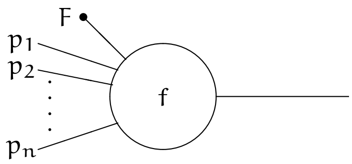
TEMAS 1 y 2

Álgebras de Boole y lógica proposicional

Ejercicio 1. Una **puerta umbral** (*threshold function* en inglés) de n variables es una función booleana definida como

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n \geq F \\ 0 & \text{si } p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n < F \end{cases}$$

donde $p_1, p_2, \cdots, p_n, F \in \mathbb{R}$.
El número F se llama *valor* de la puerta umbral, mientras que los parámetros $p_1, p_2, \cdots, p_n$ se les llama *pesos.*
Una función booleana se dice que es una *función umbral* si está representada mediante una puerta umbral.
Representaremos una puerta umbral como sigue:



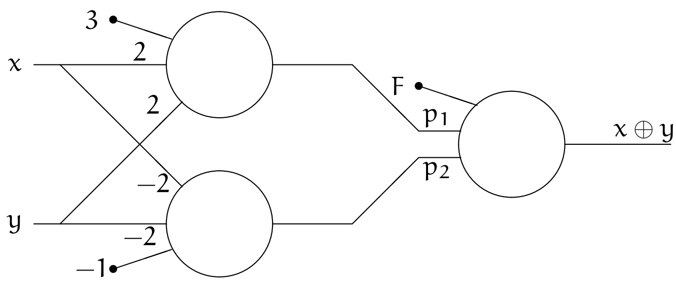
Este tipo de funciones se emplean en el diseño de redes neuronales.

1. Demuestra que la función $f : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$ dada por $f(x, y) = x \oplus y$ no es una función umbral.

2. Dadas las siguientes funciones booleanas, estudia cuáles son funciones umbrales:

   - $f(x, y) = x \downarrow y$.
   - $f(x, y, z) = y + xz$.
   - $f(x, y, z) = \overline{z} + xy$.
   - $f(x, y, z, t) = xz + yt$.
   - $f(x, y, z, t) = x(y + \overline{z}t)$.

3. Consideramos la siguiente red con puertas umbrales:



   Encuentra valores para p_1, p_2 y F de forma que la salida sea $x \oplus y$.

Ejercicio 2. Sean $f, g : \mathbb{B}^4 \to \mathbb{B}$ las funciones booleanas dadas por:

$$f(x, y, z, t) = z\,t + \overline{x}(\overline{y} + z + \overline{t}); \qquad g = M_0 \cdot M_1 \cdot M_2 \cdot M_3 \cdot M_4 \cdot M_5 \cdot M_7.$$

Definimos $h : \mathbb{B}^5 \to \mathbb{B}$ la función booleana.

$$h(x, y, z, t, u) = \begin{cases} f(x, y, t, u) & \text{si } z = 0 \\ g(x, y, t, u) & \text{si } z = 1 \end{cases}$$

1. Calcula una expresión booleana para g^d (la función dual de g).
2. Calcula la forma normal canónica conjuntiva de f.
3. Calcula todos los implicantes primos de h.
4. Calcula una expresión reducida como suma de productos de literales de g y de h.

Ejercicio 3. Encuentra una expresión booleana para expresar cada una de las siguientes afirmaciones:

1. $x < y$.
2. $x = y$.
3. $xy \leq z$.

(Hay que encontrar, por ejemplo, en el primer apartado, una expresión booleana que valga 1 cuando $x < y$ y que valga 0 en otro caso).

Basándote en lo anterior, da una expresión booleana para la función:

$$f(x,y,z,t) = \begin{cases} z+\bar{t} & \text{si } x < y \\ \bar{z}t & \text{si } x = y \\ zt+\bar{z}\bar{t} & \text{si } x > y. \end{cases}$$

Ejercicio 4. Estudia si la fórmula $(\neg a \wedge d \rightarrow e) \rightarrow (\neg b \wedge a \leftrightarrow d \vee e)$ es consecuencia lógica del conjunto

$$\Gamma = \{(a \wedge d) \vee (e \wedge c) \rightarrow \neg b,\ (a \wedge \neg d \rightarrow b \vee e) \wedge (e \wedge b \rightarrow c),\ \neg(\neg a \wedge \neg(e \rightarrow b))\}$$

Ejercicio 5. Para cada una de las siguientes parejas de fórmulas, indica si son o no lógicamente equivalentes:[1]

- $\alpha = (a \rightarrow \neg b \vee c) \rightarrow d$; $\beta = (\neg d \rightarrow b \wedge a) \wedge (c \rightarrow d)$.
- $\alpha = a \vee \neg b \rightarrow \neg(c \rightarrow a)$; $\beta = \neg(b \vee c) \rightarrow a$.
- $\alpha = ((\neg b \rightarrow c) \vee \neg b \rightarrow a \wedge d) \rightarrow (\neg a \vee \neg b \vee \neg d \rightarrow c)$; $\beta = (\neg a \wedge d \rightarrow c) \rightarrow (\neg c \leftrightarrow a \vee d)$.

Ejercicio 6. En un edificio han colocado una bomba que queremos desactivar.

Para desactivarla deberemos cortar un cable, pero sólo tendremos una oportunidad, por lo que no podemos equivocarnos.

Para poder acceder al cable que tenemos que cortar, hay que entrar en una habitación, y una vez en ella, abrir una caja (para lo cual habremos de disponer de la llave correspondiente). Dentro de la caja veremos un cable rojo y un cable verde.

Pero al entrar al edificio nos encontramos con dos habitaciones, una a la derecha y otra a la izquierda. Y con dos llaves, una grande y una pequeña (una llave abre la caja de la habitación derecha y la otra abre la caja de la habitación izquierda). Así que tenemos que decidir en qué habitación entrar, qué llave elegir y qué cable cortar.

Nos encontramos con tres personas que saben perfectamente qué tenemos que hacer y que parece que quieren ayudarnos. Sin embargo, cada una de estas personas, o bien siempre dice la verdad, o bien siempre miente, por lo que tenemos que tener cuidado con lo que nos dicen.

Estas personas, que dicen llamarse Andrés, Begoña y Carlos, afirman:

Andrés: Debes entrar en la habitación derecha y coger la llave grande.

Begoña: Si la bomba se desactiva en la habitación derecha, tendrás que coger la llave pequeña.

Carmen: O coges la llave grande, o cortas el cable verde.

Pensamos un poco y no sacamos ninguna conclusión, por lo que la situación se vuelve tensa. Entonces, Begoña nos dice que si se entra por la puerta izquierda, tendremos que cortar el cable verde, y Andrés nos dice que efectivamente hay que cortar el cable verde.

¿Puedes determinar en qué habitación hay que entrar, qué llave tenemos que elegir y qué cable hay que cortar?

[1] no se puede emplear el mismo procedimiento para todas las parejas.