Universiteit Twente

Lesmateriaal AI: convulutie

Auteurs
S. Baak C. Stegehuis

30 oktober 2025

Inhoudsopgave

1 Inleiding

Wat in de inleiding:

- Waarom gemaakt
- Doelgroep
- copyright

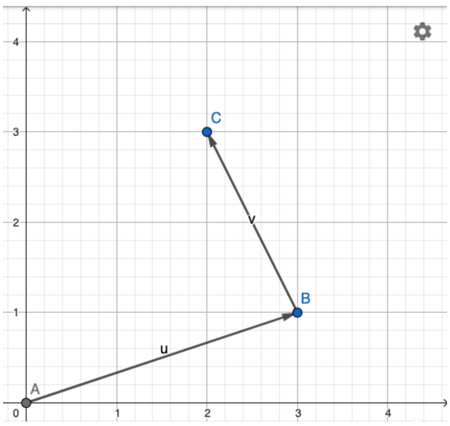
2 Voorkennis

Rekenen met letters

Rekenen doen we met getallen, maar we kunnen dit ook met letters. Je kunt bijvoorbeeld $a + a + a$ herleiden tot $3a$, aangezien $a + a + a$ een som is van drie gelijksoortige termen. Zijn de termen niet gelijksoortig, zoals $a + b$, dan kunnen we dit niet verder herleiden en laten we het zo staan. Dit werkt hetzelfde met termen van elkaar afhalen in plaats van bij elkaar optellen.
We kunnen letters ook met elkaar vermenigvuldigen en delen. Neem bijvoorbeeld $5p \cdot -8q = -40pq$ of $6p/3p = 2$. Dit zijn allerlei simpele sommen met letters, maar als het goed is bestaat onze voorkennis uit meer dan dit. We kunnen bijvoorbeeld ook haakjes wegwerken of machten herleiden, zoals $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$ en $2x^5 \cdot 5y^2 = 10x^5y^2$.

Vectoren

Een **vector** is een lijnstuk met een richting. Als je naar Figuur 2 kijkt, zie je punten $A(0,0)$, $B(3,1)$ en $C(2,3)$. De pijl van A naar B, genaamd u, en van B naar C, genaamd v, zijn voorbeelden van vectoren. Die noteren we als volgt: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.



Figuur 2: Assenstelsel met drie punten waartussen twee vectoren zijn getrokken.

We kunnen ook rekenen met vectoren. Voor vectoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix}$ en constante c, gelden onder andere de volgende rekenregels:

- $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} \\ a_{21} + b_{21} \end{pmatrix}$
- $c \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} c \cdot a_{11} \\ c \cdot a_{21} \end{pmatrix}$

Ook kunnen we het inproduct nemen van twee vectoren. Dat lees je hieronder.

Inproduct

Het **inproduct** is een manier om twee rijen of kolommen met getallen (vectoren) met elkaar te combineren. Je doet dit door de bijbehorende getallen met elkaar te vermenigvuldigen en daarna alles bij elkaar op te tellen.

Stel dat we twee vectoren hebben:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix}.$$

Dan bereken je het inproduct zo:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{21} \cdot b_{21}.$$

Je vermenigvuldigt dus eerst de bovenste getallen met elkaar, daarna de onderste, en telt die twee uitkomsten op.

Dit voorbeeld gebruikt vectoren met twee getallen, maar je kunt ook een inproduct berekenen met langere vectoren. Zolang beide vectoren even lang zijn en de getallen op dezelfde plek staan, kun je het inproduct berekenen.

Bijvoorbeeld:

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} d_{11} \\ d_{21} \\ d_{31} \end{pmatrix}.$$

Dan is het inproduct:

$$\vec{c} \cdot \vec{d} = c_{11} \cdot d_{11} + c_{21} \cdot d_{21} + c_{31} \cdot d_{31}.$$

3 Matrices

3.1 Theorie

Leerdoelen

- Je kunt uitleggen wat een matrix is.
- Je kunt een matrix toepassen in verschillende situaties.

Een matrix is een rechthoekig overzicht van getallen, die we tussen haakjes zetten. We geven een matrix meestal aan met een hoofdletter. Hier is een voorbeeld:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -6 \\ 3 & 7 & 4 & 8 \\ -4 & 6 & 10 & 12 \end{pmatrix}.$$

Net als bij een tabel noemen we de horizontale rijen gewoon **rijen** en de verticale rijen **kolommen**. In dit voorbeeld zie je dat matrix A 3 rijen en 4 kolommen heeft. We noemen dit een **3 bij 4 matrix**, ofwel **3×4**. Je noemt altijd eerst de rij van een matrix, en daarna pas de kolom.

De getallen in een matrix noemen we de **elementen**. Als we het getal willen aanwijzen dat in de eerste rij en eerste kolom staat, dan schrijven we dat als a_{11}. Het getal in de eerste rij en tweede kolom is dan a_{12}. In het algemeen gebruiken we a_{ij}, waarbij i het rijnummer is en j het kolomnummer is.

Voor matrix A geldt: i loopt van 1 tot 3 en j van 1 tot 4. Als we matrix A in het algemeen willen opschrijven, dan ziet dat er zo uit:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}.$$

We kunnen ook korter schrijven: $A = (a_{ij})$, waarbij $1 \leq i \leq 3$ en $1 \leq j \leq 4$.

Een **vector** is een speciaal soort matrix. Omdat we vectoren vaak gebruiken in de wiskunde, geven we ze meestal aan met een kleine letter om verwarring te voorkomen. Een vector heeft altijd één kolom. Hoeveel rijen die kolom heeft, hangt af van waarvoor je de vector gebruikt. Een vector is dus niet altijd 2×1 en stelt ook niet altijd een lijnstuk voor, zoals je misschien gewend bent.

Matrices kun je in heel veel situaties gebruiken. Hierna volgen twee voorbeelden.

Voorbeeld 1
Op een middelbare school in Enschede zijn er drie verschillende niveaus: vmbo, havo en vwo. Bij elk niveau horen verschillende jaarlagen:

- vmbo heeft klas 1 tot en met klas 4,
- havo heeft klas 1 tot en met klas 5,
- vwo heeft klas 1 tot en met klas 6.

Het aantal leerlingen per klas en per niveau kan verschillen. We kunnen dit overzichtelijk weergeven in een tabel, zoals in Tabel 1. In deze tabel geven de rijen de jaarlagen aan en de kolommen de niveaus.

	vmbo	havo	vwo
1	75	103	82
2	88	98	83
3	75	84	104
4	120	95	76
5	x	77	54
6	x	x	66

Tabel 1: Aantal leerlingen per niveau per jaarlaag

Omdat vmbo geen vijfde of zesde klas heeft, staat er een kruisje in die vakjes. Voor havo geldt hetzelfde voor klas 6.
We kunnen deze informatie ook opschrijven als een matrix:

$$\begin{pmatrix} 75 & 103 & 82 \\ 88 & 98 & 83 \\ 75 & 84 & 104 \\ 120 & 95 & 76 \\ 0 & 77 & 54 \\ 0 & 0 & 66 \end{pmatrix}$$

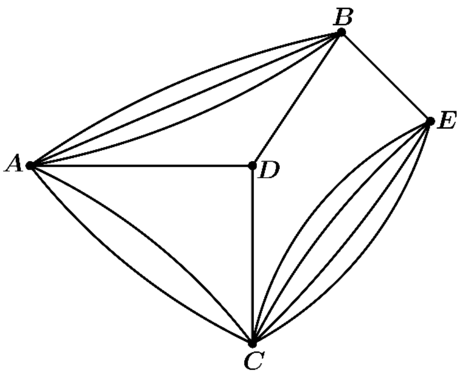
In deze matrix geven de rijen ($1 \leq i \leq 6$) de jaarlagen aan en de kolommen ($1 \leq j \leq 3$) de niveaus:

- kolom 1 is vmbo,
- kolom 2 is havo,
- kolom 3 is vwo.

De kruisjes zijn nu vervangen door nullen, omdat die klassen niet bestaan en er dus nul leerlingen zijn op die plekken.

Voorbeeld 2

In een klein dorp staan vijf huizen. Deze huizen zijn verbonden met een aantal wegen. In Figuur 3 zie je een schematische tekening van die vijf huizen, aangegeven met de punten A, B, C, D en E. De lijnen tussen de punten stellen de wegen voor. Zo'n schematische tekening noemen we een **netwerk**.



Figuur 3: Netwerk van huizen A t/m E met hun wegen ertussen.

We kunnen dit netwerk ook weergeven met een matrix. In deze matrix geven de rijen en kolommen de huizen aan. Wat we invullen op plek a_{AB} is het aantal wegen tussen huis A en huis B.
De matrix die bij dit netwerk hoort, is:

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De matrix V is **symmetrisch**. Dat betekent dat als je van A naar B kunt met drie wegen, je ook van B naar A kunt met diezelfde drie wegen. Elke verbinding is dus een tweerichtingsweg.

3.2 Opdrachten

Opdracht 1

Neem het netwerk uit voorbeeld 2 van paragraaf 3.1. Stel dat sommige wegen in het netwerk geen tweerichtingswegen zijn, maar eenrichtingswegen. Het gaat om de volgende drie wegen:

- één van de wegen tussen A en B gaat alleen van A naar B,
- de weg tussen C en D gaat alleen van C naar D,
- één van de wegen tussen C en E gaat alleen van C naar E.

Hoe zou de matrix V er dan uitzien?

Opdracht 2

In een kledingfabriek worden onder andere drie verschillende soorten bovenkleding gemaakt, namelijk een trui (T), een shirt (S) en een hemd (H). Deze producten worden gemaakt van verschillende stoffen: polyester (P), nylon (N), acryl (A), katoen (K) en wol (W). Het verschilt per kledingstuk hoeveel gram er van elke stof nodig is:

- Voor een trui: 1g polyester, 0g nylon, 3g acryl, 5g katoen, 3g wol.
- Voor een shirt: 2g polyester, 1g nylon, 0g acryl, 7g katoen, 0g wol.
- Voor een hemd: 2g polyester, 0g nylon, 2g acryl, 6g katoen, 0g wol.

a) *Maak matrix M waar de rijen de kledingstukken zijn en de kolommen de verschillende stoffen.*

De stoffen P, N, A, K en W kosten per gram respectievelijk 4, 6, 12, 6 en 7 euro.

b) *Hoeveel kost het om elk kledingstuk te maken?*

4 Convolutie

Leerdoelen

- Je kunt uitleggen wat een pixel is.
- Je kunt een plaatje omzetten in een matrix op basis van de hoeveelheid licht.
- Je kunt uitleggen wat een kernel is.
- Je kunt convolutie toepassen en daarmee lijnen en patronen te herkennen.

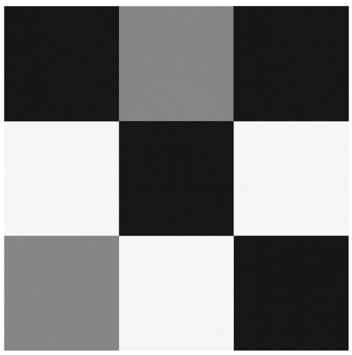
4.1 Theorie pixels

Nu we weten wat matrices zijn en al een paar voorbeelden hebben gezien, gaan we er wat dieper op in. Een ander voorbeeld waarbij matrices handig zijn, is hoe een computer naar beelden kijkt.

Een computer ziet een plaatje niet zoals mensen dat doen. Wij gebruiken onze ogen en hersenen om te zien en te begrijpen wat we zien. Een computer heeft geen ogen en hersenen. Toch is het soms belangrijk dat een computer een beeld herkent. Maar hoe werkt dat dan?

Dat is waar matrices van pas komen. Om het eenvoudig te houden, kijken we naar zwart-witbeelden (dus zonder kleur). Zo'n beeld bestaat uit allemaal kleine puntjes. Die puntjes noemen we **pixels**. Elke pixel heeft een getal dat aangeeft hoeveel licht er op die plek is. Is er veel licht? Dan heeft de pixel een hoge waarde en is die plek lichtgrijs of zelfs wit. Is er weinig licht? Dan is de waarde laag en is die plek donkergrijs of zwart.

Bij elke pixel hoort dus een getal dat de zwart-wit kleur aangeeft. Die getallen kun je in een matrix zetten. Je kunt een zwart-witbeeld dus omzetten naar een matrix. In die matrix staat elk getal op de plek van een pixel. Kijk maar eens naar het plaatje in Figuur 4.



Figuur 4: Afbeelding met witte, zwarte en grijze vlakken.

Je ziet op het plaatje een groot vierkant met daarin negen kleine vierkanten. Als je dat als matrix bekijkt, krijg je een matrix van drie bij drie. Elk klein vierkant heeft één kleur. Dat noemen we één pixel en dat is dus één element in de matrix. De waarde van zo'n pixel zegt hoeveel licht er is op die plek. Daarom ziet de matrixweergave van Figuur 4 er zo uit:

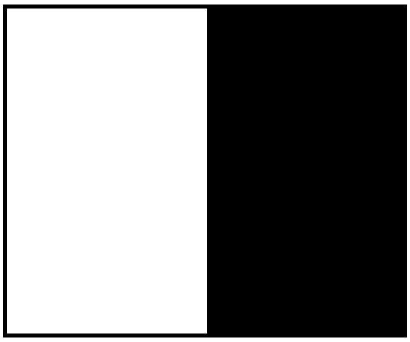
$$\begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0.5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Als de afbeelding is veranderd in een matrix, kan een computer die matrix lezen. Maar hoe kan een computer begrijpen wat er op dit beeld staat?

4.2 Convolutie toepassen

Een van de dingen die een computer kan doen met een afbeelding, is dingen herkennen in de afbeelding, door middel van een speciaal soort filter. Zo'n filter heet een **kernel**. Een kernel is een kleine matrix die je op de afbeelding toepast. Dat proces heet **convolutie**. Een van de veelvoorkomende doelen binnen het proces convolutie, is lijnen herkennen. Dit leggen we in het volgende voorbeeld uit.

Voorbeeld 1



Figuur 5: Plaatje van wit met zwart vlak

Om de lijnen in een afbeelding te kunnen herkennen, zoals in Figuur 5, hebben we een specifieke kernel nodig. Hieronder zie je een voorbeeld van een kernel die verticale lijnen zichtbaar maakt:

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Om de lijnen in de afbeelding in Figuur 5 te herkennen, vertalen we Figuur 5 eerst naar een matrix, namelijk matrix I:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

en passen we de kernel hierop toe, door middel van convolutie. We pakken de beeldmatrix, matrix I, en passen de kernel toe. Dit gaat als volgt:

Stap 1

Pak de getallen in de eerste drie rijen en drie kolommen van matrix I. Dat deel noemen we een submatrix van drie bij drie. Je ziet dit terug in het bruine vakje in matrix I hieronder.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to I_1 = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}} \end{bmatrix}$$

Stap 2

Nu vermenigvuldigen we deze submatrix, I_1, met kernel K. Daarbij gebruiken we het **inproduct**. Weet je niet hoe dit gaat? Ga dan terug naar Hoofdstuk 2 en lees het stuk over inproducten. Nu nemen we matrix I_1 en geven we de kolommen namen:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dus matrix I_1 ziet er zo uit:

$$I_1 = \begin{pmatrix} | & | & | \\ a & b & c \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Voor matrix K doen we hetzelfde. We geven kolom 1 de naam 'd', kolom 2 naam 'e' en kolom 3 naam 'f'.

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Dus matrix K is:

$$K = \begin{pmatrix} | & | & | \\ d & e & f \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dan vermenigvuldigen we de getallen in matrix I_1 met die in matrix K:

$$I_1 * K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

We doen dit door het inproduct te nemen van:

- kolom 1 van I_1 met kolom 1 van K,
- kolom 2 van I_1 met kolom 2 van K,
- kolom 3 van I_1 met kolom 3 van K.

Daarna tellen we de drie uitkomsten bij elkaar op om het eindresultaat te krijgen. Laten we beginnen met het inproduct van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{d}$:

$$\vec{a} \cdot \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 3.$$

Dit doen we ook voor vectoren $\vec{b}$ en $\vec{e}$:

$$\vec{b} \cdot \vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0,$$

en voor de vectoren $\vec{c}$ en $\vec{f}$:

$$\vec{c} \cdot \vec{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot -1 + 1 \cdot -1 + 1 \cdot -1 = -3.$$

Om dan vervolgens de uitkomst van de vermenigvuldiging van matrix I_1 en K te krijgen, tellen we alle resultaten van de inproducten bij elkaar op: $3 + 0 - 3 = 0$, dus $I_1 * K = 0$.

Stap 3
Nu gaan we iets doen wat **convolutie** heet. Dat betekent dat we meerdere keren kleine stukjes van een grote matrix vermenigvuldigen met een andere matrix (de **kernel**). Daaruit ontstaat een nieuwe matrix, die we C noemen.
Zoals je zag in *Stap 2*, krijg je één getal als je de eerste 3 bij 3 submatrix van matrix I (I_1) vermenigvuldigt met de kernel K. In dit voorbeeld krijgen we het getal 3. Dat getal komt dan op de eerste plek in matrix C, dus $c_{11} = 3$.
Maar we willen natuurlijk ook de andere getallen in matrix C weten. Daarvoor pakken we steeds een nieuwe submatrix van I. Hoe doen we dat?
Omdat de kernel 3 bij 3 is, moeten de submatrices ook 3 bij 3 zijn. Voor de volgende submatrix, I_2, schuiven we gewoon één kolom naar rechts.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow I_2 = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix}} \end{bmatrix}$$

We herhalen nu *Stap 2* met I_2. Na de berekeningen van de inproducten, komen we uit op $I_2 * K = 3 + 0 + 0 = 3$, en krijgen we weer het getal 3. Dat komt op plek c_{12}, de eerste rij maar tweede kolom in matrix C.
We kunnen nog twee keer een kolom naar rechts schuiven. Dat geeft de submatrices:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Als we *Stap 2* herhalen en deze ook vermenigvuldigen met de kernel, krijgen we:

$$c_{13} = 3, \quad c_{14} = 0$$

Tot nu toe hebben we dus de matrix:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{pmatrix}$$

De eerste rij van matrix C is nu ingevuld.

Stap 4
Om nu de getallen in rij twee, drie en vier van matrix C te berekenen, herhalen we steeds dezelfde stappen. We moeten wel goed opletten welke submatrix we gebruiken. Omdat onze kernel drie bij drie is, moeten onze submatrices dat ook zijn.
Matrix I is zes bij zes. Dat betekent dat we in elke rij vier submatrices kunnen maken door steeds één kolom naar rechts te schuiven — dat hebben we eerder al gezien. We doen nu hetzelfde met de rijen. Als we klaar zijn met de eerste vier submatrices van de eerste drie rijen, schuiven we één rij naar beneden. Dan beginnen we opnieuw bij de eerste drie kolommen.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow I_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Als we deze submatrix met de kernel K vermenigvuldigen (oftewel *Stap 2* herhalen) krijgen we element c_{21}. Nu kunnen we weer elke keer een kolom opschuiven naar rechts voor de volgende submatrix, totdat we alle vier de submatrices hebben gehad. Dan gaan we weer een rij naar beneden en zo gaan we verder en herhalen we met elke submatrix *Stap 2*.

Stap 5

Als we *Stap 4* volledig hebben uitgevoerd, hebben we de matrix:

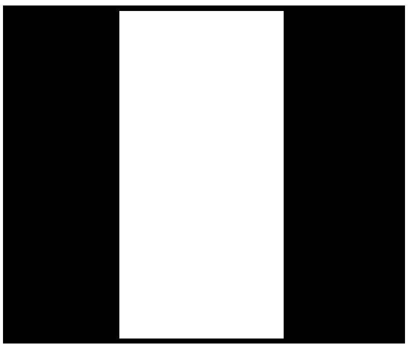
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

We hebben nu alle stappen van convolutie gedaan. Matrix C is 4 bij 4. Dat komt omdat we in een matrix van 6x6 vier keer een 3x3 submatrix kunnen maken per rij en per kolom.
De grootte van matrix C kun je altijd uitrekenen met de formule:

$$(n - k + 1) \times (n - k + 1)$$

waarbij n het aantal rijen (en kolommen) is van de oorspronkelijke matrix I en k het aantal rijen (en kolommen) is van de kernel. Maar wat betekent matrix C nu eigenlijk?

We hebben een kernel gebruikt die speciaal is gemaakt om lijnen in een afbeelding te herkennen. Als we naar matrix C kijken, zien we dat de getallen in het midden hoog zijn (3) en aan de randen laag (0). Dat betekent dat er in het midden van de afbeelding een lijn zit. Dat zie je ook terug in Figuur 5. Als we matrix C weer omzetten naar een afbeelding, dan ziet het beeld er zo uit:



Figuur 6: Visuele weergave na het toepassen van de kernel op Figuur 5

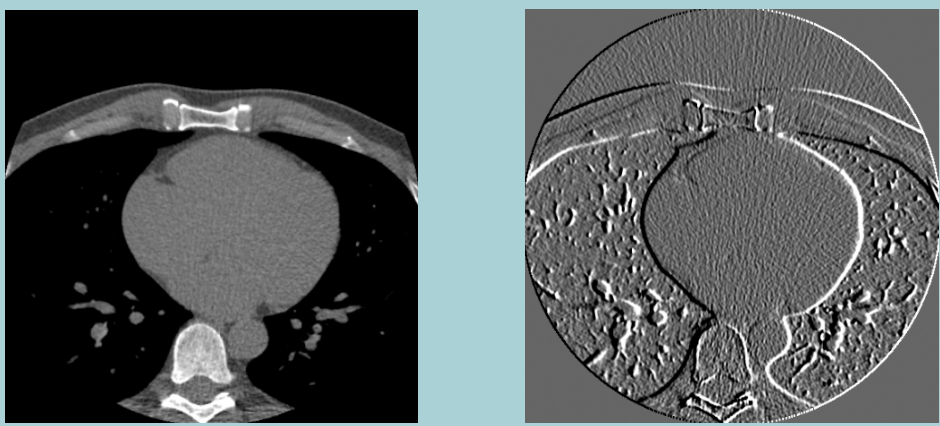
Nu je alle stappen van convolutie hebt gezien, kan je zelf element c_{42} van matrix C controleren door de berekeningen te doen?

4.3 Toepassingskader

Zoals we eerder hebben uitgelegd, ziet een computer een afbeelding als een grote tabel met getallen. Zo'n tabel noemen we een **matrix**. Elk vakje in die matrix noemen we een **pixel**, en elk pixel geeft aan hoe licht of donker dat stukje van het beeld is.

Bij een kleurenfoto gebruikt een computer eigenlijk drie van zulke matrices tegelijk: één voor het **rode**, één voor het **groene** en één voor het **blauwe** deel van het beeld. Samen vormen ze het volledige kleurenbeeld. Bij een zwart-witfoto is er maar één matrix nodig, die alleen de helderheid (intensiteit) van elk pixel aangeeft.

Tot nu toe hebben we voorbeelden gezien van kleine matrices, zoals 6 bij 6. Maar echte foto's zijn veel groter. In Figuur 9a zie je een CT-scan van een ribbenkast. Deze afbeelding bestaat uit een matrix van **512 bij 512 pixels**, dus in totaal **262144 pixels**.



(a) Voor (b) Na

Figuur 7: CT-scan van een ribbenkast, voor en na convolutie.

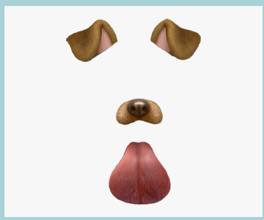
Dit is een afbeelding die je vaak tegenkomt in de medische wereld. Met een techniek die **convolutie** heet, kunnen computers bepaalde vormen of lijnen in zo'n beeld herkennen. Stel dat we in deze afbeelding verticale lijnen willen vinden. Dan kunnen we een speciale kleine matrix gebruiken, die we een **kernel** noemen. In *voorbeeld 1* in paragraaf 4.2 zie je zo'n kernel. Als we deze kernel één keer toepassen op Figuur 9a, krijgen we het resultaat zoals in Figuur 9b. Eén keer toepassen is genoeg, want alle verticale lijnen worden dan al zichtbaar.

Nu je weet hoe convolutie werkt en wat het doet bij verticale lijnen, vraag je je misschien af waar dit in het echte leven voor wordt gebruikt. Deze techniek helpt artsen bijvoorbeeld om vormen of objecten in het lichaam te herkennen. Zo kan de planning van een operatie worden aangepast aan wat er in het beeld te zien is.

Ook wordt convolutie gebruikt om het hart op te meten. Doordat de lijnen in het beeld duidelijker worden, kan een computer automatisch berekenen hoe breed het hart of de bloedvaten zijn. Als die maten afwijken van wat normaal is, kan dat een teken zijn van hartproblemen. Daarnaast kan deze techniek helpen bij het herkennen van tumoren (als ze niet te klein zijn), bloedingen of vocht in de longen.

Lees verder →

Convolutie wordt niet alleen in de medische wereld gebruikt. Ook in andere gebieden speelt deze techniek een belangrijke rol. Denk bijvoorbeeld aan social media, zoals Snapchat en Instagram. Daar kun je allerlei filters gebruiken, zoals het bekende hondenfilter van Snapchat (zie Figuur 8).
Maar voordat Snapchat zo'n filter op je gezicht kan zetten, moet de app eerst weten waar je gezicht is. Daarvoor moet het gezicht worden herkend in het beeld. Dat betekent dat de computer moet kunnen zien waar de rand van je gezicht is, en waar de achtergrond begint.



Figuur 8: Hondenfilter van Snapchat

Om die randen te vinden, gebruikt Snapchat ook convolutie. Dit werkt met **lijnendetectie**, waarbij de computer zoekt naar lijnen in het beeld. Zo kan het gezicht worden opgespoord en kan het filter precies op de juiste plek worden gezet.

(a) Voor

(b) Na

Figuur 9: Lijnendetectie op een gezicht met convolutie.

4.4 Opdrachten

Opdracht 1

Neem matrix I uit *voorbeeld 1*, maar dan niet zes bij zes, maar tien keer zo groot, dus 60 bij 60. Dan ziet de matrix er zo uit:

$$I = \begin{pmatrix} i_{11} & i_{12} & \dots & i_{130} & i_{131} & i_{132} & \dots & i_{160} \\ i_{21} & \ddots & & i_{230} & i_{231} & \ddots & & i_{260} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ i_{601} & \dots & & i_{6030} & i_{6031} & \dots & & i_{6060} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & & 1 & 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & \dots & & 1 & 0 & \dots & & 0 \end{pmatrix}$$

Wat is de uitkomst van de convolutie van deze matrix I en kernel K uit voorbeeld 1?

Opdracht 2

In *voorbeeld 1* passen we een kernel toe op Figuur 5. Neem nu kernel

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Zoals je ziet, hebben we de kernel uit *voorbeeld 1* een kwartslag gedraaid. Voer nu convolutie uit met Figuur 5, oftewel met matrix I uit *voorbeeld 1*, en kernel K uit deze opdracht.

a) *Wat komt er uit de convolutie van matrix I en kernel K? En wat betekent dit?*

Draai nu matrix I ook een kwartslag, oftewel

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) *Geef de visuele weergave van de matrix I.*

c) *Voer convolutie uit met matrix I en kernel K. Wat komt eruit? En waarom?*

Opdracht 3

Neem als kernel

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Pas convolutie toe met kernel K op de volgende matrix I:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wat is de uitkomst?

b) Pas convolutie toe met kernel K op de volgende matrix I:

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wat is de uitkomst?

c) *Beredeneer (zonder de convolutie uit te werken) waar de 3 zit in de uitkomst van de convolutie als we de kernel toepassen op de volgende matrix I:*

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d) * Stel we hebben de volgende matrix I:

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Welke kernel hebben we nodig om met convolutie het patroon te vinden in matrix I?

*Uitdagende opdracht

5 Antwoorden

5.1 Matrices

Opdracht 1

De eenrichtingswegen geven de matrix

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

aangezien een van de wegen tussen A en B verandert in een eenrichtingsweg van A naar B (en dus niet meer van B naar A) en we in een matrix altijd eerst de desbetreffende rij pakken en daarna de desbetreffende kolom. Dat betekent dat a_{BA} verandert van 3 naar 2, en a_{AB} hetzelfde blijft. Hetzelfde principe geldt voor a_{DC} en a_{EC}.

Opdracht 2

a) Matrix M ziet er als volgt uit:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

waar $i = T, S, H$ en $j = P, N, A, K, W$.

b) Om een trui te maken zijn de hoeveelheden uit de eerste rij van matrix M nodig. We vermenigvuldigen het aantal P met 4, het aantal N met 6, enzovoort totdat we het totaal hebben. Dit doen we bij elk product en dan komen we op de volgende berekeningen:

- $T = 1 * 4 + 0 * 6 + 3 * 12 + 5 * 6 + 3 * 7 = 91$
- $S = 2 * 4 + 1 * 6 + 0 * 12 + 7 * 6 + 0 * 7 = 56$
- $C = 2 * 4 + 0 * 6 + 2 * 12 + 6 * 6 + 0 * 7 = 68$

Dit resulteert in het antwoord dat een trui 91 euro kost om te maken, een shirt 56 euro en een hemd 68 euro.

5.2 Convolutie

Opdracht 1

Omdat onze matrix I een afmeting van 60x60 heeft en onze kernel 3x3 is, komt er een matrix uit van 58 bij 58. Alle elementen in deze matrix hebben de waarde 0, behalve de twee kolommen in het midden, dus kolom 27 en 28. Die elementen hebben namelijk de waarde 3, wat precies de verticale lijn aangeeft. Op deze manier zien we dat het dezelfde soort matrix als matrix C uit *voorbeeld 1* is, maar dan vergroot (aangezien matrix I uit het voorbeeld ook vergroot is).

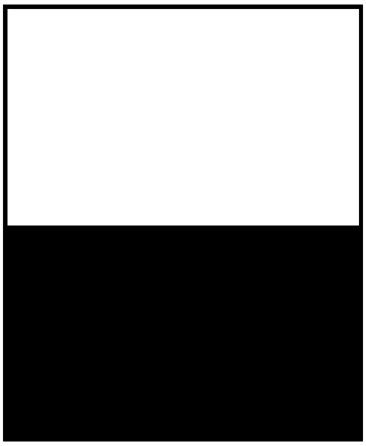
Opdracht 2

a) Na convolutie met matrix I en kernel K, krijgen we de nulmatrix als resultaat, oftewel:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dit betekent dat de kernel K de lijnen in Figuur 5 niet heeft kunnen herkennen.

b) De visuele weergave van matrix I is Figuur 5 maar dan een kwartslag gedraaid:



Figuur 10: Plaatje van wit en zwart vlak, een kwartslag gedraaid.

c) Het resultaat van de convolutie van I met K is de matrix C, uit *voorbeeld 1*, een kwartslag gedraaid, oftewel:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aangezien we nu de convolutie hebben gedaan met zowel I een kwartslag gedraaid als de kernel, krijgen we nu hoge waarden in de middelste twee rijen, wat een lijndetectie aangeeft. De kernel uit voorbeeld *voorbeeld 1* herkent dus de verticale lijnen in een afbeelding en kernel K uit deze opdracht de horizontale lijnen. Als er geen horizontale lijnen zijn, zoals in Figuur 5, dan geeft convolutie met de kernel uit *voorbeeld 1* de nulmatrix als uitkomst. Zo werkt het ook met verticale lijnen en de kernel K uit deze opdracht.

Opdracht 3

a) De uitkomst van convolutie op deze matrix I met kernel K is

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) De uikomst van convolutie op deze matrix I met kernel K is

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) De 3 zit helemaal rechts bovenin de hoek. Dit is omdat als je naar deze matrix I kijkt, zie je dat kernel K precies past rechtsbovenin. Als we de stappen van convolutie volgen, is dat exact de laatste in de eerste rij van de resulterende matrix. Die matrix ziet er dan als volgt uit:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d) * Als we kijken naar kernel K uit deze opdracht, zien we dat het patroontje in deze matrix I bijna hetzelfde is als het patroontje in kernel K, alleen dan verticaal gespiegeld. Daarom is de juiste kernel voor deze matrix I als volgt:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dit kunnen we controleren door de convolutie toe te passen. Daarnaast zie je dat rechtbovenin deze matrix I exact hetzelfde patroon als in de correcte, in dit antwoord gegeven, kernel.

*Uitdagende opdracht