

Investigación Operativa

Simulación

Clase 01

Investigación Operativa UTN FRBA

Docente: Martín Palazzo

Equipo: Rodrigo Maranzana, Milagros Bochor, Gabriel Boso, Juan Piro

Simulación

Primer Parcial

1. Simulación
2. Procesos estocásticos: Cadenas de Markov
3. Filas de Espera
4. Grafos y Redes de Proyectos

Segundo Parcial

1. Programación Lineal
2. Algoritmo del Simplex, Solución Dual y Primal
3. Transporte y Asignación
4. Inventarios

Proceso Estocástico

Es aquel caracterizado por:

- una o más variables aleatorias (VA)
- Las VAs evolucionan en el tiempo bajo cierta distribución de probabilidad.

Objetivo de la simulación

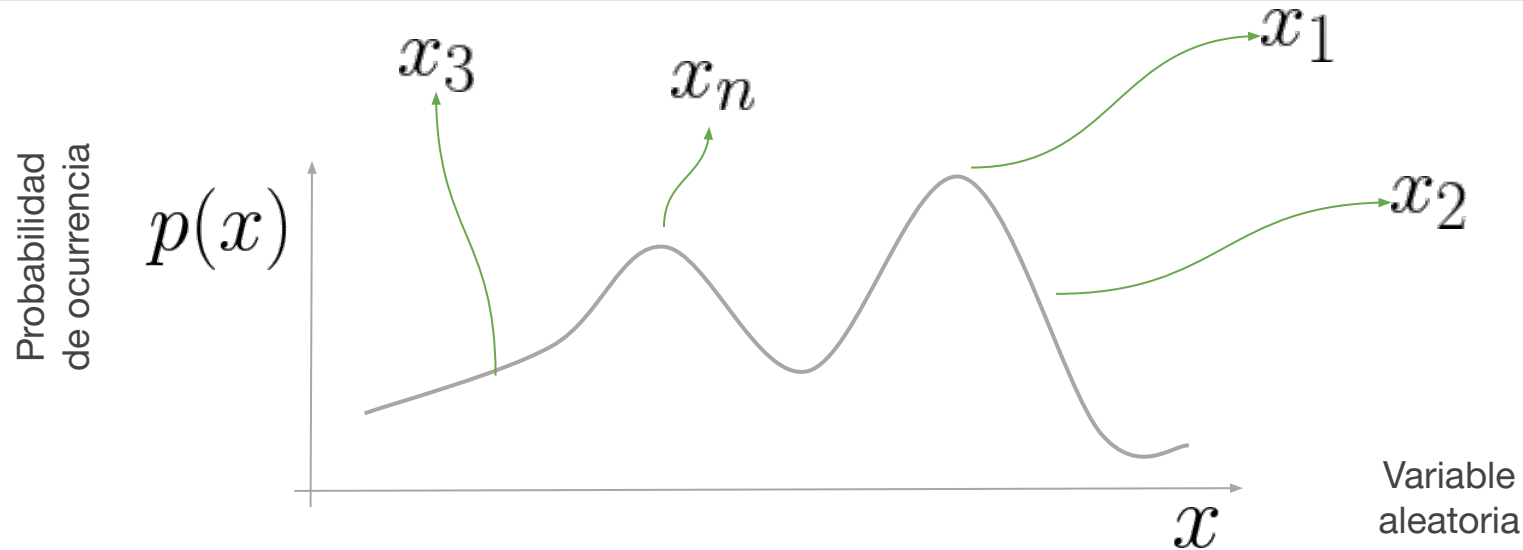
El objetivo que queremos lograr es poder simular un proceso aleatorio (una variable aleatoria) con una función de densidad de probabilidad determinada.

Existen muchas funciones de densidad de probabilidad. Algunas populares como la Normal, la Poisson, la Exponencial y otras arbitrarias determinadas por el problema.

Elementos para definir un sistema de simulación

1. Definir el estado del sistema.
2. Identificar los estados posibles del sistema que pueden ocurrir.
3. Identificar los eventos posibles que cambian el estado del sistema.
4. Contar con un reloj de simulación, localizado en alguna dirección del programa de simulación, que registrará el paso del tiempo (simulado).
5. Un método para generar los eventos de manera aleatoria de los distintos tipos.
6. Una fórmula para identificar las transiciones de los estados que generan los diferentes tipos de eventos.

Muestreo desde una función de densidad de probabilidad

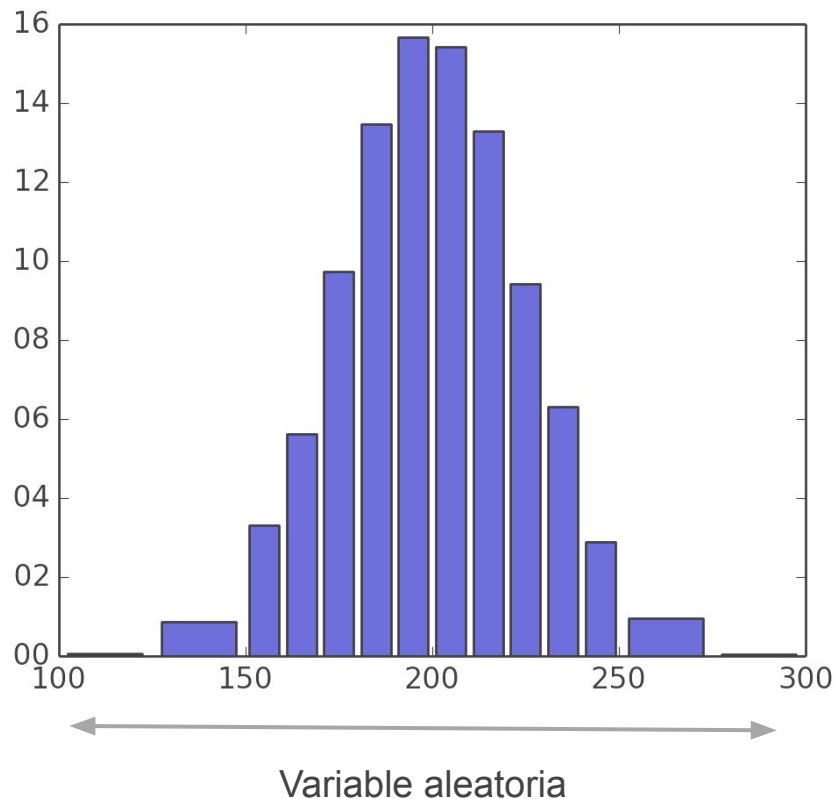


Suponiendo que **conocemos** la función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria, vamos a **muestrear** multiples veces dicha funcion y obtener distintos valores de la variable aleatoria a simular. En el caso contrario si solo tenemos los datos y no conocemos la funcion de densidad que los genero se abordaran estrategias de maxima verosimilitud o metodos de estimacion no parametrica de la densidad [2]

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Maximum_likelihood_estimation

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Kernel_density_estimation .

Histograma de frecuencias



El histograma representa la frecuencia relativa de aparición de un valor de la variable aleatoria mediante la altura de las barras.

En el eje X tendremos los distintos valores que puede tomar una variable aleatoria a observar. En vez de contar valores únicos contamos todos los valores que caigan en un rango, es decir, la primer barra por ejemplo cuenta la cantidad de veces que la VA tomo los valores entre 100 y 125. La segunda barra cuenta la cantidad de veces que la VA tomo valores entre 125 y 150, etc.

Entonces al tomar muchas muestras (muestrear, samplear) una variable aleatoria podemos empíricamente entender cómo se distribuye los valores que la VA puede tomar. Entonces podemos decir que con un histograma podemos aproximar empíricamente la distribución de probabilidad.

Histograma de frecuencias

Cantidad de muestras por bin/caja

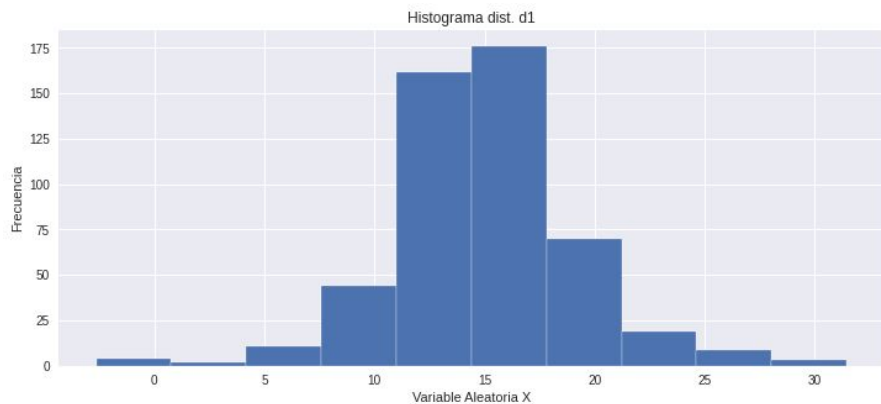
Funcion delta (contador)

$$n_k = \sum \delta(x_{(kj)}) \quad \delta(x_{(ij)}) = 1$$

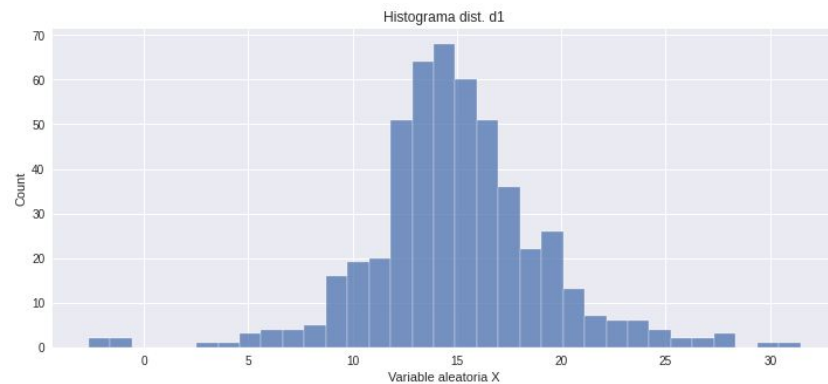
Muestras totales en los K bins

$$n = \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^{n_k} \delta(x_{(kj)})$$

Histograma de frecuencias



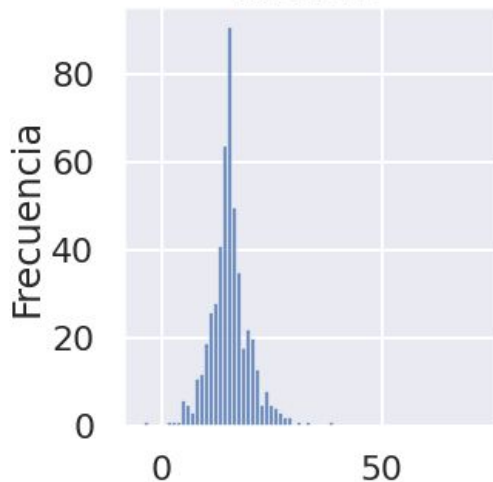
Histograma con bins = 10



Histograma con bins = 40

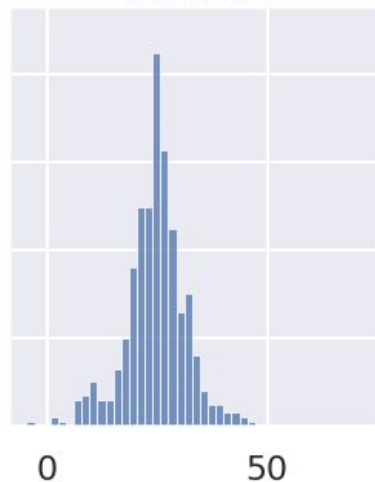
Histogramas

Hist. d1



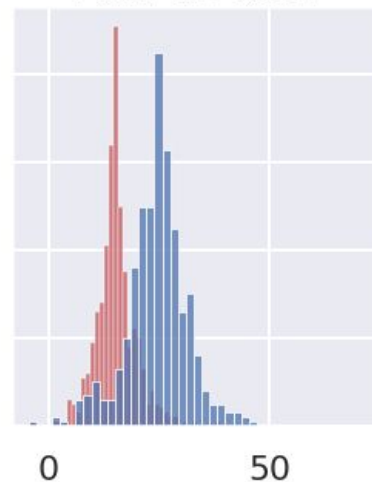
Histograma sobre 500
muestras de una
distribución d1 normal
 $\mu = 15$, $\sigma = 3$

Hist. d2



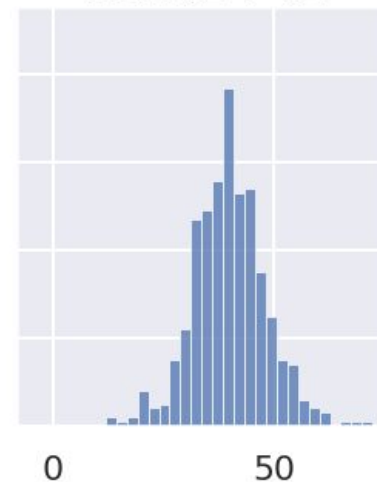
Histograma sobre 500
muestras de una
distribución d2 normal
 $\mu = 25$, $\sigma = 5$

Hist. d1 & d2



Los dos histogramas en
simultáneo.

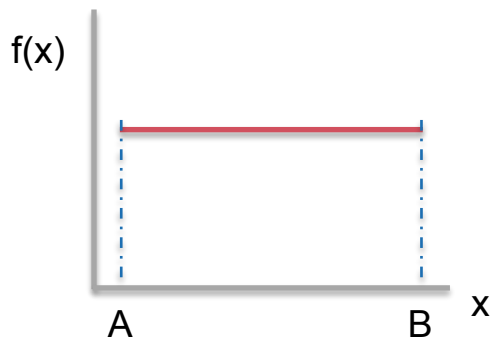
Hist. d1 + d2



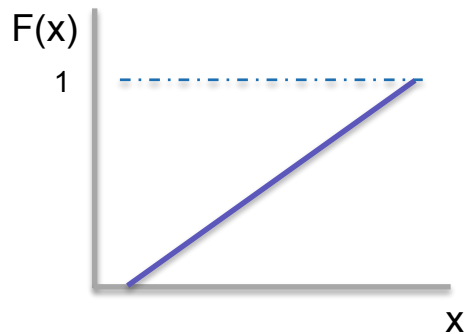
Histograma realizado sobre
la suma de las 2 muestras
obtenidas de las
distribuciones d1 y d2.

distribución uniforme

Distribución de densidad de probabilidad.



Distribución de probabilidad acumulada.



Rango de valores posibles.

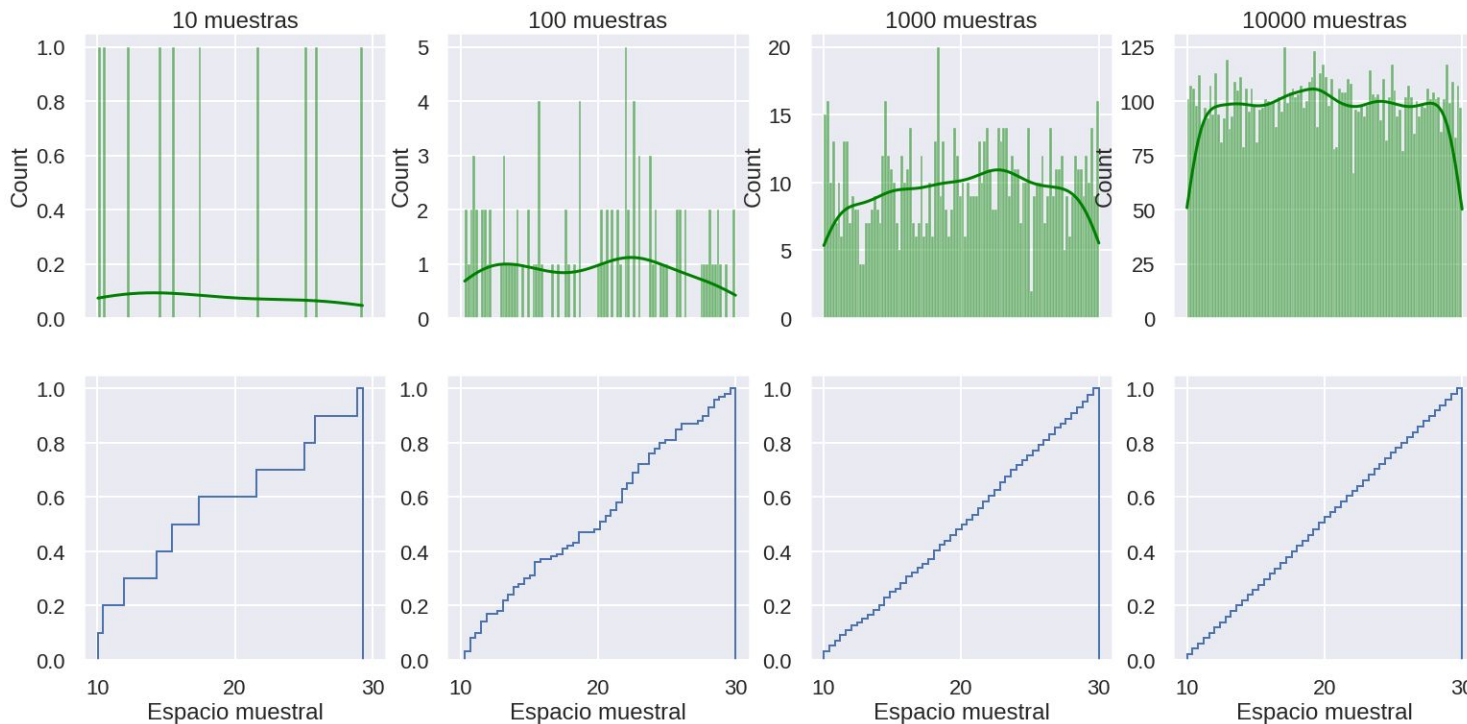
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{if } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{if } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{if } x > b \end{cases}$$

La distribución de probabilidad uniforme asigna la misma probabilidad de ocurrencia a cada valor dentro del rango que puede generar una variable aleatoria.

muestreo desde distribución uniforme

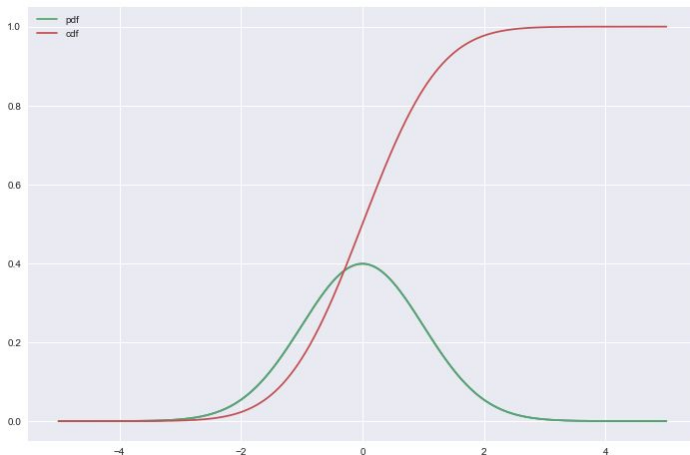
Probabilidad
Empírica
De ocurrencia



Probabilidad
Acumulada de
Ocurrencia

distribución gaussiana - normal

Distribución de densidad (verde) y acumulada (roja) de probabilidad.



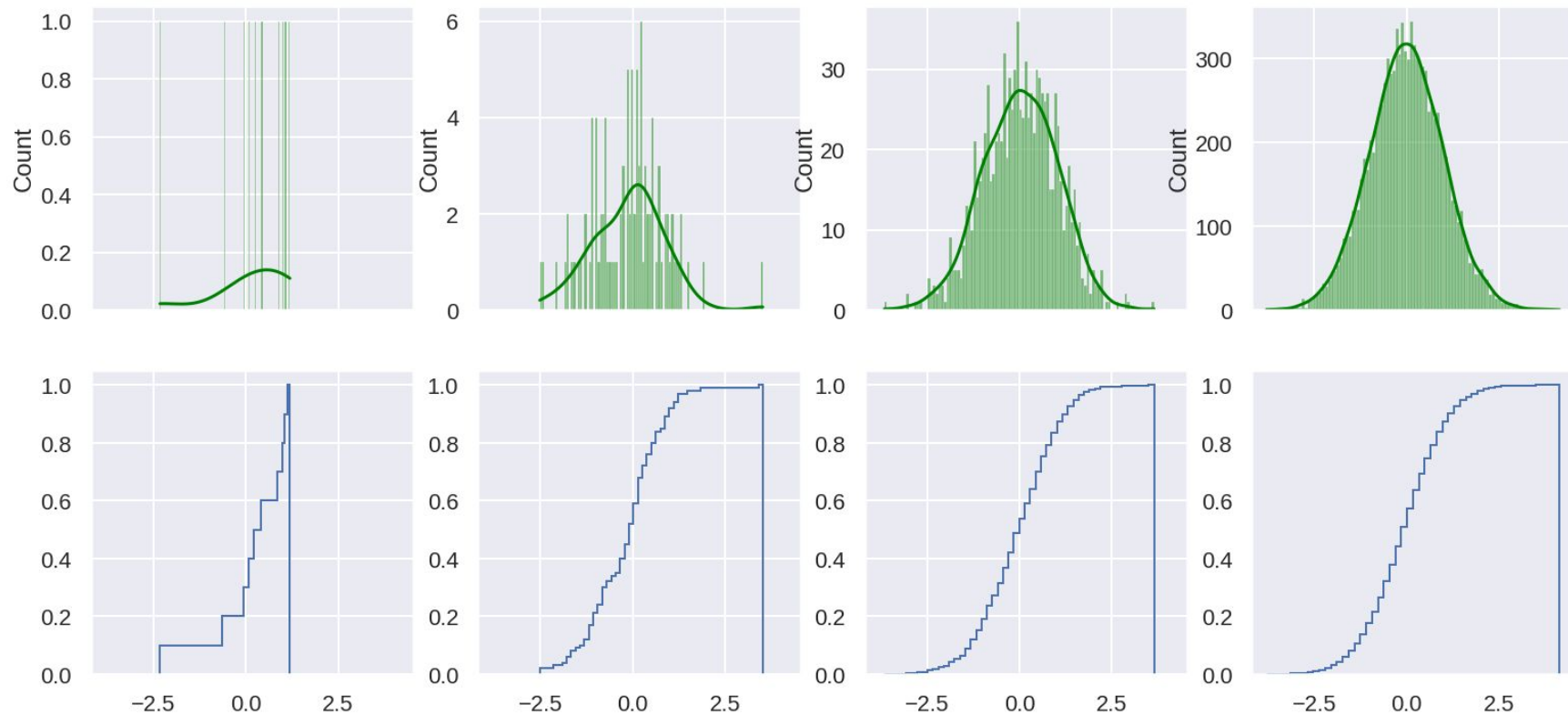
Rango de valores posibles de la VA.

Distribución simétrica de VA continua. El parámetro μ define la esperanza y el sigma el desvío standard.

Suele utilizarse para modelar procesos reales en ciencias naturales, sociales, etc.

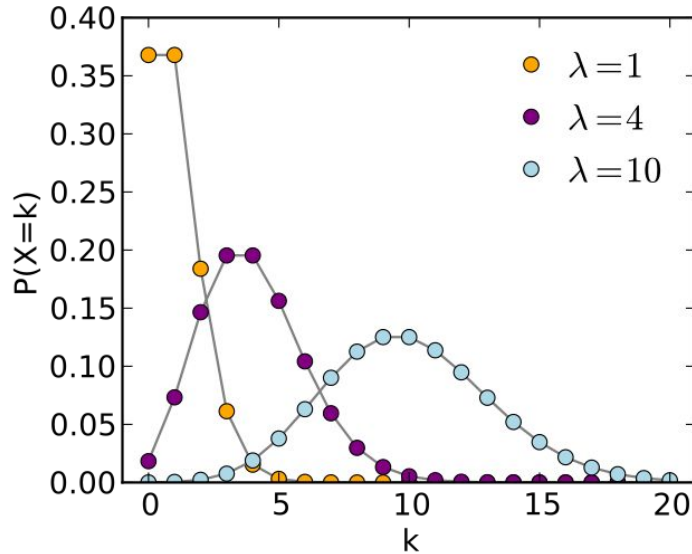
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

Muestreo de una distribución normal



distribución poisson

Distribución de densidad para distintos valores del parámetro lambda.



Rango de valores posibles de la VA.

Distribución simétrica de VA discreta. El parámetro lambda define la frecuencia de ocurrencia de eventos media.

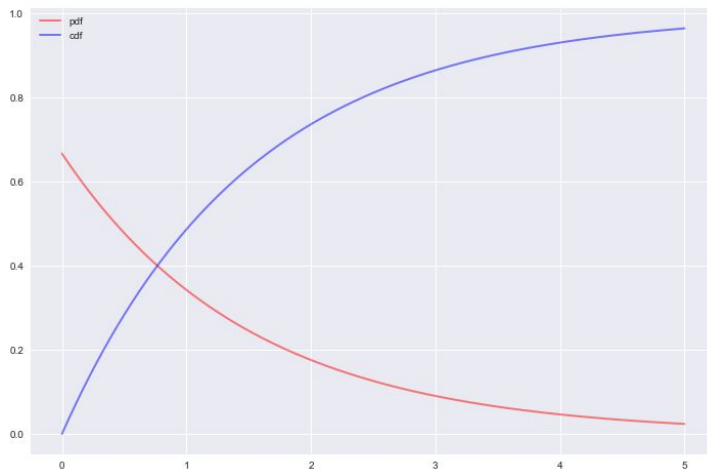
Se utiliza para modelar la **cantidad de eventos discretos en un intervalo de tiempo fijo**.

$$P(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

distribución exponencial

Distribución de densidad (rojo).

Acumulada (azul).



Rango de valores posibles de la VA.

Distribución simétrica de VA continua. El parámetro lambda define la frecuencia de ocurrencia de eventos media (es el mismo lambda que la poisson).

Se utiliza para modelar el **tiempo que transcurre entre dos eventos de un proceso de Poisson.**

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

Caso simulación con 2 dados

simulación: ejercicio 2 dados

Simular un sistema con **2 dados** equilibrados, donde el resultado de cada jugada es la suma del resultado de cada dado. En función del resultado de cada jugada, determinar si conviene apostar de manera recurrente en un sistema de juego donde se gana 1 bitcoin cuando la suma de los 2 dados supera el valor de 6, 7 u 8, según cada caso y se pierde un bitcoin si sale la opción opuesta. Determinar rango, espacio muestral, distribución de probabilidad utilizada en cada dado y en conjunto.

simulación: ejercicio 2 dados

Distribución de probabilidad utilizada: uniforme

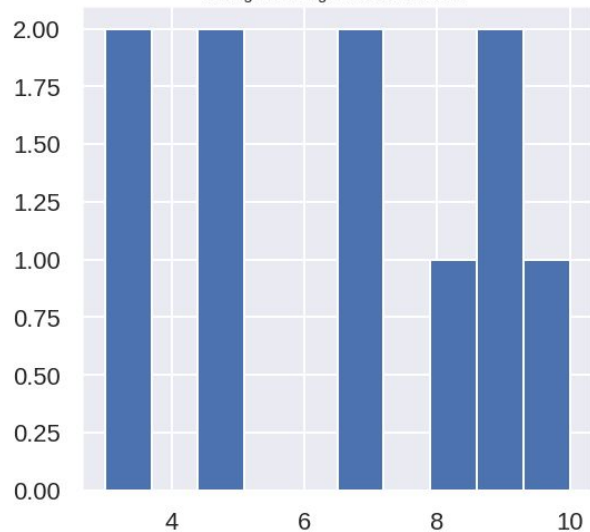
Espacio muestral:

$\{11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 61, 62, 63, 64, 65, 66\}$

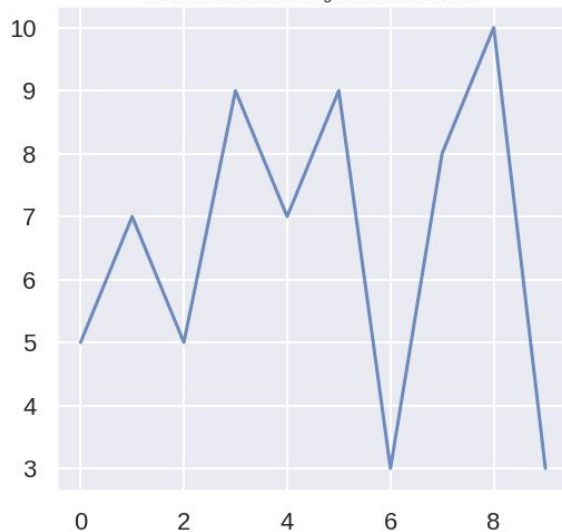
Rango: $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

$n = 10$ muestras

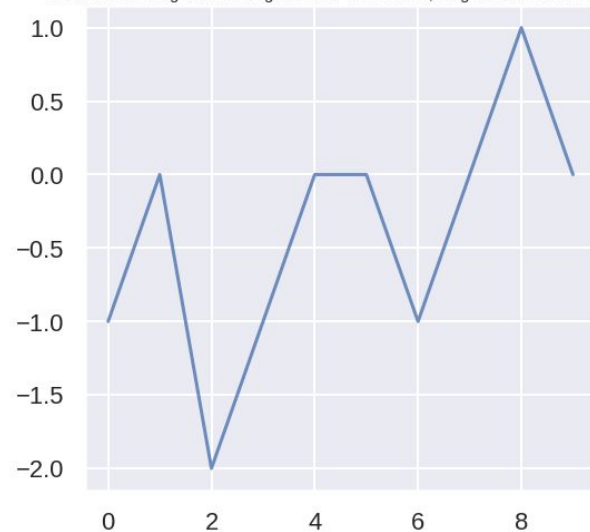
Histograma luego de 10 iteraciones



Evolución de la V.A. luego de 10 iteraciones

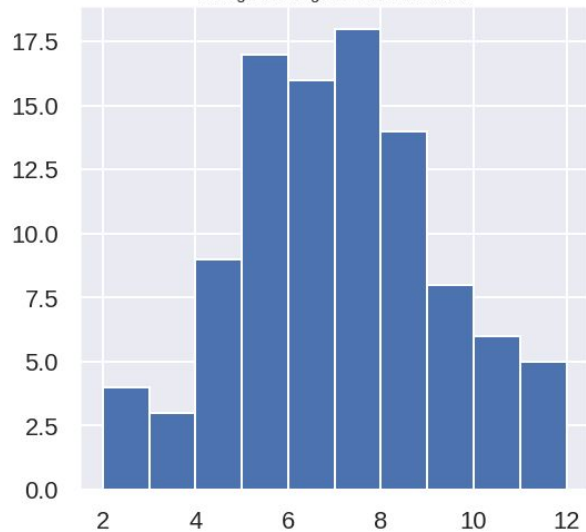


Evolución de la ganancia luego de 10 iteraciones, se gana 1 si resultado > 7

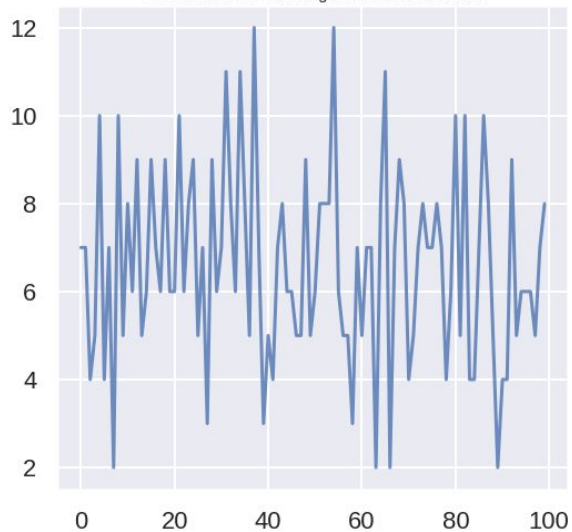


$n = 100$ muestras

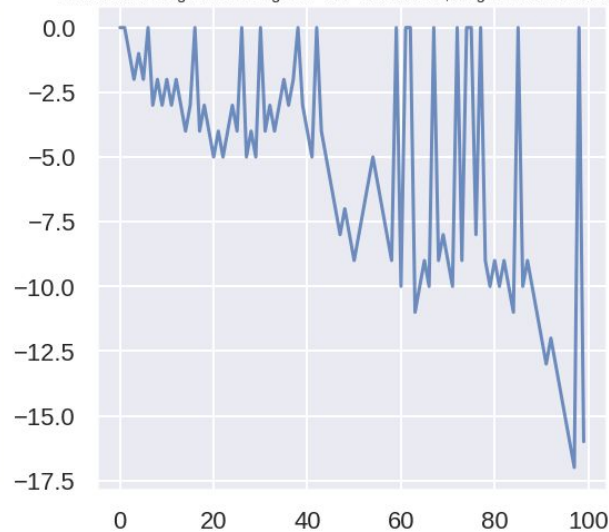
Histograma luego de 100 iteraciones



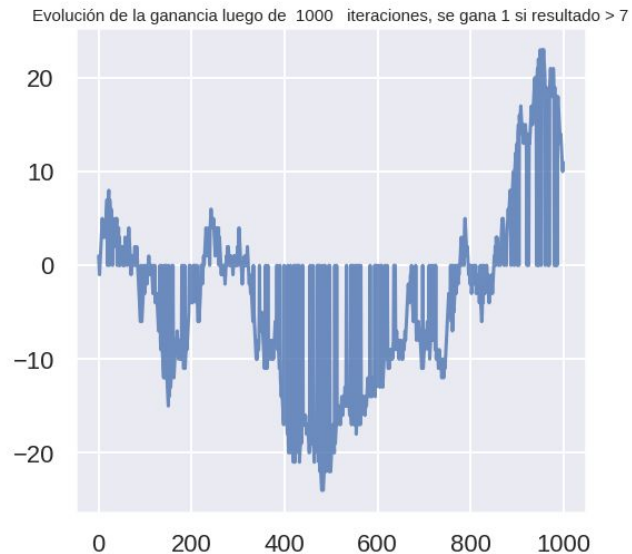
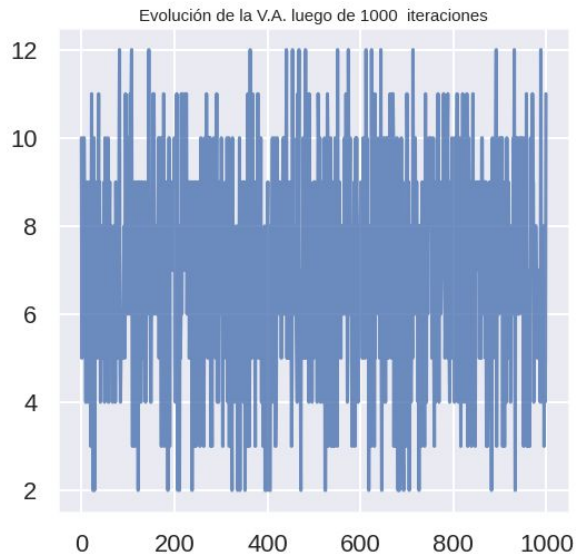
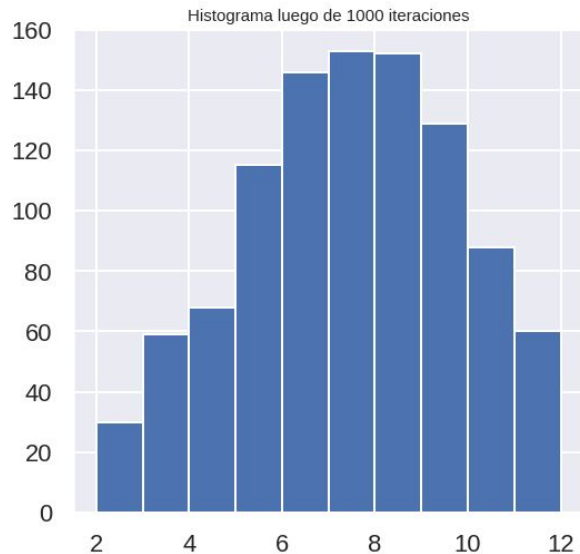
Evolución de la V.A. luego de 100 iteraciones



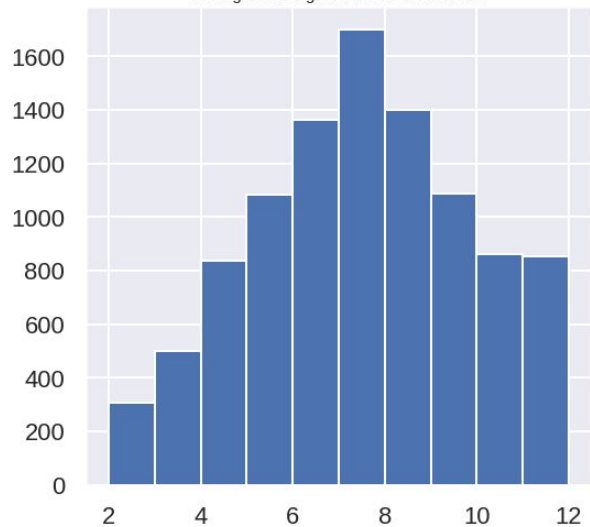
Evolución de la ganancia luego de 100 iteraciones, se gana 1 si resultado > 7



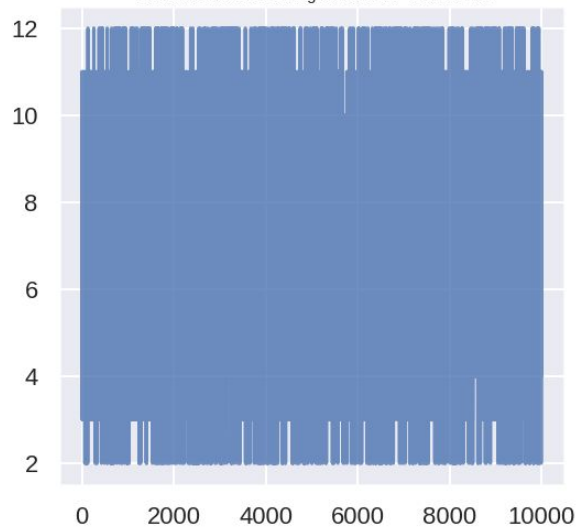
$n = 1000$ muestras



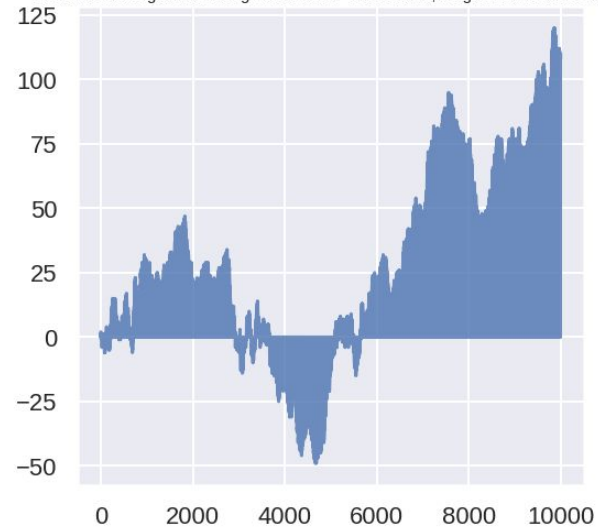
Histograma luego de 10000 iteraciones



Evolución de la V.A. luego de 10000 iteraciones

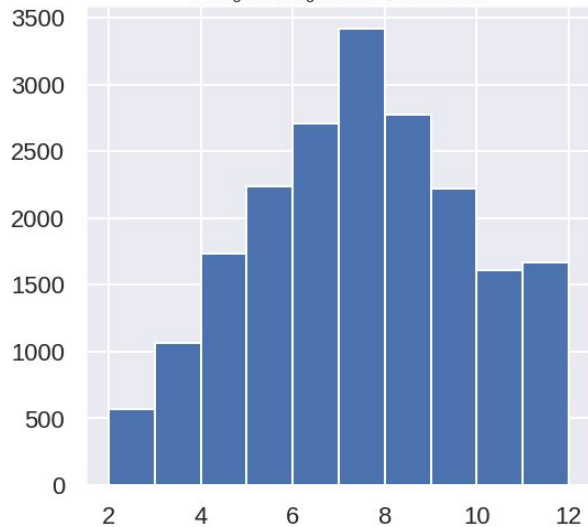


Evolución de la ganancia luego de 10000 iteraciones, se gana 1 si resultado > 7

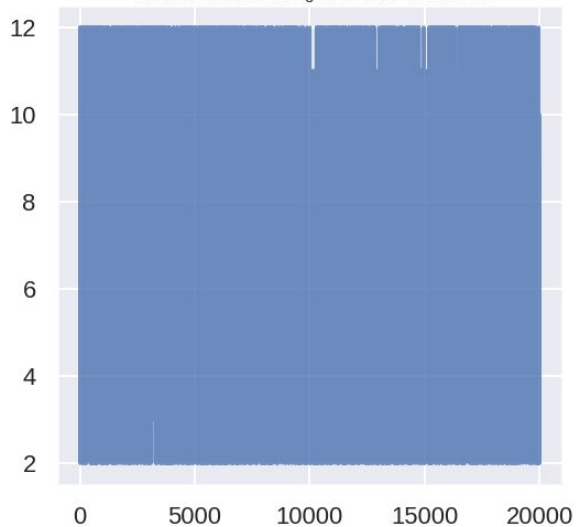


$n = 20000$ muestras

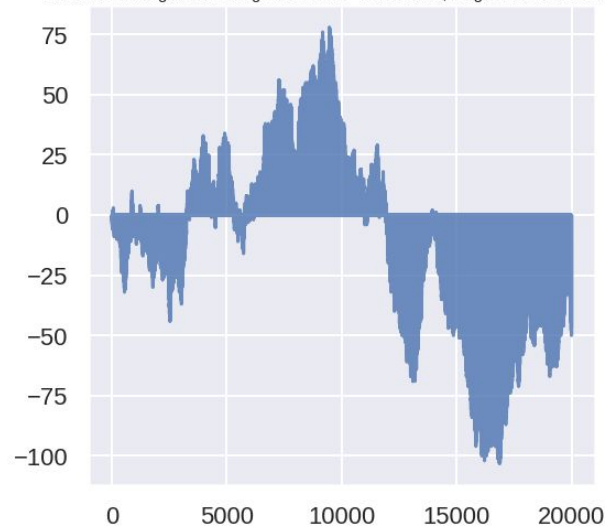
Histograma luego de 20000 iteraciones



Evolución de la V.A. luego de 20000 iteraciones



Evolución de la ganancia luego de 20000 iteraciones, se gana 1 si resultado > 7



Método de la transformada inversa

Simulacion

Método de la transformada inversa

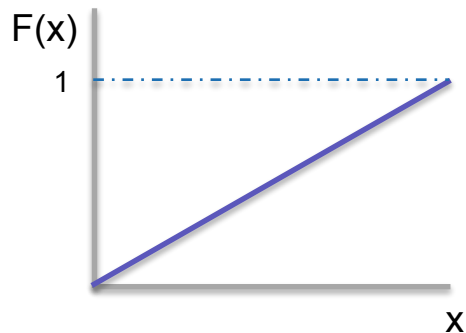
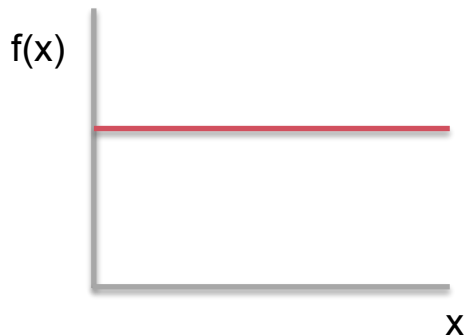
Objetivo: Generación de observaciones aleatorias a partir de una distribución de probabilidad determinada

Partiendo de una sucesión de números aleatorios uniformes queremos generar una sucesión de observaciones aleatorias que sigan una distribución de probabilidad determinada (p. 890 Hillier).

1. Generaremos números aleatorios uniformes (ejemplo: un dado de N caras) entre 0 y 1 representados con 'U'
2. Establecer $F(\mathbf{x}) = u$ siendo $F(x)$ la distribución acumulada de probabilidad.
3. Despejar x que será la observación simulada

método de la transformada inversa: distribución exponencial

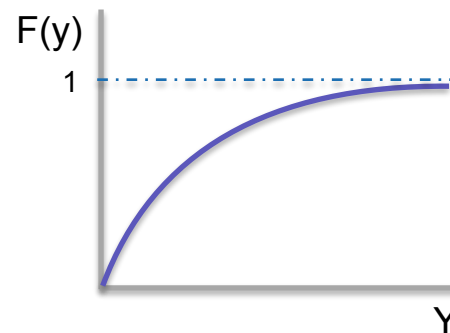
Función de probabilidad
uniforme (dado de n caras)



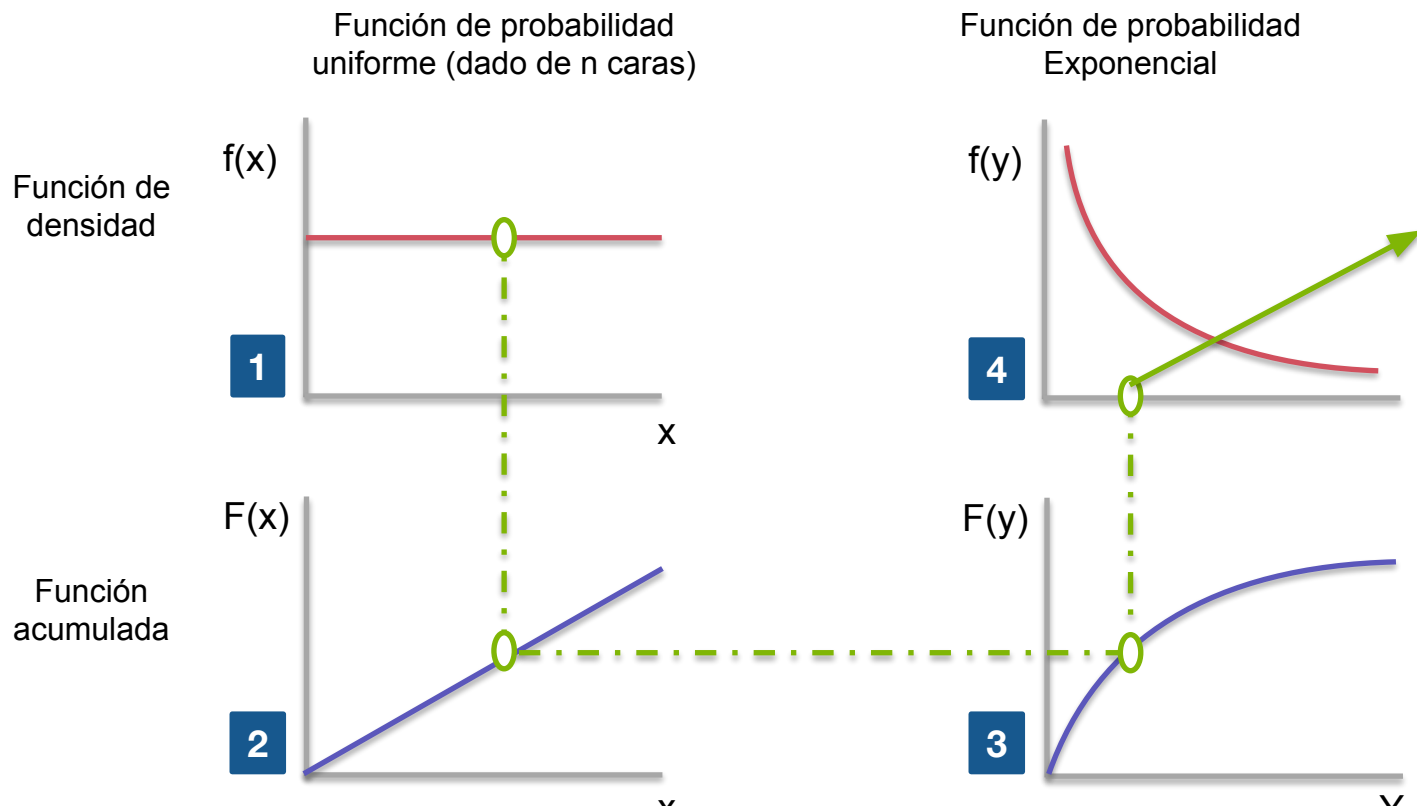
Función de probabilidad
Exponencial



Distribución de
probabilidad a
simular

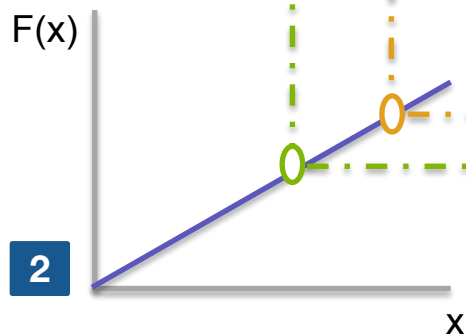
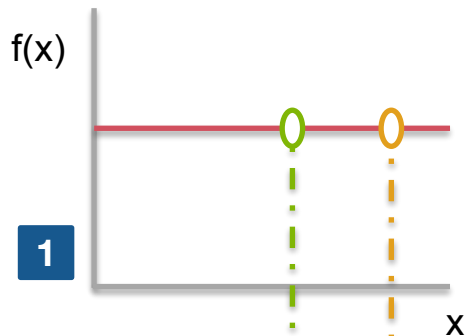


método de la transformada inversa: distribución exponencial

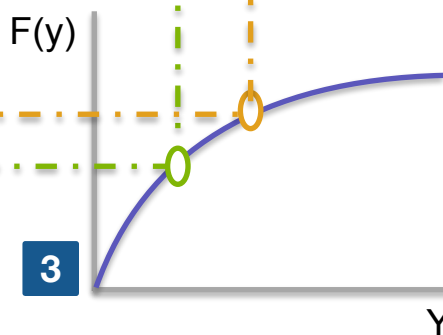
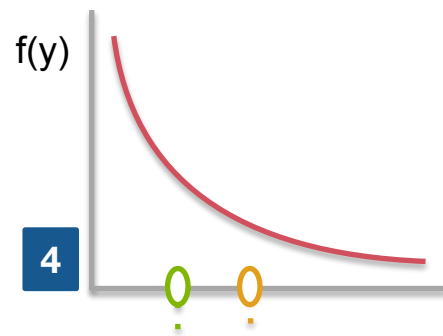


método de la transformada inversa: distribución exponencial

Función de probabilidad
uniforme (dado de n caras)



Función de probabilidad
Exponencial



Iterando múltiples veces podemos simular valores aleatorios de una determinada distribución de probabilidad (en este caso exponencial).

Distribución exponencial: tiempo entre arribos

Utilizamos la función de densidad de probabilidad **exponencial**, donde x representa el tiempo entre eventos con una **media** **[1/lambda]**.

Función de densidad acumulada exponencial

Expresión para calcular el tiempo entre arribos siendo U una v.a. Uniforme entre 0 y 1.

$$u \sim U(0, 1)$$

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

$$F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$x = - \left(\frac{1}{\lambda} \right) \ln(1 - u)$$

simulación: método de la transformada inversa

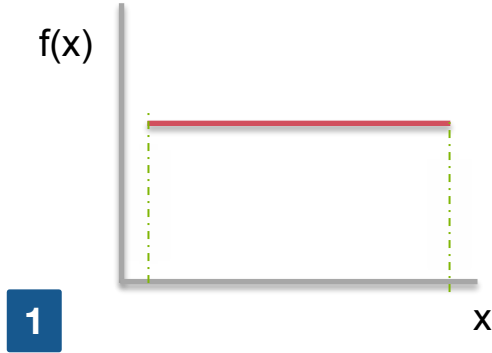
Ejemplo de simulación partiendo de una distribución de probabilidad específica

El tiempo de falla en una máquina es cada 4, 5 o 6 días con probabilidades de 0.25, 0.5 y 0.25. Quisiéramos simular las fallas de la máquina. Para eso definimos la distribución de densidad y su acumulada respectiva.

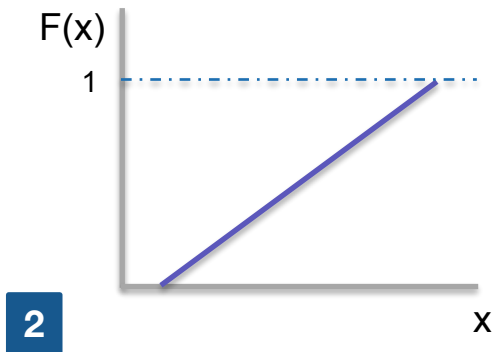
Número de días	Probabilidad	Acumulada
4	0.25	0.25
5	0.5	0.75
6	0.25	1

simulación: método de la transformada inversa

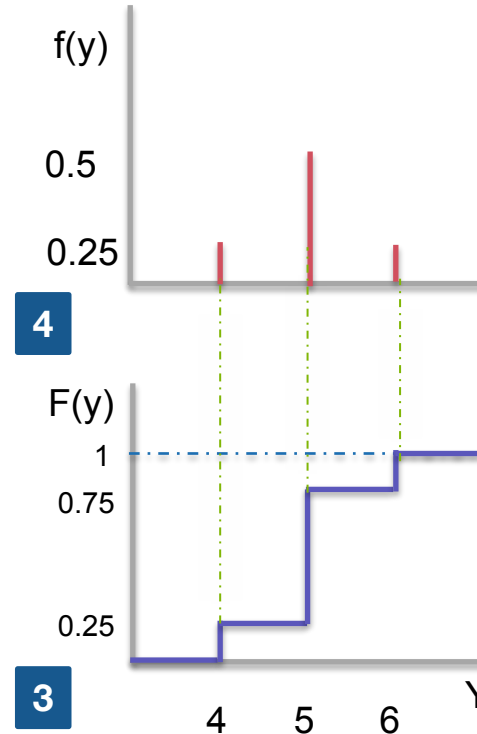
Distribución de probabilidad uniforme.



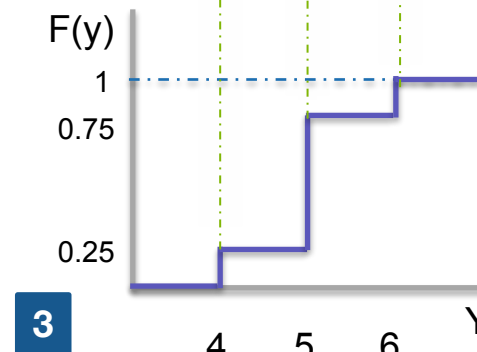
Function acumulada de distribución uniforme.



Distribución de probabilidad especial (en partes)



Function acumulada de distribución especial.



simulación: método de la transformada inversa

