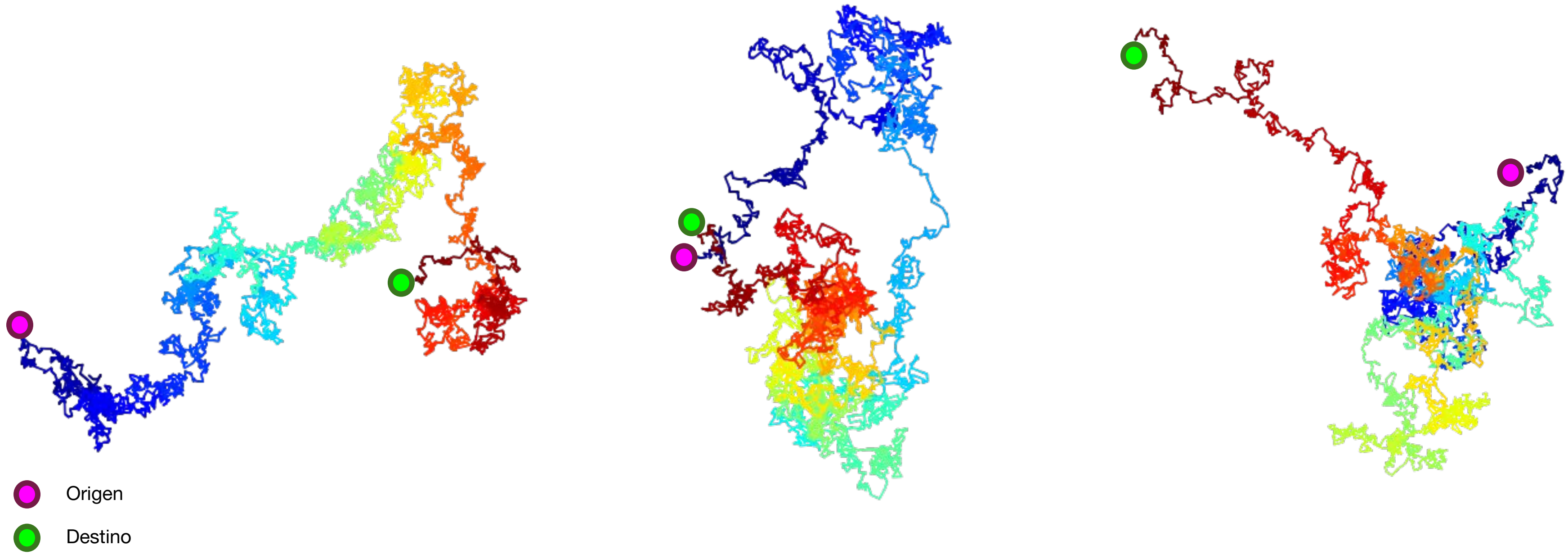
Cadenas de Markov
Clase 03

Investigación Operativa UTN FRBA
Curso: I4051
Equipo: Rodrigo Maranzana, Milagros Bochor, Gabriel Boso, Juan Piro
Docente: Martín Palazzo

Agenda clase 03

- Intro teórica a Cadenas de Markov
  - Probas de transición
  - Chapman-Kolmogorov
  - Tipos de cadenas de Markov
  - Estado estacionario
- Ejercicios Cadenas de Markov
- Implementación en Python de Cadenas de Markov

Procesos estocásticos



Movimiento browniano de 5000 pasos en tres experimentos independientes. El movimiento browniano modela una caminata aleatoria de una partícula en tiempo continuo, donde una partícula evoluciona en el espacio dando pasos aleatorios independientes en todas las direcciones. Podemos pensar a la posición de la partícula como el estado de nuestro sistema que será se modificará en cada instante de tiempo de manera aleatoria bajo cierta distribución de probabilidad [1].

[1] https://ipython-books.github.io/133-simulating-a-brownian-motion/

Procesos estocásticos: filas de espera

t = 0

t = 1

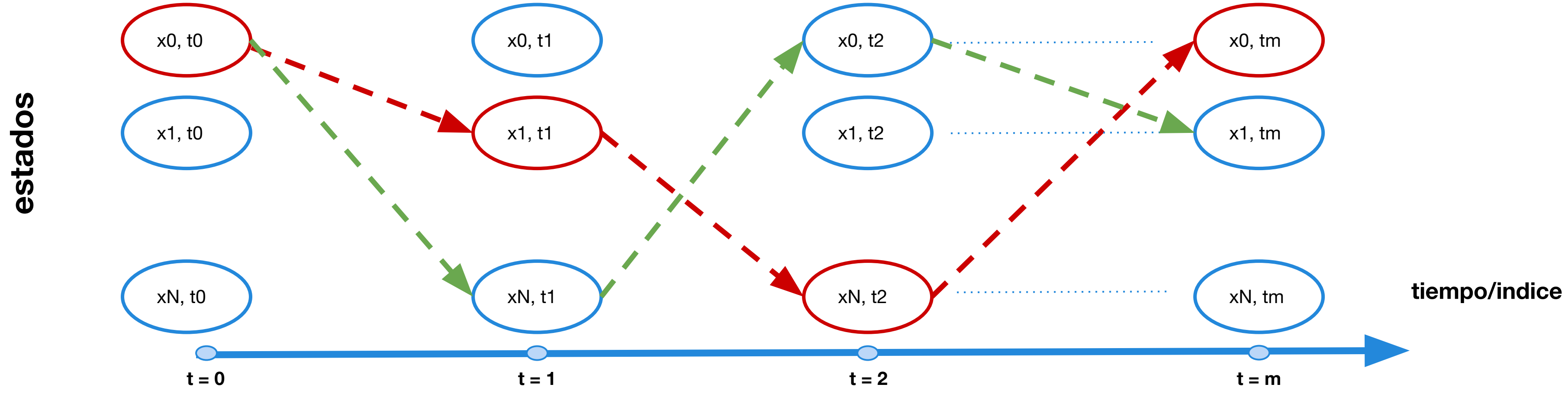
t = 2

Una **Fila de Espera** puede considerarse un proceso estocástico ya que a medida que transcurre el tiempo el sistema desarrollar filas de distinta longitud. En este tipo de casos la cantidad de clientes en la fila se consideran estados y es el estado del sistema que evolucionara bajo cierta distribución de probabilidad a medida que transcurre el tiempo.

Procesos estocásticos

Se llama así a los **sistemas dinámicos** sometidos a un fenómeno de naturaleza **aleatoria.** El sistema adquiere distintos **estados** caracterizados por **X** que variara sujeto a cierta distribución de **probabilidad** a medida que avanza el **parámetro** (generalmente tiempo).

Realizar múltiples veces el seguimiento en un proceso estocástico de manera idéntica generará resultados distintos aunque siempre sujetos a determinadas distribuciones de probabilidad supuestas constantes.



Procesos estocásticos

Nuestro sistema estará compuesto por **variables aleatorias x = f(t)** que tomarán distintos valores a medida que evoluciona el parámetro.

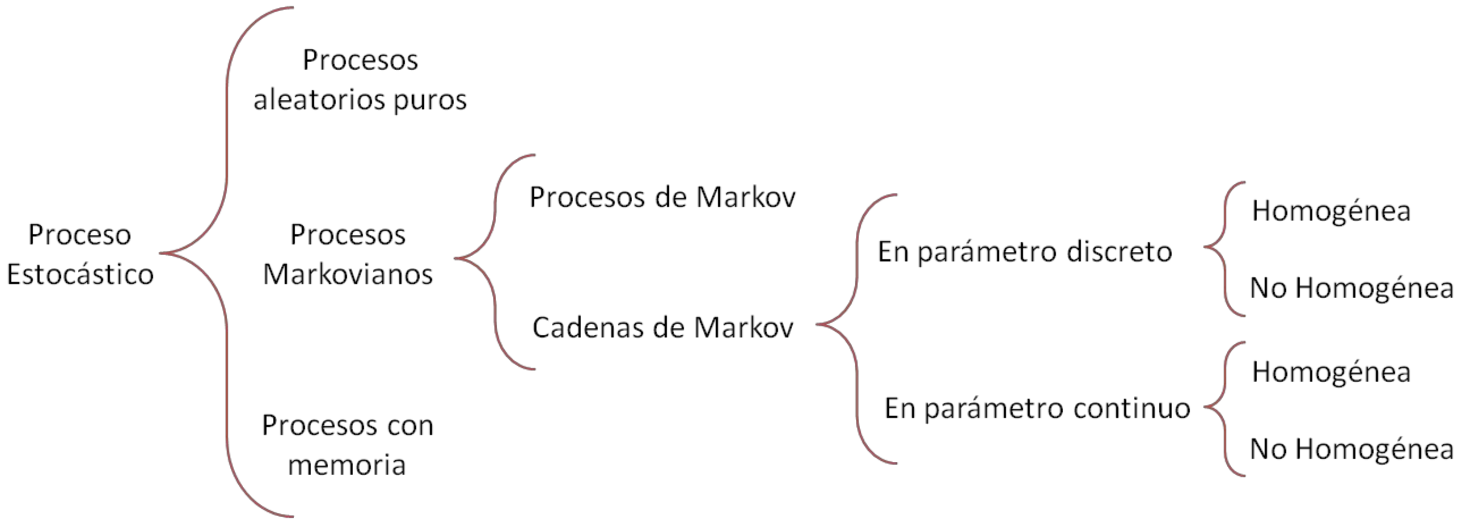
Las variables aleatorias serán las **responsables** de que el **sistema tome distintos estados** bajo cierta distribución de probabilidad a medida que avanza el parámetro (tiempo).

En otras palabras, para cada estado posible del sistema, dado un instante de tiempo "t" existirá una probabilidad asociada **P(x | t)**.

Proba estados

$$\begin{array}{ccccc}
P(x = 0 \mid t = 0) & & P(x = 0 \mid t = 1) & & P(x = 0 \mid t = m) \\
P(x = 1 \mid t = 0) & & P(x = 1 \mid t = 1) & & P(x = 1 \mid t = m) \\
P(x = 2 \mid t = 0) & & P(x = 2 \mid t = 1) & & P(x = 2 \mid t = m) \\
P(x = 3 \mid t = 0) & \longrightarrow & P(x = 3 \mid t = 1) & \longrightarrow & P(x = 3 \mid t = m) \\
. & & . & & . \\
. & & . & & . \\
P(x = N \mid t = 0) & & P(x = N \mid t = 1) & & P(x = N \mid t = m)
\end{array}$$

Tipos de Procesos estocásticos



“Cadena de Markov” -> variable aleatoria discreta (parametro continuo o discreto)
“Proceso de Markov” -> variable aleatoria continua (parametro continuo o discreto)

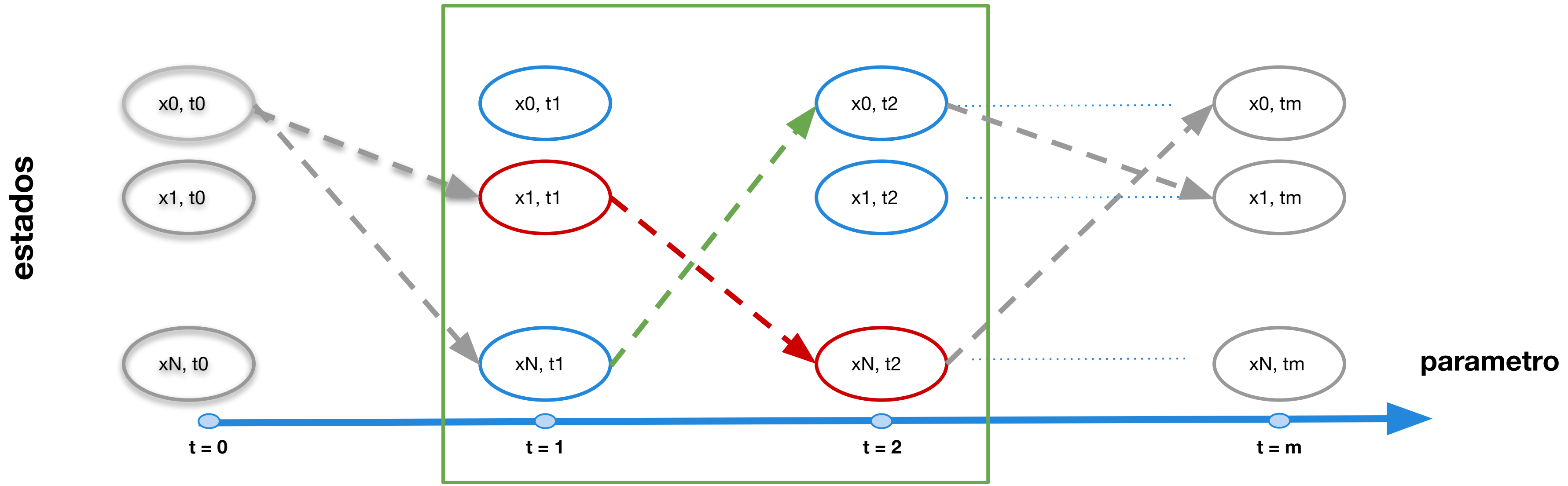
Cadenas de Markov

Las cadenas de Markov corresponden a una rama de los Procesos Estocásticos. Las mismas se caracterizan por definir sus estados actuales únicamente partiendo del estado inmediato anterior. **Es decir que las cadenas de Markov son procesos estocásticos con memoria t=-1**. Visto de otra manera, si conozco el estado X actual del sistema en el instante t, en caso de ser "markoviano" puedo estimar la probabilidad **condicional** de estado en el siguiente intervalo de tiempo t+1.

$$P\left(X_{t=i+1} \mid X_{t=i}\right)$$

Cadenas de Markov

El concepto Markoviano nace de comprender la transición de **un solo paso.** La probabilidad de cada estado depende únicamente del estado del sistema en el “paso” inmediato anterior.



Probabilidad condicional de Transición de 1 paso

Dados N estados, la probabilidad de transición de un paso es aquella que indica la probabilidad de estar en en el estado “j” si en el paso anterior el sistema se encontraba en el estado “i”.

$$p_{ij}(t+1) = P(X_{t+1} = j | X_t = i)$$

Si conozco las probabilidades de transición de un paso de un sistema (entre todos los pares de estados) y supongo que las mismas se mantienen constantes en el tiempo, entonces puedo calcular las probabilidades de transición luego de M pasos.

$$p_{ij}(t+\Delta t) = P(X_{t+\Delta t} = j | X_t = i)$$

Matriz de Transición de 1 paso

Para poder modelar todas las probabilidades de transición de 1 paso en un sistema markoviano utilizamos la Matriz de Transición de 1 paso. Por ley de probabilidad, la suma de todas las probas que salgan de un estado deben sumar 1.

$$P(\Delta t = 1) = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & P_{32} & \dots & P_{2n} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & \dots & P_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & P_{ij} & \dots \\ P_{n1} & \dots & \dots & \dots & P_{nn} \end{bmatrix}$$

$$0 \leq P_{ij} \leq 1$$

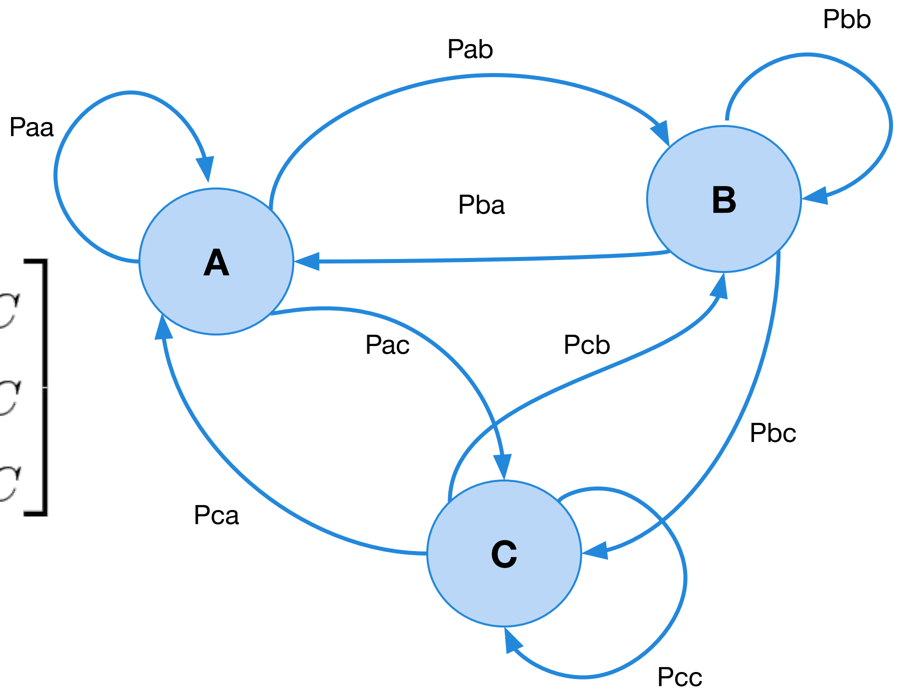
$$\sum_{j=1}^{n} P_{ij} = 1$$

Los **renglones/filas** representan los nodos/estados de origen mientras que las **columnas** los nodos/estados destino.

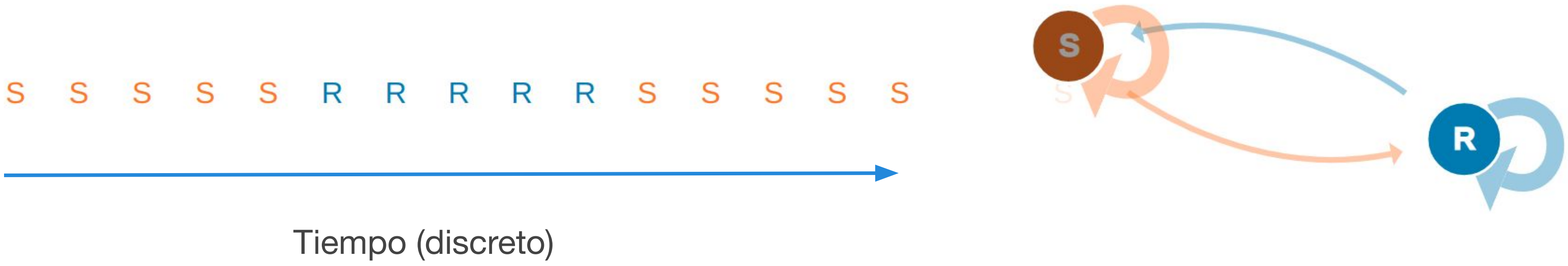
Grafo de Transición de 1 paso

Una matriz tiene un grafo equivalente

$$P\left(\Delta t = 1\right) = \begin{bmatrix} P_{AA} & P_{AB} & P_{AC} \\ P_{BA} & P_{BB} & P_{BC} \\ P_{CA} & P_{CB} & P_{CC} \end{bmatrix}$$



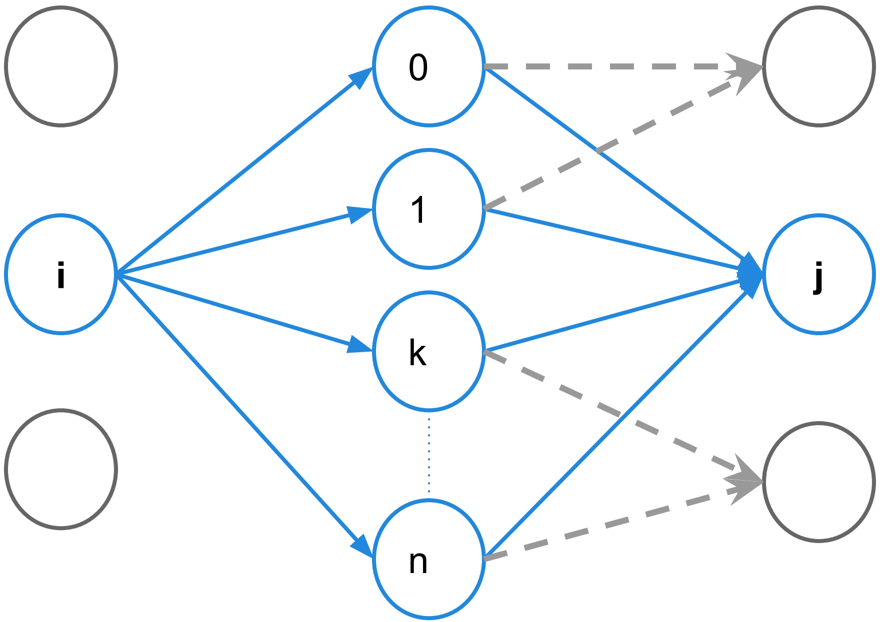
Simulación con cadenas de markov



En este ejemplo observamos un sistema de dos estados con el supuesto de que sigue un fenómeno de markov en tiempo discreto. A la derecha se encuentra la cadena de markov correspondiente con sus probabilidades de transición representadas por el grosor de los arcos. A la izquierda se puede observar el estado del sistema para cada instante de tiempo (fuente https://setosa.io/ev/markov-chains/)

Matriz de Transición de 2 pasos (Δt = 2)

De igual manera podemos estimar la probabilidad de transición de “2” utilizando como unidad básica la probabilidad de transición de 1 paso. Para el caso de 2 pasos la formulación es:



$$P_{ij}^{(2)} = P(X_{t+2} = j | X_t = i)$$

$$P_{ij}^{(2)} = \sum_{k=0}^{k=n} (P_{ik} \times P_{kj})$$

Ecuación de Chapman-Kolmogorov (Δt = 2)

La manera de expresar las probabilidades de transición de una cadena de Markov en “n” pasos es a través de la ecuación de Chapman-Kolmogorov. Estas indican que la probabilidad de pasar del estado “i” al “j” en n pasos (en este caso n=2) es primero sumando todas las probabilidades de pasar del “i” a cualquiera de los estados intermedios “k” en 1 paso y luego sumar todas las probabilidades de pasar del estado “k” al destino “j” en el siguiente paso.

$$P_{ij}^{(2)} = \sum_{k=0}^{k=n} (P_{ik} \times P_{kj})$$

Ecuación de Chapman-Kolmogorov (matricial, Δt = 2)

El producto matricial de las matrices de transición de 1 paso da como resultado la matriz de transición de 2 pasos.

$$P^{(2)} = \begin{bmatrix} P_{11}^{(2)} & P_{12}^{(2)} & \cdots & P_{1n}^{(2)} \\ P_{21}^{(2)} & P_{22}^{(2)} & \cdots & P_{2n}^{(2)} \\ P_{31}^{(2)} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & P_{ij}^{(2)} & \cdots \\ P_{n1}^{(2)} & \cdots & \cdots & P_{nn}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}^{(1)} & P_{12}^{(1)} & \cdots & P_{1n}^{(1)} \\ P_{21}^{(1)} & P_{22}^{(1)} & \cdots & P_{2n}^{(1)} \\ P_{31}^{(1)} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & P_{ij}^{(1)} & \cdots \\ P_{n1}^{(1)} & \cdots & \cdots & P_{nn}^{(1)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} P_{11}^{(1)} & P_{12}^{(1)} & \cdots & P_{1n}^{(1)} \\ P_{21}^{(1)} & P_{22}^{(1)} & \cdots & P_{2n}^{(1)} \\ P_{31}^{(1)} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & P_{ij}^{(1)} & \cdots \\ P_{n1}^{(1)} & \cdots & \cdots & P_{nn}^{(1)} \end{bmatrix}$$

$$P^{(2)} = P^{(1)} \times P^{(1)}$$

Ecuación de Chapman-Kolmogorov (m pasos)

Expresión genérica de las ecuaciones de Chapman-kolmogorov (izquierda) y la misma expresión a nivel matricial (derecha).

$$p_{ij}^{(m)} = \sum_{k=0}^{n} p_{ik} . p_{kj}^{(m-1)}$$

$$\begin{aligned}
P^{(2)} &= P^{(1)} . P^{(1)} \\
P^{(3)} &= P^{(1)} . P^{(2)} \\
P^{(4)} &= P^{(1)} . P^{(3)} \\
P^{(5)} &= P^{(1)} . P^{(4)} \\
\cdots & \quad \cdots \\
P^{(m)} &= P^{(1)} . P^{(m-1)}
\end{aligned}$$

Probabilidad incondicional de estado

La probabilidad incondicional de estado es aquella que indica la chance que hay de que el sistema se encuentre en el estado "i" dado el instante "Ti".

$$p_i\left(t\right) = p_{x=i}\left(t\right)$$

El conjunto de probabilidades de estado individuales de cada uno de los estados del sistema definen el **vector de probabilidades de estado p(t)**

$$p\left(t\right) = \left[p_1(t), p_2(t), \ldots, p_i(t), \ldots, p_n(t)\right]$$

¿Qué condiciones debe cumplir este vector?

Probabilidad incondicional de estado

Cada "paso" o instante de tiempo tendrá un vector de probabilidad de estado asociado. Este vector puede ser calculado partiendo de las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov.

$$
\begin{gathered}
p\left(t_0\right)=\left[p_1(t_0), p_2(t_0), \ldots, p_i(t_0), \ldots, p_n(t_0)\right] \\
p\left(t_1\right)=\left[p_1(t_1), p_2(t_1), \ldots, p_i(t_1), \ldots, p_n(t_1)\right] \\
p\left(t_2\right)=\left[p_1(t_2), p_2(t_2), \ldots, p_i(t_2), \ldots, p_n(t_2)\right] \\
\ldots \\
p\left(t_m\right)=\left[p_1(t_m), p_2(t_m), \ldots, p_i(t_m), \ldots, p_n(t_m)\right]
\end{gathered}
$$

Probabilidad incondicional de estado

Para calcular por ejemplo el vector de probabilidad de estado en el “t=1” teniendo el vector de probabilidad de estado en “t=0” (a.k.a. vector de estado inicial) y la matriz de transición de 1 paso

$$p\,(1) = p(0).P^{(1)}$$

$$[p_0(1), p_1(1), p_2(1), \ldots, p_n(1)] = [p_0(0), p_1(0), p_2(0), \ldots, p_n(0)] \cdot \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{0n} \\ p_{10} & p_{11} & p_{1n} \\ p_{n0} & p_{n10} & p_{nn} \end{bmatrix}$$

Probabilidad incondicional de estado

De forma genérica, las probabilidades de estado para cualquier tiempo “t” pueden definirse tanto de manera genérica (izquierda) como matricial (derecha)

$$p_j^{(m)} = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} p_i^{(0)} . p_{ij}^{(m)} \\ \sum_{i=1}^{n} p_i^{(m-1)} . p_{ij}^{(1)} \end{cases} \qquad p^{(m)} = \begin{cases} p^{(0)} . P^{(m)} \\ p^{(m-1)} . P^{(1)} \end{cases}$$

Las expresiones del renglón superior equivalen a las del inferior, llegando al mismo resultado con transiciones de “m” pasos o con transiciones de “1” paso siendo el vector de estado en el instante “m” o “0”.

Cadenas de Markov en régimen permanente

Si deseamos entender como se comportaría una cadena de Markov en el "**estado estacionario**" o "**régimen permanente**" entonces debemos observar el comportamiento de la cadena luego de "m" pasos de tiempo con "m" tendiendo a infinito.

$$\lim_{m\to\infty} P^{(m)} = \begin{bmatrix} p_{11}^{(m)} = \boxed{p(1)^{(m)}} & p_{12}^{(m)} = \boxed{p(2)^{(m)}} & \cdots & p_{1n}^{(m)} = \boxed{p(n)^{(m)}} \\ p_{21}^{(m)} = p(1)^{(m)} & p_{22}^{(m)} = p(2)^{(m)} & \cdots & p_{2n}^{(m)} = p(n)^{(m)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1}^{(m)} = p(1)^{(m)} & p_{n2}^{(m)} = p(2)^{(m)} & \cdots & p_{nn}^{(m)} = p(n)^{(m)} \end{bmatrix}$$

Lo que sucederá es que las probabilidades de transición de "m" pasos con "m" tendiendo a infinito serán igual no importa desde que estado se inicie la transición.

Cadenas de Markov en régimen permanente

La probabilidad de estado en “t=m” cuando t tiende a infinito será igual que la probabilidad de estado en “t = m-1”. De esta manera multiplicando el vector de probabilidad de estado por la matriz de transición de un paso dará por resultado el vector de probabilidad de estado en régimen permanente.

$$\lim_{m\to\infty} p^{(m)} = \lim_{m\to\infty} p^{(m-1)}.P^{(1)}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\rightarrow p^{(m)} = p^{(m)}.P^{(1)} \\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1\end{gathered}}$$