Práctica Cadenas de Markov: Ejercicio 06.

Investigación Operativa UTN FRBA 2020
Curso: I4051
Resolución: Juan Piro
Docente: Martín Palazzo

Práctica Cadenas de Markov: Ejercicio 06.

En una comunidad hay 3 supermercados (S1, S2, S3) existe la movilidad de un cliente de uno a otro. El 1 de septiembre, 1/4 de los clientes va al S1, 1/3 al S2 y 5/12 al S3 de un total de 10.000 personas. Cada mes el S1 retiene el 90 % de sus clientes y pierde el 10 % que se va al S2. Se averiguó que el S2 solo retiene el 5 % y pierde el 85 % que va a S1 y el resto se va a S3, el S3 retiene solo el 40 %, pierde el 50 % que va al S1 y el 10 % va al S2.

1. Establecer la matriz de transición
2. ¿Cuál es la proporción de clientes para los supermercados el 1 de noviembre?
3. Hallar el vector de probabilidad estable.

Datos iniciales (I)

Tres estados posibles:

- Cliente de S1
- Cliente de S2
- Cliente de S3

“El 1 de septiembre, 1/4 de los clientes va al S1, 1/3 al S2 y 5/12 al S3 de un total de 10.000 personas.”

p(t=0):{ 1/25, 1/3 , 5/12 }   Con t=0 al 1 de Septiembre

Datos iniciales (III): Grafo asociado

S1:

- Retiene el 90%
- El 10% se mueve a S2

S2:

- Retiene el 5%
- El 85% se mueve a S1
- El 10% se mueve a S3

S3:

- Retiene el 40%
- El 50% se mueve a S1
- El 10% se mueve a S3

Datos iniciales (III): Grafo asociado

S1:

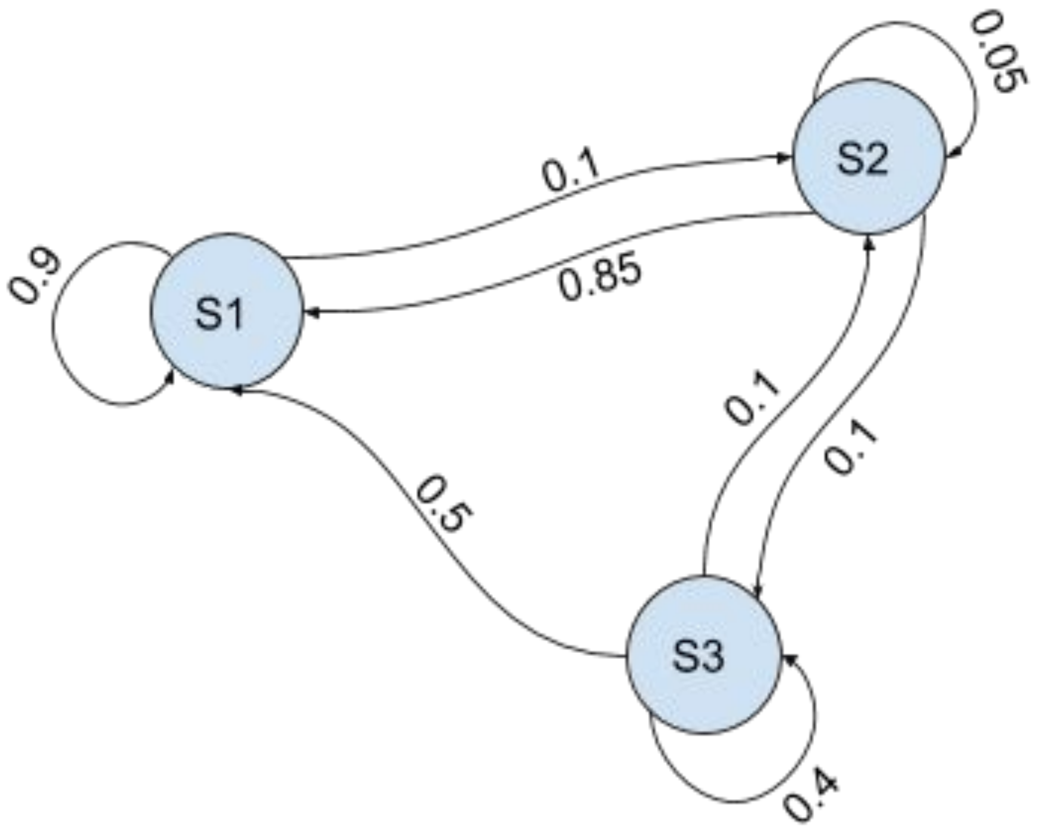
- Retiene el 90%
- El 10% se mueve a S2

S2:

- Retiene el 5%
- El 85% se mueve a S1
- El 10% se mueve a S3

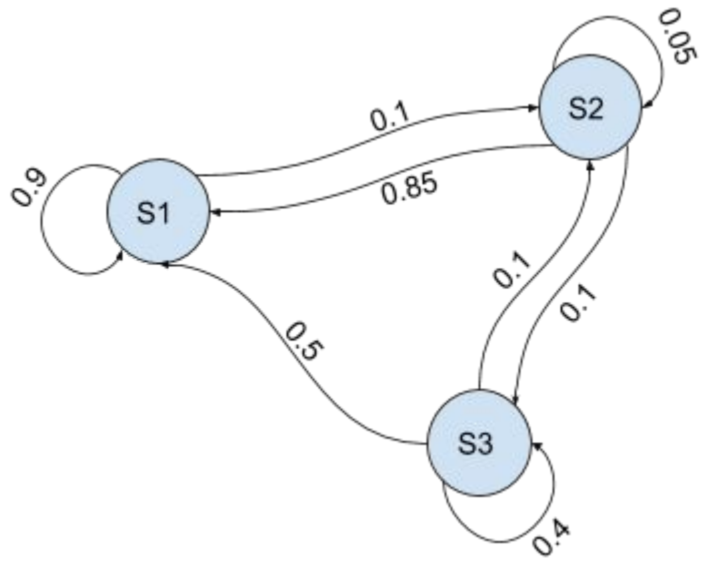
S3:

- Retiene el 40%
- El 50% se mueve a S1
- El 10% se mueve a S3



1. Establecer la matriz de transición

Conociendo el grafo



Generamos

Matriz de transicion

	S1	S2	S3
S1	0.9	0.1	0
S2	0.85	0.05	0.1
S3	0.5	0.1	0.4

$$P^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0.85 & 0.05 & 0.1 \\ 0.5 & 0.1 & 0.4 \end{bmatrix}$$

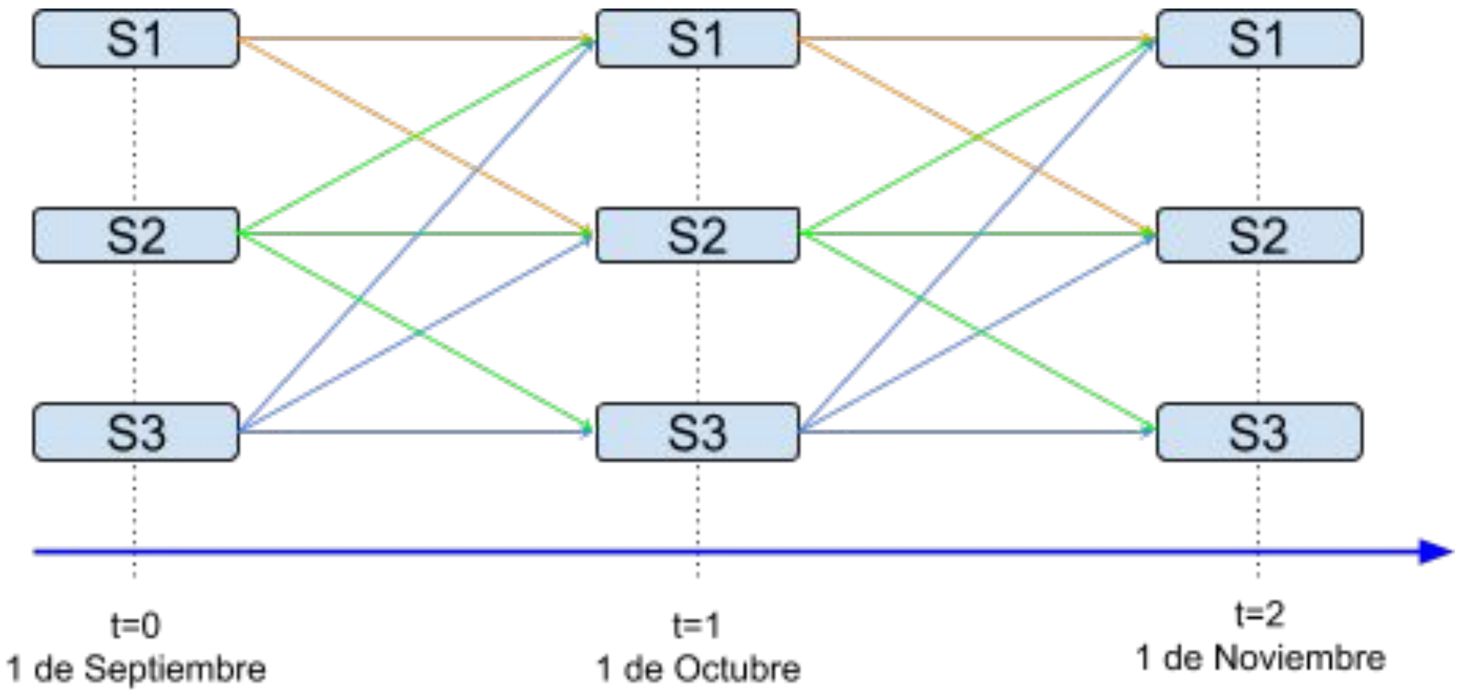
2. ¿Cuál es la proporción de clientes para los supermercados el 1 de noviembre?

$$p^{(n)} = p^{(0)} \times P^{(n)}$$

Donde:

- p(n): Vector de probabilidad de estado luego de n pasos.
- p(0): Vector de probabilidad de estado inicial.
- P(n): Matriz de transición de n pasos.

2. ¿Cuál es la proporción de clientes para los supermercados el 1 de noviembre?



Definimos n=2

2. ¿Cuál es la proporción de clientes para los supermercados el 1 de noviembre?

Necesitamos matriz de transicion de n=2 pasos:

$$P^{(2)} = P^{(1)} \times P^{(1)}$$

$$P^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0.85 & 0.05 & 0.1 \\ 0.5 & 0.1 & 0.4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0.85 & 0.05 & 0.1 \\ 0.5 & 0.1 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Obtenemos:

$$P^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.895 & 0.095 & 0.01 \\ 0.8575 & 0.0975 & 0.045 \\ 0.735 & 0.095 & 0.17 \end{bmatrix}$$

2. ¿Cuál es la proporción de clientes para los supermercados el 1 de noviembre?

Volvemos y remplazamos en (1):

$$p^{(2)} = p^{(0)} \times P^{(2)}$$

$$p^{(2)} = [1/4 \quad 1/3 \quad 5/12] \times \begin{bmatrix} 0.895 & 0.095 & 0.01 \\ 0.8575 & 0.0975 & 0.045 \\ 0.735 & 0.095 & 0.17 \end{bmatrix}$$

$$p^{(2)} = [0.8158 \quad 0.0958 \quad 0.0883]$$

- S1: 8158 Clientes
- S2: 959 Clientes
- S3: 883 Clientes

3. Hallar el vector de probabilidad estable.

Recurrimos:

$$p^{(n)} = p^{(n)} \times P^{(1)}$$

$$[ps_1 \quad ps_2 \quad ps_3] = [ps_1 \quad ps_2 \quad ps_3] \times \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0.85 & 0.05 & 0.1 \\ 0.5 & 0.1 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$(1) \quad ps_1 = 0.9ps_1 + 0.85ps_2 + 0\, ps_3$$

$$(2) \quad ps_2 = 0.1ps_1 + 0.05ps_2 + 0.1ps_3$$

$$(3) \quad ps_3 = 0ps_1 + 0.1ps_2 + 0.4\, ps_3$$

Compatible
Indeterminado

3. Hallar el vector de probabilidad estable.

Recordamos la condicion:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

$$(4) \quad ps_1 + ps_2 + ps_3 = 1$$

3. Hallar el vector de probabilidad estable.

$$(1) \quad ps_1 = 0.9ps_1 + 0.85ps_2 + 0\,ps_3$$

$$(2) \quad ps_2 = 0.1ps_1 + 0.05ps_2 + 0.1ps_3$$

$$(3) \quad ps_3 = 0ps_1 + 0.1ps_2 + 0.4\,ps_3$$

$$(4) \quad ps_1 + ps_2 + ps_3 = 1$$

Calculando con (1), (2) y (4) obtenemos:

$$\pi = [ps_1 \quad ps_2 \quad ps_3] = [8/9 \quad 2/21 \quad 1/63]$$