NOME: Clara Mattos Medina
RA: 247021
TURMA: C

Clara Mattos Medina

1

1) a) $P_1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_2$

$T(1-x) = (1,0) \quad T(1-3x) = (1,-2)$

$U = (1-x,\ 1-3x)$
$V = ((1,0),(1,-2))$

um vetor v de $P_1(\mathbb{R})$ tem forma $a+bx$, portanto

$a+bx = \alpha(1-x) + \beta(1-3x)$

$a = \alpha+\beta$
$b = -\alpha - 3\beta$

$\beta = -\frac{(a+b)}{2}$

$\alpha = \frac{3a+b}{2}$

$T(a+bx) = T\left(\frac{3a+b}{2}\cdot(1-x) - \frac{(a+b)}{2}\cdot(1-3x)\right) \rightarrow$ como T é linear:

$T(a+bx) = \frac{3a+b}{2} T(1-x) - \frac{(a+b)}{2} T(1-3x)$

$T(a+bx) = \frac{3a+b}{2}\cdot(1,0) - \frac{(a+b)}{2}\cdot(1,-2) = \left(\frac{3a+b}{2}, 0\right) - \left(\frac{-a-b}{2}, a+b\right)$

$T(a,bx) = (a, a+b)$ //

Temos que $p(x) = a+bx \in Ker(T) \leftrightarrow T(p(x)) = 0,0 \leftrightarrow \underline{a=b=0}$

$\therefore Ker(T) = \{0\}$ e T é injetora.

pelo teorema do núcleo e da imagem:

$\dim(P_1(\mathbb{R})) = \dim(Ker(T)) + \dim(Im(T))$

$2 = 0 + \dim(Im(T))$

$\dim(Im(T)) = 2$ //

$\therefore$ como $Im(T) \in \mathbb{R}^2$ e $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$, $Im(T) = \mathbb{R}^2$ e, assim, T é sobrejetora. Por ser injetora e sobrejetora, T é isomorfismo.

NOME: Clara Mattos
TURMA: C
RA: 247021

Clara Mattos Medeiros

1.b) $T^{-1}(a,b) = c + dx \longleftrightarrow T(c+dx) = (a,b)$

como $T(a,bx) = (a,a+b)$

$\hookrightarrow (a,b) = (c, c+d)$

$a = c$

$b = c+d \rightarrow d = b-a$

Sendo assim, $T^{-1}(a,b) = a + (b-a) \cdot x$

NOME: Clara Mattos Medina
RA: 247021
TURMA: C

Clara Mattos Medina

3

2)

a) 1 $\langle u,u\rangle \geq 0$ e $\langle u,u\rangle = 0 \leftrightarrow u=0$

$x = (x_1, x_2, x_3)$

Pelo enunciado, temos:

$\langle x,x\rangle = x_1x_1 + 2x_2x_2 + x_3x_3 = (x_1)^2 + 2(x_2)^2 + (x_3)^2$

como qualquer valor ao quadrado não pode ser negativo e 2 é um valor positivo, temos que, por $\langle x,x\rangle$ envolver a soma de 3 termos positivos, $\langle x,x\rangle \geq 0$.

Se $\langle x,x\rangle = 0$, a única solução possível é $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

2 $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$

tendo $y = (y_1, y_2, y_3)$ e aplicando $\langle x,y\rangle$, temos

$\langle x,y\rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3$

aplicando $\langle y,x\rangle$, temos:

$\langle y,x\rangle = y_1x_1 + 2y_2x_2 + y_3x_3 = \langle x,y\rangle$

$\therefore \langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$

3 $\langle x+y, w\rangle = \langle x,w\rangle + \langle y,w\rangle$

seja $w = (w_1, w_2, w_3)$, temos:

$\langle x+y, w\rangle = (x_1+y_1)\cdot w_1 + 2\cdot(x_2+y_2)\cdot w_2 + (x_3+y_3)\cdot w_3$

$\langle x+y, w\rangle = \underbrace{x_1w_1 + 2x_2w_2 + x_3w_3}_{\langle x,w\rangle} + \underbrace{y_1w_1 + 2y_2w_2 + y_3w_3}_{\langle y,w\rangle}$

$\langle x+y, w\rangle = \langle x,w\rangle + \langle y,w\rangle$

4 $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle$

$\langle \alpha x, y\rangle = \alpha x_1y_1 + 2\cdot\alpha x_2y_2 + \alpha x_3y_3 = \alpha(x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3)$

$\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\cdot\langle x,y\rangle$

$\therefore$, por satisfazer as propriedades, $\langle x,y\rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3$ define um produto interno em $\mathbb{R}^3$

NOME: Clara Mattos Medeiros

Clara Mattos Medeiros

TURMA: C

RA: 247021

2)

b) Desigualdade Cauchy Schwartz:

$$\langle u, v \rangle^2 \leq \langle u, u \rangle \cdot \langle v, v \rangle$$

em x e y, temos:

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$$

DO ITEM a)

$$(x_1 y_1 + 2 x_2 y_2 + x_3 y_3)^2 \leq (x_1^2 + 2 x_2^2 + x_3^2) \cdot (y_1^2 + 2 y_2^2 + y_3^2)$$

aplicando em $x = (1, 0, -1)$ e $y = (1, 1, 0)$, temos:

$$(1 \cdot 1 + \cancel{2 \cdot 0} \cdot 1 + \cancel{(-1) \cdot 0})^2 \leq (1^2 + \cancel{2 0^2} + (-1)^2) \cdot (1^2 + 2 \cdot 1^2 + \cancel{0^2})$$

$$= 1^2 \leq 2 \cdot 3$$

$$= 1 \leq 6$$, portanto, a igualdade é válida, pois

$$\langle u, v \rangle^2 \leq \langle u, u \rangle \cdot \langle v, v \rangle$$

NOME: Clara Mattos
TURMA: C
RA: 297021

Clara Mattos Medeiros

3)

Se u e v são ortogonais

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|_2 \cdot \|v\|_2} = 0$$

$\langle u, v\rangle = 0$

Por definição:

$$\|u\|_2 = \sqrt{\langle u, u\rangle}$$

portanto:

$$(\|u\|_2)^2 = \langle u, u\rangle \qquad e \qquad \langle u+v, u+v\rangle = (\|u+v\|_2)^2$$
$$(\|v\|_2)^2 = \langle v, v\rangle$$

$$\langle u+v, u+v\rangle = \langle u, u+v\rangle + \langle v, u+v\rangle$$
$$\langle u+v, u+v\rangle = \langle u, u\rangle + \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle$$
$$\langle u+v, u+v\rangle = \langle u, u\rangle + 2\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle$$
$$(\|u+v\|_2)^2 = (\|u\|_2)^2 + 2\langle u, v\rangle + (\|v\|_2)^2$$

↳ como u e v são ortogonais, $\langle u, v\rangle = 0$

$\therefore$

$$\|u, v\|_2^2 = \|u\|_2^2 + \|v\|_2^2$$

Sim, a recíproca é verdadeira. Como o termo $2\langle u, v\rangle$ só é zerado caso os vetores u e v sejam ortogonais, qualquer situação que satisfaça a expressão acima terá $2\langle u, v\rangle$ zerado e, portanto, pode-se concluir que u e v são ortogonais.

NOME: Clara Mattos Medeiros
RA: 247021
TURMA: C

Clara Mattos Medeiros

4)

① Calculamos uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$

Pelo Processo de Gram Schmidt (P.6.5), temos:

$q_1 = (1,0,0)$

$\alpha_{12} = \dfrac{\langle q_1, v_2\rangle}{\langle q_1, q_1\rangle} = \dfrac{1}{1} = 1$

$q_2 = v_2 - \alpha_{12} \cdot q_1 = (1,2,0) - 1\cdot(1,0,0) = (0,2,0)$

$\alpha_{13} = \dfrac{\langle q_1, v_3\rangle}{\langle q_1, q_1\rangle} = \dfrac{1}{1} = 1$

$\alpha_{23} = \dfrac{\langle q_2, v_3\rangle}{\langle q_2, q_2\rangle} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

$q_3 = v_3 - \alpha_{13} q_1 - \alpha_{23} q_2 = (1,1,1) - 1\cdot(1,0,0) - \dfrac{1}{2}(0,2,$

$q_3 = (0,1,1) - (0,1,0) = (0,0,1)$

$\therefore$ temos uma base ortogonal $B' = \{\underset{q_1}{(1,0,0)}, \underset{q_2}{(0,2,0)}, \underset{q_3}{(0,0,1)}\}$

② Calculamos a base ortonormal B^* a partir de B'.

$B^* = \{q_1^*, q_2^*, q_3^*\}$, tal que $q_i^* = \dfrac{q_i}{\|q_i\|_2}$

$B^* = \left\{ \dfrac{(1,0,0)}{\sqrt{1^2+0^2+0^2}}, \dfrac{(0,2,0)}{\sqrt{0^2+2^2+0^2}}, \dfrac{(0,0,1)}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}} \right\}$

BASE CANÔNICA.

$\therefore B^* = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ a partir da base $B = \{(1,0,0),(1,2,0),(1,$

NOME: Clara Mattos Medeiros
TURMA: C
RA: 247021

Clara Mattos Medeiros

7

5) $P_3(\mathbb{R})$

$\langle p,q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$

$W = [1, x^2] \rightarrow$ como 1 e x^2 não são múltiplos, podemos afirmar que são bases de W.

$W^\perp$ será o complemento ortogonal de W em $P_3(\mathbb{R})$

$u = a + bx + cx^2 + dx^3 \in W^\perp \leftrightarrow \langle u, v\rangle = 0 \quad \forall v \in W$

ou seja:

$\int_0^1 1 \cdot (a+bx+cx^2+dx^3)\,dx = 0$

$\left[ax + \frac{bx^2}{2} + \frac{cx^3}{3} + \frac{dx^4}{4}\right]_0^1 = a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} + \frac{d}{4} = 0$ (*)

$\int_0^1 x^2 \cdot (a+bx+cx^2+dx^3)\,dx = \int_0^1 ax^2 + bx^3 + cx^4 + dx^5\,dx$

$= \left[\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^4}{4} + \frac{cx^5}{5} + \frac{dx^6}{6}\right]_0^1 = \frac{a}{3} + \frac{b}{4} + \frac{c}{5} + \frac{d}{6}$ (**)

de (*) e (**), temos:

$\begin{cases} a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} + \frac{d}{4} = 0 \rightarrow a = -\frac{b}{2} - \frac{c}{3} - \frac{d}{4} \quad (☆) \\ \frac{a}{3} + \frac{b}{4} + \frac{c}{5} + \frac{d}{6} = 0 \rightarrow -\frac{b}{6} - \frac{c}{9} - \frac{d}{12} + \frac{b}{4} + \frac{c}{5} + \frac{d}{6} = 0 \end{cases}$

$-\frac{2b}{12} + \frac{3b}{12} - \frac{5c}{45} + \frac{9c}{45} - \frac{d}{12} + \frac{2d}{12} = \frac{b}{12} + \frac{4c}{45} + \frac{d}{12} = 0$

$b = -\frac{48c}{45} - d$ (☆) $\rightarrow a = \frac{24}{45}c + \frac{d}{2} - \frac{c}{3} - \frac{d}{4} = \frac{1}{5}c + \frac{d}{4}$ //

$\therefore u \in W^\perp \leftrightarrow u = \frac{1}{5}c + \frac{d}{4} + x\left(-\frac{48}{45}c - d\right) + x^2 c + x^3 d$

$u = c\left(\frac{1}{5} - \frac{48}{45}x + x^2\right) + d\left(\frac{1}{4} - x + x^3\right)$

$\therefore W^\perp = \{(\frac{1}{5} - \frac{48}{45}x + x^2), (\frac{1}{4} - x + x^3)\}$ é base de $W^\perp$