ICS 2121 Métodos de Optimización, Sem 2022-2
Prof. Jorge Vera

Tarea 2.

Instrucciones: Esta tarea debe realizarse en los grupos constituidos en el curso según las instrucciones dadas. La tarea debe ser respondida en forma ordenada y escrita en computador, usando LaTeXu otro procesador de texto. **No se aceptarán tareas manuscritas. De ocurrir, no serán corregidas. Debe ser subida a la plataforma de tareas a más tardar el martes 18 de octubre de 2022 a las 23:59 horas, como un archivo PDF.** Si usan LaTeX, les daremos 2 décima de bono en la tarea. Durante su trabajo en la tarea deben respetar las normas éticas correspondientes, cualquier colaboración indebida entre los grupos sera sancionada según establecen los reglamentos de la Escuela y Universidad, pudiendo incluso implicar la reprobación del curso. Todos los temas de esta tarea pueden ser evaluados en las interrogaciones.

En las preguntas 1 y 2 vamos a trabajar con el problema de flujo máximo en una red (ustedes estudiaron este problema en el curso de Optimización, pero hay abundante literatura sobre esto, si quiere recordarlo en más detalle). Tenemos una red dirigida $G = (N, A)$, donde N es el conjunto de nodos y A son los arcos (dirigidos) que conectan los nodos. Cada arco $(i, j) \in A$ tiene una capacidad $u_{ij} > 0$. Existen dos nodos especiales en esta red: el nodo s que es el "origen", y el nodo t, el "destino". En el problema de Flujo Máximo queremos enviar el mayor flujo posible desde s a t, respetando las capacidades de la red.
Este problema se puede formular como uno de Programación Lineal de la siguiente forma: sea f_{ij} el flujo por el arco (i, j) y sea F el flujo que se envía desde s. El modelo es:

$$
P) \quad \begin{array}{ll}
\max & F \\
s.a. & \\
& \sum\limits_{(s,j)\in A} f_{sj} - \sum\limits_{(k,s)\in A} f_{ks} = F \\
& \sum\limits_{(i,j)\in A} f_{ij} - \sum\limits_{(k,i)\in A} f_{ki} = 0, i \in N, i \neq s, i \neq t \\
& \sum\limits_{(t,j)\in A} f_{tj} - \sum\limits_{(k,t)\in A} f_{kt} = -F \\
& 0 \leq f_{ij} \leq u_{ij}, (i,j) \in A
\end{array}
$$

Se puede demostrar (es consecuencia del teorema y algoritmo de Ford-Fulkerson, que estudiaron en Optimización) que el flujo óptimo viaja a través de varios caminos dirigidos en la red, desde el origen s hasta el destino t. Esto sugiere una formulación alternativa, que es la que presentamos ahora.
Sea P el conjunto de todos los caminos dirigidos en la red G que parten desde s y terminan en t. Sea v_p el flujo que circula por el camino $p \in P$. Entonces, el problema de Flujo Máximo se puede escribir, también, de la siguiente forma:

$$
\begin{array}{ll}
\max & \sum\limits_{p\in P} v_p \\
s.a. & \\
& \sum\limits_{p\in P} \alpha_{ij}^p v_p \leq u_{ij}, (i,j) \in A \\
& v_p \geq 0, p \in P
\end{array}
$$

donde α_{ij}^p es un coeficiente escalar que es igual a 1 si el camino p pasa por el arco (i, j) y 0 si no.
La formulación anterior parece más compacta que la primera, pero tiene, potencialmente, un número enorme de variables ya que cada variable corresponde a un camino de s a t y podría haber muchos de esos.

Se propone, entonces, resolver este problema mediante Generación de Columnas y es lo que desarrollaremos a continuación.

Pregunta 1 (10 pts):

a) Como punto de partida, detalle los pasos del algoritmo de Generación de Columnas aplicado a este problema, mostrando explícitamente el problema maestro y el problema satélite.

b) Programe en Python, usando Gurobi como "solver" de Programación Lineal, el algoritmo completo.

c) Programe también, usando Python y Gurobi, el problema original P).

En su informe de la tarea, incluya los códigos desarrollados, los que tendrá, también, que subir a Canvas.
Indicaciones: Tanto para la parte b) como para la c) le será útil usar estructuras de datos adecuadas para codificar una red. Puede investigar cómo hacer eso, pero una recomendación es representar la red usando un conjunto de nodos y un "multidic" para los arcos. Por ejemplo, puede tomar, a modo de referencia, la siguiente definición para una red de 6 nodos y 8 arcos:

```
nodes = ['A', 'B', 'C', 'D', 'E', 'F']
arcs, capacity = gp.multidict({
    ('A', 'B'):   5,
    ('A', 'C'):  15,
    ('B', 'D'):  5,
    ('B',  'E'):   5,
    ('C',  'D'): 5,
    ('C',  'E'): 5,
    ('D',  'F'): 15,
    ('E',  'F'): 5}))
```

Hay muchos otros ejemplos disponibles en Internet, también.

Pregunta 2 (10 pts):
Ahora tome como datos los contenidos en el archivo `T2datos.xlsx`. Aquí hay dos hojas, llamadas Caso1 y Caso2, correspondientes a dos instancias de datos, una es comparativamente mucho más grande que la otra. Debe hacer que su implementación, tanto de la parte b) como de la c) de la Pregunta 1, use estos datos para sus estructuras de datos internas que definen el problema.

a) Corra el problema completo original, el de la parte c) de la pregunta 1, tanto para Caso1 como para Caso2. Registre el valor óptimo y la solución (los valores de las variables, tiene que rescatarlos de alguna forma y guardarlos).

b) Corra ahora la generación de columnas hasta que llegue al óptimo o hasta que usted considere que se debe detener, tanto para Caso1 como para Caso2. Registre el valor óptimo y la solución y también los valores del problemas maestro y el satélite en cada iteración. Indique con claridad cuál es el criterio de parada que está usando. La solución final también tendrá que rescatarla de alguna manera adecuada.

c) Realice una análisis comparativo entre lo hecho en a) y lo de b). ¿Se llega a la misma solución? ¿Cómo es la evolución de los valores del maestro y el satélite a medida que avanzan las iteraciones? ¿Cuánto tiempo se requiere en cada caso?

Pregunta 3 (8 pts):
Esta pregunta requiere que usted explore referencias relevantes a los temas estudiados en el curso. En clases planteamos que los Métodos de Primer Orden tienen gran importancia en aplicaciones de "Ciencias de Datos", "Big Data", etc., particularmente la técnica LASSO, hace uso de esto. Busque en la web un artículo publicado en alguna revista científica y que muestre uso de la técnica LASSO (o Regularización L1 u otro de los nombres que hemos usado en el curso). Elija un área de aplicación, para buscar, de la siguiente lista:

1. Estadísticas y Econometría aplicada en problemas de gestión y económicos.
2. Investigación en temas médicos, biología o similares.
3. Física experimental, astronomía, astrofísica y relacionados.

Su referencia debe estar publicada en el año 2010 o posterior, y debe estar indexada en la base de datos de Web of Science, o Scopus (si no sabe lo que son estas bases de datos, tendrá que investigarlo, en todo caso, son accesibles a través de SIBUC).
Del artículo elegido por ustedes, escriban un resumen de máximo dos páginas. Este resumen no puede ser simplemente copia del "abstract" del artículo sino que debe incluir su propio análisis, destacar los aportes del artículo, la relevancia de la aplicación, si acaso se discute la metodología de optimización subyacente, etc. Debe incluir también una opinión personal (es decir, del grupo, se entiende) sobre el artículo, refiéranse, entre otras cosas, a aplicaciones o caminos futuros que puede tener el desarrollo del paper que eligieron.

Pregunta 4 (8 pts):
El siguiente problema ilustra una aplicación de Programación Dinámica en donde sí se pueden usar variables de decisión que toman valores continuos.
Una empresa del sector financiero realiza inversiones en el mercado financiero. Al comienzo de este año su patrimonio es de $\$B$ pesos. Cada año, la empresa busca determinar cuánto de su capital gastar (en distintas actividades propias de su rubro) y cuánto ahorrar e invertir un año más. Todo el capital ahorrado en el año t genera en el año $t+1$ una ganancia $r > 0$ por peso invertido, es decir, invertir \$100 pesos en el año t genera $(1+r) \cdot 100$ pesos en el año $t+1$. Suponga que consumir $\$x_t$ pesos durante el año t le brinda a la empresa un bienestar evaluado en $\sqrt{x_t}$ "utiles" (i.e., unidades de utilidad) ese año t. Esta función de bienestar es cóncava en el consumo anual, pues la utilidad marginal es decreciente en función del nivel de consumo. Adicionalmente, para comparar bienestar obtenido en diferentes momentos del tiempo, la empresa establece que una unidad de utilidad obtenido en el año $t+1$ está valorada en $\lambda \in (0,1)$ útiles en el año t, es decir la utilidad de diferentes años se puede sumar descontada a tasa λ.
Finalmente, asuma también que la empresa no posee otras fuentes de ingreso y que firmemente cree que existirá en el mercado por T años más (incluyendo el actual).

- Modele, mediante Programación Dinámica, el problema que permite decidir a la empresa cuánto consumir de su capital cada año con el objetivo de maximizar la utilidad obtenida durante su existencia. Explicite las etapas de decisión, el espacio de estados en cada etapa, espacio de acciones en cada estado y etapa y retornos. Luego, enuncie las ecuaciones de Bellman.
- Obtenga una expresión cerrada en función de B, r, λ y T para la política óptima de consumo en cada año y el valor total descontado de la utilidad de la empresa al comienzo de este año.
- ¿Cómo es la política de consumo si $T \to \infty$ (i.e., la empresa cree que tiene una larga vida por delante) en función de $B, r,$ y λ ?

Pregunta 5 (8 pts):
En esta pregunta vamos a considerar nuevamente el problema de flujo máximo en una red (ya usado en la Pregunta 1). Tenemos una red dirigida $G = (N, A)$, donde N es el conjunto de nodos y A son los arcos (dirigidos) que conectan los nodos. Cada arco $(i, j) \in A$ tiene una capacidad $u_{ij} > 0$. Existen dos nodos especiales en esta red: el nodo s que es el "origen", y el nodo t, el "destino". En el problema de Flujo Máximo queremos enviar el mayor flujo posible desde s a t, respetando las capacidades de la red.
Como sabemos, este problema se puede formular como uno de Programación Lineal: sea f_{ij} el flujo por el arco (i, j) y sea F el flujo que se envía desde s. El modelo es:

$$
\begin{array}{ll}
\max & F \\
s.a. & \\
& \sum_{(s,j)\in A} f_{sj} - \sum_{(k,s)\in A} f_{ks} = F \\
& \sum_{(i,j)\in A} f_{ij} - \sum_{(k,i)\in A} f_{ki} = 0, i \in N, i \neq s, i \neq t \\
& \sum_{(t,j)\in A} f_{tj} - \sum_{(k,t)\in A} f_{kt} = -F \\
& 0 \leq f_{ij} \leq u_{ij}, (i,j) \in A
\end{array}
$$

a) Determine el dual del problema anterior.

b) Argumente que las variables del problema dual tomarán, naturalmente, valores enteros (de hecho, 0 ó 1.

c) Argumente que la solución óptima del problema dual permite identificar un "corte" de capacidad mínima en red. Hemos demostrado, con esto, el Teorema de Ford y Fulkerson (si es necesario, recurra a su material de Optimización para recordar este resultado).

Pregunta 6 (8 pts):
Considere el siguiente sistema de ecuaciones y desigualdades lineales:

$$Ax = b, Bx \geq d, Dx \leq 0, x \geq 0$$

donde $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $B \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $d \in \mathbb{R}^p$, $B \in \mathbb{R}^{q\times n}$.
Determine el sistema alternativo que viene dado por el Lema de Farkas.

Problema 7 (10 pts):
Una empresa fabrica J productos diferentes, los cuales tiene demandas sobre T periodos de tiempo. La demanda por el item j en el periodo t es d_{jt}. La empresa tiene K fábricas diferentes que pueden fabricar los productos, pero hay un costo fijo si se asigna la producción de un producto a una fábrica en algún periodo de tiempo. En cada periodo, sólo una de las fábrica producirá de un mismo producto. Además, hay costo variables de producción y hay capacidades de producción. Más en específico, sea c_{jtk} el costo unitario de producción para el producto j en la fábrica k en t, F_{jkt} el costo fijo de producir el producto j en la fábrica k en t. La fábrica k tiene una capacidad total de H_{kt} horas en el periodo t y producir producto j en k consume α_{jk} horas. Adicionalmente, el producto se puede guardar en inventario de un periodo al siguiente, pero eso tiene un costo h_{jt}. Asumimos aquí que todo lo producido se almacena en una bodega central y los costos de transportarlo a esa bodega son despreciables.
La empresa ha postulado un modelo de optimización en el cual usa las variables x_{jtk} para indicar la cantidad del producto j a fabricar en la fábrica k en el periodo t, y_{jkt}, una variable binaria que indica si hay producción de j en la fábrica k en t e I_{jt} como el inventario del producto j al final del periodo t (asumiremos que los inventarios iniciales, I_{j0}, son conocidos).

$$
\begin{array}{llll}
\min & \sum_{t=1}^{T} \left\{ \sum_{k=1}^{K} \sum_{j=1}^{J} \{c_{jkt}x_{jkt} + F_{jkt}y_{jkt}\} + \sum_{j=1}^{J} h_{jt}I_{jt} \right\} & & \\
s.a. & I_{jt} = I_{jt-1} + \sum_{k=1}^{K} x_{jtk} - d_{jt} & j = 1,\ldots,J; t = 1,\ldots,T & (1) \\
& \sum_{j=1}^{J} \alpha_{jk}x_{jkt} \leq H_{kt} & k = 1,\ldots,K; t = 1,\ldots,T & (2) \\
& x_{jkt} \leq My_{jkt} & j = 1,\ldots,J; k = 1,\ldots,K; t = 1,\ldots,T & (3) \\
& \sum_{k=1}^{K} y_{jkt} = 1 & j = 1,\ldots,J;; t = 1,\ldots,T & (4) \\
& x_{jkt} \geq 0, I_{jt} \geq 0, y_{jkt} \in \{0,1\} & j = 1,\ldots,J; k = 1,\ldots,K; t = 1,\ldots,T & (5)
\end{array}
$$

Las restricciones (1) son el flujo de inventarios y satisfacción de demanda (y, se entiende, I_{j0} es un dato), las (2) establecen el limite a la capacidad de producción, las (3) definen la “carga fija”, las (4) establecen que sólo una fábrica se encarga de cada producto en cada periodo, y las (5) definen la naturaleza de las variables.

a) Identifique la estructura del problema que sea favorable para ser abordado (en su relajación lineal) mediante Descomposición de Dantzig-Wolfe. Reescriba, si es necesario, el modelo en forma ordenada mostrando la estructura.

b) Desarrolle los elementos de la descomposición de Dantzig-Wolfe, mostrando el problema maestro y el satélite. Haga esto en referencia específica al problema en cuestión, usando la notación que aquí se ha definido.

Pregunta 8 (10 pts):
Considere nuevamente el modelo del problema de producción y uso de fábricas de la pregunta 7.

a) Identifique la estructura del problema que sea favorable para ser abordado mediante Descomposición de Benders. Reescriba, si es necesario, el modelo en forma ordenada mostrando la estructura.

b) Desarrolle los elementos de la descomposición de Benders, mostrando el problema maestro y el satélite. Haga esto en referencia específica al problema en cuestión, usando la notación que aquí se ha definido.