Investigación Operativa
Simulación
Clase 02

Investigación Operativa UTN FRBA
Equipo: Rodrigo Maranzana, Milagros Bochor, Gabriel Boso, Juan Piro
Docente: Martín Palazzo

Simulación

Primer Parcial

1. ***Simulación***
2. Procesos estocásticos: Cadenas de Markov
3. Filas de Espera
4. Grafos y Redes de Proyectos

Segundo Parcial

1. Programación Lineal
2. Algoritmo del Simplex, Solución Dual y Primal
3. Transporte y Asignación
4. Inventarios

Procéso Estocástico

Es aquel caracterizado por:

- una o más variables aleatorias (VA)
- Las VAs evolucionan en el tiempo bajo cierta distribución de probabilidad.

Objetivo de la simulación

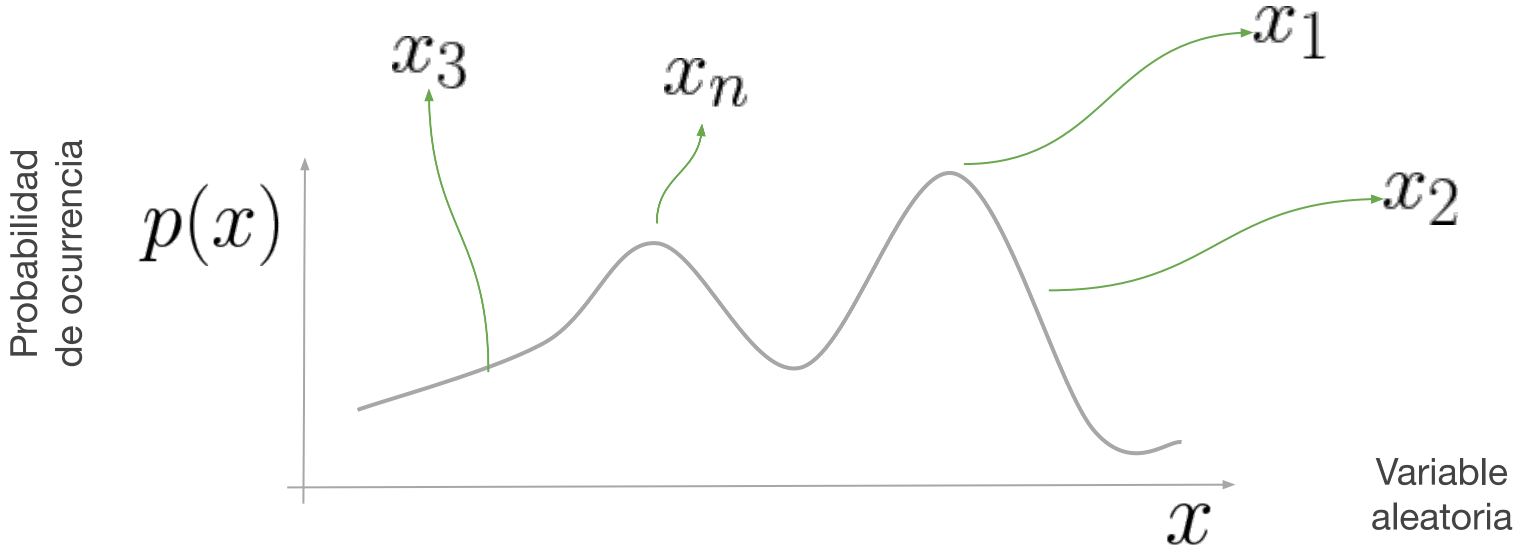
El objetivo que queremos lograr es poder simular un proceso aleatorio (una variable aleatoria) con una función de densidad de probabilidad determinada.

Existen muchas funciones de densidad de probabilidad. Algunas populares como la Normal, la Poisson, la Exponencial y otras arbitrarias determinadas por el problema.

Elementos para definir un sistema de simulación

1. Definir el estado del sistema.
2. Identificar los estados posibles del sistema que pueden ocurrir.
3. Identificar los eventos posibles que cambian el estado del sistema.
4. Contar con un reloj de simulación, localizado en alguna dirección del programa de simulación, que registrará el paso del tiempo (simulado).
5. Un método para generar los eventos de manera aleatoria de los distintos tipos.
6. Una fórmula para identificar las transiciones de los estados que generan los diferentes tipos de eventos.

Muestreo desde una función de densidad de probabilidad



Suponiendo que **conocemos** la función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria, vamos a **muestrear** multiples veces dicha funcion y obtener distintos valores de la variable aleatoria a simular. En el caso contrario si solo tenemos los datos y no conocemos la funcion de densidad que los genero se abordaran estrategias de maxima verosimilitud o metodos de estimacion no parametrica de la densidad [2]

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Maximum_likelihood_estimation
[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Kernel_density_estimation .

Método de la transformada inversa

Simulación muestreando funciones de densidad de probabilidad

Método de la transformada inversa

Objetivo: Generación de observaciones aleatorias a partir de una distribución de probabilidad determinada

Partiendo de una sucesión de números aleatorios uniformes queremos generar una sucesión de observaciones aleatorias que sigan una distribución de probabilidad determinada (p. 890 Hillier).

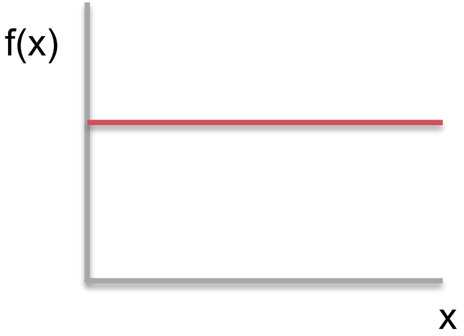
1. Generaremos números aleatorios uniformes (ejemplo: un dado de N caras) entre 0 y 1 representados con ‘U’
2. Establecer **F(x) = u** siendo F(x) la distribución acumulada de probabilidad.
3. Despejar x que será la observación simulada

método de la transformada inversa: distribución exponencial

Función de probabilidad uniforme (dado de n caras)

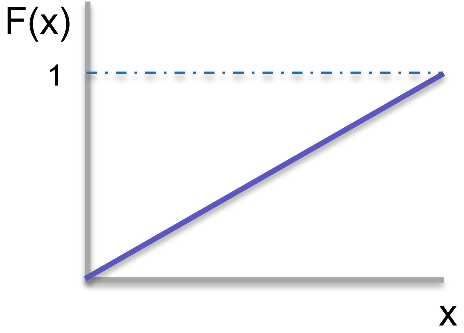
Función de probabilidad Exponencial

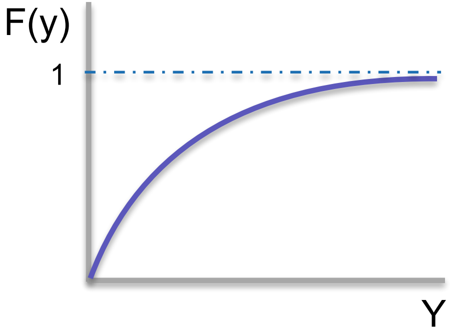
Función de densidad



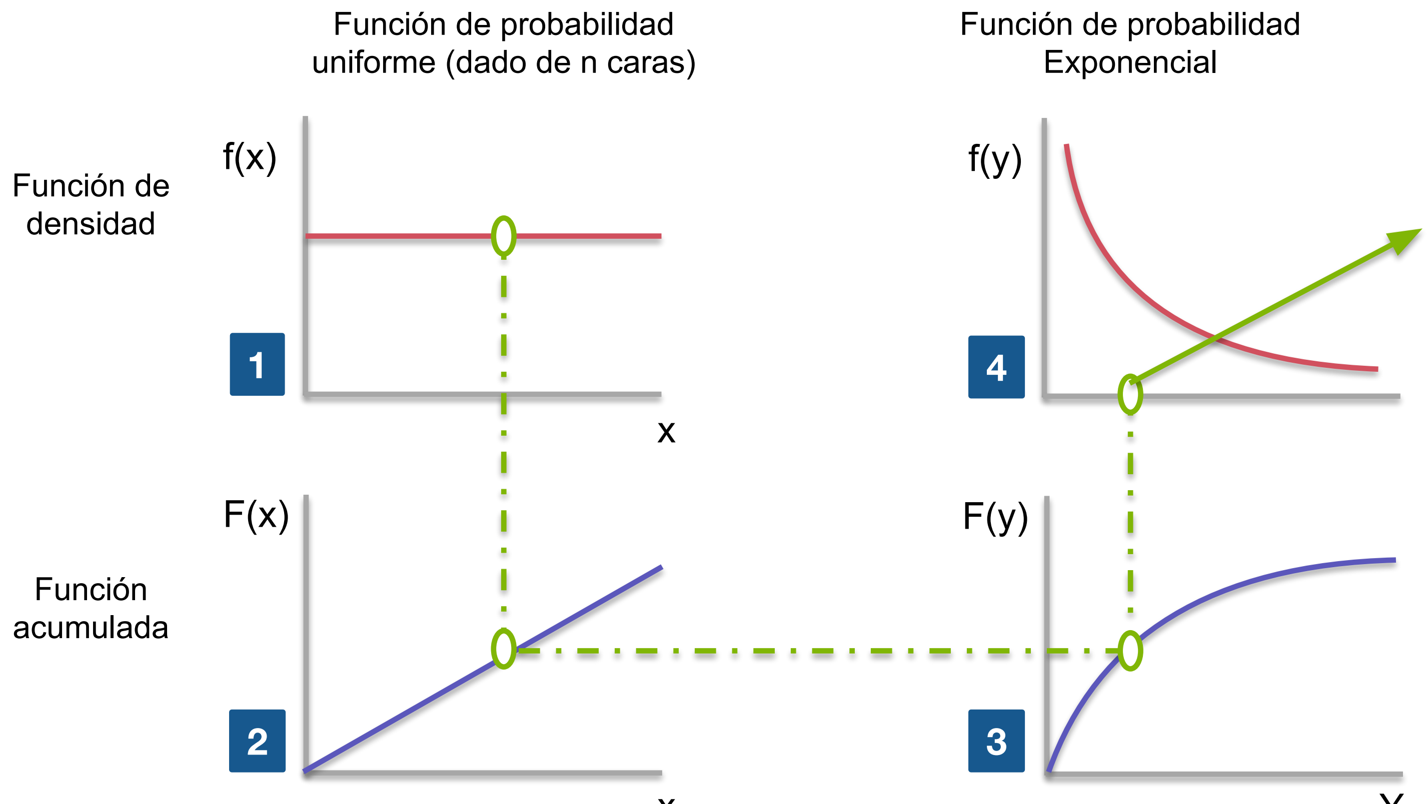
Distribución de probabilidad a simular

Función acumulada



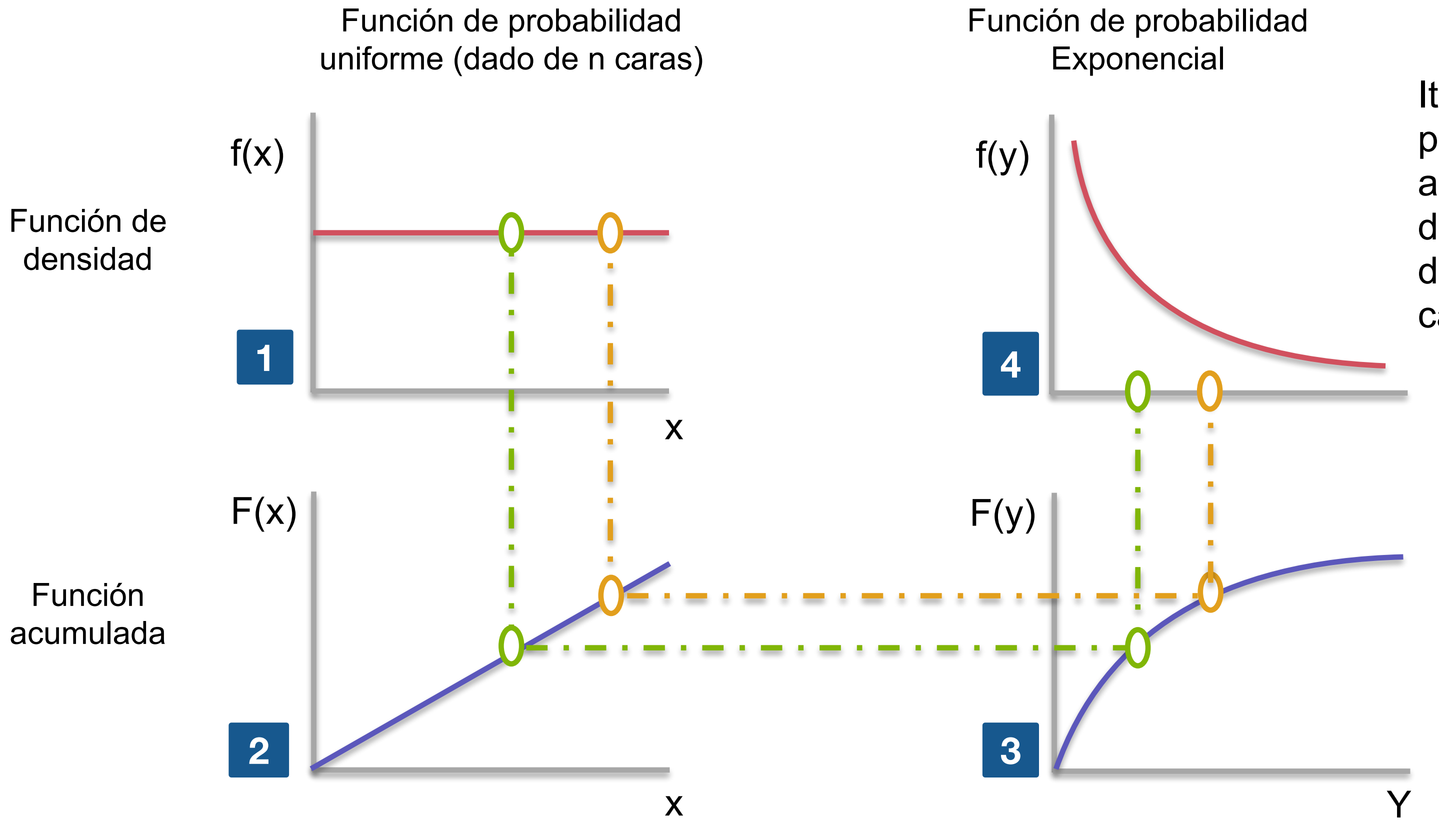


método de la transformada inversa: distribución exponencial



A partir de una distribución uniforme obtenemos el valor aleatorio generado bajo una distribución exponencial. Esto puede aplicarse a cualquier tipo de distribución.

método de la transformada inversa: distribución exponencial



Iterando múltiples veces podemos simular valores aleatorios de una determinada distribución de probabilidad (en este caso exponencial).

Metodo de la transformada inversa: muestreo de una distribución de probabilidad exponencial

Utilizamos la función de densidad de probabilidad **exponencial**, donde x representa el tiempo entre eventos con una **media [1/lambda] -> lambda representa la cantidad media de eventos para un delta t fijo.**

$$f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$$

Esperanza de la variable aleatoria X gobernada por una distribución de probabilidad exponencial.

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$$

Función de densidad acumulada exponencial

$$F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda x}$$

Expresión para calcular el tiempo entre arribos siendo U una v.a. Uniforme entre 0 y 1.

$$u \sim U(0,1)$$

$$\boxed{x = -\left(\frac{1}{\lambda}\right) \ln(1-u)}$$

Muestreo desde una distribución de probabilidad exponencial

$$x = -\left(\frac{1}{\lambda}\right)\ln(1-u)$$

```python
def samplear_exponencial(lam, u):
    return - (1 / lam) * np.log(1-u)
```

simulación: método de la transformada inversa

Ejemplo de simulación partiendo de una distribución de probabilidad específica

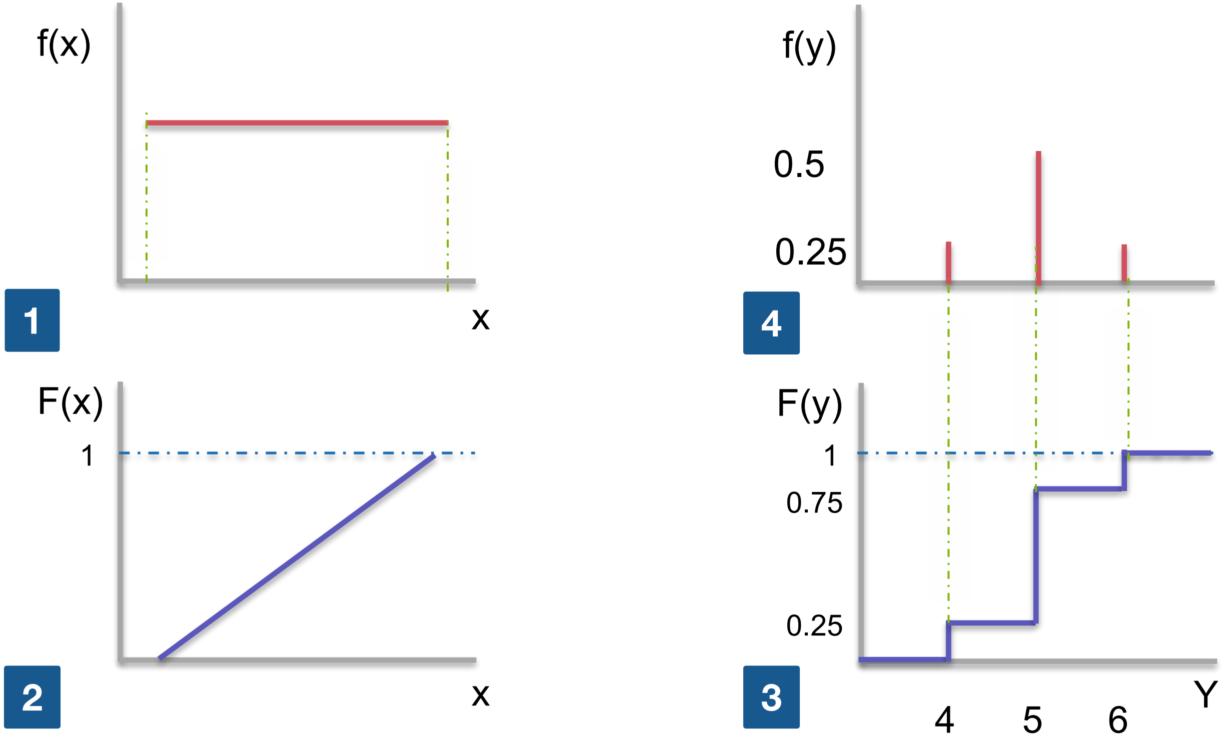
El tiempo de falla en una máquina es cada 4, 5 o 6 días con probabilidades de 0.25, 0.5 y 0.25. Quisiéramos simular las fallas de la máquina. Para eso definimos la distribución de densidad y su acumulada respectiva.

Número de días	Probabilidad	Acumulada
4	0.25	0.25
5	0.5	0.75
6	0.25	1

simulación: método de la transformada inversa

Distribución de probabilidad uniforme.

Function acumulada de distribución uniforme.



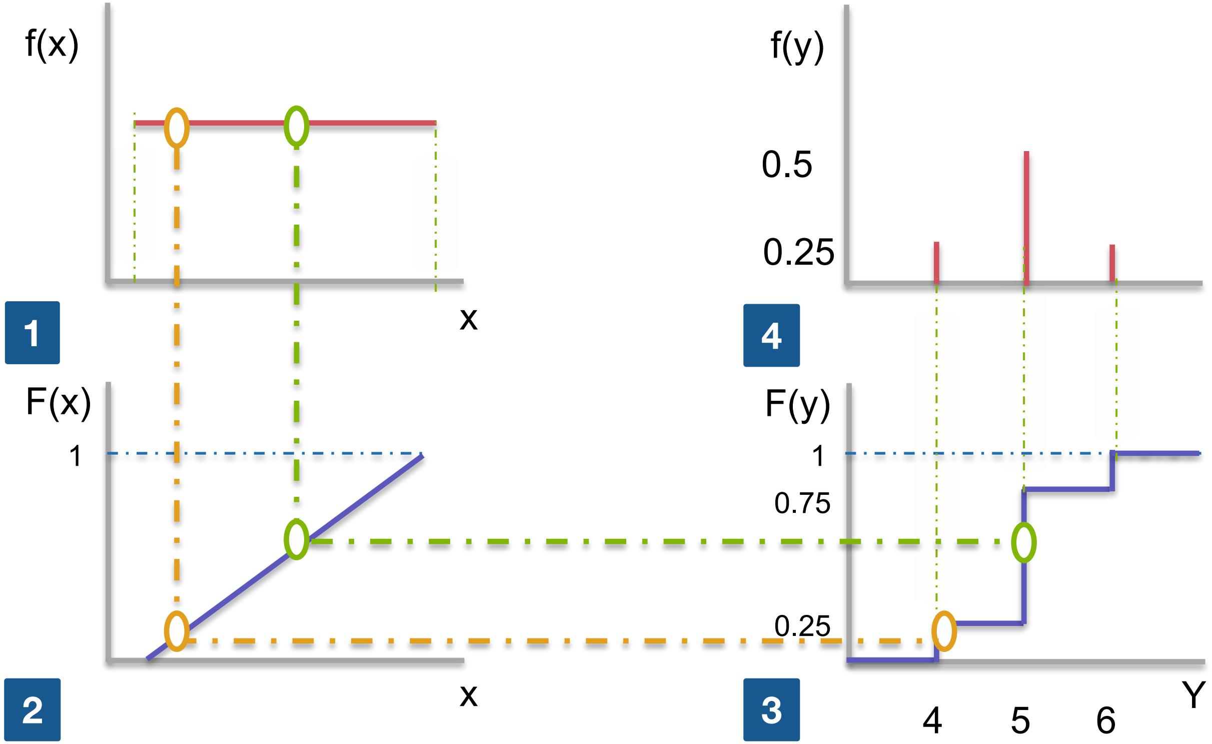
Distribución de probabilidad especial (en partes)

Function acumulada de distribución especial.

simulación: método de la transformada inversa

Distribución de probabilidad uniforme.

Distribución de probabilidad especial (en partes)



Function acumulada de distribución uniforme.

Function acumulada de distribución especial.

arribos con distribución exponencial: 1000 iteraciones y lambda = 4

Ahora que tenemos la función de probabilidad acumulada podemos realizar muestreos aleatorios partiendo desde una distribución de probabilidad uniforme y así poder simular distintos tiempos de falla de la máquina.

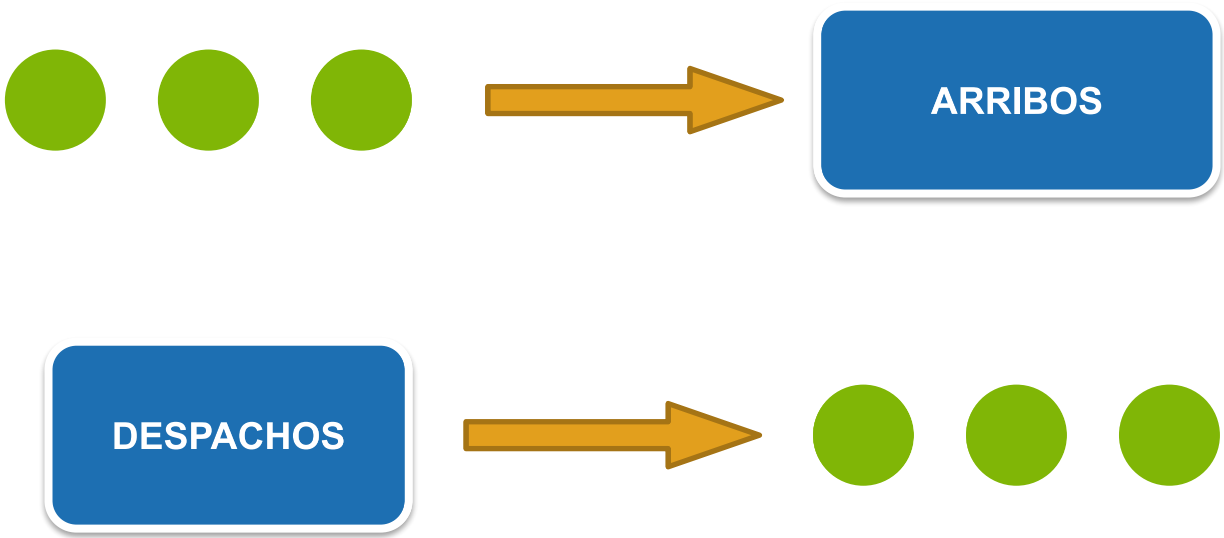
U	Tiempo de falla de la máquina
0.15	?
0.34	?
...	?
0.27	?

Si realizamos este proceso 20 veces, podemos entonces construir un histograma de frecuencias con los tiempos de falla obtenidos y observar si el histograma se aproxima a la distribución de probabilidad de falla de maquinas (densidad).

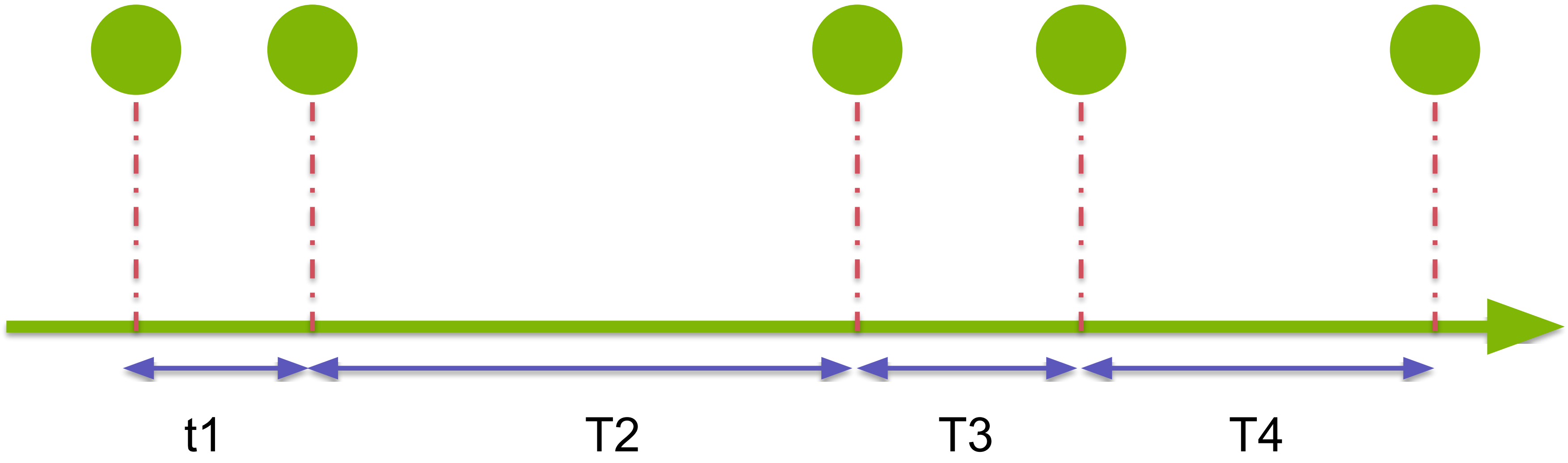
Simulando arribos y despachos

simulacion

¿cuándo usar dist. Exponencial y Poisson?

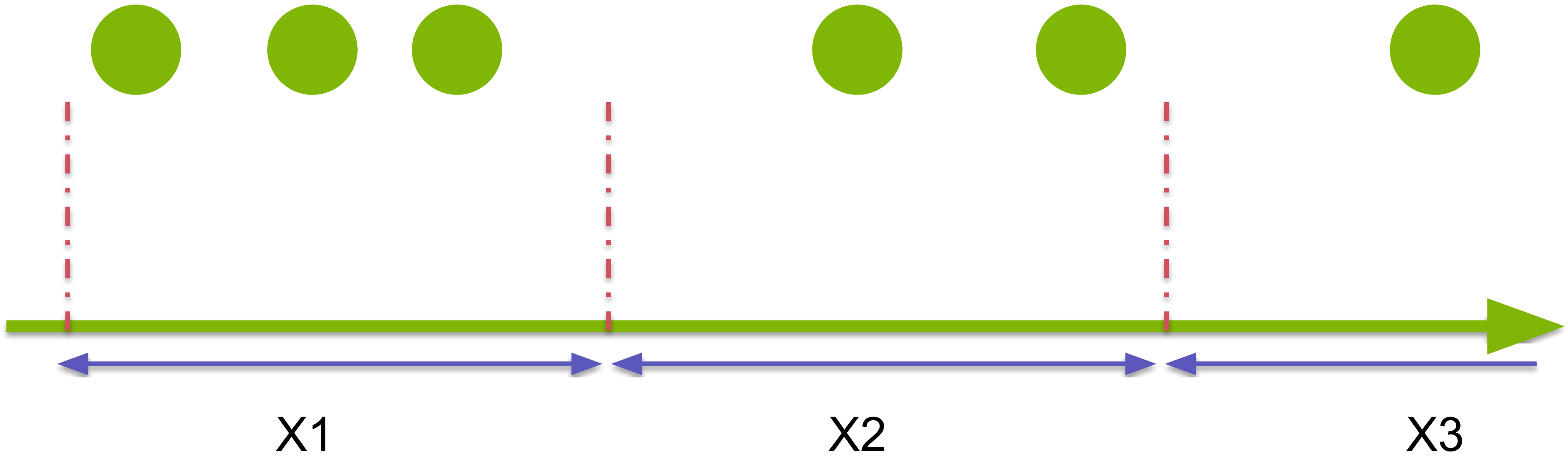


Modelar con distribución exponencial



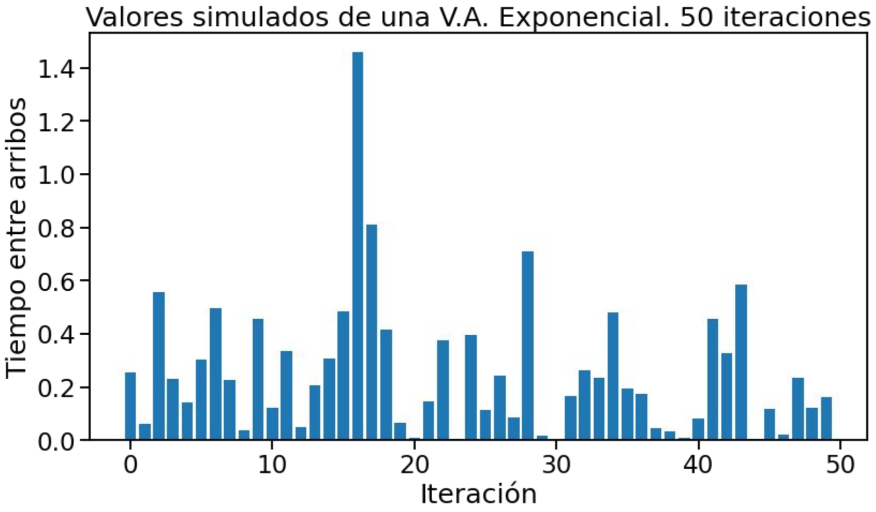
Podemos modelar el tiempo entre eventos. Por ejemplo el tiempo entre arribos

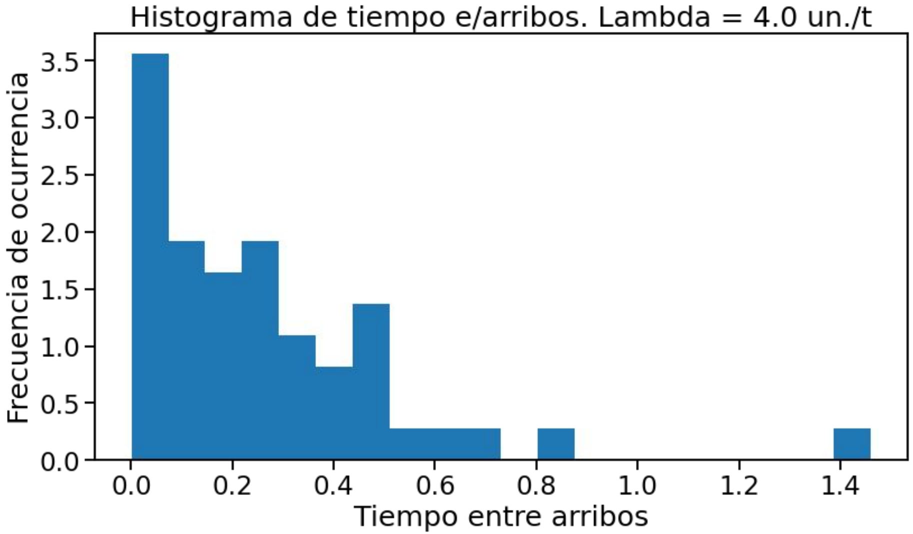
Modelar con distribución Poisson



Podemos modelar la cantidad de eventos en intervalos de tiempo fijos.
Es decir, cantidad de arribos por hora.

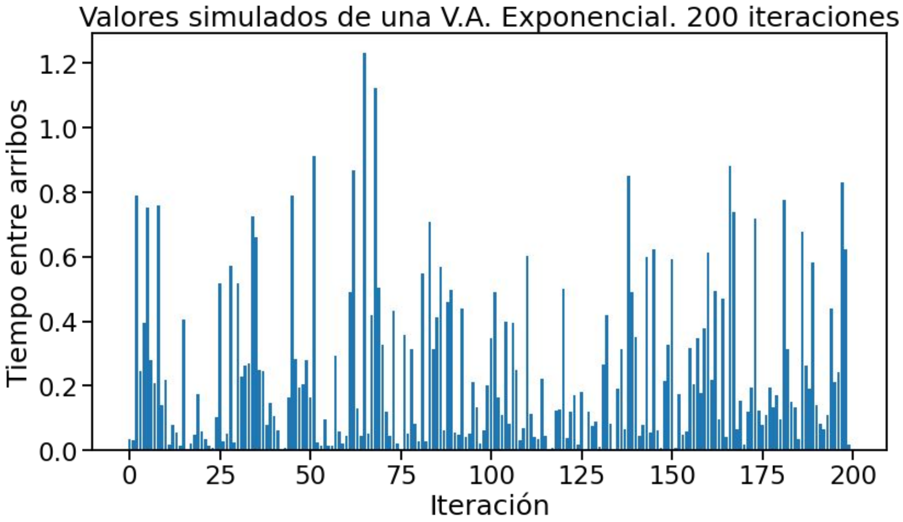
Muestreo de una distribución exponencial

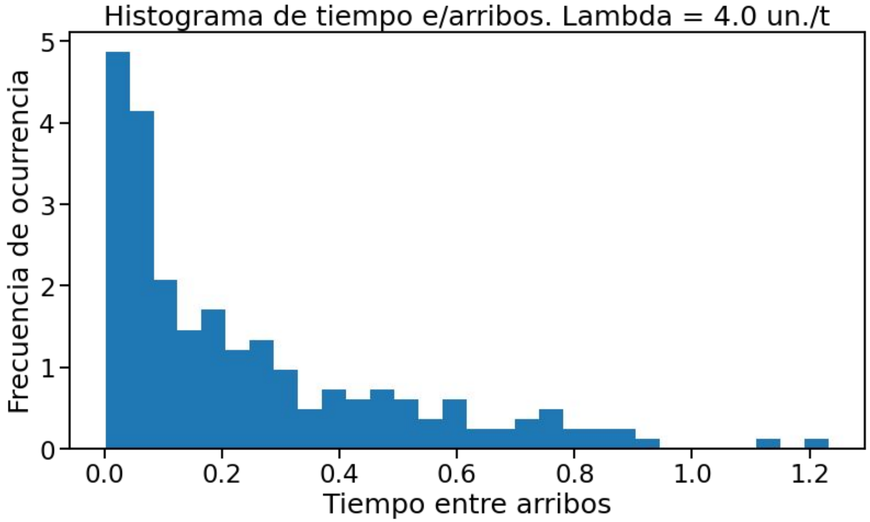




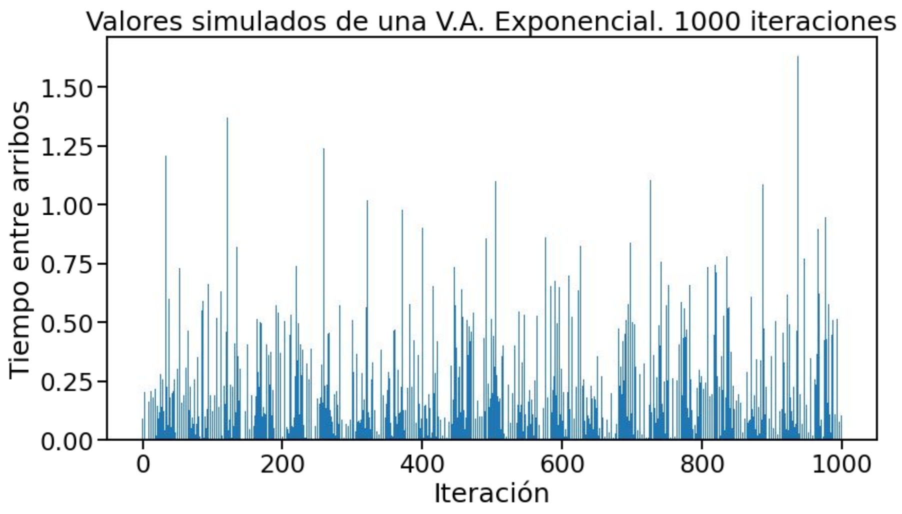
$$x = -\left(\frac{1}{\lambda}\right)\ln(1-u)$$

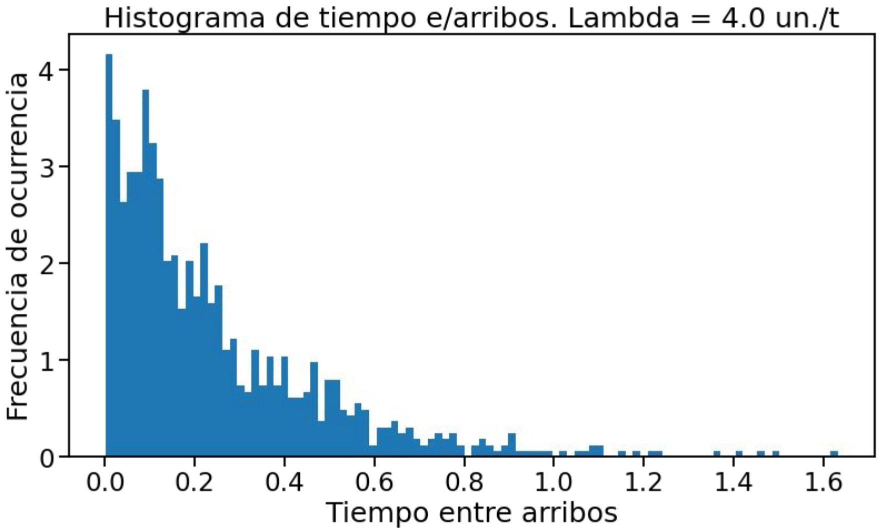
Muestreo de una distribución exponencial



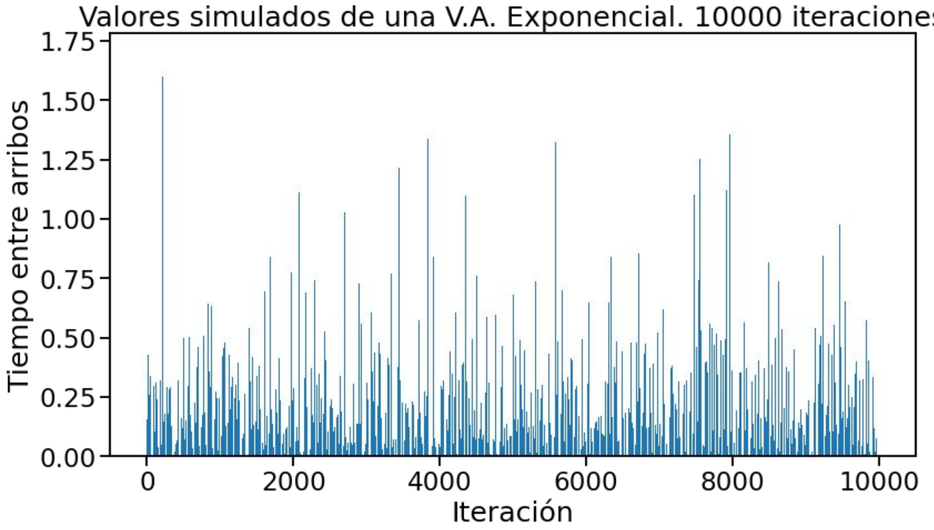


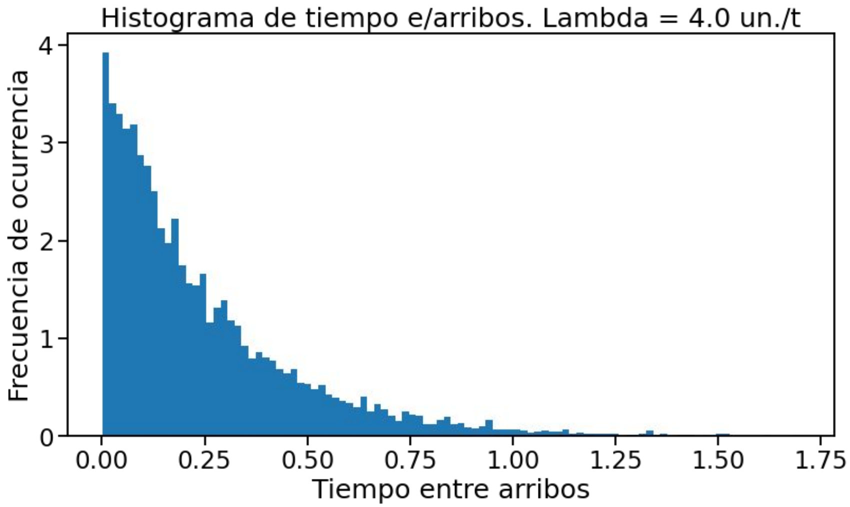
Muestreo de una distribución exponencial



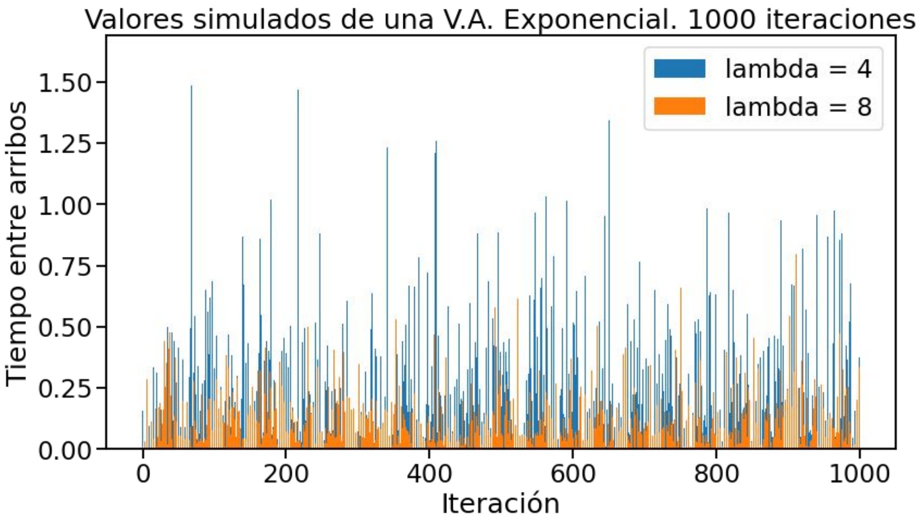


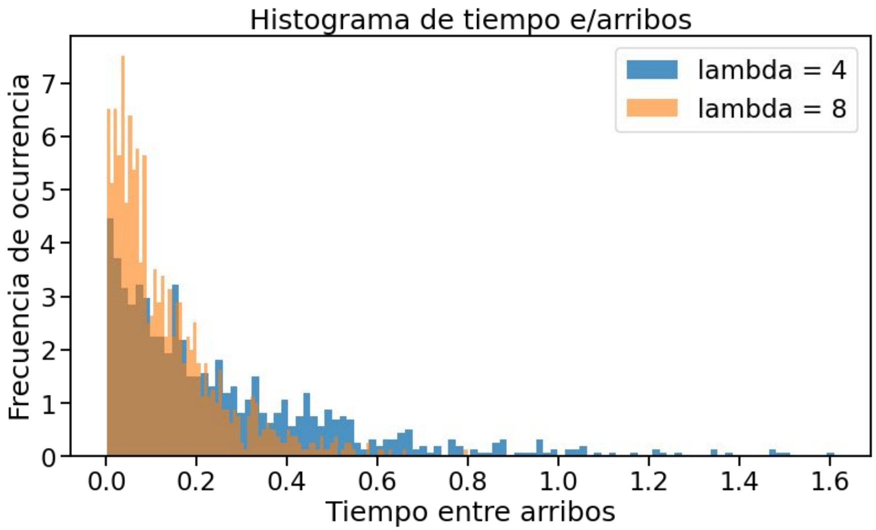
Muestreo de una distribución exponencial





Muestreo de una distribución exponencial





Ejercicios adicionales

Ejercicio de simulación A

Considere una habitación de capacidad infinita donde entran pallets bajo una distribución Poisson con parámetro lambda 4/hora. Definiendo una grilla temporal de 3 horas de longitud simular la cantidad de pallets que habría en la habitación al finalizar cada hora. Para simular puede utilizar como herramienta el cálculo del tiempo entre arribos entre dos pallets con una distribución exponencial. Definir el estado del sistema, graficarlo en función del tiempo y detallar en una tabla la simulación.

Ejercicio de simulación B

Considere ahora un caso con la misma habitación del ejercicio 02 de capacidad infinita con la misma tasa de arribos. También considere ahora que de la habitación salen pallets a una tasa lambda = 5/hora bajo una distribución Poisson. Simular el sistema luego de 4 horas. Definir el estado del sistema, graficarlo en función del tiempo y detallar en una tabla la simulación contemplando los arribos y los despachos.