

Important: No canvieu els noms dels fitxers .R que us heu baixat. Pugeu tots tres fitxers al lliurament del moodle quan acabeu. No oblideu completar la primera línia del script 1.

Puntuació: Cadascun dels exercicis val el mateix.

1. *Nota: Mireu el script 1, que haureu de modificar i entregar. Observeu que al final del script teniu una plantilla per escriure la resposta d'algunes preguntes.*

A Catalunya es va dur a terme un estudi sobre l'efecte de la publicitat en el canvi de marca de beguda vegetal de civada per part dels consumidors. L'estudi es va realitzar l'any 2019 i es va plantejar un model basat en una cadena de Markov homogènia per tal de descriure els canvis dels consumidors entre tres marques, que anomenem A, B i C. A partir de les dades mostrals recollides, es va proposar la següent matriu de transició, on la unitat temporal són anys:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0.63 & 0.35 & 0.02 \\ 0.00 & 0.79 & 0.21 \\ 0.40 & 0.00 & 0.60 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

S'estima que l'any 2019 a Catalunya hi havia 300000 consumidors de beguda de civada de la marca A, 150000 de la marca B i 75000 consumidors de la marca C.

- a) Si suposem que el volum de consumidors de beguda de civada a Catalunya no variarà al llarg dels anys, determineu el percentatge estimat de consumidors de cada marca a l'any 2025.
- b) Creieu que existirà la distribució límit de la cadena? (responeu amb només una frase). Determineu la distribució límit de tres formes diferents:
 - i. Prenent potències altes de la matriu P . Arrodonint a 3 decimals, a partir de quina potència s'estabilitzen?
 - ii. Calculant la distribució estacionària π , que en aquest cas coincideix amb la distribució límit, a partir del vector propi de valor propi 1 de la matriu P (arrodoniu a 3 decimals).
 - iii. Simulant la cadena de Markov durant un temps suficient, per exemple 1000 anys (arrodoniu a 3 decimals).

2. *Nota: Mireu el script 2, que haureu de modificar i entregar. Observeu que al final del script teniu una plantilla per escriure la resposta d'algunes preguntes. Donat que l'execució que farem al corregir l'examen serà independent de la vostra, les vostres respostes no han de ser números concrets. Heu d'imprimir variables.*

Amb el valors de λ i Z_0 que us genera el script automàticament, considerem un procés de naixement i mort, amb una *offspring distribution* de Poisson de paràmetre λ , i població inicial Z_0 .

Afegiu al codi les instruccions oportunes per contestar les preguntes següents, mitjançant una simulació de 1000 repeticions:

- (a) Estimeu la llei del nombre d'individus a la generació 20 amb un histograma.
- (b) Quina és la mitjana teòrica del nombre d'individus a la generació 20?
Quina estimació d'aquesta mitjana dóna la vostra simulació?
- (c) Volem també estimar la probabilitat que la mida de la població a la generació 20 sigui menys de la meitat de la inicial. Quina estimació dóna la vostra simulació?

3. *Nota: Mireu el script 3, que haureu de modificar i entregar. Observeu que al final del script teniu una plantilla per escriure la resposta d'algunes preguntes. Donat que l'execució que farem al corregir l'examen serà independent de la vostra, les vostres respostes no han de ser números concrets. Heu d'imprimir variables.*

- a) Si tenim un procés de Poisson i sabem que s'han produït n arribades en un interval de temps $[0, t]$, quina és la distribució dels instants d'arribada? (contesteu en el lloc oportú del script).

Useu aquest fet per simular una trajectòria en l'interval de temps $[0, 15]$ d'un procés de Poisson. El paràmetre del procés serà la λ que us generarà el script automàticament. Useu la funció `stepfun()` per representar la trajectòria, sense que es vegin els segments verticals en els salts. A l'eix horitzontal ha de dir "Temps", i a l'eix vertical ha de dir "Arribades".

- b) Quin ha estat el nombre d'arribades en $[0, 15]$?
- c) Quins han estat els instants d'arribada, ordenats?
- d) En quin instant ha estat l'última arribada?