Contenido

Introducción

Las cadenas de Markov tienen la propiedad particular de que las probabilidades que describen la forma en que el proceso evolucionará en el futuro depende sólo del estado actual en que se encuentra el proceso y, por lo tanto, son independientes de los eventos ocurridos en el pasado.

Algunas Aplicaciones

- Comerciales;
- Planeamiento de Personal;
- Gestión de Inventarios;
- Planeamiento de la Producción;
- Análisis de Fallas y de cuentas contables;
- Estudios de Confiabilidad

Definiciones

Un **proceso estocástico** es un modelo matemático que describe el comportamiento de un sistema dinámico, sometido a un fenómeno de naturaleza aleatoria. La presencia de un fenómeno aleatorio hace que el sistema evolucione según un parámetro, normalmente el tiempo, que cambia de estado en forma probabilística. En otras palabras, al realizar una serie de observaciones del proceso en diferentes ocasiones y bajo idénticas condiciones, los resultados de las observaciones serán, en general, diferentes. Por esto es necesario definir:

$x = f(t)$ → *Variable aleatoria (representa una característica mensurable de los distintos estados que puede tomar el sistema)*

$p(x, t)$ → *Probabilidad asociada a 'x' (representa la probabilidad del estado asociado 'x' siendo 't' el tiempo)*

Clasificación de los Procesos Estocásticos

- Proceso Estocástico
  - Procesos aleatorios puros
  - Procesos Markovianos
    - Procesos de Markov
    - Cadenas de Markov
      - En parámetro discreto
        - Homogénea
        - No Homogénea
      - En parámetro continuo
        - Homogénea
        - No Homogénea
  - Procesos con memoria

En los **Procesos aleatorios puros** se cumple $P(x_{t+\Delta t}, t+\Delta t)$. Es decir, la probabilidad de que el sistema se encuentre en un estado cualquiera $x_{t+\Delta t}$ es independiente de los estados anteriores. Teniendo en cuenta lo antes mencionado, es un proceso sin memoria porque la probabilidad de un estado no depende de la historia de los estados en etapas anteriores. Ej. Control de la calidad de la materia prima recibida en lotes independientes muestreados al azar.

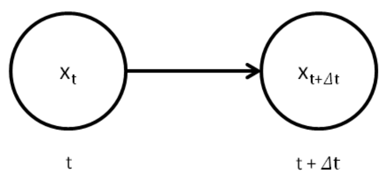
En los **Procesos con memoria** o de orden superior se necesita saber más que el estado inmediatamente anterior para predecir qué pasará en un estado futuro. Se cumple lo siguiente:

$$P(x_{t+\Delta t}, t+\Delta t) = P(x_{t+\Delta t}, t+\Delta t / x_{t+\Delta tn}, t+\Delta t_n)$$

En cambio, en el caso de un **Proceso Markoviano**, se cumple que:

$$P(x_{t+\Delta t}, t+\Delta t) = P(x_{t+\Delta t}, t+\Delta t / x_t, t)$$

Es decir, Markov propone restringir el problema en n=1. De esta forma, la probabilidad de que el sistema esté en un estado cualquiera $x_{t+\Delta t}$ en $t+\Delta t$ dependerá, y se podrá calcular, conociendo el estado inmediatamente anterior x_t



A estos procesos se los suele caracterizar como procesos en los cuales “dado el presente (x_t) el futuro ($x_{t+\Delta t}$) es independiente del pasado ($x_{t-\Delta tn}$)”

Nos concentraremos en los Procesos Markovianos. Dependiendo del tipo de variable podremos decir que estamos en presencia de un **Proceso de Markov** cuando la variable aleatoria representa una magnitud continua (fuerza, tensión, energía eléctrica, etc.). En estos casos, el espacio de los estados de ‘x’ deberá ser un intervalo de números reales. En cambio cuando la variable aleatoria representa una magnitud discreta (cantidad de personas, de materiales, etc.), el espacio de estados de ‘x’ deberá ser una secuencia finita o numéricamente infinita de enteros y se hablará de una **Cadena de Markov**.

Dentro de las llamadas cadenas de Markov, si las observaciones se realizan en cualquier instante del continuo (t≥0), se habla de una **Cadena de Markov de parámetro t (tiempo) continuo**, mientras que en otras ocasiones las observaciones se efectúan en determinados instantes de tiempo y por lo tanto diremos que estamos en presencia de una **Cadena de Markov de parámetro t (tiempo) discreto**.

Con referencia específicamente a las cadenas de Markov de parámetros de tiempo discretos o continuos, diremos que son **Homogéneas** las cadenas cuya probabilidad condicional de transición del estado ‘i’ al estado ‘j’ sólo depende del un Δt

$$P(j, t + \Delta t) = P(j, t + \Delta t / i, t)$$
$$j = x_{t+\Delta t}$$
$$i = x_t$$

Es decir, las probabilidades de transición son estacionarias lo que implica que no cambian con el tiempo.

Cadenas de Markov de parámetro t discreto homogéneas

En este caso, el conjunto de probabilidades de transición $p_{ij}^{(\Delta t)}$ para todos los estados 'i' y 'j' definen la **Matriz de Probabilidades de Transición $p^{(\Delta t)}$**

$$p(\Delta t) = \begin{array}{c|c} i \backslash j & \begin{matrix} 0 & 1 & \dots & k & \dots & m \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ k \\ \dots \\ m \end{matrix} & \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & \dots & p_{0k} & \dots & p_{0m} \\ p_{10} & p_{11} & \dots & p_{1k} & \dots & p_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{k0} & p_{k1} & \dots & p_{kk} & \dots & p_{km} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{m0} & p_{m1} & \dots & p_{mk} & \dots & p_{mm} \end{bmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ \dots \\ V_k \\ \dots \\ V_m \end{bmatrix}$$

En donde

$$\begin{cases} 0 \leq p_{ij} \leq 1 & \forall\, i,j \\ \sum p_{ij} = 1 & i = 0,1,2,\dots,m \end{cases}$$

Ecuación de Estado

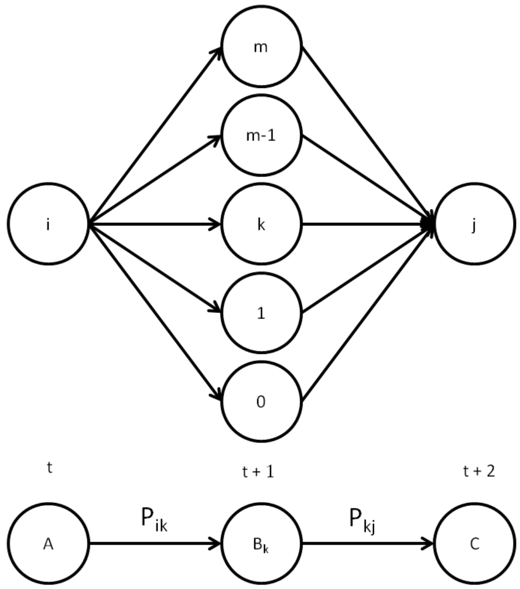
En el caso de las cadenas de Markov de parámetro t discreto homogéneas analizaremos la evolución de la Matriz de Transición.

Supongamos Δt=1 (probabilidad de transición de un paso), se comprueba que:

$$P_{ij}^{\Delta t} = P(j, t + 1 / i, t)$$

En este caso, el conjunto de probabilidades de transición desde un estado 'i' a cada uno de los estados 'j' define el Vector Distribución de probabilidades de 1 paso o V_{ij}

Si suponemos Δt=2 (probabilidad de transición de dos pasos), estaríamos en una situación como la descripta a continuación:



Entonces podríamos decir que:

$$P_{ij}{}^{(2)} = P(C/A)$$

$$P_{ij}{}^{(2)} = \frac{P(C \cap A)}{P(A)}$$

$$P_{ij}{}^{(2)} = \frac{\sum_{k=0}^{m} P(C \cap B_k \cap A)}{P(A)}$$

$$P_{ij}{}^{(2)} = \frac{\sum_{k=0}^{m} P(C/B_k \cap A) \times P(B_k \cap A)}{P(A)}$$

Si $P(C/B_k \cap A) = P(C/B_k)$, entonces

$$P_{ij}{}^{(2)} = \frac{\sum_{k=0}^{m} P(C/B_k) \times P(B_k/A) \times P(A)}{P(A)}$$

$$P_{ij}{}^{(2)} = \sum_{k=0}^{m} P_{kj} \times P_{ik}$$

En el caso de P_{kj} cuando k=m → $P_{kj} = P_{mj} = P_{ij}$
En el caso de P_{ik} cuando k=m → $P_{ik} = P_{im} = P_{ij}$
Entonces,

$$P_{ij}{}^{(2)} = P_{ij} \times P_{ij} = P_{ij}{}^{2}$$

Cuando Δt=n se comprueba que

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{m} P_{kj} \times P_{ik}^{(n-1)}$$

ó

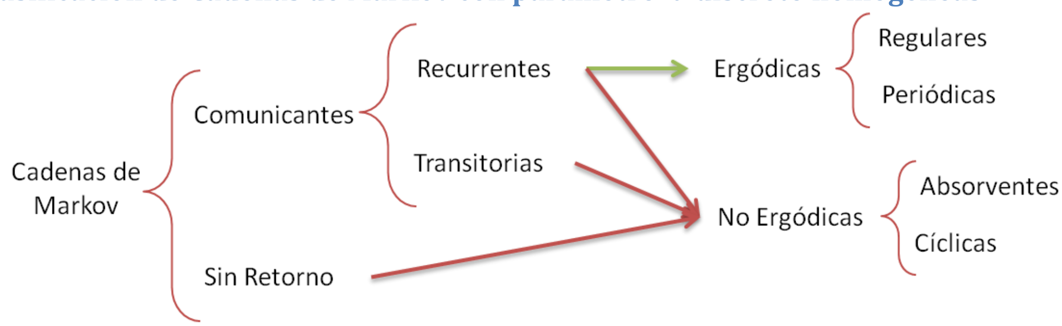
$$P_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{m} P_{kj}^{(n-1)} \times P_{ik}$$

Es decir, se comprueba que $\boxed{P_{ij}^{(n)} = P_{ij}^{n}}$
Esta expresión es conocida como la ecuación de **Chapman-Kolmogorov** que establece la probabilidad de pasar de un estado 'i' a un estado 'j' en 'n' pasos.

Para conocer el estado del sistema luego de ´n´ pasos recurrimos a la ecuación de estado:

$$V(n) = \begin{cases} V(0) \times P^{n} \\ V(n-1) \times P \end{cases}$$

Clasificación de Cadenas de Markov con parámetro 't' discreto homogéneas



Se dice que un estado 'j' es accesible desde un estado 'i' si para algún paso n≥1 se cumple que $P_{ij}(n) > 0$. En este caso $i \rightarrow j$, esta propiedad es transitiva lo que significa:

Si se cumple que $\left.\begin{matrix} i \rightarrow j \\ j \rightarrow k \end{matrix}\right\} i \rightarrow k$

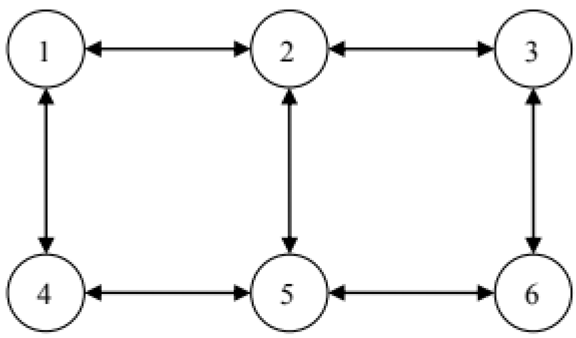
Por otro lado, se dirá que dos estados son **comunicantes** cuando $i \leftrightarrow j$ (también es una propiedad transitiva). Es decir, cuando *j* es accesible desde *i* e *i* es accesible desde *j*.
Cuando un estado no se comunica con otro, ni siquiera consigo mismo, se lo llama **sin retorno**.

Entonces, al conjunto de estados que se comunican entre sí se lo llama **clase comunicante**. Dentro del mismo existen:

- **clases recurrentes:** se las denomina de esta forma cuando la probabilidad de que la cadena se encuentre en un estado de dicha clase después de *n* transiciones. Es decir, luego de alcanzar dicho estado existe la probabilidad de alcanzarlo nuevamente;
- **clases transitorias**: se las denomina de esta forma cuando la probabilidad de que la cadena se encuentre en un estado de dicha clase después de *n* transiciones es nula. Es

decir, luego de alcanzar dicho estado existe una probabilidad de que el proceso no retorne nunca a él.

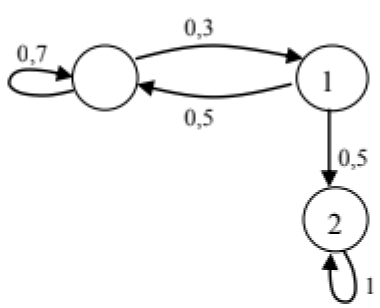
Siempre que la cadena de Markov homogénea posea una única clase comunicante recurrente se dirá que es **ergódica**. Por ejemplo,



$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} & x & & x & & \\ x & & x & & x & \\ & x & & & & x \\ x & & & & x & \\ & x & & x & & x \\ & & x & & x & \end{bmatrix} \end{array}$$

Será **regular** cuando, en alguno de los pasos, todos los elementos de la matriz sean positivos y no nulos. <u>Nos concentraremos en el estudio de este tipo de cadenas.</u>
Será **periódica** cuando no puede encontrarse una potencia de *P* para la cual todos los elementos sean positivos y no nulos.

Por otro lado, siempre que la cadena de Markov homogénea no posea una única clase comunicante se dirá que es **no ergódica**. Por ejemplo,



$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 & \\ 0{,}5 & & 0{,}5 \\ & & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Será **absorbente** cuando la cadena posea al menos un estado absorbente, es decir un estado que no puede ser abandonado.
Será **cíclica** cuando el proceso de transición pase de un estado a otro cíclicamente según un cierto patrón de comportamiento.

Régimen Permanente

Prestaremos especial atención a las cadenas de Markov ergódicas en régimen permanente o en su estado estacionario.
Se dice que hemos llegado al estado estacionario luego de un período relativamente largo de tiempo. En dicho régimen, la cadena ya ha entrado en una condición de equilibrio estocástico, lo que significa que sus probabilidades de estado devienen estables en el tiempo.

Para calcularlo utilizaremos alguno de los siguientes métodos:

1. Método Directo: Se expone a la Matriz de Transición a un número que tienda a infinito:
$$\lim_{n\to\infty} P^n = P(n)$$

2. Por Flujo Probabilístico: La suma de los flujos que concurren al nodo es igual a la suma de los flujos probabilísticos que salen del nodo:
$$\sum_{\forall i\neq j}^{n} p_i * p_{ij} = p_j * \sum_{\forall k\neq j}^{n} p_{jk}$$
Se debe tener en cuenta la ecuación de cierre $p_i + p_j = 1$
Este método sirve si calculo el estado estacionario pero no asegura la existencia de dicho estado.

3. Por Chapman-Kolmogorov: Se arma un sistema de dos ecuaciones en donde:
$$\begin{cases} V^* = V^* * P \\ \sum_{j=0}^{n} p_j = 1 \end{cases}$$

4. Calculando la Matriz Intensidad de de Transición:
$$p = B * A^{-1}$$
siendo A = P-I (I = Matriz Identidad)
B = V_m (última fila de la matriz A)

Cadenas de Markov de parámetro t continuo homogéneas

Para las cadenas de Markov con parámetro de tiempo discreto hemos visto que la matriz de transición en *n* etapas puede ser expresada en términos de la matriz de transición de 1 etapa *P*. En el caso del continuo, considerando unidades infinitesimales de tiempo entre transiciones *P* será reemplazada por *Q* (matriz de tasas de transición).

Matriz de tasas de transición 'Q'

Para que un proceso estocástico sea considerado como una Cadena de Markov de parámetro t continuo se debe cumplir que:

a) los posibles estados deben formar un conjunto numerable discreto;
b) si x(t) es el evento, $P\{x(t_n) = i : x(t_1) = j, x(t_2) = k, \dots\} = P(x(t_n) = i : x(t_1) = j)$

Ahora bien, al estudiar el comportamiento de dicho evento en estas condiciones, es necesario trabajar con probabilidades de transición entre instantes de tiempo muy próximos. Por lo que esta situación conduce a que dichas probabilidades de transición tiendan a cero. Para solucionar este inconveniente, se introduce el concepto de la derivada de la probabilidad de transición entre dos estados *i* y *j* distintos en Δt=0. Esta nueva magnitud, llamada **tasa (o intensidad) de transición**, expresa la variación de la probabilidad de transición entre dos estados diferentes de la cadena en un intervalo Δt pequeño, referido a un Δt unitario y queda definida como:

$$d_{ij} = \left[\frac{d\, p_{ij}^{(\Delta t)}}{d\,\Delta t}\right]_{\Delta t=0} \quad \forall i \neq j$$

En cambio, cuando los estados son iguales definimos la **tasa de permanencia** en el estado *i* que será un valor negativo porque la probabilidad de permanecer en el mismo estado decrece al aumentar *t*.
Estableciendo una relación entre ambas tasas podemos justificar lo antes mencionado:

$$\sum_{j=0}^{n} P_{ij}^{(\Delta t)} = 1$$

Derivando:

$$\frac{d\left[\sum_{j=0}^{n} P_{ij}^{(\Delta t)}\right]_{\Delta t=0}}{d\Delta t} = \sum_{j=0}^{n} d_{ij}^{(\Delta t)} = 0$$

Luego, podemos expresar la expresión anterior como:

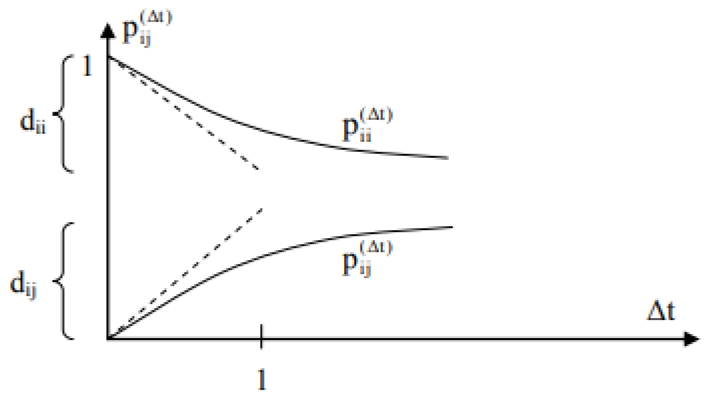
$$d_{ii} + \sum_{j\neq i}^{n} d_{ij}^{(\Delta t)} = 0$$

$$\boxed{d_{ii} = -\sum_{j\neq i}^{n} d_{ij}^{(\Delta t)}}$$

Esto significa que los elementos de la diagonal principal de la matriz *Q* se calculan como la suma de los elementos de su fila, cambiados de signo.
Entonces,

$$Q = \begin{array}{c|c} i \backslash j & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & \dots & m \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \dots \\ m \end{array} & \begin{bmatrix} -\sum_{j\neq i}^{n} d_{0j}^{(\Delta t)} & d_{01} & \dots & d_{0m} \\ d_{10} & -\sum_{j\neq i}^{n} d_{1j}^{(\Delta t)} & \dots & d_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{m0} & d_{m1} & \dots & -\sum_{j\neq i}^{n} d_{mj}^{(\Delta t)} \end{bmatrix} \end{array}$$

Al graficar esta relación:



se observa que las d_{ii} responden a una distribución exponencial por lo que *Q* estará afectada por $1 - e^{-\lambda t}$

Ecuación de Estado

En el continuo también se puede aplicar la fórmula de Chapman-Kolmogorov (desarrollada anteriormente) de la siguiente forma:

$$P(t)_{ij} = \sum_{k=0}^{n} P(\Delta t - 1)_{ik} \times P(\Delta t)_{kj}$$

$$P(t) = P(t - \Delta t) \times P(\Delta t)$$

Por lo que la ecuación de estado será:

$$V(t) = V(0) \times P(t)$$

Régimen Permanente

De igual forma que en el caso discreto, podemos observar que luego de un tiempo *t* suficientemente grande las p_{ij} se estabilizan en valores límites similares e independientes del estado inicial y del tiempo *t*. Por lo tanto, el vector en régimen permanente lo calcularemos a través de:

1. el límite de la siguiente ecuación:

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{bmatrix} p(0) & p(1) & \dots & p(j) & \dots & p(m) \\ p(0) & p(1) & \dots & p(j) & \dots & p(m) \\ \dots & & & & & \\ p(0) & p(1) & \dots & p(j) & \dots & p(m) \\ \dots & & & & & \\ p(0) & p(1) & \dots & p(j) & \dots & p(m) \end{bmatrix}$$

2. el límite de la siguiente ecuación:

$$\lim_{t\to\infty} V^{(t)} = \lim_{t\to\infty} V^{(t-\Delta t)} = V^*$$

De la siguiente forma:

$$V^* = V^* \cdot P^{(\Delta t)}$$

$$\sum_{j=0}^{m} p(j) = 1$$

3. utilizando la matriz Q: siguiendo el sistema de ecuaciones detallado a continuación

$$m+1 \text{ ecuaciones} \begin{cases} \sum_{j=0}^{m} p(i) \cdot d_{ij} = 0 & \text{i ecuaciones} \\ \sum_{i=0}^{m} p(i) = 1 \end{cases}$$

Si se sabe que

$$\sum_{j=0}^{n} P_{ij}^{(\Delta t)} = 0$$

Entonces, una columna cualquiera es la combinación lineal de las *n* columnas restantes por lo que, al menos una de ellas se puede eliminar. Por lo antes mencionado, se desecha la última ecuación de *Q* y en su lugar se incorpora el vector unitario de la siguiente forma:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} p(0) & p(1) \dots p(i) \dots p(m) \end{bmatrix}}_{V^*} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} d_{00} & d_{01} & \dots & p_{0k} & \dots & 1 \\ d_{10} & d_{11} & \dots & p_{1k} & \dots & 1 \\ \dots & & & & & \\ d_{i0} & d_{i1} & \dots & d_{ik} & \dots & 1 \\ \dots & & & & & \\ d_{m0} & d_{m1} & \dots & d_{mk} & \dots & 1 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \dots 0 \dots 1 \end{bmatrix}}_{B}$$

Por lo que $V^* = B \times A^{-1}$

Este sistema de ecuaciones también puede ser representado por un balance de flujos probabilísticos:

$$\sum_{\forall i \neq j} p(i) \cdot d_{ij} = p(j) \cdot \sum_{\forall k \neq j} d_{jk}$$

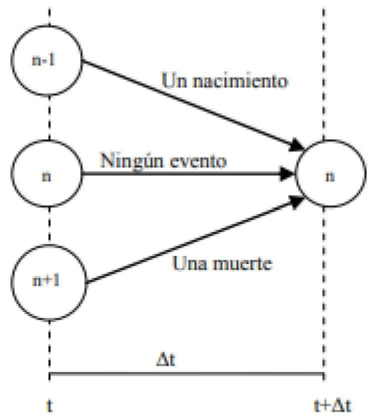
Procesos de Nacimiento y Muerte

Un caso especial de las Cadenas de Markov en parámetro continuo es el llamado proceso de nacimiento y muerte en donde:

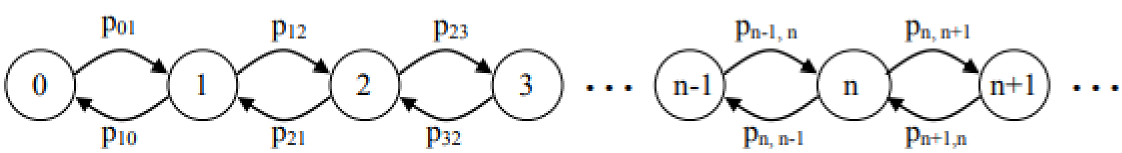
- el estado del sistema *n* en un instante *t* queda definido por su tamaño, es decir por la cantidad de unidades presentes en el sistema;
- los eventos se dan en forma independiente y son solamente de dos tipos:
  - "nacimientos", en donde la variable que representa el estado se incrementa,
  - "muertes", en donde la variable que representa el estado decrece;

- la probabilidad de que se verifique más de un evento en un intervalo de tiempo muy pequeño es prácticamente nula.

SI bien tienen muchas aplicaciones, nosotros vamos a estudiarlo específicamente para problemas de filas de espera en donde las variaciones de estado en un intervalo de tiempo pueden ser solamente unitarias, es decir cuando la probabilidad de que se produzca más de un nacimiento o una muerte en un intervalo Δt infinitesimal es nula. Esto implica que el tamaño del sistema sólo puede incrementarse en una unidad, permanecer en el mismo valor, o disminuir en una unidad. Es decir:



Si consideramos que el flujo probabilístico p_{ii} de un nodo se anula en el régimen permanente la cadena puede representarse de la siguiente forma:



En una gran cantidad de sistemas se observa que estos procesos se ajustan a la distribución Poisson en donde la probabilidad de que se produzcan *n* eventos en un Δt está dado por:

$$p(n) = \frac{(\lambda \cdot \Delta t)^n \cdot e^{-\lambda \Delta t}}{n!}$$

Cuando n=0 (no hay evento) → $p(0) = e^{-\lambda\Delta t}$
Cuando n=1 (hay un evento) → $p(1) = \lambda \times \Delta t \times e^{-\lambda\Delta t}$
Para que en un Δt≈0 no se pueda producir más de un evento, entonces:

$$p(0) + p(1) = 1$$
$$e^{-\lambda\Delta t} + \lambda \times \Delta t \times e^{-\lambda\Delta t} = 1$$
$$e^{-\lambda\Delta t}(1 + \lambda \times \Delta t) = 1$$
$$e^{-\lambda\Delta t} = \frac{1}{(1 + \lambda \times \Delta t)} = (1 - \lambda \times \Delta t)$$

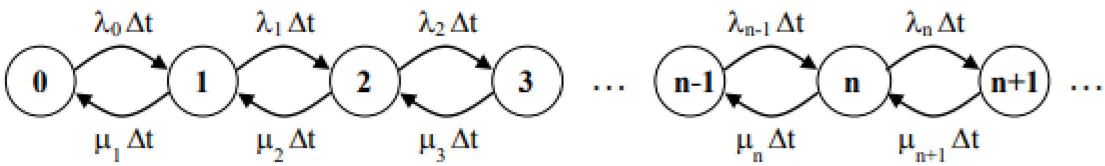
Entonces,

$$p(0) = e^{-\lambda\Delta t} = 1 - \lambda \times \Delta t$$
$$p(1) = \lambda \times \Delta t \times e^{-\lambda\Delta t} = \lambda \times \Delta t$$

Si llamamos λ_n al número promedio de ingresos al sistema por unidad de tiempo cuando el estado es *n* y μ_n al número promedio de egresos en ese estado, podemos decir que:

- la probabilidad de que haya un nacimiento es λ_n*Δt
- la probabilidad de que no haya un nacimiento es 1 - λ_n*Δt
- la probabilidad de que haya una muerte es μ_n*Δt
- la probabilidad de que no haya una muerte es 1 - μ_n*Δt

En su forma gráfica:



Por flujos probabilísticos para todo n≥1:

$$p(n) = p(n-1) \times \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_1}$$

Como habíamos dicho anteriormente, se debe cumplir que $\sum_{n=0}^{N} p(n) = 1$
Por lo que,

$$p(n) + p(n-1) = 1$$
$$p(n) = 1 - p(n-1)$$

Reemplazando con la ecuación anterior:

$$p(n-1) \times \frac{\lambda}{\mu} = 1 - p(n-1)$$

$$1 - p(n-1) - p(n-1) \times \frac{\lambda}{\mu} = 0$$

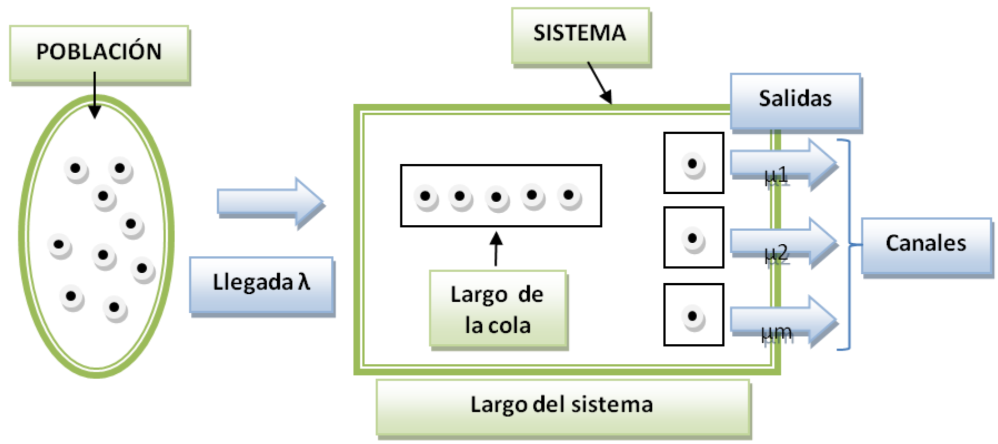
$$1 - p(n-1) \times \left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right) = 0$$

$$p(n-1) = \frac{1}{\left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right)}$$

Si p(n-1)=p(0) entonces,

$$p(0) = \frac{1}{\left(1 + \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right)}$$

Para el caso de una fila de espera, podemos graficar el modelo de la siguiente forma:



Para este tipo de modelos las interrogantes que surgen son ¿cómo funciona el sistema?, ¿cuál es el número necesario de canales?, ¿cuál es la velocidad de atención?, ¿cuál es la capacidad de la cola?, entre otras.

Para el cálculo del número medio de clientes en el sistema es preciso definir una variable aleatoria de estado i=n que lo represente llamada *L* o **Largo del Sistema** que dependerá de

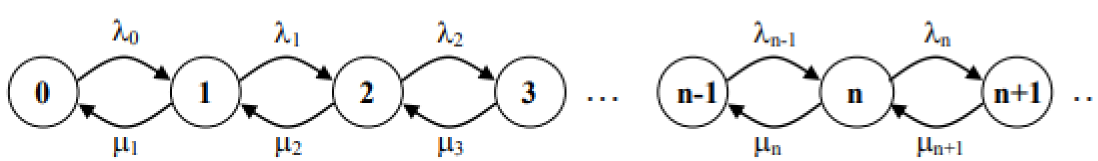
$$L = \varepsilon(n) = \sum_{n=0}^{N} n \times p(n)$$

Aplicando cadenas de Markov con parámetro t continuo homogéneas a un modelo de Filas de Espera, suponemos:

- los canales en paralelo poseen igual velocidad;
- la cola puede ser de capacidad infinita o finita, sin prioridad;
- la población es infinita, sin paciencia;
- los arribos siguen una distribución tipo Poisson;
- las salidas siguen una distribución tipo Exponencial.

Para hallar el L y L_q será necesario calcular la p(n) en el régimen estacionario y para esto debemos armar la matriz de tasas de transición de la siguiente forma:

1. <u>Construir el grafo de tasas de transición</u>



2. <u>Construir la matriz A por filas</u>: teniendo en cuenta que
   - las tasas de transición d_{ij} son los arcos que salen del estado *i* a cada uno de los estados *j*;
   - las tasas de permanencia d_{ii} son los elementos de la diagonal de la matriz. Se obtienen como la suma de las d_{ij} de esa fila cambiada de signo;

- la última columna de la matriz se reemplaza por el vector unitario.

$$A = \begin{array}{cc} {}_{i}\diagdown^{j} & \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & \dots & (n-1) & \dots & m \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \dots \\ m-2 \\ m-1 \\ m \end{array} & \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \\ \mu_1 & -(\mu_1+\lambda_1) & \lambda_1 & \dots & 0 & \dots & 1 \\ 0 & \mu_2 & -(\mu_2+\lambda_2) & \dots & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{(n-2)} & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -(\mu_{(n-1)}+\lambda_{(n-1)}) & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mu_n & \dots & 1 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ \dots \\ P_{m-2} \\ \dots \\ P_m \end{bmatrix}$$

Al aplicar p*A=B se comprueba que:

$$\begin{cases} P_n = \dfrac{\Pi\lambda_i}{\Pi\mu_i} P_0 \\ \sum p_{ij} = 1 \qquad i = 0,1,2,\dots,m \end{cases}$$

A partir de estas dos fórmulas se derivan todas las expresiones del modelo de Filas de Espera.