Ejercicio 3
Clase 03

Investigación Operativa UTN FRBA 2020
Curso: I4051
Elaborado por: Rodrigo Maranzana
Docente: Martín Palazzo

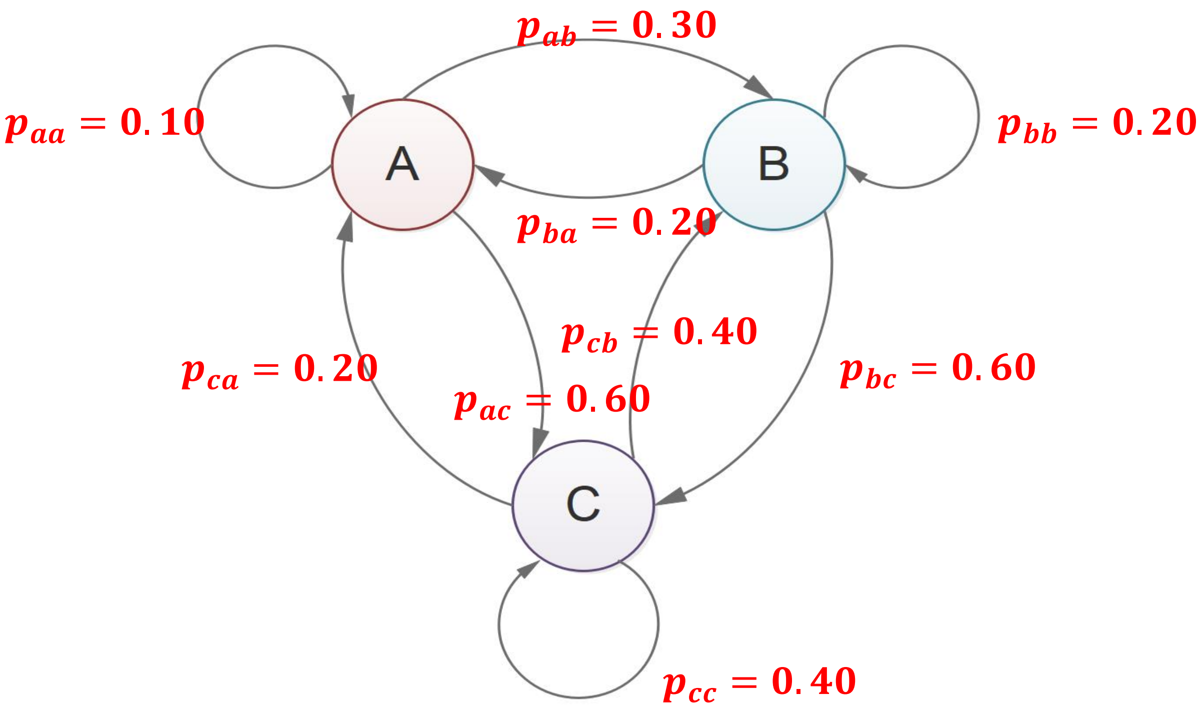
Ejercicio 3: Agente comercial

Un agente comercial realiza su trabajo en tres ciudades A, B y C. Para evitar desplazamientos innecesarios está todo el día en la misma ciudad y allí pernocta, desplazándose a otra ciudad al día siguiente, si no tiene suficiente trabajo. Después de estar trabajando un día en C, la probabilidad de tener que seguir trabajando en ella al día siguiente es 0,4, la de tener que viajar a B es 0,4 y la de tener que ir a A es 0,2. Si el viajante duerme un día en B, con probabilidad de un 20% tendrá que seguir trabajando en la misma ciudad al día siguiente, en el 60% de los casos viajará a C, mientras que irá a A con probabilidad 0,2. Por último si el agente comercial trabaja todo un día en A, permanecerá en esa misma ciudad, al día siguiente, con una probabilidad 0,1, irá a B con una probabilidad de 0,3 y a C con una probabilidad de 0,6.

a) Si hoy el viajante está en C, ¿cuál es la probabilidad de que también tenga que trabajar en C al cabo de cuatro días?

b) ¿Cuáles son los porcentajes de días en los que el agente comercial está en cada una de las tres ciudades?

Grafo

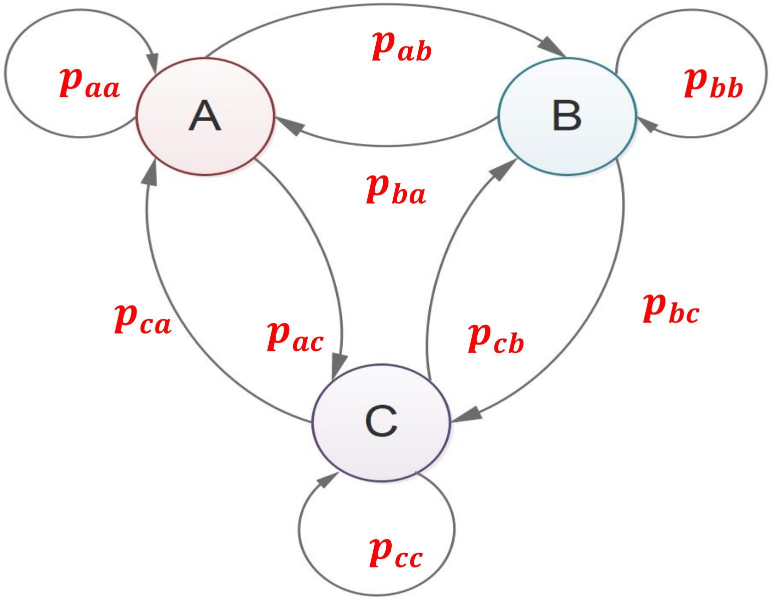

$p_{ab} = 0.30$
$p_{aa} = 0.10$
A
B
$p_{bb} = 0.20$
$p_{ba} = 0.20$
$p_{cb} = 0.40$
$p_{ca} = 0.20$
$p_{bc} = 0.60$
$p_{ac} = 0.60$
C
$p_{cc} = 0.40$

Matriz de transición

$$T = \begin{bmatrix} p_{aa} & p_{ab} & p_{ac} \\ p_{ba} & p_{bb} & p_{bc} \\ p_{ca} & p_{cb} & p_{cc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4 \end{bmatrix} \begin{matrix} = 1 \\ = 1 \\ = 1 \end{matrix}$$

Iteraciones

$$p_{aa}^2 = p_{aa} * p_{aa} + p_{ab} * p_{ba} + p_{ac} * p_{ca}$$
$$p_{ab}^2 = p_{aa} * p_{ab} + p_{ab} * p_{bb} + p_{ac} * p_{cb}$$



Iteraciones

$$p_{aa}^2 = p_{aa} * p_{aa} + p_{ab} * p_{ba} + p_{ac} * p_{ca}$$

$$T^2 = \begin{bmatrix} \boxed{p_{aa} \quad p_{ab} \quad p_{ac}} \\ p_{ba} \quad p_{bb} \quad p_{bc} \\ p_{ca} \quad p_{cb} \quad p_{cc} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} p_{aa} & p_{ab} & p_{ac} \\ p_{ba} & p_{bb} & p_{bc} \\ p_{ca} & p_{cb} & p_{cc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{p_{aa}^2} & p_{ab}^2 & p_{ac}^2 \\ p_{ba}^2 & p_{bb}^2 & p_{bc}^2 \\ p_{ca}^2 & p_{cb}^2 & p_{cc}^2 \end{bmatrix}$$

$$p_{aa}^2 = p_{aa} * p_{aa} + p_{ab} * p_{ba} + p_{ac} * p_{ca}$$

Punto a)

$$
\begin{array}{c}
T^4 = \begin{bmatrix} 0{,}1819 & 0{,}3189 & 0{,}4992 \\ 0{,}1818 & 0{,}3190 & 0{,}4992 \\ 0{,}1818 & 0{,}3174 & \boxed{0{,}5008} \end{bmatrix} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \boldsymbol{p_{cc}^4}
\end{array}
$$

$$\boldsymbol{p_0 T^4 = p_4} \rightarrow (p_a \quad p_b \quad p_c) \times T^4$$

$$\boldsymbol{p_4} = (0 \quad 0 \quad 1) \times T^4$$

$$\boldsymbol{p_4} = (0{,}1818 \quad 0{,}3174 \quad \boxed{0{,}5008})$$

Estado estable

$$\pi \mathrm{T} = \pi$$

$$\begin{pmatrix} \pi_A & \pi_B & \pi_C \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,6 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_A & \pi_B & \pi_C \end{pmatrix}$$

<u>Sistema de ecuaciones lineales:</u>

$$0,1\pi_A + 0,2\pi_B + 0,2\pi_C = \pi_A$$
$$0,3\pi_A + 0,2\pi_B + 0,4\pi_C = \pi_B$$
$$0,6\pi_A + 0,6\pi_B + 0,4\pi_C = \pi_C$$

Punto b)

Despejamos:

$$-0,9\pi_A + 0,2\pi_B + 0,2\pi_C = 0$$
$$0,3\pi_A - 0,8\pi_B + 0,4\pi_C = 0$$
$$0,6\pi_A + 0,6\pi_B - 0,6\pi_C = 0$$

Forma matricial

$$\begin{bmatrix} -0,9 & 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & -0,8 & 0,4 \\ 0,6 & 0,6 & -0,6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \pi_A \\ \pi_B \\ \pi_C \end{bmatrix} = \overline{0}$$

Sistema Homogéneo
Det(Matriz) = 0
-> Compatible indeterminado

Fórmula adicional

$$\sum_i \pi_i = 1 \rightarrow \pi_a + \pi_b + \pi_c = 1$$

Punto b)

Sistema de ecuaciones a resolver:

$$-0,9\pi_A + 0,2\pi_B + 0,2\pi_C = 0$$
$$0,3\pi_A - 0,8\pi_B + 0,4\pi_C = 0$$
$$0,6\pi_A + 0,6\pi_B - 0,6\pi_C = 0$$
$$\pi_A + \pi_B + \pi_C = 1$$

Forma matricial

$$\begin{bmatrix} -0,9 & 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & -0,8 & 0,4 \\ 0,6 & 0,6 & -0,6 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \pi_A \\ \pi_B \\ \pi_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Punto b)

A) $-0,9\pi_A + 0,2\pi_B + 0,2\pi_C = 0$
B) $0,3\pi_A - 0,8\pi_B + 0,4\pi_C = 0$
C) $0,6\pi_A + 0,6\pi_B - 0,6\pi_C = 0$
D) $\pi_A + \pi_B + \pi_C = 1$

<u>Resolvemos el Sistema y obtenemos el estado estable:</u>

$$\pi_A = 0,18$$
$$\pi_B = 0,32$$
$$\pi_C = 0,50$$