Exercícios resolvidos sobre Propriedades dos Parâmetros

Para ampliar sua compreensão sobre conceitos e aplicações das propriedades dos parâmetros, sugerimos que estude esta série de exercícios selecionados pelo professor. Observe como o conhecimento das propriedades dos parâmetros é fundamental para a solução de problemas corriqueiros envolvidos em processos diversos da indústria e do comércio.

Exercício 1

Em uma indústria, são utilizadas caixas para acondicionar 10 bolas de peso médio igual a 100 g e desvio-padrão igual a 5 g. Cada caixa pesa, em média, 200 g e tem desvio-padrão igual a 15 g. Qual a média e o desvio-padrão da caixa contendo as 10 bolas?

Solução

Enunciado

Em uma indústria, são utilizadas caixas para acondicionar 10 bolas de peso médio igual a 100 g e desvio-padrão igual a 5 g. Cada caixa pesa, em média, 200 g e tem desvio-padrão igual a 15 g. Qual a média e o desvio-padrão da caixa contendo as 10 bolas?

Solução

Para calcular a média e o desvio-padrão, aplicaremos as propriedades da soma e do produto, tanto da média quanto da variância. Elas são:

1) $\mu(X+Y) = \mu(X) + \mu(Y)$

2) $\mu(k\,X) = k\,\mu(X)$ $\quad$ *para k constante*

3) $\sigma^2(X+Y) = \sigma^2(X) + \sigma^2(Y)$ $\quad$ *para X e Y independentes*

4) $\sigma^2(k\,X) = k^2\,\sigma^2(X)$ $\quad$ *para k constante*

Utilizando essas propriedades, fazemos:

Sejam W_t o peso total, W_i o peso da *i*-ésima bola (*i* = 1, ..., 10) e W_c o peso da caixa apenas. Assim,

$$W_t = \sum_{i=1}^{10} W_i + W_c$$

Logo,

$$\mu(W_t) = \mu\left(\sum_{i=1}^{10} W_i + W_c\right) = \sum_{i=1}^{10} \mu(W_i) + \mu(W_c) = 10 \cdot 100 + 200 = \mathbf{1200}$$

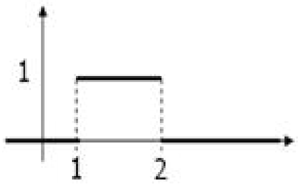
Para calcular o desvio-padrão, calculamos a variância, pois $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$. Assim temos:

$$\sigma^2(W_t) = \sigma^2\left(\sum_{i=1}^{10} W_i + W_c\right) = \sum_{i=1}^{10} \sigma^2(W_i) + \sigma^2(W_c) = 10 \cdot 5^2 + 15^2 = 475$$

$$\rightarrow \sigma(W_t) = \sqrt{475} \cong 21{,}8$$

Exercício 2

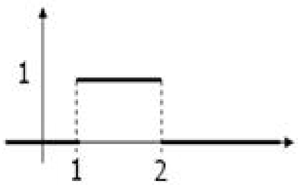
O peso dos produtos em uma empresa é dado pela distribuição a seguir. Sendo x o peso do produto, o custo de seu transporte é dado por $c(x) = 4x^2 + 6$. Calcule o custo médio de transporte.



Solução

Enunciado

O peso dos produtos em uma empresa é dado pela distribuição a seguir. Sendo x o peso do produto, o custo de seu transporte é dado por $c(x) = 4x^2 + 6$. Calcule o custo médio de transporte.



Solução

Aqui, é essencial que se aplique a seguinte propriedade da média:

Sendo φ uma função e x uma variável aleatória:

$$\mu(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x) dx \qquad (caso\ contínuo)$$

$$\mu(\varphi(X)) = \sum_{k} \varphi(x_k) P(X = x_k) \qquad (caso\ discreto)$$

Como estamos lidando com um caso contínuo, utilizaremos a primeira fórmula.

$\mu(c(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} c(x) . f(x) . dx \Rightarrow$ (lembrando que podemos "desmembrar a integral")

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} c(x) . f(x) . dx$$

$$= \int_{-\infty}^{1} c(x). 0. dx + \int_{1}^{2} (4x^2 + 6).1. dx + \int_{2}^{\infty} c(x). 0. dx$$

(Lembrando aqui que $c(x)$ é dada no enunciado e que $f(x)$ é o valor que a função apresentada no gráfico assume a cada ponto.)

$$\rightarrow \int_{1}^{2} (4x^2 + 6).1.dx = \frac{4x^3}{3} + 6x \Big|_{1}^{2} = \frac{4.2^3}{3} + 6.2 - \left(\frac{4.1^3}{3} + 6.1\right) = \frac{28}{3} + 6 = \frac{46}{3}$$

Exercício 3

Nem sempre é fácil obter informações sobre os parâmetros envolvidos nos eventos apresentados nos exercícios anteriores e, muitas vezes, dificuldades tecnológicas nos impedem de realizar medições exatas sobre esses parâmetros. No entanto, medidas indiretas podem nos ajudar a determinar o comportamento do parâmetro. Sendo W uma variável aleatória com as características apresentadas a seguir, encontre sua média e seu desvio-padrão.

$$\mu((W-1)^2) = 10 \quad ; \quad \mu((W-2)^2) = 6$$

Solução

Enunciado

Nem sempre é fácil obter informações sobre os parâmetros envolvidos nos eventos apresentados nos exercícios anteriores e, muitas vezes, dificuldades tecnológicas nos impedem de realizar medições exatas sobre esses parâmetros. No entanto, medidas indiretas podem nos ajudar a determinar o comportamento do parâmetro. Sendo W uma variável aleatória com as características apresentadas a seguir, encontre sua média e seu desvio-padrão.

$\mu((W-1)^2) = 10 \quad ; \quad \mu((W-2)^2) = 6$

Solução

Nesse exercício são utilizadas as seguintes propriedades:

$$1)\ \mu(X+Y) = \mu(X) + \mu(Y)$$
$$2)\ \mu(k\,X) = k\,\mu(X) \qquad para\ k\ constante$$
$$3)\ \sigma^2(X) = \mu(X^2) - [\mu(X)]^2$$

Com isso desenvolvemos:

$$\mu((W-1)^2) = 10 \qquad\qquad \mu((W-2)^2) = 6$$

$$\mu(W^2 - 2W + 1) = 10 \qquad\qquad \mu(W^2 - 4W + 4) = 6$$

$$\underline{\mu(W^2) - 2\,\mu(W) = 9} \qquad\qquad \underline{\mu(W^2) - 4\,\mu(W) = 2}$$

Montando um sistema de duas equações com duas incógnitas, utilizando as equações sublinhadas, temos:

$$\begin{cases} \mu(W^2) - 2\,\mu(W) = 9 \\ \mu(W^2) - 4\,\mu(W) = 2 \end{cases} \Rightarrow \quad 2\mu(W) = 7 \quad \Rightarrow \quad \mu(W) = \frac{7}{2}$$

Para a variância temos:

$$\mu(W^2) - 2\mu(W) = 9$$
$$\mu(W^2) - 7 = 9$$
$$\rightarrow \mu(W^2) = 16$$

$$\sigma^2(X) = \mu(X^2) - [\mu(X)]^2$$
$$\sigma^2(X) = 16 - \frac{49}{4} \rightarrow \sigma^2(X) = \frac{64-49}{4} = \frac{15}{4}$$

Exercício 4

Um teste é composto por 5 questões de múltipla escolha, com 4 itens em cada uma. Cada resposta errada anula uma resposta certa. Um aluno “chuta” todas as questões. Qual a nota média e a variância da nota do aluno?

Solução

Enunciado

Um teste é composto por 5 questões de múltipla escolha, com 4 itens em cada uma. Cada resposta errada anula uma resposta certa. Um aluno "chuta" todas as questões. Qual a nota média e a variância da nota do aluno?

Solução

Na tabela a seguir relaciona-se o número de acertos com a quantidade de questões consideradas na nota do aluno (número de questões certas menos número de questões erradas):

Número de questões certas (x)	0	1	2	3	4	5
Nota (y)	0	0	0	1	3	5

Lembrando que os eventos podem acontecer em qualquer ordem, podemos então construir a seguinte função de probabilidade para $p(x)$, para facilitar a resolução.

$$P(X=x)=\begin{cases} \binom{5}{0}(0{,}75)^5(0{,}25)^0 & para\ x=0 \\ \binom{5}{1}(0{,}75)^4(0{,}25)^1 & para\ x=1 \\ \binom{5}{2}(0{,}75)^3(0{,}25)^2 & para\ x=2 \\ \binom{5}{3}(0{,}75)^2(0{,}25)^3 & para\ x=3 \\ \binom{5}{4}(0{,}75)^1(0{,}25)^4 & para\ x=4 \\ \binom{5}{5}(0{,}75)^0(0{,}25)^5 & para\ x=5 \end{cases}$$

Com isso, podemos facilmente obter a função de probabilidade para cada nota possível (Y) apresentada a seguir. Vale observar que os cálculos mais elementares já foram efetuados. Além disso, os números associados a cada Y são as probabilidades associadas a seu "par" em X. Ou seja, para $Y = 3$, por exemplo, o valor encontrado é o referente à probabilidade de se acertar 4 questões ($X = 4$).

Com isso, podemos calcular a função probabilidade da variável Y (nota). Por exemplo, a probabilidade de tirar nota 0 é igual à probabilidade de acertar 0, 1 ou 2 questões e assim por diante.

$$P(Y=y)=\begin{cases} (0{,}75)^5+5\,(0{,}25)(0{,}75)^4+\binom{5}{2}(0{,}75)^3(0{,}25)^2 & para\ y=0 \\ \binom{5}{3}(0{,}75)^2(0{,}25)^3 & para\ y=1 \\ \binom{5}{4}(0{,}75)^1(0{,}25)^4 & para\ y=3 \\ \binom{5}{5}(0{,}75)^0(0{,}25)^5 & para\ y=5 \end{cases}$$

Para calcular a média, multiplicamos cada valor de Y pela probabilidade correspondente.

$$\mu(Y) = \sum y_k P(Y = y_k)$$
$$\mu(Y) = 0\ P(Y = 0) + 1\ P(Y = 1) + 3\ P(Y = 3) + 5\ P(Y = 5)$$
$$\mu(Y) = 0\ \left[(0{,}75)^5 + 5\ (0{,}25)(0{,}75)^4 + \binom{5}{2}(0{,}75)^3(0{,}25)^2\right]$$
$$+ 1\ \left[\binom{5}{3}(0{,}75)^2(0{,}25)^3\right] + 3\ \left[\binom{5}{4}(0{,}75)^1(0{,}25)^4\right]$$
$$+ 5\ \left[\binom{5}{5}(0{,}75)^0(0{,}25)^5\right]$$
$$\mu(Y) = 1 \cdot 0{,}088 + 3 \cdot 0{,}015 + 5 \cdot 0{,}001 = \mathbf{0,137}$$

O cálculo da variância é feito a seguir. Primeiro, mostramos a fórmula para seu cálculo, depois, aos poucos, introduzimos as indicações e os cálculos feitos. Boa parte desses cálculos e indicações já foi elucidada em outras partes da resolução do exercício.

$$\sigma^2(Y) = \sum [y_k - \mu(Y)]^2\ P(Y = y_k)$$
$$\sigma^2(Y) = (0 - 0{,}137)^2 P(Y = 0) + (1 - 0{,}137)^2 P(Y = 1)$$
$$+(3 - 0{,}137)^2 P(Y = 3) + (5 - 0{,}137)^2 P(Y = 5)$$
$$\sigma^2(Y) \cong 0{,}225$$

Exercício 5

O Sebrae é uma entidade privada e de interesse público que apoia a abertura e a expansão de pequenos negócios. Entre os cursos oferecidos pelo Sebrae, alguns apresentam os processos de controle da qualidade, em que é ensinado ao empreendedor como estabelecer procedimentos para inspecionar os lotes produzidos e minimizar os custos da qualidade. Entre os custos incluem os envolvidos no reprocessamento de produtos defeituosos. Nesses custos, incluem-se também aqueles relacionados a produtos defeituosos, que são incorretamente aprovados para comercialização, e a produtos bons, que são rejeitados incorretamente.

Em uma oficina de cerâmica, um iniciante tem 10% de chance de cometer algum erro e fabricar um produto com defeito. Em virtude da inexperiência, esse artesão também erra no processo de inspeção da qualidade, classificando de maneira equivocada 20% dos produtos ruins e 30% dos produtos bons. Considerando que esse artesão produz 10 itens por dia, qual o número médio de produtos classificados como ruins em um dia qualquer?

Solução

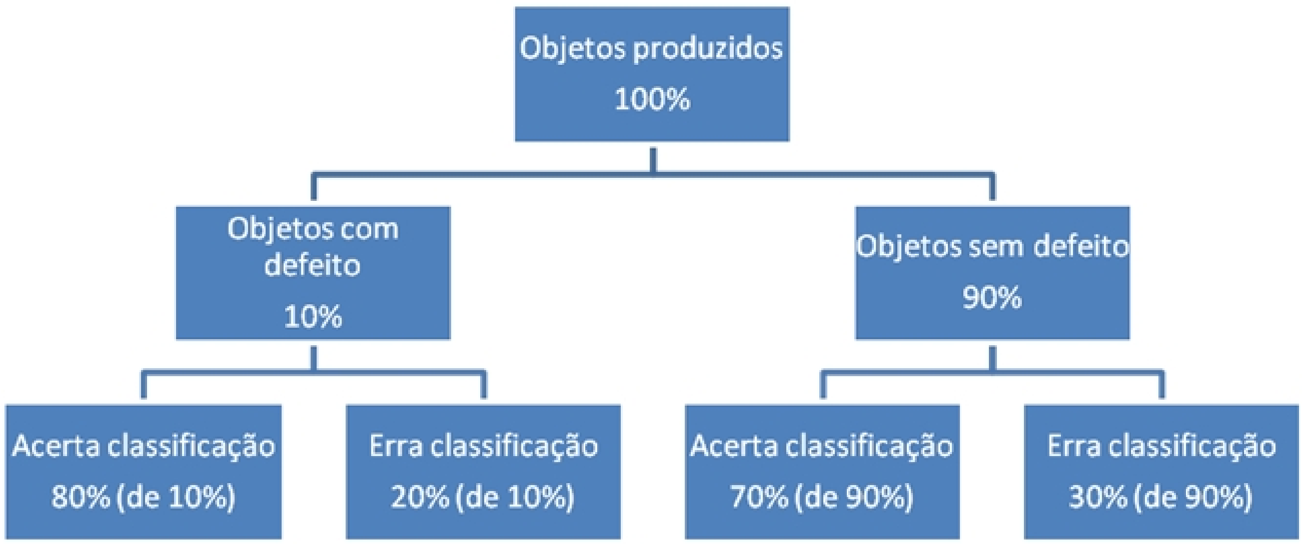
Enunciado

O Sebrae é uma entidade privada e de interesse público que apoia a abertura e a expansão de pequenos negócios. Entre os cursos oferecidos pelo Sebrae, alguns apresentam os processos de controle da qualidade, em que é ensinado ao empreendedor como estabelecer procedimentos para inspecionar os lotes produzidos e minimizar os custos da qualidade. Entre os custos incluem os envolvidos no reprocessamento de produtos defeituosos. Nesses custos, incluem-se também aqueles relacionados a produtos defeituosos, que são incorretamente aprovados para comercialização, e a produtos bons, que são rejeitados incorretamente.

Em uma oficina de cerâmica, um iniciante tem 10% de chance de cometer algum erro e fabricar um produto com defeito. Em virtude da inexperiência, esse artesão também erra no processo de inspeção da qualidade, classificando de maneira equivocada 20% dos produtos ruins e 30% dos produtos bons. Considerando que esse artesão produz 10 itens por dia, qual o número médio de produtos classificados como ruins em um dia qualquer?

Solução

Em primeiro lugar, vamos resolver esse exercício de maneira mais visual. Vamos utilizar uma árvore de probabilidade. Ela é bem ilustrativa e de fácil entendimento. Observe:



Com essa árvore de probabilidades, precisamos somar as probabilidades de ser ruim (com classificação correta) e de ser bom (com classificação errada). Elas são:

$$\mu(X) = 0{,}8 \cdot 0{,}1 + 0{,}3 \cdot 0{,}9 = 0{,}35$$

Isso significa que 35% dos objetos são classificados como ruins todos os dias, ou seja, em média 3,5 objetos são classificados como ruins diariamente.

Por outro lado podemos resolver esse exercício com o Teorema da Probabilidade Total. Sendo:

$P(R)$ = probabilidade de ser considerado ruim (incógnita)

$P(D)$ = probabilidade de ser um objeto realmente ruim = 0,1

$P(P)$ = probabilidade de ser um objeto perfeito = 0,9

$P(CD/D)$ = probabilidade de ser considerado defeituoso dado que é um objeto defeituoso realmente = 0,8

$P(CD/P)$ = probabilidade de ser considerado defeituoso dado que é um objeto perfeito = 0,3

$P(R) = P(D)*P(CD/D) + P(P)*P(CD/P) = 0,1*0,8 + 0,9*0,3 = 0,08 + 0,27 = 0,35.$

Desta forma chegamos ao mesmo resultado da resolução anterior!

Exercício 6

Em uma fábrica de massa para bolo, a mistura para a massa é armazenada em caixas e esse serviço é feito por uma máquina automática. Depois de passarem pela máquina, as caixas saem com peso bruto médio de 850 g e desvio-padrão de 4,5 g. As caixas vazias têm peso médio de 220 g e desvio-padrão de 2,7 g. Determine o peso médio e o desvio-padrão do preparado colocado dentro da caixa, se:

a) A máquina pesar a mistura dentro da caixa.

b) A máquina pesar a mistura e depois colocá-la na caixa.

Solução

Enunciado

Em uma fábrica de massa para bolo, a mistura para a massa é armazenada em caixas e esse serviço é feito por uma máquina automática. Depois de passarem pela máquina, as caixas saem com peso bruto médio de 850 g e desvio-padrão de 4,5 g. As caixas vazias têm peso médio de 220 g e desvio-padrão de 2,7 g. Determine o peso médio e o desvio-padrão do preparado colocado dentro da caixa, se:

a) A máquina pesar a mistura dentro da caixa.

b) A máquina pesar a mistura e depois colocá-la na caixa.

Solução

Para resolver esse problema, usaremos as propriedades da média e da variância, lembrando que o peso da mistura e o peso da caixa são independentes:

1) $\mu(X \pm Y) = \mu(X) \pm \mu(Y)$
2) $\sigma^2(X \pm Y) = \sigma^2(X) + \sigma^2(Y) \qquad (para\ X\ e\ Y\ independentes)$
3) $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

Definimos:

C = peso médio da caixa = μ(C) = 220 g

B = peso bruto médio do conjunto (caixa + mistura) = μ(B)= 850 g

P = peso médio da mistura = ?

Aparentemente, os dois itens solicitam a mesma situação, mas aplicando as propriedades dos parâmetros você verá que são situações bem diferentes.

a) Nesse caso, a máquina pesa o conjunto "mistura + caixa" e, portanto, as medidas que temos são *B* (peso do conjunto) e *C* (peso da caixa). Então:

$P = B - C$

A média pode ser calculada da seguinte forma:

$$\mu(P) = \mu(B - C) = \mu(B) - \mu(C)$$

$$\mu(P) = 850 - 220 = 630g$$

A variância será:

$$\sigma^2(P) = \sigma^2(B - C) = \sigma^2(B) + \sigma^2(C)$$

$$\sigma^2(P) = 4{,}5^2 + 2{,}7^2 = 27{,}54g^2$$

Portanto, o desvio-padrão, dado pela raiz quadrada da variância, será:

$$\sigma = \sqrt{\sigma} = \sqrt{27{,}54} \cong 5{,}25g$$

b) Agora, note a diferença quando a mistura é pesada antes de ser colocada na caixa. Por esse procedimento, podemos obter o peso do conjunto, por meio da soma dos pesos da caixa e da mistura. Então:

$$B = C + P$$

A média pode ser calculada da seguinte forma:

$$\mu(B) = \mu(C + P) = \mu(C) + \mu(P)$$

$$\mu(P) = \mu(B) - \mu(C)$$

$$\mu(P) = \mu(B) - \mu(C)\mu(P) = 850 - 220 = 630g$$

A variância será:

$$\sigma^2(B) = \sigma^2(C + P) = \sigma^2(C) + \sigma^2(P)$$

$$\sigma^2(P) = \sigma^2(B) - \sigma^2(C)$$

$$\sigma^2(P) = 4{,}5^2 - 2{,}7^2 = 12{,}96g^2$$

Portanto, o desvio-padrão, dado pela raiz quadrada da variância, será:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{12{,}96} = 3{,}6g$$

Exercício 7

Em uma fábrica de automóveis foi medido o tempo que os torneiros mecânicos utilizam para produzir uma certa peça. Eles descobriram que esse tempo era uma variável aleatória discreta com distribuição de probabilidade descrita a seguir.

T(min)	2	3	4	5	6	7
$p(T)$	0,1	0,1	0,3	0,2	0,2	0,1

Para cada peça processada, o operário recebe um fixo de R$ 2,00 e, se ele processar a peça em menos de 6 minutos, recebe um adicional de R$ 0,50 por minuto poupado. Determine a distribuição de probabilidade, a média e a variância da variável aleatória G, sendo G a quantia ganha por um operário para a fabricação de uma peça.

Solução

Enunciado

Em uma fábrica de automóveis foi medido o tempo que os torneiros mecânicos utilizam para produzir uma certa peça. Eles descobriram que esse tempo era uma variável aleatória discreta com distribuição de probabilidade descrita a seguir.

T(min)	2	3	4	5	6	7
$p(T)$	0,1	0,1	0,3	0,2	0,2	0,1

Para cada peça processada, o operário recebe um fixo de R$ 2,00 e, se ele processar a peça em menos de 6 minutos, recebe um adicional de R$ 0,50 por minuto poupado. Determine a distribuição de probabilidade, a média e a variância da variável aleatória *G*, sendo *G* a quantia ganha por um operário para a fabricação de uma peça.

Solução

Para calcular o tempo médio de processamento, vamos utilizar o mesmo mecanismo dos exercícios anteriores.

$$G = \begin{cases} R\$\ 2{,}00 + \dfrac{R\$\ 0{,}50}{min} \cdot 4\ min = R\$\ 4{,}00\ para\ T = 2\ min \\ R\$\ 2{,}00 + \dfrac{R\$\ 0{,}50}{min} \cdot 3\ min = R\$\ 3{,}50\ para\ T = 3\ min \\ R\$\ 2{,}00 + \dfrac{R\$\ 0{,}50}{min} \cdot 2\ min = R\$\ 3{,}00\ para\ T = 4\ min \\ R\$\ 2{,}00 + \dfrac{R\$\ 0{,}50}{min} \cdot 1\ min = R\$\ 2{,}50\ para\ T = 5\ min \\ R\$\ 2{,}00 + \dfrac{R\$\ 0{,}50}{min} \cdot 0\ min = R\$\ 2{,}00\ para\ T = 6\ min \\ R\$\ 2{,}00 + \dfrac{R\$\ 0{,}50}{min} \cdot 0\ min = R\$\ 2{,}00\ para\ T = 7\ min \end{cases}$$

Para continuar a resolução, vamos construir a distribuição da probabilidade de G:

$$\begin{aligned} &P(G = 2{,}00) = P(T = 6\ ou\ T = 7) = 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}3 \\ &P(G = 2{,}50) = P(T = 5) = 0{,}2 \\ &P(G = 3{,}00) = P(T = 4) = 0{,}3 \\ &P(G = 3{,}50) = P(T = 3) = 0{,}1 \\ &P(G = 4{,}00) = P(T = 2) = 0{,}1 \end{aligned}$$

Para calcular a média de *G*, usaremos também:

$$\mu(G) = \sum g_k\, P(G = g_k)$$

$$\begin{aligned} \mu(G) = {} & R\$\ 4{,}00 \cdot 0{,}1 + R\$\ 3{,}50 \cdot 0{,}1 + R\$\ 3{,}00 \cdot 0{,}3 \\ & + R\$\ 2{,}50 \cdot 0{,}2 + R\$\ 2{,}00 \cdot (0{,}2 + 0{,}1) = R\$\ 2{,}75 \end{aligned}$$

Para o cálculo da variância, usaremos:

$$\sigma^2 = \sum \left(g_k - \mu(G)\right)^2 P(G = g_k)$$

$$\sigma^2 = (4-\mu)^2\, P(T=2) + (3{,}5-\mu)^2\, P(T=3) + (3-\mu)^2\, P(T=4)$$
$$+ (2{,}5-\mu)^2\, P(T=5) + (2-\mu)^2\, [P(T=6) + P(T=7)]$$

$$\sigma^2 = (1{,}25)^2 \cdot 0{,}1 + (0{,}75)^2 \cdot 0{,}1 + (0{,}25)^2 \cdot 0{,}3 + (-0{,}25)^2 \cdot 0{,}2$$
$$+ (-0{,}75)^2 \cdot 0{,}2 + (-0{,}75)^2 \cdot 0{,}1$$

$$\sigma^2 = 0{,}4125\ (R\$)^2$$

Exercício 8

Sabemos que o hodômetro de um veículo marca distâncias em km. Se o comprimento de uma determinada ponte é 12,8 km, sabemos que, em muitas vezes, o hodômetro marcará 12 km e em outras, 13 km. Qual o desvio-padrão dessas leituras?

Solução

Enunciado

Sabemos que o hodômetro de um veículo marca distâncias em km. Se o comprimento de uma determinada ponte é 12,8 km, sabemos que, em muitas vezes, o hodômetro marcará 12 km e em outras, 13 km. Qual o desvio-padrão dessas leituras?

Solução

Esse exercício, apesar de não ser tão intuitivo, é relativamente fácil! Utilizaremos:

$$\sigma^2 = \sum \left(x_k - \mu(X)\right)^2 P(X = x_k)$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Sabemos que a média é 12,8 e também que:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & para\, x = 12 \\ \frac{4}{5} & para\, x = 13 \end{cases}$$

$$\sigma^2 = (12 - 12{,}8)^2 \cdot \frac{1}{5} + (13 - 12{,}8)^2 \cdot \frac{4}{5}$$

$$\sigma^2 = 0{,}16(km^2)$$

$$\sigma \cong 0{,}4km$$