

Filas de Espera

*Investigación Operativa
Ingeniería Industrial, UTN FRBA
Curso I4051
Martín Palazzo*

Este apunte busca resumir los principales términos en el costo de filas de espera modelizadas como procesos de nacimiento y muerte.

Fórmulas de Fila de Espera

Los sistemas de filas de espera están compuestos por dos secciones: el servicio y la fila de espera. El servicio es la etapa donde se procesan una a una las unidades que se encuentran dentro del sistema y son despachadas para salir del sistema. La fila de espera es la sección del modelo donde arriban las nuevas unidades que llegan al sistema y se acumulan las unidades que aún no han sido procesadas por el servicio. El sistema tendrá M canales de servicio y se dividirán dos categorías: $M = 1$ y $M > 1$. Todas las unidades que se encuentren dentro del sistema, sea en el servicio y/o en la fila, representan el estado del sistema en un instante t . Entonces el arribo de unidades incrementa el estado del sistema y el despacho de unidades lo decrementa. Entre las principales métricas del sistema que podemos calcular se encuentra la probabilidad de estado en cualquier tiempo t , es decir la probabilidad de que se encuentren n clientes dentro del sistema $P(x = n)$. Si $P(x = 0)$ diremos que el sistema se encuentra vacío. Además se podrá calcular la cantidad media de clientes en la fila de espera L_q y en todo el sistema L_s . Por último, es posible calcular el tiempo medio de espera en la fila W_q y el tiempo medio de espera (permanencia) en todo el sistema W_s desde que el cliente arriba hasta que es despachado [1].

Sistema $M = 1$

Para sistemas de filas de espera de un solo canal las formulas son las siguientes:

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{\lambda}{\mu} && \rightarrow && \text{Factor de Tráfico} \\ P_0 &= 1 - \rho && \rightarrow && \text{Probabilidad de } X = 0 \\ P_n &= \rho^n \cdot P_0 && \rightarrow && \text{Probabilidad de } X = n \\ W_s &= \frac{1}{\mu - \lambda} = W_q + \frac{1}{\mu} && \rightarrow && \text{Tiempo medio en el sistema.} \\ W_q &= W_s - \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{L_q}{\lambda} && \rightarrow && \text{Tiempo medio en fila.} \\ L_q &= \lambda \cdot W_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} && \rightarrow && \text{Cant. Media clientes en fila.} \\ L_s &= \lambda \cdot W_s = L_q + \rho = \frac{\rho}{1 - \rho} && \rightarrow && \text{Cant. Media clientes en Sistema.}\end{aligned} \tag{1}$$

Sistema $M > 1$

En el caso de sistemas con múltiples canales las métricas detalladas se calculan de la siguiente manera:

$\rho = \frac{\lambda}{M\mu}$	\rightarrow	Factor de Tráfico
$P_0 = \frac{1}{[\sum_{n=0}^{M-1} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!}] + \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^M}{M!(1-\rho)}}$	\rightarrow	Probabilidad de $X = 0$
$L_q = \frac{P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^M \rho}{M!(1-\rho)^2}$	\rightarrow	Cant. Media de clientes en fila.
$L_s = L_q + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$	\rightarrow	Cant. media de clientes en sistema.
$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$	\rightarrow	Tiempo medio en fila.
$W_s = W_q + \left(\frac{1}{\mu}\right)$	\rightarrow	Tiempo medio en el sistema.
$P_n = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0}{n!}$	$0 < n < M$	Proba. de $X = n$ clientes
$P_n = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0}{M!(M^{n-M})}$	$M < n$	Proba. de $X = n$ clientes

(2)

Costo de Filas de Espera

El costo de un sistemas de fila de espera esta compuesto por dos componentes: el costo de oportunidad y el costo operativo.

Costo de Oportunidad

El costo de oportunidad esta directamente relacionado con lo que se pierde de ganar el sistema por unidades que arribaron y aún no fueron despachadas [2] [3]. El costo de oportunidad se mide como el costo de espera por cliente no despachado por unidad de tiempo.

$$C_{\text{oportunidad}} = \lambda \left[\frac{u}{t} \right] . W_s [t] . e \left[\frac{\$}{(u.t)} \right] \quad (3)$$

Costo de Operativo

El costo operativo esperado por unidad de tiempo de mantener los canales de servicio del sistema.

$$C_{\text{operativo}} = C_m \left[\frac{\$}{t.\text{canal}} \right] . M [\text{canal}] \quad (4)$$

Costo total

El costo total es la suma de los dos costos.

$$C_{\text{tot}} = C_{\text{oportunidad}} + C_{\text{operativo}} \quad (5)$$

$$C_{\text{tot}} = \lambda \left[\frac{u}{t} \right] . W_s [t] . e \left[\frac{\$}{(u.t)} \right] + C_m \left[\frac{\$}{t.\text{canal}} \right] . M [\text{canal}] \quad (6)$$

References

- [1] Hamdy A Taha. *Investigación de operaciones*. Pearson Educación, 2004.
- [2] Sanjib Chowdhury. *Optimization and Business Improvement Studies in Upstream Oil and Gas Industry*. John Wiley & Sons, 2016.
- [3] MM Kembe, ES Onah, and S Iorkegh. A study of waiting and service costs of a multi-server queuing model in a specialist hospital. *International Journal of Scientific & Technology Research*, 1(8):19–23, 2012.