Ejercicio 1.

1. Sea x_n la sucesión definida por:

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} (k+1) \cdot 2^{n-k} = 2^n + 2 \cdot 2^{n-1} + \cdots + n \cdot 2^1 + (n+1) \cdot 2^0.$$

   Demuestra por inducción que $x_n = 2^{n+2} - n - 3$ para $n \geq 0$.

2. Demuestra por inducción que $n^5 - n$ es múltiplo de 10.

1) CASO BASE: demostrar $n=0$ es cierta

$$(k+1) \cdot 2^{n-k} = 2^{n+2} - n - 3 \,; \quad 1 = 1 \quad \checkmark$$

2) HIPÓTESIS DE INDUCCIÓN

$$2^n + 2 \cdot 2^{n-1} + \cdots + n \cdot 2^1 + (n+1) \cdot 2^0 = 2^{n+2} - n - 3$$

$$\sum_{k=0}^{n} (k+1) \cdot 2^{n-k} = 2^{n+2} - n - 3$$

3) PASO INDUCTIVO: demostrar $n = n+1$ es cierta

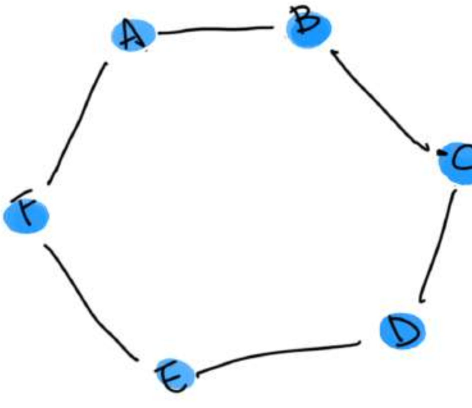
$$2^{n+1} + 2 \cdot 2^{n+1-1} + \cdots + (n+1) \cdot 2^1 + (n+1+1) \cdot 2^0 =$$

$$\underbrace{2^n + 2 \cdot 2^{n-1} + \cdots + n \cdot 2^1 + (n+1) \cdot 2^0}_{x_n} + \underbrace{(n+1+1) \cdot 2^{n+1-(n+1)}}_{x_{n+1}}$$

- Encuentra dos grafos no isomorfos para los que el cuadrado de su matriz de adyacencia sea:

$$A^2 = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} A & B & C & D & E & F \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



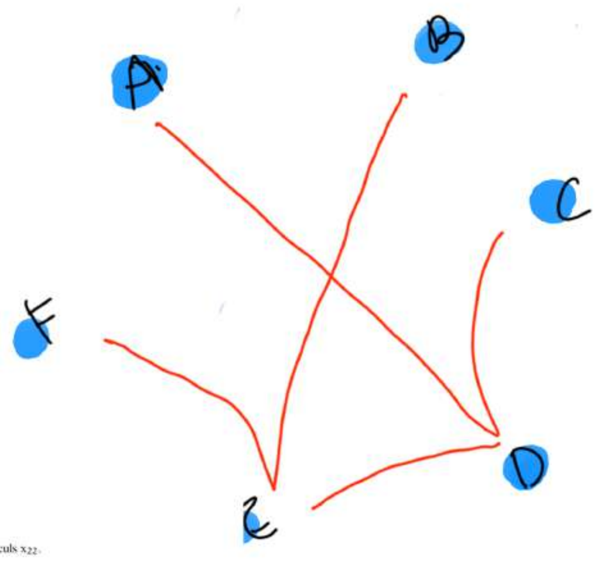
A^n

n = nº caminos longitud n hay de un vértice al otro

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} A & B & C & D & E & F \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

os que el cuadrado de su matriz

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} A & B & C & D & E & F \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & 0 & \cancel{1} & 0 & \cancel{1} & 0 \\ & 2 & 0 & \cancel{1} & 0 & \cancel{1} \\ & & 2 & 0 & \cancel{1} & 0 \\ & & & 2 & 0 & \cancel{1} \\ & & & & 2 & 0 \\ & & & & & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$



1. Sea x_n la sucesión definida como $x_n = \sum_{k=0}^{n} k \cdot 2^{k+1}$.
   - Calcula una expresión recurrente para x_n.
   - Resuelve la recurrencia planteada en el apartado anterior y calculs x_{22}.
2. Determina cuántas secuencias binarias de n dígitos hay que no contengan dos ceros consecutivos.

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} k \cdot 2^{k+1} = 0 + 1 \cdot 2^{2} + \dots + n \cdot 2^{n+1}$$

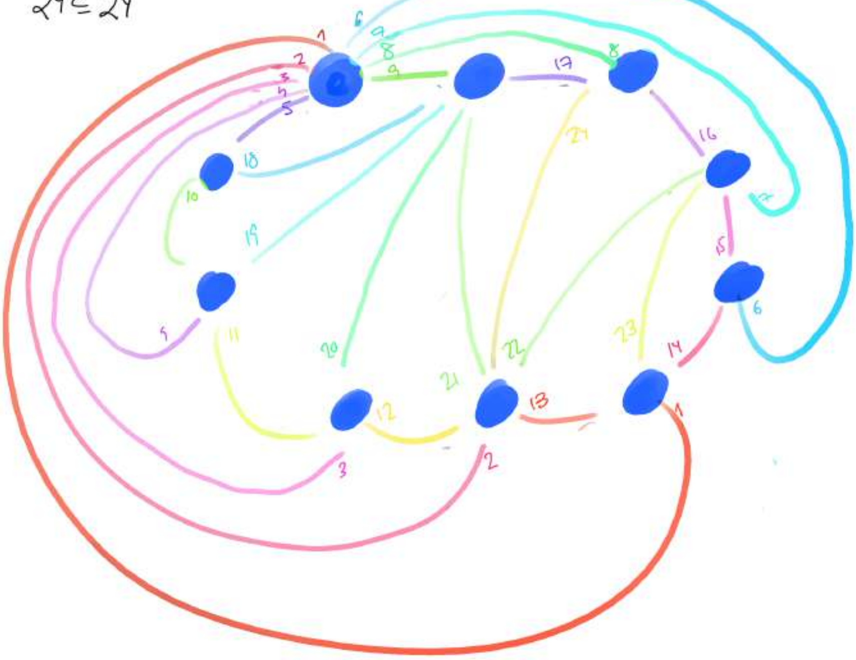
$$x_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} k \cdot 2^{k+1} = 0 + 1 \cdot 2^2 + \dots + (n-1) \cdot 2^{n}$$

- $x_n = x_{n-1} + n \cdot 2^{n+1}$
- $x_0 = 0$

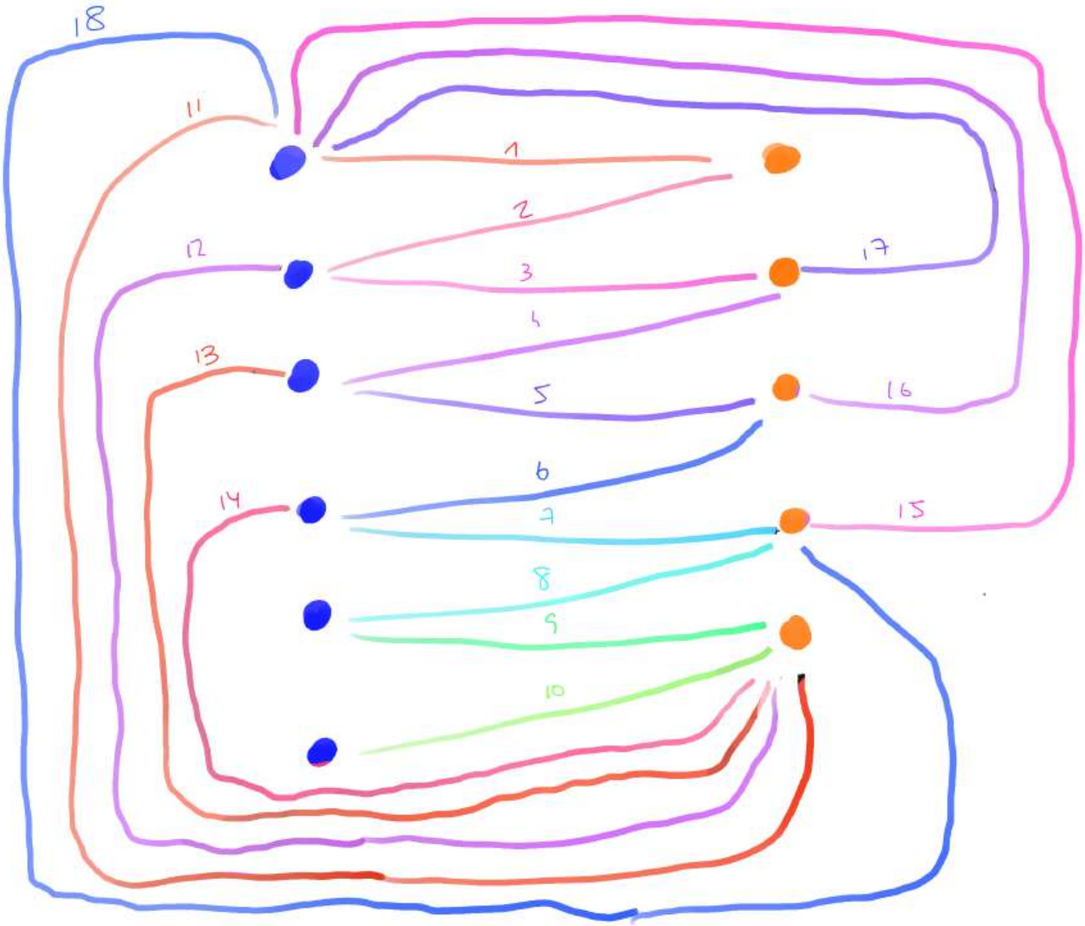
• Un grafo plano (las líneas no se cortan) de n vértices ($n \geq 3$) tiene, como máximo $3 \cdot n - 6$ lados

$10v, 24e$? $3 \cdot 10 - 6 = \underline{\underline{24}}$, es posible

$24 \leq 24$



Grafo bipartito plano de $11v, 18e$



Nº vértices si $e = 5000$

NO DIRIGIDO

$e = \dfrac{v \cdot (v-1)}{2}$; $5000 = \dfrac{v \cdot (v-1)}{2}$; $10.000 = v^2 - v$; $v^2 - v - 10.000 = 0 \Rightarrow \dfrac{-1 \pm \sqrt{-10000^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \dfrac{-1 \pm}{2}$

Nº vértices si $l = 5000$

NO DIRIGIDO

$l = \frac{v \cdot (v-1)}{2}$; $5000 = \frac{v \cdot (v-1)}{2}$; $10.000 = v^2 - v$;

$$v^2 - v - 10000 = 0 \Rightarrow v = \frac{1 \pm \sqrt{-1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10.000)}}{2 \cdot 1}$$

$$v = \frac{1 \pm 200'0025}{2} \approx 100'5$$

$$= 101 v.$$

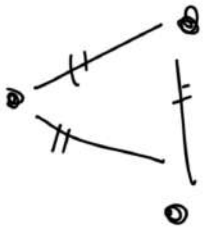
Hemos redondeado ↑ por que.... ↓

$5 = \frac{v \cdot (v-1)}{2}$;

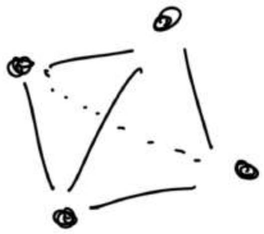
$$v^2 - v - 10 = 0 \Rightarrow \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-10)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{41}}{2}$$

$$= \frac{1 \pm 6'4}{2}$$

$$= 3'7$$



POSIBLES: 3
NECESITA: 5 X



POSIBLES: 6
NECESITA: 5 ✓