Ejercicio 1. Sea $\alpha = \forall x \forall y (P(x,a) \wedge P(y,a) \rightarrow \exists z (N(z) \wedge Q(f(x,z),y)))$. Calcula el valor de verdad de α en las siguientes estructuras:

$\forall 0 \; y \in \mathbb{N}$

1. Estructura $\mathcal{E}_1$:
   - Dominio: $U = \mathbb{R}$.
   - Constantes: $a = 0$.
   - Funciones: $f(x,y) = x \cdot y$.
   - Predicados: $P(x,y) \equiv x > y$; $Q(x,y) \equiv x > y$; $N(x) \equiv x \in \mathbb{N}$.

$$\alpha = \forall x \forall y \left(\underbrace{P(x,a) \wedge P(y,a)}_{} \rightarrow \exists z \left(\underbrace{N(z) \wedge Q(f(\underbrace{x,z}),y)}_{} \right) \right)$$

"Para cada x, y mayores de 0, $\exists z \in \mathbb{N}$ tal que $x \cdot z > y$"

Este enunciado es cierto,
porque se cumple siempre que $z > y$.
No hay restricciones a parte de que $z \in \mathbb{N}$, y
x, y son siempre > 0.

2. Estructura $\mathcal{E}_2$:
   - Dominio: $U = \mathbb{Z}_{15}$.
   - Constantes: $a = 1$.
   - Funciones: $f(x,y) = x \cdot y$.
   - Predicados: $P(x,y) \equiv x^2 = y$; $N(x) \equiv (x = 1 \text{ ó } x = -1)$; $Q(x,y) \equiv x = y$.

x	y	→
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$$\alpha = \forall x \forall y \left(\underbrace{P(x,a) \wedge P(y,a)}_{} \rightarrow \exists z \left(\underbrace{N(z) \wedge Q(f(\underbrace{x,z}),y)}_{} \right) \right)$$

$\forall x \forall y \quad \begin{matrix} x^2 = 1 \\ y^2 = 1 \end{matrix} \rightarrow \exists z = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}, \quad x \cdot z = y$

$1, 16, 121, 196,$
$k \cdot 1^2, k \cdot 4^2, k \cdot 11^2, k \cdot 14^2$

- $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ $\quad z = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases} \quad 1 \cdot \overset{1}{\overset{\uparrow}{z}} = 1$ ✓

- $\begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$ $\quad z = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases} \quad 1 \cdot z = 4$

$$\boxed{\begin{matrix} 1 \cdot 1 = 1 \neq 4 \\ 1 \cdot -1 = 14 \neq 4 \end{matrix}}$$

Hemos demostrado
que $\exists$ al menos
un caso de x, y
en el cual no
hay z con características
como las descritas [($z = 1$, ó $z = -1$)
y ($x \cdot z = y$)]

Ejercicio 2. Estudia si las siguientes fórmulas son universalmente válidas, satisfacibles y refutables o contradicciones:

1. $\forall x(P(x,a) \rightarrow \exists y Q(f(y),x)) \vee \exists x \neg Q(x,x)$.

$(x>0) \rightarrow \exists y,\ y^2 = x$ ó $\underbrace{x \neq x}_{\text{NO PASA NUNCA}}$

- VAR x, y
- CTE $a = 0$
- Dom $\mathbb{N}$
- PRED $P(x,y) \equiv x > y$
  $Q(x,y) \equiv x = y$
- FUNC $f(x) \equiv x^2$

$\boxed{x=2}$

$\underset{\text{SI}}{2>0} \rightarrow \underset{\text{NO}}{y^2_{\in \mathbb{N}} = x} \vee \underset{\text{NO}}{2 \neq 2}$ REFUT.

$\boxed{x=4}$

$\underset{\text{SI}}{4>0} \rightarrow \underset{\text{SI}}{y^2 \in \mathbb{N} = x} \vee \underset{\text{NO}}{4 \neq 4}$ SAT.

$(y=2)$

Es satisfacible y refutable

3. $\exists x \forall y(\neg P(y,y) \rightarrow P(x,y))$.

$\forall y,\ y = y \rightarrow \exists x\ x \neq y$

- Tautología ⟶ Satisf.

- VAR x, y
- Dom $\mathbb{N}$
- PRED $P(x,y) \equiv x \neq y$

- PRED $P(x,y) = y \neq x^2$
  $x \neq y^2$

$y = y^2 \rightarrow \exists x,\ x \neq y^2$

$\boxed{y=1}$

$\underset{\checkmark}{1 = 1^2} \rightarrow \exists x,\ x \neq 1$

x pade y

$3x = y$

$y:2$

$\underset{\text{SI}}{\overset{6 \neq 2}{3y \neq 2}} \rightarrow \exists x,\ 3 \cdot x = 2$

$x = \frac{2}{3} \notin \mathbb{N}$

Refutable

3. $\exists x \forall y(\neg P(y,y) \leftrightarrow P(x,y))$.

$\underset{\checkmark}{y = y} \leftrightarrow \underset{\checkmark}{x \,!= y}$

- VAR x, y

- Taut., siempre puedes encontrar una $x \neq y$
  ↓
  Satisf.

- Dom $\mathbb{N}$
- PRED $P(x,y) \equiv x \neq y$

$P(x,y) \equiv 3x = y$

x y	↔
0 0	1
0 1	0
1 0	0
1 1	1

$3y \neq y \leftrightarrow 3x = y$

$y = 1$

$\underset{\text{SI}}{3 \cdot 1 \neq 1} \leftrightarrow \exists x\ 3x = 1$

↳ $x = \frac{1}{3} \notin \mathbb{N}$
Refutable

3. $\exists x \forall y(\neg P(y,y) \leftrightarrow P(x,y))$.

- VAR x, y

- Dom $\mathbb{N}$
- PRED $P(x,y) \equiv x \neq y$

$y = y \leftrightarrow x \,!= y$

✓ ✓

- Taut., siempre puedes encontrar una $x \neq y$

$\downarrow$

Satisf.

x y	$\leftrightarrow$
0 0	1
0 1	0
1 0	0
1 1	1

$P(x,y) \equiv 3x = y$

$3y \neq y \leftrightarrow 3x = y$

$y = 1$

$\underbrace{3 \cdot 1 \neq 1}_{\text{Si}} \leftrightarrow \exists x \;\; 3x = 1$

$\hookrightarrow x = \frac{1}{3} \notin \mathbb{N}$

$\downarrow$

Refutable

2. $\forall x(P(x,a) \to \exists y Q(f(x),y)) \vee \exists x \neg Q(x,x). = \alpha$

$\emptyset \models \alpha \equiv \{\neg \alpha\}$ es insat?

• FORMA PRENEXA

$\neg[\forall x(\neg P(x,a) \vee \exists y Q(f(x),y)) \vee \exists x \neg Q(x,x)]$;

$\exists x \neg(\neg P(x,a) \vee \exists y Q(f(x),y)) \wedge \forall x Q(x,x)$;

$\exists x (P(x,a) \wedge \forall y \neg Q(f(x),y)) \wedge \forall x Q(x,x)$;

$\exists x(\forall y (P(x,a) \wedge \neg Q(f(x),y))) \wedge \forall z Q(z,z)$;

$\exists x(\forall y \forall z (P(x,a) \wedge \neg Q(f(x),y) \wedge Q(z,z)))$; $\boxed{x \to b}$

FORMA SKOLEM

$\forall y \forall z (\underbrace{P(b,a)}_{\alpha_1} \wedge \underbrace{\neg Q(f(b),y)}_{\alpha_2} \wedge \underbrace{Q(z,z)}_{\alpha_3})$

$\varphi' = \{P(b,a), \neg Q(f(b),y), Q(z,z)\}$ CJTO DE HORN

$\neg Q(f(b),y)$ $\quad$ $Q(z,z)$

$(y|f(b))$ $\quad$ $(z|f(b))$

$\square$ INSAT $\to$ UNIVERSALMENTE VÁLIDA

Ejercicio 3. Consideramos el lenguaje de primer orden con dos símbolos de constante a, b, tres símbolos de función t^1, s^2, p^2 y un símbolos de predicado Eq^2.

Damos la estructura siguiente:

- Dominio: $U = M_3(\mathbb{R})$.
- Constantes: $a = 0$, $b = Id$ (es decir, la matriz cero y la matriz identidad respectivamente).
- Funciones: $t(A) = A^t$, $s(A, B) = A + B$, $p(A, B) = A \cdot B$.
- Predicados: $Eq(A, B) \equiv A = B$.

Expresa con este lenguaje los siguientes enunciados:

1. La matriz cero es el elemento neutro de la suma.
2. La traspuesta de la traspuesta de una matriz es la propia matriz.
3. El producto de matrices no es conmutativo pero sí es asociativo.
4. Toda matriz simétrica es regular (tiene inversa).
5. La única matriz idempotente[1] y regular es la identidad.

[1] Una matriz A es idempotente si $A^2 = A$.

$x, y = \left(\vdots \; \vdots \; \vdots \right) \in \mathbb{R}$

CONM. $a \cdot b = b\, a$

ASOC. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

1) $\forall x \left(Eq\left(s(x, a), x \right) \right)$

2) $\forall x \left(Eq\left(x, t(t(x)) \right) \right)$

3) $\forall x, y, z \left(\neg Eq\left(P(x,y), P(y,x) \right) \wedge Eq\left(P(P(x,y), z), P(x, P(y,z)) \right) \right)$

4) $\forall x \left(\underbrace{Eq(x, t(x))}_{\substack{\text{M. SIMÉTRICA} \\ A = A^t}} \rightarrow \underset{\substack{\downarrow \\ \text{INV}}}{\exists y}\; Eq(\underbrace{P(x,y), b}_{M \cdot M^{-1} = Id}) \right)$

5) $\forall x \left[\left(\underbrace{Eq(P(x,x), x)}_{\substack{\text{IDEMPOT.} \\ A^2 = A}} \wedge \exists y \underbrace{Eq(P(x,y), b)}_{\text{INV.}} \right) \leftrightarrow \underbrace{Eq(x, b)}_{Id} \right]$

Ejercicio 4. De las siguientes fórmulas:

- $\alpha_1 = \exists z \forall w(\neg P(z,x) \vee (P(w,y) \wedge \neg Q(y,w)))$;
- $\alpha_2 = \exists z \forall w \exists x(\neg P(z,y) \vee (P(w,y) \wedge \neg Q(y,x)))$;
- $\alpha_3 = \forall w \exists x(P(w,x) \vee (P(w,y) \wedge \neg Q(y,x)))$;
- $\alpha_4 = \exists z \forall w((P(z,x) \vee P(w,y)) \wedge (P(z,x) \vee \neg Q(y,z)))$;

señala cuál (o cuáles) es equivalente a la fórmula

$$\alpha = \forall z \neg P(z,x) \to \forall x(P(x,y) \wedge \exists x \neg Q(y,x)).$$

$[\forall z \ \neg P(z,x)] \to \forall x(P(x,y) \wedge \exists x \ \neg Q(y,x));$

$\exists z \ P(z,x) \quad \vee \quad \forall x(P(x,y) \wedge \exists x \ \neg Q(y,x));$

$\exists z \ P(z,x) \quad \vee \quad \forall w(P(w,y) \wedge \exists x \ \neg Q(y,x));$

$\exists z \ P(z,x) \quad \vee \quad \forall w(\exists x \ P(w,y) \wedge \neg Q(y,x));$

$\exists z \ P(z,x) \quad \vee \quad \forall w \exists x(P(w,y) \wedge \neg Q(y,x))$

$\exists z \ P(z,y) \quad \vee \quad \forall w \exists x(P(w,y) \wedge \neg Q(y,x))$

$\exists z \forall w \exists x(\neg P(z,y) \quad \vee \quad (P(w,y) \wedge \neg Q(y,x))$

$\cancel{\alpha_2}$ no coincide con ninguna, tomamos otra ruta

20. $\forall x\alpha \equiv \alpha$ si x no aparece libre en α.
    - $\forall x \forall x\alpha \equiv \forall x\alpha$.
    - $\forall x \exists x\alpha \equiv \exists x\alpha$.
21. $\exists x\alpha \equiv \alpha$ si x no aparece libre en α.
    - $\exists x \forall x\alpha \equiv \forall x\alpha$.
    - $\exists x \exists x\alpha \equiv \exists x\alpha$.
22. $\forall x\alpha \equiv \forall y\alpha_{x \to y}$ si y no aparece en la fórmula α.
23. $\exists x\alpha \equiv \exists y\alpha_{x \to y}$ si y no aparece en la fórmula α.
24. $\forall x\alpha \wedge \forall x\beta \equiv \forall x(\alpha \wedge \beta)$.
25. $\exists x\alpha \vee \exists x\beta \equiv \exists x(\alpha \vee \beta)$.
26. $\forall x \forall y\alpha \equiv \forall y \forall x\alpha$.
27. $\exists x \exists y\alpha \equiv \exists y \exists x\alpha$.

$[\forall z \ \neg P(z,x)] \to \forall x(P(x,y) \wedge \exists x \ \neg Q(y,x));$

$\exists z \ P(z,x) \quad \vee \quad \forall x(P(x,y) \wedge \exists x \ \neg Q(y,x));$

$\exists z \ P(z,x) \quad \vee \quad \forall w(P(w,y) \wedge \exists x \ \neg Q(y,x));$

$\exists w \ P(w,x) \quad \vee \quad \forall w(\exists x (P(w,y) \wedge \neg Q(y,x));$

$\exists w \ P(w,x) \quad \vee \quad \forall w \exists x(P(w,y) \wedge \neg Q(y,x));$

$\exists w \ P(w,x) \quad \vee \quad \forall w \exists z(P(w,y) \wedge \neg Q(y,z));$

$\cancel{\exists w} \forall w \exists z(P(w,x) \quad \vee \quad (P(w,y) \wedge \neg Q(y,z)); \quad \cancel{\alpha_3}$

Ejercicio 5. Estudia si los siguientes conjuntos de cláusulas son satisfacibles o insatisfacibles:

1. $\{Q(f(x), y), \neg Q(z, f(y))\}$.
2. $\{Q(x, f(x)), \neg Q(a, x)\}$.
3. $\{Q(x, x) \vee Q(y, f(y)), \neg Q(b, y)\}$.
4. $\{Q(y, y) \vee Q(y, f(y)), \neg Q(b, y)\}$.
5. $\{Q(x, f(a)) \vee Q(f(b), y), \neg Q(x, f(y)) \vee \neg Q(f(x), y)\}$.
6. $\{Q(x, f(a)) \vee Q(f(b), y), \neg Q(x, f(y)) \vee \neg Q(f(y), x)\}$.

1) $\underbrace{Q(f(x), y)}_{\text{HORN}}, \underbrace{\neg Q(z, f(y))}_{\text{NEG}}$ → Cjto Horn → Res. lineal-input empezando por la negativa

$\neg Q(z, f(y))$ $\quad$ $Q(f(u), t)$

$(z|f(u))$ $\quad$ $(t|f(y))$

$\Box$

INSATISFACIBLE

2. $\{Q(x, f(x)), \neg Q(a, x)\}$.

2) $\neg Q(a, x)$ $\quad$ $Q(z, f(z))$

$(z|a)$

$Q(a, f(a))$

$(x|f(a))$

$\Box$ INSAT.

3. $\{Q(x, x) \vee Q(y, f(y)), \neg Q(b, y)\}$.

$Q(x, x) \vee Q(y, f(y))$ $\quad$ $\neg Q(b, z)$

$(x|b)$ $\quad$ $(z|b)$

$Q(y, f(y))$ $\quad$ $\neg Q(b, z)$

$(y|b)$ $\quad$ $(z|f(b))$

$\Box$ INSAT.

4. $\{Q(y, y) \vee Q(y, f(y)), \neg Q(b, y)\}$.

$Q(y, y) \vee Q(y, f(y))$ $\quad$ $\neg Q(b, y)$

$(y|b)$ $\quad$ $(y|b)$

$Q(b, f(b))$ $\quad$ $\neg Q(b, y)$

$(y|f(b))$

$\Box$ INSAT.

5. $\{Q(x, f(a)) \vee Q(f(b), y), \neg Q(x, f(y)) \vee \neg Q(f(x), y)\}$.

$Q(x, f(a)) \vee Q(f(b), y)$ $\quad$ $\neg Q(z, f(t)) \vee \neg Q(f(z), t)$

$(x|z)$ $\quad$ $(t|a)$

$Q(f(b), y) \vee \neg Q(f(z), a)$ $\quad$ $\neg Q(z, f(t)) \vee \neg Q(f(z), t)$

Por aquí no va a salir...

$$\left.\begin{array}{l} x = z \\ f(a) = f(t) \\ f(b) = f(z) \\ y = t \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = z;\ x = z \\ y = t;\ y = t \\ a = t;\ t = a \\ b = z;\ z = b \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = z = b \\ y = t = a \end{array}$$

Si se puede resolver

$Q(x, f(a)) \vee Q(f(b), y)$ $\quad$ $\neg Q(z, f(t)) \vee \neg Q(f(z), t)$

$(x|b, y|a)$ $\quad$ $(z|b, t|a)$

$\Box$ INSAT.

6. $\{Q(x, f(a)) \vee Q(f(b), y), \neg Q(x, f(y)) \vee \neg Q(f(y), x)\}$.

$\neg Q(z, f(t)) \vee \neg Q(f(t), z)$

$$\left.\begin{array}{l} x = z \\ f(a) = f(t) \\ f(b) = f(t) \\ y = z \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = z \\ a = t \\ b = t \\ y = z \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = y = z \\ t = a = b \end{array}$$

$Q(x, f(a)) \vee Q(f(b), y)$ $\quad$ $\neg Q(z, f(t)) \vee \neg Q(f(t), z)$

$(x|z, y|z)$ $\quad$ $(t|a)$

$Q(z, f(a)) \vee Q(f(b), z)$ $\quad$ $\neg Q(z, f(a)) \vee \neg Q(f(a), z)$

$Q(f(b), z) \vee \neg Q(f(a), z)$

No es unificable
↓
SAT.

Ejercicio 6. Sean:

- $\alpha_1 = \forall x(P(x) \wedge Q(x) \to \exists y(R(y) \wedge \neg S(x,y)))$.
- $\alpha_2 = \forall x(P(x) \to T(x)) \wedge \exists x(P(x) \wedge Q(x))$.
- $\alpha_3 = \forall x(U(x) \vee V(x) \to \neg R(x))$.
- $\alpha_4 = \forall x(\neg U(x) \wedge W(x) \to V(x))$.
- $\beta = \exists x \exists y(T(x) \wedge \neg W(y) \wedge \neg S(x,y))$.

Transforma el problema de ver si $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} \models \beta$ en un problema de comprobar si un conjunto de cláusulas es o no insatisfacible.

Estudia si ese conjunto de cláusulas es un conjunto de Horn o puede ser transformado en un conjunto de Horn.

Estudia si β es consecuencia lógica de α_1, α_2, α_3 y α_4.

$\Gamma = \{\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4\} \models \beta$

$\equiv \{\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4\ \neg\beta\}$ es insat.

$\alpha_1 = \forall x\,(P(x) \wedge Q(x) \to \exists y(R(y) \wedge \neg S(x,y)))$

$= \forall x\,(\neg P(x) \vee \neg Q(x) \vee \exists y(R(y) \wedge \neg S(x,y)))$

$= \forall x\,(\exists y\,(\neg P(x) \vee \neg Q(x) \vee (R(y) \wedge \neg S(x,y))))$

$= \forall x \exists y\,(\neg P(x) \vee \neg Q(x) \vee (R(y) \wedge \neg S(x,y)))$

$= \forall x \exists y\,((\neg P(x) \vee \neg Q(x) \vee R(y)) \wedge (\neg P(x) \vee \neg Q(x) \vee \neg S(x,y)))$ PRENEXA $y \to f(x)$

$= \forall x\,(\underbrace{(\neg P(x) \vee \neg Q(x) \vee R(f(x))}_{C1} \wedge \underbrace{(\neg P(x) \vee \neg Q(x) \vee \neg S(x, f(x)))}_{C2})$ SKOLEM

$\underbrace{\neg P(x) \vee \neg Q(x) \vee \neg R'(f(x))}_{C1'}$

$\underbrace{\neg P(x) \vee Q'(x) \vee \neg R'(f(x))}_{C1''}$

$\underbrace{\neg P(x) \vee Q'(x) \vee \neg S(x, f(x))}_{C2'}$

$\alpha_2 = \forall x\,(P(x) \to P(x)) \wedge \exists x(P(x) \wedge Q(x))$

$= \underbrace{\cancel{\forall x\,(\neg P(x) \vee P(x))}}_{1} \wedge \exists x\,(P(x) \wedge Q(x))$

$= \exists x\,(P(x) \wedge Q(x))$ PRENEXA $x \backslash a$

$= \underbrace{P(a)}_{C3} \wedge \underbrace{Q(a)}_{C4}$ $\underbrace{\neg Q'(a)}_{C4'}$

$\alpha_3 = \forall x\,(U(x) \vee V(x) \to \neg R(x))$

$= \forall x\,((\neg U(x) \wedge \neg V(x)) \vee \neg R(x))$

$= \forall x\,(\underbrace{(\neg U(x) \vee \neg R(x))}_{C5} \wedge \underbrace{(\neg V(x) \vee \neg R(x))}_{C6})$

$\underbrace{\neg U(x) \vee R'(x)}_{C5'}$ $\underbrace{\neg V(x) \vee R'(x)}_{C6'}$

$\alpha_4 = \forall x\,(\neg U(x) \wedge W(x) \to V(x))$

$= \forall x\,(\underbrace{U(x)}_{C7} \vee \underbrace{\neg W(x)}_{C8} \vee \underbrace{V(x)}_{C9})$

$\underbrace{W'(x)}_{C8'} \to$ HORN

$\neg\beta = \neg[\exists x \exists y\,(T(x) \wedge \neg W(y) \wedge \neg S(x,y))]$

$\forall x \forall y\ \neg(T(x) \wedge \neg W(y) \wedge \neg S(x,y))$

$\forall x \forall y\ \underbrace{(\neg T(x) \vee W(y) \vee S(x,y))}_{C10}$

$\forall x \forall y\ \underbrace{(\neg T(x) \vee \neg W'(y) \vee S(x,y))}_{C10' \to \text{HORN}}$

C1 → HORN → C1' → NEG → C1'' HORN

C2 → NEG → C2' → HORN

C3 → HORN

C4 → HORN → C4' → NEG

C5 → NEG → C5' → HORN

C6 → NEG → C6' → HORN

C7 → HORN

C8 → NEG → C8' → HORN

C9 → HORN

C10 → / → C10' → HORN

$$\boxed{\begin{cases} W' \equiv \neg W \\ W \equiv \neg W' \end{cases}}$$

$$\boxed{\begin{cases} R' = \neg R \\ R = \neg R' \end{cases}}$$

$$\boxed{\begin{matrix} Q' = \neg Q \\ Q = \neg Q' \end{matrix}}$$

Ahora es cjto de HORN

(1) $\neg P(x) \vee Q'(x) \vee \neg R'(f(x))$

(2) $\neg P(x) \vee Q'(x) \vee \neg S(x, f(x))$

(3) $P(a)$

c4) $\neg Q'(a)$ | neg.

c5) $\neg U(x) \vee R'(x)$

c6) $\neg V(x) \vee R'(x)$

c7) $U(x)$

c8) $W'(x)$

c9) $V(x)$

c10) $\forall x \forall y\ (\neg T(x) \vee \neg W'(y) \vee S(x,y)$

$\neg Q'(a)$ $\boxed{C1}$ $\neg P(x) \vee Q'(x) \vee \neg R'(f(x))$

$x|a$

$\neg P(a) \vee \neg R'(f(a))$ $\boxed{C3}$ $P(a)$

$\neg R'(f(a))$ $\boxed{C5}$ $\neg U(x) \vee R'(x)$

$x|f(a)$

$\neg U(f(a))$ $\boxed{C7}$ $U(x)$

$x|f(a)$

$\square$ es insat.

β es cons. lógica de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.