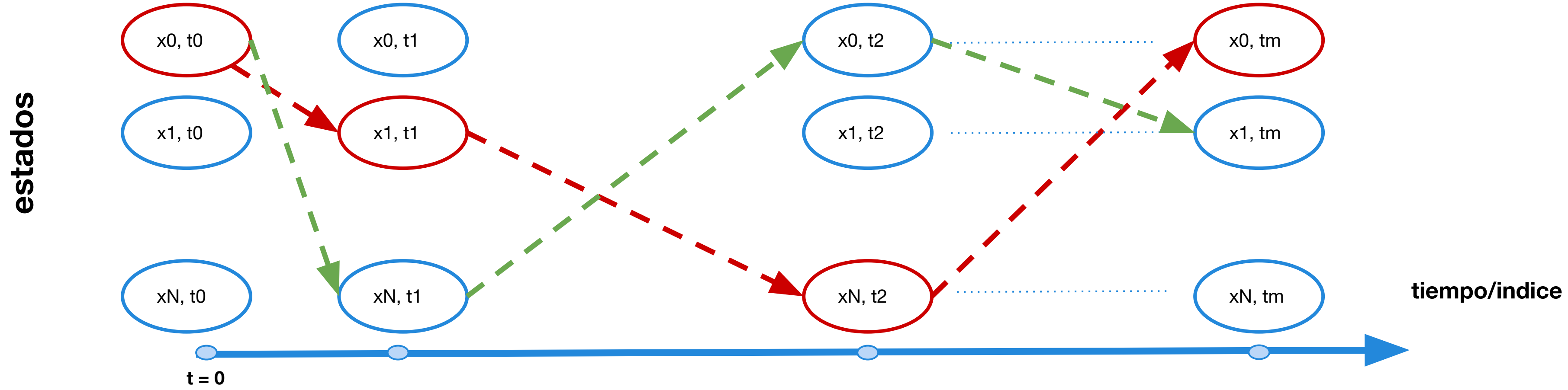
Cadenas de Markov
Clase 05

Investigación Operativa UTN FRBA 2020
Curso: I4051
Docente: Martín Palazzo
Equipo: Rodrigo Maranzana, Milagros Bochor, Gabriel Boso, Juan Piro

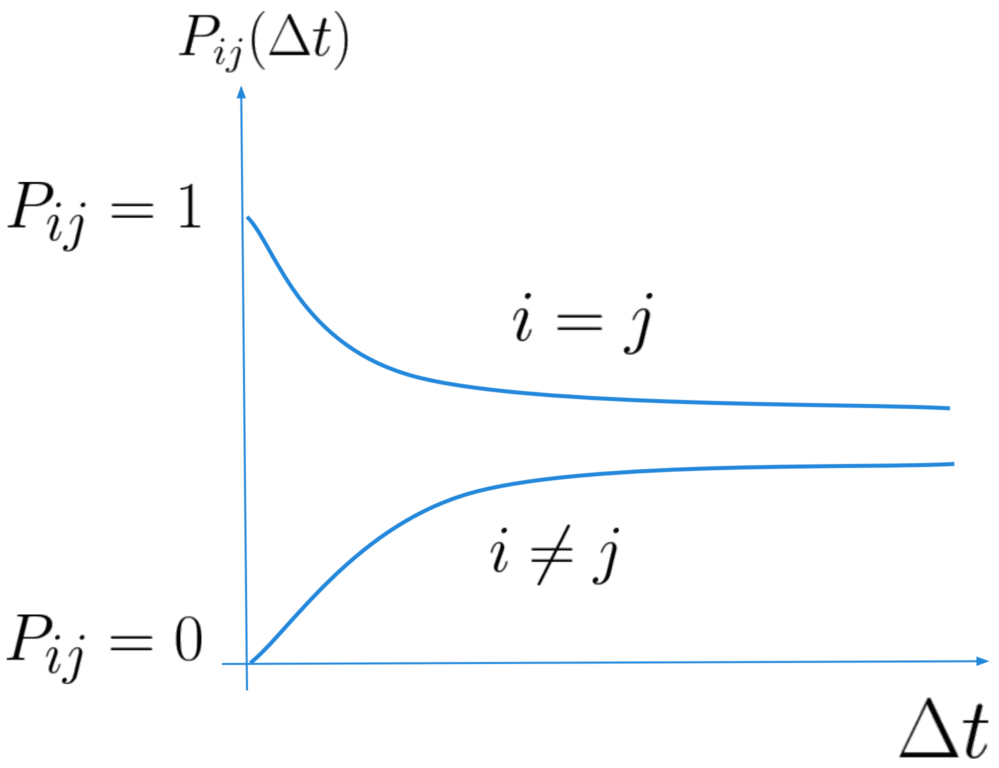
Cadenas de Markov de Parámetro Continuo

Las cadenas de markov de parámetro continuo se utilizan para modelar **estados del sistema discretos** en un tiempo continuo. Esto quiere decir que el parametro no esta discretizado y los cambios ya no pueden medirse en delta T constantes.

Las transiciones entre estados ahora ocurrirán en cualquier momento bajo cierta **tasa de cambio.**



Cadenas de Markov de Parámetro Continuo



$$\lim_{\Delta t \to 0} P_{ij}(\Delta t) = \begin{cases} 0 \text{ if } i = j \\ 1 \text{ if } i \neq j \end{cases}$$

Cadenas de Markov de Parámetro Continuo

Vamos a trabajar con probabilidades de transición entre instantes de tiempo muy próximos, el **parámetro "t" es continuo**. Esta situación conduce a que dichas probabilidades de transición tiendan a cero (es menos probable observar una transición de estado cuando la ventana de tiempo es menor).

$$P\left(X_{t+\Delta t \cong 0} = i \middle| X_t = j\right)$$

De hecho, la probabilidad de transición como vimos anteriormente varía en función de la ventana de tiempo que se asigne.

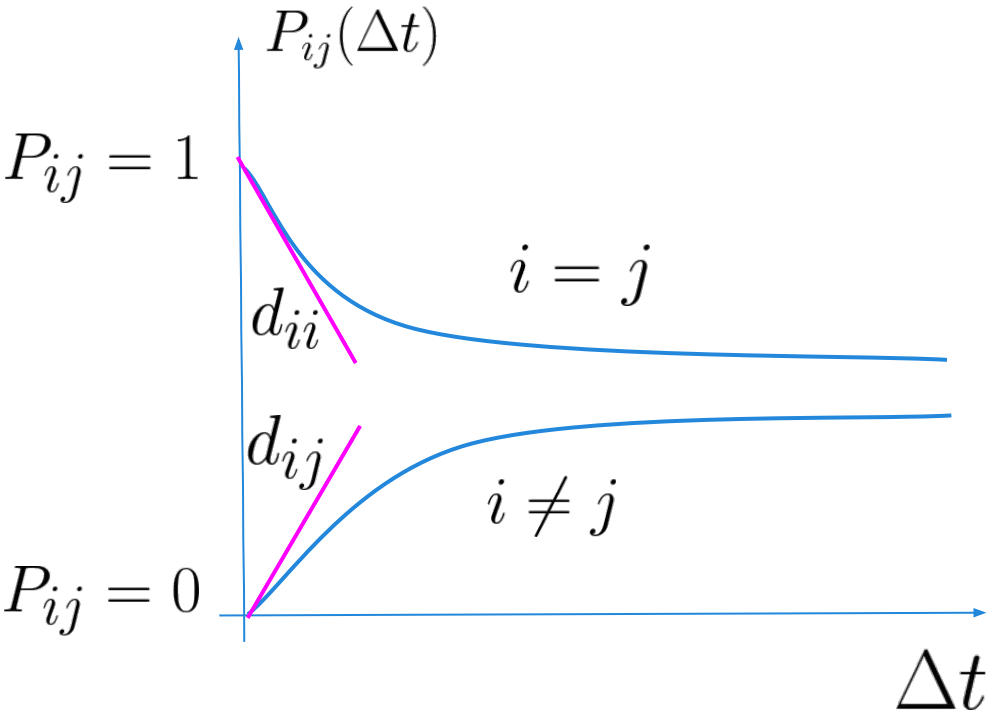
Cadenas de Markov de Parámetro Continuo

Para solucionar este inconveniente, se introduce el concepto de la **derivada de la probabilidad de transición** entre dos estados i y j distintos en $\Delta t=0$. Esta nueva magnitud, llamada **tasa (o intensidad) de transición**, expresa la variación de la probabilidad de transición entre dos estados diferentes ("i" distinto de "j") de la cadena en un intervalo Δt pequeño. Esta tasa es positiva dado que a medida que crece Δt la probabilidad de transicionar a un estado distinto aumenta.

$$d_{ij} = \left[\frac{dp_{ij}^{\Delta t}}{d\Delta t} \right]_{\Delta t}$$

Para estados iguales llamamos **tasa de permanencia** en el estado i que será un valor negativo porque la probabilidad de permanecer en el mismo estado decrece al aumentar t.

Tasas de (intensidad) de transición



$$\lim_{\Delta t \to 0} P_{ij}(\Delta t) = \begin{cases} 0 & \text{if } i = j \\ 1 & \text{if } i \neq j \end{cases}$$

Cadenas de Markov de Parámetro Continuo

Sabiendo que la sumatoria de las probabilidades es 1, derivando todas las probabilidades de transición entonces obtenemos:

$$\sum_{j=0}^{n} P_{ij}^{(\Delta t)} = 1$$

$$\frac{d\left[\sum_{j=0}^{n} P_{ij}^{(\Delta t)}\right]_{\Delta t=0}}{d\Delta t} = \boxed{\sum_{j=0}^{n} d_{ij}^{(\Delta t)} = 0}$$

Cadenas de Markov de Parámetro Continuo

$$d_{ii} + \sum_{j \neq i}^{n} d_{ij}^{(\Delta t)} = 0 \longrightarrow \boxed{d_{ii} = -\sum_{j \neq i}^{n} d_{ij}^{(\Delta t)}}$$

Obtenemos entonces una expresión que relaciona la tasa de transición (tasa de variación de probabilidad de transición) entre distintos estados y la tasa de permanencia en un mismo estado.

Cadenas de Markov de Parámetro Continuo

Con todas las tasas de transición / permanencia del sistema podemos entonces construir una matriz que las agrupe llamada **Matriz de tasas de transición D**. La matriz tendrá tantas dimensiones como estados (similar a la matriz de probabilidad de transición, solo que ahora su contenido en vez de tener probabilidades tendrá derivadas).

$$D = \begin{bmatrix} d_{00} & d_{01} & d_{02} & \dots & d_{0n} \\ d_{10} & d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{20} & d_{21} & d_{12} & \dots & d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n0} & d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

Cadenas de Markov de Parámetro Continuo

Al igual que las cadenas de markov de parámetro discreto, en el caso del parámetro continuo en el régimen permanente también podremos calcular un vector de probabilidad estado estacionario.

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{21} & p_{12} & \cdots & p_{0n} \\ p_{10} & p_{21} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{20} & p_{21} & p_{12} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n0} & p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

Cadenas de Markov de Parámetro Continuo

Podríamos plantear el cálculo del vector de probabilidad en el estado estacionario como lo hicimos anteriormente

$$\begin{bmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{00}(\Delta t) & p_{21}(\Delta t) & p_{12}(\Delta t) & \dots & p_{0n}(\Delta t) \\ p_{10}(\Delta t)) & p_{21}(\Delta t) & p_{12}(\Delta t) & \dots & p_{1n}(\Delta t) \\ p_{20}(\Delta t) & p_{21}(\Delta t) & p_{12}(\Delta t) & \dots & p_{2n}(\Delta t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n0}(\Delta t) & p_{n1}(\Delta t) & p_{n2}(\Delta t) & \dots & p_{nn}(\Delta t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{bmatrix}$$

$$p.P(\Delta t) = p$$

Cadenas de Markov de Parámetro Continuo

Si derivamos todos los términos respecto a Δt con Δt=0 obtenemos lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{00} & d_{01} & d_{02} & \dots & d_{0n} \\ d_{10} & d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{20} & d_{21} & d_{12} & \dots & d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n0} & d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$p.D = 0$$

Cadenas de Markov de Parámetro Continuo

Cómo $\sum p_j = 1$ podríamos incorporar esta expresión en el sistema de ecuaciones anterior obteniendo n+1 ecuaciones. Podríamos reemplazar una columna de la matriz D (ahora llamada “A”) y agregar un “1” al vector de ceros, ahora llamado “B”.

$$\begin{bmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{00} & d_{01} & d_{02} & \dots & 1 \\ d_{10} & d_{11} & d_{12} & \dots & 1 \\ d_{20} & d_{21} & d_{12} & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ d_{n0} & d_{n1} & d_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$p.A = B$$

Cadenas de Markov de Parámetro Continuo

Despejando las matrices obtenemos el vector de probabilidad de estado en el regimen permanente.

$$p.A = B \rightarrow p = B.A^{-1}$$

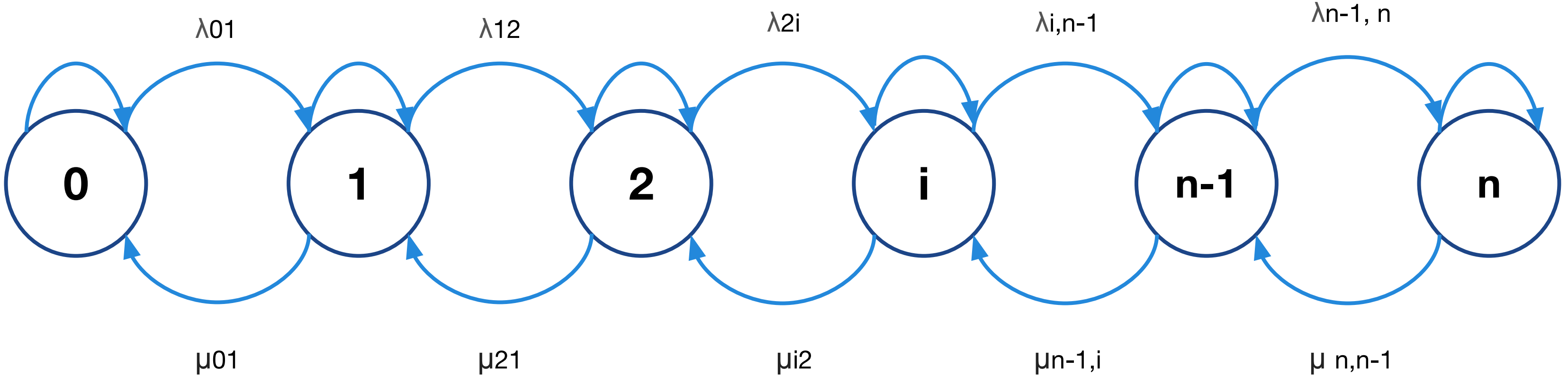
Procesos de Nacimiento y Muerte

Un caso especial de las Cadenas de Markov en parámetro continuo es el llamado proceso de nacimiento y muerte en donde:

- el estado del sistema “n” en un instante “t” queda definido por su tamaño, es decir por la cantidad de unidades presentes en el sistema (utilizado para modelar sistemas filas de espera)
- los eventos se dan en forma independiente y son solamente de dos tipos:
    - “<u>nacimientos</u>”, en donde la variable que representa el estado se incrementa +1
    - “<u>muertes</u>”, en donde la variable que representa el estado decrece -1
- Se considera nula la probabilidad de que ocurra más de 1 evento en un intervalo de tiempo muy pequeño.

Procesos de Nacimiento y Muerte

La manera de representar una cadena de markov de nacimiento y muerte es con un grafo de las siguientes características y considerando esta vez las tasas de transición en vez de las probabilidades de transición.



Procesos de Nacimiento y Muerte

Matemáticamente, las tasas de transición de un proceso de nacimiento y muerte queda expresado de la siguiente manera.

¿Cómo quedaría la matriz de tasas de transición de un sistema de 'n' estados?

$$d_{ij} = \begin{cases} \lambda_i & ; j = i + 1 \\ \mu_i & ; j = i - 1 \\ 0 & \forall i, j / \, |i - j| > 1 \end{cases}$$

Aplicaciones de cadenas de markov de parámetro continuo

Las filas de espera se pueden modelar como cadenas de markov de parámetro continuo donde el estado del sistema es la cantidad de personas/unidades dentro del sistema de espera.