

Ejercicio 1. Sea  $\alpha = \forall x \forall y (P(x, a) \wedge P(y, a) \rightarrow \exists z (N(z) \wedge Q(f(x, z), y)))$ . Calcula el valor de verdad de  $\alpha$  en las siguientes estructuras:

$$\forall 0 \neq y \in \mathbb{N}$$

1. Estructura  $\mathcal{E}_1$ :

- Dominio:  $U = \mathbb{R}$ .
- Constantes:  $a = 0$ .
- Funciones:  $f(x, y) = x \cdot y$ .
- Predicados:  $P(x, y) \equiv x > y$ ;  $Q(x, y) \equiv x > y$ ;  $N(x) \equiv x \in \mathbb{N}$ .

$$\alpha = \forall x \forall y \left( \underbrace{P(x, a) \wedge P(y, a)}_{\text{true}} \rightarrow \underbrace{\exists z (N(z) \wedge Q(f(x, z), y))}_{\text{true}} \right)$$

"Para cada  $x, y$  mayores de 0,  $\exists z \in \mathbb{N}$  tal que  $x \cdot z > y$ "

Este enunciado es cierto, porque se cumple siempre que  $z > y$ .

No hay restricciones a parte de que  $z \in \mathbb{N}$ ,  $y$   $x, y$  son siempre  $> 0$ .

2. Estructura  $\mathcal{E}_2$ :

- Dominio:  $U = \mathbb{Z}_{15}$ .
- Constantes:  $a = 1$ .
- Funciones:  $f(x, y) = x \cdot y$ .
- Predicados:  $P(x, y) \equiv x^2 = y$ ;  $N(x) \equiv (x = 1 \vee x = -1)$ ;  $Q(x, y) \equiv x = y$ .

$x$	$y$	$\rightarrow$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$$\alpha = \forall x \forall y \left( \underbrace{P(x, a) \wedge P(y, a)}_{\text{true}} \rightarrow \underbrace{\exists z (N(z) \wedge Q(f(x, z), y))}_{\text{true}} \right)$$

$$\forall x \forall y, \quad \begin{matrix} x^2 = 1 \\ y^2 = 1 \end{matrix} \rightarrow \exists z = \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{matrix}, \quad x \cdot z = y$$

$$1, 16, 12^1, 196_1$$

$$K 1^2, K 4^2, K 11^2, K 14^2$$

$$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}$$

$$z = \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix} \quad 1 \cdot \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix} \checkmark$$

$$z = \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix} \quad 1 \cdot \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} 1 \cdot 1 &= 1 \neq 4 \\ 1 \cdot -1 &= -1 \neq 4 \end{aligned}$$

Hemos demostrado que  $\exists$  al menos un caso de  $x, y$

en el cual no hay  $z$  con características como las descritas ( $z=1, \text{ ó } z=-1$ ) y ( $x \cdot z = y$ )

Ejercicio 2. Estudia si las siguientes fórmulas son universalmente válidas, satisfacibles y refutables o contradicciones:

1.  $\forall x(P(x, a) \rightarrow \exists y Q(f(y), x)) \vee \exists x \neg Q(x, x)$ .

$(x > 0) \rightarrow \exists y, y^2 = x$  ó  $x \neq x$   
 $\downarrow$   
 NO PASA  
 NUNCA

• var  $x, y$

• CTE  $a = 0$

• Dom  $\mathbb{N}$

• PRED  $P(x, y) \equiv x > y$   
 $Q(x, y) \equiv x = y$

• FUNC  $f(x) \equiv x^2$

$x = 2$

$2 > 0 \rightarrow y^2 \in \mathbb{N} = x \vee 2 \neq 2$  REFUT.  
 $\downarrow$   $\downarrow$   
 SI NO NO

$x = 4$

$4 > 0 \rightarrow y^2 \in \mathbb{N} = x \vee 4 \neq 4$  SAT.  
 $\downarrow$   $\downarrow$   
 SI  $y = 2$  NO

Es satisfacible y refutable

3.  $\exists x \forall y (\neg P(y, y) \rightarrow P(x, y))$ .

• var  $x, y$

$\forall y, y = y \rightarrow \exists x x \neq y$

• Tautología

Satisf.

• Dom  $\mathbb{N}$

• PRED  $P(x, y) \equiv x \neq y$

• PRED  $P(x, y) \equiv y \neq x^2$   
 $x \neq y^2$

$x$  puede ser

$3x = y$

$y = y^2 \rightarrow \exists x, x \neq y^2$

$y = 1$

$1 = 1^2 \rightarrow \exists x, x \neq 1$   
 $\checkmark$

$y = 2$

$3 \cdot 2 \neq 2 \rightarrow \exists x, 3 \cdot x = 2$   
 $x = \frac{2}{3} \notin \mathbb{N}$   
 Refutable

3.  $\exists x \forall y (\neg P(y, y) \leftrightarrow P(x, y))$ .

• var  $x, y$

$y = y \leftrightarrow x \neq y$   
 $\checkmark$

• Taut., siempre puedes encontrar

una  $x \neq y$

$\downarrow$

Satisf.

• Dom  $\mathbb{N}$

• PRED  $P(x, y) \equiv x \neq y$

$P(x, y) \equiv 3x = y$

$x \neq y$	$\leftrightarrow$
0 0	1
0 1	0
1 0	0
1 1	1

$3y \neq y \leftrightarrow 3x = y$

$y = 1$

$3 \cdot 1 \neq 1 \leftrightarrow \exists x 3x = 1$   
 $\downarrow$   
 SI

$\hookrightarrow x = \frac{1}{3} \notin \mathbb{N}$   
 Refutable

$$3. \exists x \forall y (\neg P(y, y) \leftrightarrow P(x, y)).$$

• VAR  $x, y$

• Dom  $\mathbb{N}$

• PRED  $P(x, y) = x \neq y$

$$P(x, y) \equiv \exists x = y$$

$$y = y \leftrightarrow x \neq y$$

• Taut., siempre puedes encontrar una  $x \neq y$

↓  
Satisf.

$x, y$	$\leftrightarrow$
0, 0	1
0, 1	0
1, 0	0
1, 1	1

$$\exists y \neq y \leftrightarrow \exists x = y$$

$$y = 1$$

$$\frac{3 \cdot 1 \neq 1}{\text{SI}} \leftrightarrow \exists x \exists x = 1$$

$$\hookrightarrow x = \frac{1}{3} \notin \mathbb{N}$$

↓  
Refutable

$$2. \forall x(P(x, a) \rightarrow \exists y Q(f(x), y)) \vee \exists x \neg Q(x, x) \neq \alpha$$

$\emptyset \models \alpha \equiv \alpha \text{ es insat?}$

• FORMA PRENEXIA

$$\neg [\forall x (\neg P(x, a) \vee \exists y Q(f(x), y)) \vee \exists x \neg Q(x, x)]$$

$$\exists x \neg (\neg P(x, a) \vee \exists y Q(f(x), y)) \wedge \forall x Q(x, x);$$

$$\exists x (P(x, a) \wedge \forall y \neg Q(f(x), y)) \wedge \forall x Q(x, x);$$

$$\exists x (\underbrace{\forall y (P(x, a) \wedge \neg Q(f(x), y))}_{\alpha_1}) \wedge \forall z Q(z, z);$$

$$\exists x (\forall y \forall z (P(x, a) \wedge \neg Q(f(x), y) \wedge Q(z, z))) ; \quad \boxed{x \rightarrow b}$$

FORMA SKOLEM

$$\forall y \forall z (\underbrace{P(b, a)}_{\alpha_1} \wedge \underbrace{\neg Q(f(b), y)}_{\alpha_2} \wedge \underbrace{Q(z, z)}_{\alpha_3})$$

$$\varphi_1 = \{ P(b, a), \neg Q(f(b), y), Q(z, z) \} \quad \text{CJTO DE HORN}$$

$$\frac{\neg Q(f(b), y)}{(y/f(b))} \quad \frac{Q(z, z)}{(z/f(b))}$$

□ INSAT  $\Rightarrow$  UNIVERSALMENTE VÁLIDA

**Ejercicio 3.** Consideramos el lenguaje de primer orden con dos símbolos de constante  $a, b$ , tres símbolos de función  $t^1, s^2, p^2$  y un símbolo de predicado  $Eq^2$ .

Damos la estructura siguiente:

- Dominio:  $U = M_3(\mathbb{R})$ .
- Constantes:  $\underline{a} = 0$ ,  $\underline{b} = Id$  (es decir, la matriz cero y la matriz identidad respectivamente).
- Funciones:  $t(A) = A^t$ ,  $s(A, B) = A + B$ ,  $p(A, B) = A \cdot B$ .
- Predicados:  $Eq(A, B) \equiv A = B$ .

Expresa con este lenguaje los siguientes enunciados:

1. La matriz cero es el elemento neutro de la suma.
2. La traspuesta de la traspuesta de una matriz es la propia matriz.
3. El producto de matrices no es conmutativo pero sí es asociativo.
4. Toda matriz simétrica es regular (tiene inversa).
5. La única matriz idempotente<sup>1</sup> y regular es la identidad.

$$x, y = \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \in \mathbb{R}$$

$$1) \forall x (Eq(s(x, a), x))$$

$$\begin{array}{l} \text{CONM. } a \cdot b = b \cdot a \\ \text{ASOC. } (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \end{array}$$

$$2) \forall x (Eq(x, t(t(x))))$$

$$3) \forall x, y, z (\neg Eq(p(x, y), p(y, x)) \wedge Eq(p(p(x, y), z), p(x, p(y, z))))$$

$$4) \forall x \left( \underbrace{Eq(x, t(x))}_{\substack{\text{m. SIMÉTRICA} \\ A = A^t}} \rightarrow \exists y \underbrace{Eq(p(x, y), b)}_{\substack{\downarrow \text{INV} \\ m \cdot m^{-1} = Id}} \right)$$

$$5) \forall x \left[ \underbrace{(Eq(p(x, x), x))}_{\substack{\text{IDEMPOT.} \\ A^2 = A}} \wedge \underbrace{\exists y Eq(p(x, y), b)}_{\text{INV.}} \leftrightarrow \underbrace{Eq(x, b)}_{Id} \right]$$

Ejercicio 4. De las siguientes fórmulas:

- $\alpha_1 = \exists z \forall w (\neg P(z, x) \vee (P(w, y) \wedge \neg Q(y, w)))$ ;
- $\alpha_2 = \exists z \forall w \exists x (\neg P(z, y) \vee (P(w, y) \wedge \neg Q(y, x)))$ ;
- $\alpha_3 = \forall w \exists x (P(w, x) \vee (P(w, y) \wedge \neg Q(y, x)))$ ;
- $\alpha_4 = \exists z \forall w ((P(z, x) \vee P(w, y)) \wedge (P(z, x) \vee \neg Q(y, z)))$ ;

señala cuál (o cuáles) es equivalente a la fórmula

$$\alpha = \forall z \neg P(z, x) \rightarrow \forall x (P(x, y) \wedge \exists x \neg Q(y, x)).$$

$$\begin{aligned} [\forall z \neg P(z, x)] &\rightarrow \forall x (P(x, y) \wedge \exists x \neg Q(y, x)); \\ \exists z P(z, x) &\vee \forall x (P(x, y) \wedge \exists x \neg Q(y, x)); \\ \exists z P(z, x) &\vee \forall w (P(w, y) \wedge \exists x \neg Q(y, x)); \\ \exists z P(z, x) &\vee \forall w (\exists x P(w, y) \wedge \neg Q(y, x)); \\ \exists z P(z, x) &\vee \forall w \exists x (P(w, y) \wedge \neg Q(y, x)); \\ \exists z P(z, y) &\vee \forall w \exists x (P(w, y) \wedge \neg Q(y, x)); \\ \exists z \forall w \exists x (P(z, y) &\vee (P(w, y) \wedge \neg Q(y, x))) \end{aligned}$$

~~no coincide con ninguno, tomemos otra ruta~~

20.  $\forall x \neg a$  si y solo si no aparece libre en  $a$ .

•  $\forall x \neg a \equiv \neg \forall x a$

•  $\forall x \neg a \equiv \neg \exists x a$

•  $\forall x \neg a \equiv \neg a$

21.  $\exists x a \equiv a$  si y solo si no aparece libre en  $a$ .

•  $\exists x a \equiv a$

•  $\exists x a \equiv \forall x a$

22.  $\forall x a \equiv \forall y a$  si y solo si no aparece en la fórmula  $a$ .

23.  $\exists x a \equiv \exists y a$  si y solo si no aparece en la fórmula  $a$ .

24.  $\forall x a \vee \forall y b \equiv \forall x (a \vee b)$ .

25.  $\exists x a \vee \exists y b \equiv \exists x (a \vee b)$ .

26.  $\forall x a \wedge \forall y b \equiv \forall x (a \wedge b)$ .

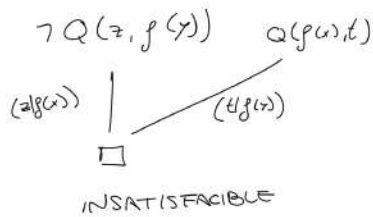
27.  $\exists x a \wedge \exists y b \equiv \exists x (a \wedge b)$ .

$$\begin{aligned} [\forall z \neg P(z, x)] &\rightarrow \forall x (P(x, y) \wedge \exists x \neg Q(y, x)); \\ \exists z P(z, x) &\vee \forall x (P(x, y) \wedge \exists x \neg Q(y, x)); \\ \exists z P(z, x) &\vee \forall w (P(w, y) \wedge \exists x \neg Q(y, x)); \\ \exists w P(w, x) &\vee \forall w (\exists x (P(w, y) \wedge \neg Q(y, x))); \\ \exists w P(w, x) &\vee \forall w \exists x (P(w, y) \wedge \neg Q(y, x)); \\ \exists w P(w, x) &\vee \forall w \exists z (P(w, y) \wedge \neg Q(y, z)); \\ \exists w \forall w \exists z (P(w, x) &\vee (P(w, y) \wedge \neg Q(y, z))) \end{aligned}$$

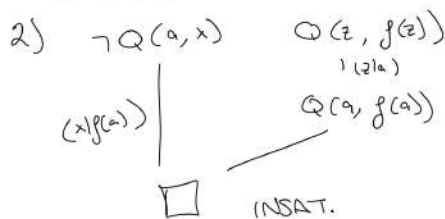
Ejercicio 5. Estudia si los siguientes conjuntos de cláusulas son satisfacibles o insatisfacibles:

1.  $\{Q(f(x), y), \neg Q(z, f(y))\}$ .
2.  $\{Q(x, f(x)), \neg Q(a, x)\}$ .
3.  $\{Q(x, x) \vee Q(y, f(y)), \neg Q(b, y)\}$ .
4.  $\{Q(y, y) \vee Q(y, f(y)), \neg Q(b, y)\}$ .
5.  $\{Q(x, f(a)) \vee Q(f(b), y), \neg Q(x, f(y)) \vee \neg Q(f(x), y)\}$ .
6.  $\{Q(x, f(a)) \vee Q(f(b), y), \neg Q(x, f(y)) \vee \neg Q(f(y), x)\}$ .

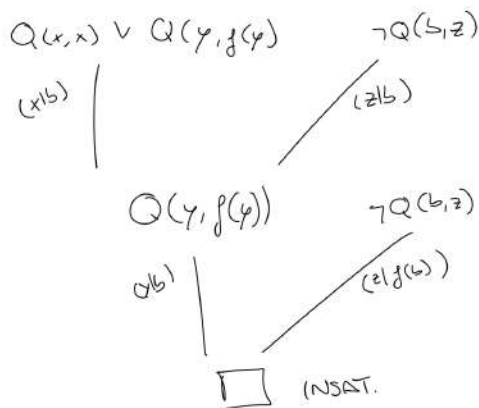
1)  $\underbrace{Q(f(x), y)}_{\text{HORN}} , \underbrace{\neg Q(z, f(y))}_{\text{NEA}} \rightarrow \text{Cjto Horn} \rightarrow \text{Res. linear-input}$   
 amparado por la negación



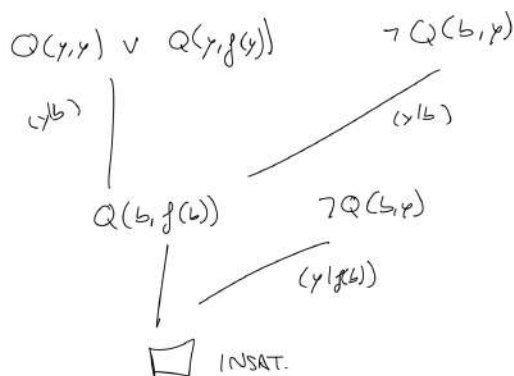
2.  $\{Q(x, f(x)), \neg Q(a, x)\}$ .



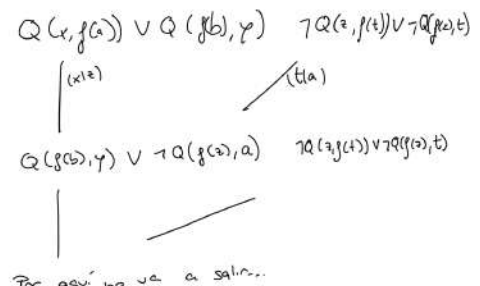
3.  $\{Q(x, x) \vee Q(y, f(y)), \neg Q(b, y)\}$ .



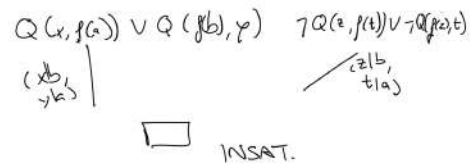
4.  $\{Q(y, y) \vee Q(y, f(y)), \neg Q(b, y)\}$ .



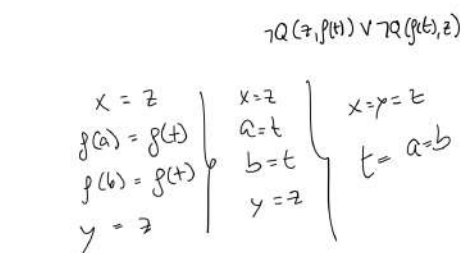
5.  $\{Q(x, f(a)) \vee Q(f(b), y), \neg Q(x, f(y)) \vee \neg Q(f(x), y)\}$ .



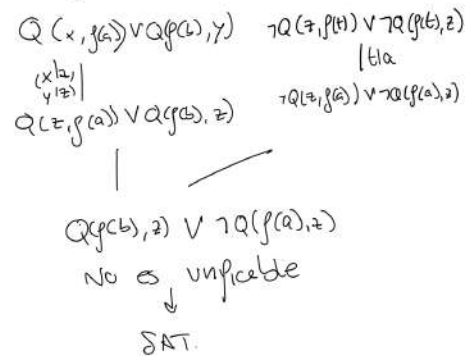
$$\begin{array}{l} x = z \\ f(a) = f(t) \\ f(b) = f(z) \\ y = t \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x = z; x = z \\ y = t; y = t \\ a = t; t = a \\ b = z; z = b \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} x = z = b \\ y = t = a \end{array} \right. \quad \text{Si se puede resolver}$$



6.  $\{Q(x, f(a)) \vee Q(f(b), y), \neg Q(x, f(y)) \vee \neg Q(f(y), x)\}$ .



$$\begin{array}{l} x = z \\ f(a) = f(t) \\ f(b) = f(t) \\ y = z \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x = z \\ a = t \\ b = t \\ y = z \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} x = y = z \\ t = a = b \end{array} \right.$$





# Ejercicio 6. Sean:

- $\alpha_1 = \forall x(P(x) \wedge Q(x) \rightarrow \exists y(R(y) \wedge \neg S(x,y)))$ .
- $\alpha_2 = \forall x(P(x) \rightarrow T(x)) \wedge \exists x(P(x) \wedge Q(x))$ .
- $\alpha_3 = \forall x(U(x) \vee V(x) \rightarrow \neg R(x))$ .
- $\alpha_4 = \forall x(\neg U(x) \wedge W(x) \rightarrow V(x))$ .
- $\beta = \exists x \exists y(T(x) \wedge \neg W(y) \wedge \neg S(x,y))$ .

Transforma el problema de ver si  $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} \models \beta$  en un problema de comprobar si un conjunto de cláusulas es o no insatisficible.

Estudia si ese conjunto de cláusulas es un conjunto de Horn o puede ser transformado en un conjunto de Horn.

Estudia si  $\beta$  es consecuencia lógica de  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  y  $\alpha_4$ .

$$\neg \models \text{q } \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \neg \beta \models B$$

$$\approx \text{q } \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \neg \beta \text{ es insat.}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \forall x (P(x) \wedge Q(x) \rightarrow \exists y(R(y) \wedge \neg S(x,y))) \\ &= \forall x (\neg(P(x) \wedge Q(x)) \vee \exists y(R(y) \wedge \neg S(x,y))) \\ &= \forall x (\neg P(x) \vee \neg Q(x) \vee (R(y) \wedge \neg S(x,y))) \\ &= \forall x \exists y (\neg P(x) \vee \neg Q(x) \vee (R(y) \wedge \neg S(x,y))) \\ &= \forall x \exists y ((\neg P(x) \vee \neg Q(x) \vee R(y)) \wedge (\neg P(x) \vee \neg Q(x) \vee \neg S(x,y))) \quad \text{PRENEXA } x \rightarrow y \rightarrow g(x) \\ &= \forall x ((\neg P(x) \vee \neg Q(x) \vee R(g(x))) \wedge (\neg P(x) \vee \neg Q(x) \vee \neg S(x, g(x)))) \quad \text{SKOLEM} \end{aligned}$$

$$\alpha_2 = \forall x (P(x) \rightarrow P(x)) \wedge \exists x (P(x) \wedge Q(x))$$

$$= \forall x (\neg P(x) \vee P(x)) \wedge \exists x (P(x) \wedge Q(x))$$

$$= \exists x (P(x) \wedge Q(x)) \quad \text{PRENEXA } x \rightarrow a$$

$$= \underbrace{P(a)}_{C3} \wedge \underbrace{Q(a)}_{C4} \rightarrow \underbrace{Q'(a)}_{C4'}$$

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= \forall x (U(x) \vee V(x) \rightarrow \neg R(x)) \\ &= \forall x ((\neg U(x) \wedge \neg V(x)) \vee \neg R(x)) \\ &= \forall x ((\neg U(x) \vee \neg R(x)) \wedge (\neg V(x) \vee \neg R(x))) \\ &= \underbrace{\neg U(x) \vee \neg R(x)}_{C5} \wedge \underbrace{\neg V(x) \vee \neg R(x)}_{C6} \\ &= \underbrace{\neg U(x)}_{C5'} \vee \underbrace{\neg R(x)}_{C6'} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_4 &= \forall x (\neg U(x) \wedge W(x) \rightarrow V(x)) \\ &= \forall x (\underbrace{U(x)}_{C7} \vee \underbrace{\neg W(x)}_{C8} \vee \underbrace{V(x)}_{C9}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg \beta &= \neg [\exists x \exists y (T(x) \wedge \neg W(y) \wedge \neg S(x,y))] \\ &= \forall x \forall y \neg (T(x) \wedge \neg W(y) \wedge \neg S(x,y)) \\ &= \forall x \forall y (\neg T(x) \vee W(y) \vee S(x,y)) \\ &= \underbrace{\neg T(x) \vee W(y) \vee S(x,y)}_{C10} \end{aligned}$$

$$\forall x \forall y (\neg T(x) \vee \neg W'(y) \vee S(x,y))$$

$$C10' \rightarrow \text{HORN}$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow \underbrace{\neg P(x) \vee \neg Q'(x) \vee \neg R'(y)}_{C1''} \\ &\rightarrow \underbrace{\neg P(x) \vee \neg Q'(x) \vee \neg S(x, g(x))}_{C2'} \end{aligned}$$

$$C1 \rightarrow \text{HORN} \rightarrow C1' \rightarrow \text{NEG} \rightarrow \text{HORN}$$

$$C2 \rightarrow \text{NEG} \rightarrow C2' \rightarrow \text{HORN}$$

$$C3 \rightarrow \text{HORN}$$

$$C4 \rightarrow \text{HORN} \rightarrow C4' \rightarrow \text{NEG}$$

$$C5 \rightarrow \text{NEG} \rightarrow C5' \rightarrow \text{HORN}$$

$$C6 \rightarrow \text{NEG} \rightarrow C6' \rightarrow \text{HORN}$$

$$C7 \rightarrow \text{HORN}$$

$$C8 \rightarrow \text{NEG} \rightarrow C8' \rightarrow \text{HORN}$$

$$C9 \rightarrow \text{HORN}$$

$$C10 \rightarrow / \rightarrow C10' \rightarrow \text{HORN}$$

$$\begin{cases} W' = \neg W \\ W = \neg W' \end{cases}$$

$$\begin{cases} R' = \neg R \\ R = \neg R' \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q' = \neg Q \\ Q = \neg Q' \end{cases}$$

Ahora es gto de HORN



$$(1) \neg P(x) \vee Q'(x) \vee \neg R'(p(x))$$

$$(2) \neg P(x) \vee Q'(x) \vee \neg S(r, p(x))$$

$$(3) P(a)$$

$$(4) \neg Q'(a) \text{ neg.}$$

$$(5) \neg U(x) \vee R(x)$$

$$(6) \neg V(x) \vee R'(x)$$

$$(7) U(x)$$

$$(8) W'(x)$$

$$(9) V(x)$$

$$(10) \forall x \forall y (\neg T(x) \vee \neg W'(y) \vee S(x, y))$$

$$\neg Q'(a)$$

[12]

$$\neg P(x) \vee Q'(x) \vee \neg R'(p(x))$$

|

$\times 1a$

[13]

$$P(a)$$

$$\neg P(a) \vee \neg R'(p(a))$$

|

[15]

$$\neg U(x) \vee R'(x)$$

$$\neg R'(p(a))$$

|

$\times 1f(a)$

[17]

$$U(x)$$

$$\neg U(p(a))$$

|

$\times 1p(a)$

$\square$

es inst.

==

$\Phi$  cons. lógica de

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4.$