició $(*)$ és equivalent a $\boxed{\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2) \text{ on } \alpha_1 = \dfrac{4 - \sqrt{7}}{9} \approx 0.15047, \quad \alpha_2 = \dfrac{4 + \sqrt{7}}{9} \approx 0.73842}$