

# Markov: Ejercicio 7

## Clase 05

Investigación Operativa UTN FRBA 2020

Curso: I4051

Elaborado por: Rodrigo Maranzana

Docente: Martín Palazzo

# Ejercicio 7: Mercado de café

Los consumidores de café en el área de Pontevedra usan tres marcas A, B, C. En marzo se hizo una encuesta en la que entrevistó a las 8450 personas que compran café y los resultados fueron:

1. Si las compras se hacen mensualmente, ¿cuál será la distribución del mercado de café en Pontevedra en el mes de junio?
2. A la larga, ¿cómo se distribuirán los clientes de café?
3. En junio, ¿cuál es la proporción de clientes leales a sus marcas de café?

Vector inicial  $p_0$

Compra actual
Marca A = 1690
Marca B = 3380
Marca C = 3380
<b>TOTALES</b>

Compra en el siguiente mes **Transición  $T$**

Marca A	Marca B	Marca C
507	845	338
676	2028	676
845	845	1690
2028	3718	2704

**TOTALES**

1690
3380
3380
<b>8450</b>

VALORES ABSOLUTOS

A probabilidad

# Matriz de transición T:

$$p_0 = (p_a \quad p_b \quad p_c) = 1$$

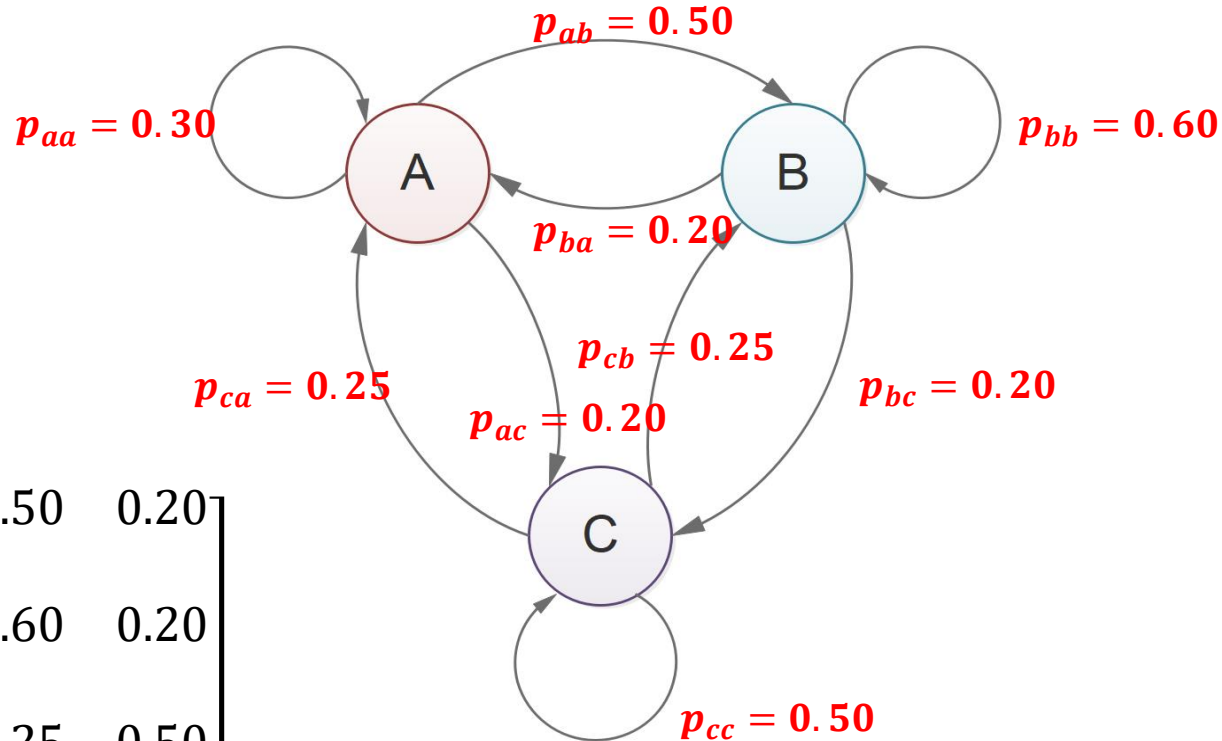
$$T = \begin{bmatrix} p_{aa} & p_{ab} & p_{ac} \\ p_{ba} & p_{bb} & p_{bc} \\ p_{ca} & p_{cb} & p_{cc} \end{bmatrix} \begin{matrix} = 1 \\ = 1 \\ = 1 \end{matrix}$$

	Compra en el siguiente mes			TOTALES
Compra actual	Marca A	Marca B	Marca C	
Marca A = 1690	507	845	338	1690
Marca B = 3380	676	2028	676	3380
Marca C = 3380	845	845	1690	3380
TOTALES	2028	3718	2704	<b>8450</b>

$$p_0 = \left( \frac{1690}{8450} \quad \frac{3380}{8450} \quad \frac{3380}{8450} \right) = (0.2 \quad 0.4 \quad 0.4)$$

$$T = \begin{bmatrix} \frac{507}{1690} & \frac{845}{1690} & \frac{338}{1690} \\ \frac{676}{3380} & \frac{2028}{3380} & \frac{676}{3380} \\ \frac{845}{3380} & \frac{845}{3380} & \frac{1690}{3380} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.30 & 0.50 & 0.20 \\ 0.20 & 0.60 & 0.20 \\ 0.25 & 0.25 & 0.50 \end{bmatrix}$$

# Modelo gráfico: Cadena de markov discreta

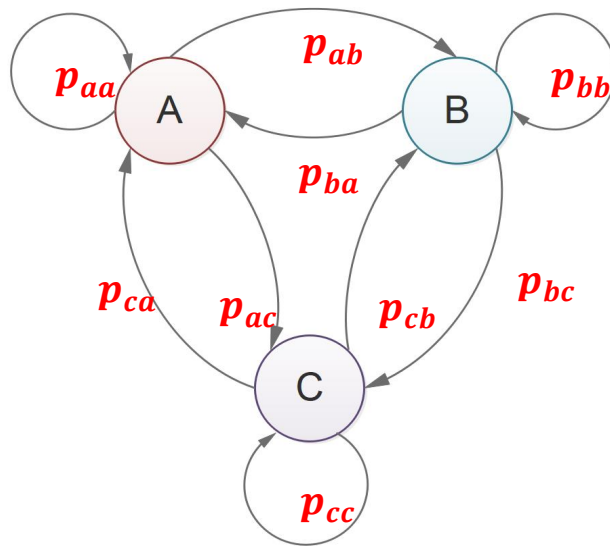


$$T = \begin{bmatrix} 0.30 & 0.50 & 0.20 \\ 0.20 & 0.60 & 0.20 \\ 0.25 & 0.25 & 0.50 \end{bmatrix}$$

# Introducción a ejercicio A

$$p_{aa}^2 = p_{aa} * p_{aa} + p_{ab} * p_{ba} + p_{ac} * p_{ca}$$

$$p_{ab}^2 = p_{aa} * p_{ab} + p_{ab} * p_{bb} + p_{ac} * p_{cb}$$



# Introducción a ejercicio A

$$p_{aa}^2 = p_{aa} * p_{aa} + p_{ab} * p_{ba} + p_{ac} * p_{ca}$$

$$T^2 = \begin{bmatrix} p_{aa} & p_{ab} & p_{ac} \\ p_{ba} & p_{bb} & p_{bc} \\ p_{ca} & p_{cb} & p_{cc} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} p_{aa} & p_{ab} & p_{ac} \\ p_{ba} & p_{bb} & p_{bc} \\ p_{ca} & p_{cb} & p_{cc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{aa}^2 & p_{ab}^2 & p_{ac}^2 \\ p_{ba}^2 & p_{bb}^2 & p_{bc}^2 \\ p_{ca}^2 & p_{cb}^2 & p_{cc}^2 \end{bmatrix}$$

$$p_{aa}^2 = p_{aa} * p_{aa} + p_{ab} * p_{ba} + p_{ac} * p_{ca}$$

# Ejercicio A

$$T^3 = \begin{bmatrix} 0.30 & 0.50 & 0.20 \\ 0.20 & 0.60 & 0.20 \\ 0.25 & 0.25 & 0.50 \end{bmatrix}^3$$



3 Saltos

$$T^3 = \begin{bmatrix} 0.30 & 0.50 & 0.20 \\ 0.20 & 0.60 & 0.20 \\ 0.25 & 0.25 & 0.50 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.30 & 0.50 & 0.20 \\ 0.20 & 0.60 & 0.20 \\ 0.25 & 0.25 & 0.50 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.30 & 0.50 & 0.20 \\ 0.20 & 0.60 & 0.20 \\ 0.25 & 0.25 & 0.50 \end{bmatrix}$$

$$T^3 = \begin{bmatrix} 0.237 & 0.485 & 0.278 \\ 0.236 & 0.486 & 0.278 \\ 0.2425 & 0.4525 & 0.305 \end{bmatrix}$$



# Ejercicio A

$$p_3 = p_0 T^3$$

$$p_3 = (0.2 \quad 0.4 \quad 0.4) \times \begin{bmatrix} 0.237 & 0.485 & 0.278 \\ 0.236 & 0.486 & 0.278 \\ 0.2425 & 0.4525 & 0.305 \end{bmatrix}$$

$$p_3 = (0.2388 \quad 0.4724 \quad 0.2888)$$

# Ejercicio B: Encontrar el estado estable

$$\pi T = \pi$$

$$(\pi_A \quad \pi_B \quad \pi_C) \begin{bmatrix} 0.30 & 0.50 & 0.20 \\ 0.20 & 0.60 & 0.20 \\ 0.25 & 0.25 & 0.50 \end{bmatrix} = (\pi_A \quad \pi_B \quad \pi_C)$$

Sistema de ecuaciones lineales:

$$0,30\pi_A + 0,20\pi_B + 0,25\pi_C = \pi_A$$

$$0,50\pi_A + 0,60\pi_B + 0,25\pi_C = \pi_B$$

$$0,20\pi_A + 0,20\pi_B + 0,50\pi_C = \pi_C$$

# Ejercicio B

Despejamos:

$$-0,70\pi_A + 0,20\pi_B + 0,25\pi_C = 0$$

$$0,50\pi_A - 0,40\pi_B + 0,25\pi_C = 0$$

$$0,20\pi_A + 0,20\pi_B - 0,50\pi_C = 0$$

Forma matricial

$$\begin{bmatrix} -0,70 & 0,20 & 0,25 \\ 0,50 & -0,40 & 0,25 \\ 0,20 & 0,20 & -0,50 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \pi_A \\ \pi_B \\ \pi_C \end{bmatrix} = \bar{0}$$

**Sistema Homogéneo**

**Det(Matriz) = 0**

**-> Compatible indeterminado**

Fórmula adicional

$$\sum_i \pi_i = 1 \rightarrow \pi_a + \pi_b + \pi_c = 1$$

# Ejercicio B

Sistema de ecuaciones a resolver:

$$-0,70\pi_A + 0,20\pi_B + 0,25\pi_C = 0$$

$$0,50\pi_A - 0,40\pi_B + 0,25\pi_C = 0$$

$$0,20\pi_A + 0,20\pi_B - 0,50\pi_C = 0$$

$$\pi_A + \pi_B + \pi_C = 1$$

Forma matricial

$$\begin{bmatrix} -0,70 & 0,20 & 0,25 \\ 0,50 & -0,40 & 0,25 \\ 0,20 & 0,20 & -0,50 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \pi_A \\ \pi_B \\ \pi_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

## Ejercicio B: Matricialmente desde T al sistema de ecuaciones

$$\pi T = \pi$$

$$\pi T - \pi = 0$$

$$\pi(T - I) = 0$$

$$(T^t - I)\pi = 0$$

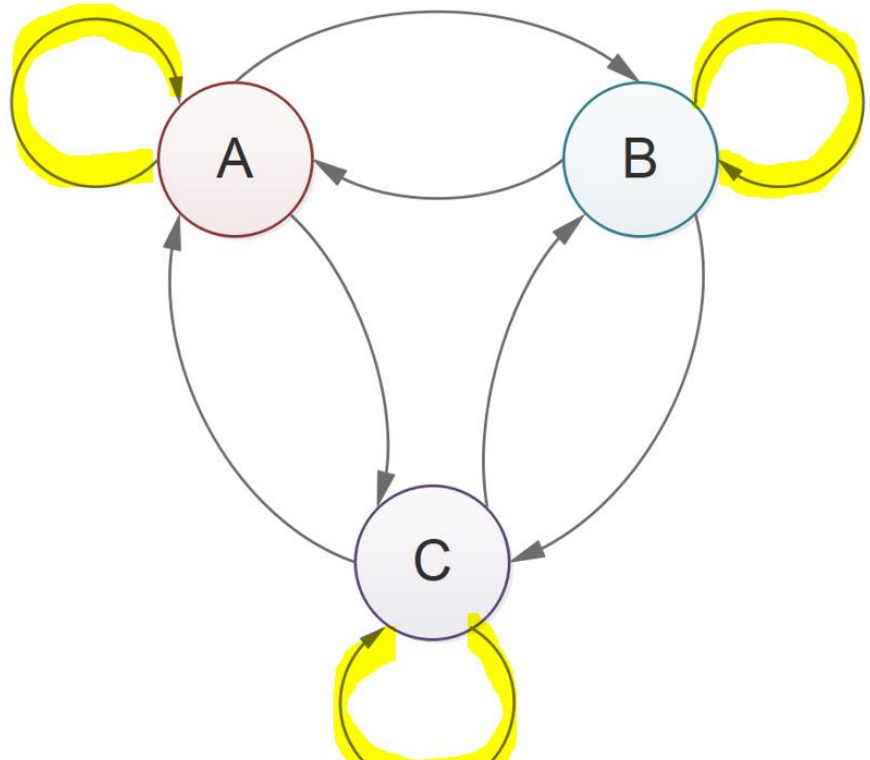
# Ejercicio B

Resolvemos el Sistema y obtenemos el estado estable:

$$\pi = (0.238 \quad 0.476 \quad 0.285)$$

# Ejercicio C: clientes leales en Junio

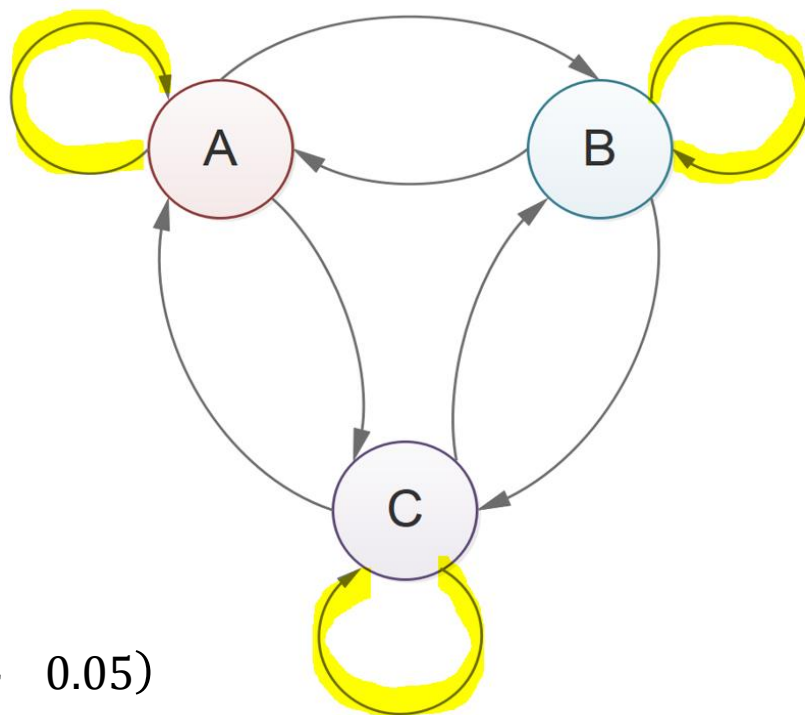
$$T^3 = \begin{bmatrix} \mathbf{0.237} & 0.485 & 0.278 \\ 0.236 & \mathbf{0.486} & 0.278 \\ 0.2425 & 0.4525 & \mathbf{0.305} \end{bmatrix}$$



# Ejercicio C: alternativa interesante, ¿quiénes son los leales de Marzo a Junio?

$$T = \begin{bmatrix} 0.30 & 0.50 & 0.20 \\ 0.20 & 0.60 & 0.20 \\ 0.25 & 0.25 & 0.50 \end{bmatrix}$$

$$\text{diag}(T) = \begin{bmatrix} 0.30 & 0 & 0 \\ 0 & 0.60 & 0 \\ 0 & 0 & 0.50 \end{bmatrix}$$



$$p_0 \text{diag}(T)^3 = L_3 = (0.0054 \quad 0.0864 \quad 0.05)$$

Del total