Resultados Guia de Ejercicios Probabilidad, Estadística, Grafos y Matrices

2021

Investigación Operativa UTN FRBA
Curso Miercoles Noche I4051

Elaborado por: Milagros Bochor y Juan Piro
Docente: Martin Palazzo

Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Buenos Aires

El siguiente documento se ha desarrollado con el fin de preparar la sección práctica de la materia Investigación Operativa de la carrera de Ingeniería Industrial.

1. Repaso Probabilidad, Estadística, Grafos y Matrices

1.1 ***Ejercicios** de **Probabilidad***

Ejercicio 01:

1.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$P(A \cup B) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} - \left(\frac{3}{8} \times \frac{1}{2}\right)$$
$$P(AUB) = \frac{11}{16}$$

2.

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$
$$P(\bar{A}) = 1 - \frac{3}{8}$$
$$p(\bar{A}) = \frac{5}{8}$$

3.

$$p(\bar{B}) = 1 - P(B)$$
$$\rho(\bar{B}) = 1 - \frac{1}{2}$$
$$\rho(\bar{B}) = \frac{1}{2}$$

4.

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \times P(\bar{B})$$
$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \times P(\bar{B})$$
$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{5}{8} \times \frac{1}{2}$$
$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{5}{16}$$

5.

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - P(\bar{A} \cap \bar{B})$$
$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = \frac{5}{8} + \frac{1}{2} - \frac{5}{16}$$
$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = \frac{13}{16}$$

6.

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) + P(\bar{B})$$
$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}$$
$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = \frac{3}{16}$$

Ejercicio 02: La probabilidad de que salga cada cara es proporcional a su número, es decir, cada probabilidad podría escribirse como: p(1)= 1p, p(2)= 2p, p(3)= 3p, p(4)= 4p, p(5)= 5p y p(6)= 6p. La suma de todas las probabilidades es igual a 1, por lo que:

a) $P(1)+ P(2)+ P(3)+ P(4)+ P(5)+ P(6) = 1$
$1p + 2p +3p+4p+5p+6p = 1$
$21p = 1$
$\boldsymbol{p} = \frac{1}{21}$

Entonces, la probabilidad que salga el número seis es :

$P\ (6) = 6\ x \frac{1}{21}$

$\boldsymbol{P\ (6)} = \frac{6}{21}$

b) La probabilidad de que salga un número impar, es igual a la probabilidad que salga el 1, 3 o 5. Entonces:

$P\ (1U3U5) = P(1) + P(3) + P(5)$
$P\ (1U3U5)= 1p + 3p + 5p = 9p$
$P(1U3U5)= 9\ x \frac{1}{21} = \frac{3}{7}$

Ejercicio 03:

a. *La probabilidad de que salga seis en cada dado en la misma jugada, es igual a la intersección de la probabilidad de que salga seis en cada dado. Es decir:*
$P(6_1 + 6_2 + 6_3) = p(6_1) + p(6_2) + p(6_3)$
$P(6_1 + 6_2 + 6_3) = \frac{1}{6} x \frac{1}{6} x \frac{1}{6}$
$P(6_1 + 6_2 + 6_3) = \frac{1}{216}$

b. *Primero hay que ver cuales son los casos posibles. Como tenemos 3 dados con seis posibles números cada uno, estamos frente a una variación.*
$vr_6^3 = 216$ *--- casos posibles*
cantidad de combinaciones posibles (que sumen 7 en una tirada) = 15 (considerando todas las opciones posibles)

cantidad de combinaciones posibles (que sumen 7 en una tirada) = 4 (considerando cada combinación única)

Entonces, si consideramos cada combinación diferente la probabilidad que en una tirada los dados sumen siete es de $\frac{15}{216} = \frac{5}{72}$. *Y si consideramos que cada combinación es única, entonces la respuesta seria* $\frac{4}{216} = \frac{1}{54}$.

Ejercicio 04:

a. Como son sucesos independientes, la intersección de las probabilidades se calcula como la multiplicación de cada una de las probabilidades. Ósea:

$P(H20 \cap M20) = \frac{1}{4} x \frac{1}{3}$

$P(H20 \cap M20) = \frac{1}{12}$

b. Primero calculamos la probabilidad de que la mujer no viva 20 años, es decir, el complemento de la probabilidad de que si viva 20 años:

$P(\overline{M20}) = 1 - P(M20)$

$P(\overline{M20}) = 1 - \frac{1}{3}$

$P(\overline{M20}) = \frac{2}{3}$

Ahora nos queda calcular la intersección entre la probabilidad que el hombre viva 20 años y que la mujer no. Nuevamente, son sucesos independientes:

$P(H20 \cap \overline{M20}) = \frac{1}{4} x \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$

C. Igual que el punto anterior, pero nos resta calcular el complemento de la probabilidad de que el hombre viva más de 20 años:

$P(\overline{H20}) = 1 - P(H20)$

$P(\overline{H20}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$P(\overline{H20} \cap \overline{M20}) = \frac{3}{4} x \frac{2}{3}$

$P(\overline{H20} \cap \overline{M20}) == \frac{1}{2}$

1.2 Ejercicios de distribución Normal

<u>Ejercicio 01:</u> *Como X es una variable aleatoria con una distribución normal, utilizaremos la fórmula correspondiente a la distribución normal estándar. Para poder resolver este ejercicio tenemos que contar con una tabla de distribución normal para poder encontrar los valores definidos de la variable Z.*

$p(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = p((\frac{(\mu - 3\sigma) - \mu}{\sigma}) \leq Z \leq (\frac{(\mu + 3\sigma) - \mu}{\sigma})$

$= p(-3 \leq Z \leq 3)$

$= p(Z \leq 3) - p(Z \leq -3)$

Entramos a la tabla y encontramos el valor de para Z = 3. Como la distribución normal es simétrica podemos reescribir la fórmula anterior de la siguiente manera:

$= p(Z \leq 3) - (1- p(Z \leq 3))$
$= 0.9987 - (1 - 0.9987)$
$= 0.9987 - 0.0013$
$= 0.9974$

<u>Ejercicio 02:</u> *Debemos reemplazar el valor de la media (μ) y del desvío estándar (σ) en la fórmula, e igualar al valor 0.5934.*

$z = \frac{X - \mu}{\sigma}$

$z = \frac{X - 4}{2}$

$p(4 - a \leq X \leq 4 + a) = p((\frac{(4-a) - 4}{2}) \leq Z \leq (\frac{(4+a) - 4}{2}) = 0.5934$

$p((\frac{-a}{2} \leq Z \leq (\frac{a}{2}) = 0.5934$

$p(Z \leq \frac{a}{2}) - p(Z \leq -\frac{a}{2}) = 0.5934$ --- *Como es simétrica se puede escribir de otras manera*

$p(Z \leq \frac{a}{2}) - (1- p(Z \leq \frac{a}{2})) = 0.5934$

$2*(p(Z \leq \frac{a}{2}) - 1 = 0.5934$

$p(Z \leq \frac{a}{2}) = 1.5934/2$

$\boldsymbol{p(Z \leq \frac{a}{2}) = 0.7987}$

Con ese valor, debemos entrar a la tabla de distribución normal y ver cual es el valor de Z que nos devuelve como resultado esa probabilidad.

$p(Z \leq 0.83) = 0.7987$

Como último paso, despejo "a", sabiendo el valor de Z:

Z = 0.83 = $\frac{a}{2}$

a = 1.66

<u>Ejercicio 03:</u> Dado que la temperatura sigue una distribución normal, reemplazamos la media por 23 ºC y el desvío por 5 ºC en la fórmula de la distribución normal estándar.

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 23}{5}$$

Como siguiente paso calcularemos la probabilidad de que la temperatura supere los 21ºC, pero sea menor a 27ºC.

$p(21 \leq X \leq 27) = p((\frac{21-23}{5}) \leq Z \leq (\frac{27-23}{5}))$

$p(21 \leq X \leq 27) = p(-0.4 \leq Z \leq 0.8)$
$p(21 \leq X \leq 27) = p(Z \leq 0.8) - p(Z \geq -0.4)$

$p(21 \leq X \leq 27) = p(Z \leq 0.8) - (1 - p(Z \leq 0.4))$

El siguiente paso es entrar a la tabla de distribución normal con los valores Z= 0.8 y Z=0.4 para encontrar sus probabilidades.

$p(21 \leq X \leq 27) = 0.7881 - (1 - 0.6564)$

$\boldsymbol{p(21 \leq X \leq 27) = 0.4435}$

<u>Ejercicio 04:</u> Sustituimos la media por 70 y el desvío por 3.

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 70}{3}$$

1. $p(60 \leq X \leq 75) = p((\frac{60-70}{3} \leq Z \leq (\frac{75-70}{3})$
   $p(60 \leq X \leq 75) = p((\frac{-10}{3} \leq Z \leq (\frac{5}{3})$
   $p(60 \leq X \leq 75) = p(-3.33 \leq Z \leq 1.66)$
   $p(60 \leq X \leq 75) = p(Z \leq 1.66) - (1 - p(Z \leq 3.33))$

Entramos a la tabla a buscar el valor de Z = 3.33 y Z = 1.66.

$p(60 \leq X \leq 75) = 0.9525 - (1 - 0.9996)$

$\boldsymbol{p(60 \leq X \leq 75) = 0.9521}$ *→ La probabilidad para 1 estudiante*

Nos piden la probabilidad para 500 estudiantes, por lo que nos resta multiplicar por esa cantidad:

500. p(60≤ X ≤ 75) = 500 . 0.9521 = 476, 05 → ***476 estudiante****s*

2.

p(X > 90) = p($Z > \frac{90-70}{3}$*)*
p(X > 90) = p(Z > 6.66)
p(X > 90) = 1- p(Z ≤ 6.66 *)*

Entramos a la tabla con Z = 6.66, y vemos que la probabilidad que suceda es 1, por lo que:

p(X > 90) = 1- 1 = 0

*500 x p(X > 90) = 0 →**0 estudiantes***

3.
p(X < 64) = p(z < $\frac{64-70}{3}$ *)*
p(X < 64) = p(z < -2 *)*
p(X < 64) = 1- p(z < 2)

Entramos a la tabla con Z = 2
p(X < 64) = 1- 0.9772 = 0.0228

*500 x p(X < 64) = 500 x 0.00228 = 11.4 → **11 estudiantes***

4. La variable de peso es una variable continua, por lo que, la probabilidad de que esta variable tenga un valor exacto siempre es nulo.
0 estudiantes

*5. Con los datos del punto 3 y 4, sabemos que hay 11 estudiantes que pesan menos de 64 kilos y ningún estudiante que pese exacto 64 kilos, por lo que la respuesta es → **11 estudiantes***

1.3 Ejercicios de distribucion Poisson

Ejercicio 01: como primer paso debemos identificar cual es la variable independiente "x" . Debe ser un evento independiente para que se pueda utilizar la fórmula de la distribución de Poisson. Recordar que x es la variable independiente y λ *es la media:*

$$P(x) = \frac{e^{-\lambda} . \lambda^{x}}{x!}$$

x: cantidad de cheques sin fondos que el banco recibe por día.
λ *: 6 cheques recibidos por dia*

Recordar que la media debe expresarse como cantidad de eventos por unidad de tiempo.

Reemplazo en formula:

$$P(x) = \frac{e^{-6\ cheques\ /dia} . 6\ cheques\ /dia^{\ x}}{x!}$$

a) Para ver cual es la probabilidad de que lleguen 4 cheques sin fondo, debo reemplazar x = 4:

$$P\ (x\ =\ 4)\ = \frac{e^{-6\ cheques\ /dia}\ .\ 6\ cheques\ /dia^{\ 4}}{4!}$$

$P\ (x\ =\ 4)\ =$ *0.131*

b) *Ahora nos cambiara el valor de* λ *ya que la cantidad de cheques promedio que llegan al banco en dos dias consecutivos es de* λ *= 6 x 2 = 12*
x: cantidad de cheques sin fondos que el banco recibe por día.
λ *: 12 cheques recibidos por dos dias consecutivos*

$$P\ (x\ =\ 10)\ = \frac{e^{-12}\ .\ 12^{\ 10}}{10!}$$

$P\ (x\ =\ 10)$ = *0.104*

<u>Ejercicio 02:</u> Al igual que el ejercicio anterior, primero identificamos la variable independiente x y la media λ *.*

x: cantidad de inspecciones
λ *: 0.2 inspecciones por minuto*

En este caso, la media está expresada como cantidad de eventos por minuto, pero para poder resolver los puntos siguientes debemos calcular la cantidad de eventos que suceden cada tantos minutos que nos pidan.

a) *Cálculo de la media para 3 minutos:*

1 minuto -------------> 0,2 inspecciones
3 minutos-------------> 0,6 inspecciones -------------> λ *:* $\frac{0.6\ inspección}{3\ minutos}$

Ahora calculamos la probabilidad de que haya en promedio 1 inspección (x=1) cada 3 minutos:

$$P\ (x\ =\ 1)\ = \frac{e^{-0,6}\ .\ 0,6^{\ 1}}{1!}$$

$P\ (x\ =\ 1)\ =\ 0.329$

b) *Cálculo de la media para 5 minutos:*

1 minuto -------------> 0,2 inspecciones
5 minutos-------------> 1 inspecciones -------------> λ *:* $\frac{1\ inspección}{5\ minutos}$

Para calcular la probabilidad de que sucedan al menos dos (dos o más) inspecciones en hojaldrada cada cinco minutos, vamos a calcular la probabilidad de que no haya ninguna inspección (x= 0) y que haya una sola inspección (x=1).

P(x ≥2) = 1 - p(x=0) - p(x=1)
P(x ≥2) = 1 - [$\frac{e^{-1}\ .\ 1^{\ 0}}{0!} + \frac{e^{-1}\ .\ 1^{\ 1}}{1!}$ *]*
P(x ≥2) = 1 - [0.3679 + 0.3679]
P(x ≥2) = 0.2642

c) *Cálculo de la media para 5 minutos:*

1 minuto -------------> 0.2 inspecciones

5 minutos-------------> 3 inspecciones -------------> λ : $\frac{3\ inspección}{15\ minutos}$

Nos piden la probabilidad de que sucedan hasta 1 inspección cada 15 minutos, es decir, como máximo una inspección (x=0 y x=1).

P(x ≤1) = p(x=0) - p(x=1)

$P(x \leq 1) = [\frac{e^{-3}.1^{0}}{0!} + \frac{e^{-3}.1^{1}}{1!}]$

P(x ≤1) = 0.0479 + 0.1494

P(x ≤1) = 0.1999

1.4 Ejercicios Matrices

Ejercicio 01

01.1:

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+1 & 0+0 & 1+1 \\ 3+1 & 0+2 & 0+1 \\ 5+1 & 1+1 & 1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

01.2:

$$A - B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+(-1) & 0-0 & 1+(-1) \\ 3+(-1) & 0+(-2) & 0+(-1) \\ 5+(-1) & 1+(-1) & 1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

01.3:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2\times 1)+(0\times 1)+(1\times 1) & (2\times 0)+(0\times 2)+(1\times 1) & (2\times 1)+(0\times 1)+(1\times 0) \\ (3\times 1)+(0\times 1)+(0\times 1) & (3\times 0)+(0\times 2)+(0\times 1) & (3\times 1)+(0\times 1)+(0\times 0) \\ (5\times 1)+(1\times 1)+(1\times 1) & (5\times 0)+(1\times 2)+(1\times 1) & (5\times 1)+(1\times 1)+(1\times 0) \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 7 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

01.4:

$$B \times A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 13 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

01.5:

$$A^{t} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{t} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>Ejercicio 02:</u> Primero calculamos A^2:

$$A^{2} = A^{1} \times A^{1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{1} \times \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Sabiendo que la matriz identidad I es igual a :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Reemplazo todo y validar la ecuación :

$$A^{2} - A - 2I = 0$$

$$A^{2} - A - 2I = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{2} - A - 2I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>Ejercicio 03:</u>

Hay que penar el ejercicio como despajar una 'x'. En este caso 'x' sera la matriz de 2x2 por la cual multiplicaremos a A para obtener la matriz B.

$$X \times A = B$$

Siendo

$$X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Reemplazamos:

$$X \times A = B$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

Nos queda un sistema de ecuaciones con 2 incógnitas:

$$\begin{cases} a + 2b = 5 \rightarrow a = 5 - (2 \times 2) \rightarrow a = 1 \\ b = 2 \\ c + 2d = 6 \rightarrow c = 6 - (2 \times 3) \rightarrow c = 0 \\ d = 3 \end{cases}$$

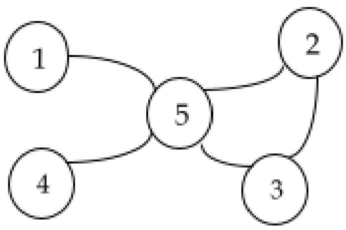
Por lo que la matriz buscada queda:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

1.5 Práctica grafos

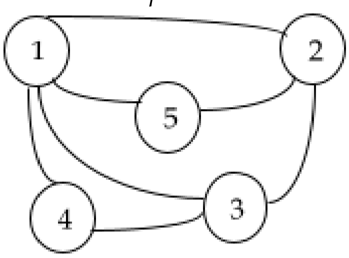
Ejercicio 01:

Una solución posible:



Ejercicio 2:

Una solución posible :



Matriz de adyacencia:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*
2	*1*	*0*	*1*	*0*	*1*
3	*1*	*1*	*0*	*1*	*0*
4	*1*	*0*	*1*	*0*	*0*
5	*1*	*1*	*0*	*0*	*0*

Ejercicio 03:
Matriz de adyacencia con peso de arcos:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	*0*	*4*	*0*	*10*	*0*
2	*2*	*0*	*0*	*0*	*10*
3	*0*	*0*	*0*	*0*	*12*
4	*0*	*0*	*0*	*4*	*0*
5	*2*	*0*	*1*	*0*	*0*

Ejercicio 04
Solución posible: