Formulario CPS (parte II)

- Funzione di Distribuzione: $F(x) = P(X \le x)$
- Densità: $f(x) = F'(x)$
  - $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$
  - $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

VARIABILI ALEATORIE CONTINUE:

	DISTRIBUZIONE (F)	DENSITÀ (f)	MEDIA	VARIANZA
$X \sim Uni([a,b])$	$\frac{x-a}{b-a}$	$\mathbb{1}\frac{1}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
$X \sim Exp(\lambda)$	$1-e^{-\lambda x}$	$\lambda e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{(0,+\infty)}^{(x)}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
$X \sim \mathcal{N}(m,\sigma^2)$	$F(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$ (!)	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	m	σ^2
$X \sim Gamma(\alpha,\lambda)$	$1-e^{-\lambda x}\sum_{i=0}^{\alpha-1}\frac{(\lambda x)^i}{i!}$ SE α È INTERO	$\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{1}_{(0,+\infty)}^{(x)}$	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$
$X \sim \chi^2(m)$	//	$\mathbb{1}_{(0,+\infty)}^{(x)} \frac{\frac{1}{2}^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})} x^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}x}$	m	$2m$
$X \sim \mathcal{N}(0,1)$	$F(x) = \Phi(x)$ (!)	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2}$	0	1
$X \sim Cauchy($	//	$\frac{1}{\pi(1+x^2)}\mathbb{1}_{(-\infty,+\infty)}^{(x)}$	NO	NO

(!) Vedere Tabella dei valori ($\Phi(x) = \Phi(-x)$, è una funzione pari)

- La $X \sim Exp$ gode di perdita di memoria: $P(X > k) = e^{-\lambda k}$
- Se $\alpha = 1$ $X \sim Gamma(1,\lambda)$ è una esponenziale (λ)
- Una qualsiasi $X \sim \mathcal{N}(m,\sigma^2)$ può essere normalizzata ad una $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$, $Y = \frac{X-m}{\sqrt{\sigma^2}}$ (NOTA: $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, $-X \sim \mathcal{N}(0,1)$ $P(-X \le t) = P(X \ge t) = 1 - P(X \le t) = 1 - \Phi(-t)$)
- $X \sim \chi^2(m) = X \sim Gamma\left(\frac{m}{2}, \frac{1}{2}\right)$
- Formula Media: $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\,dx$ $\left(E(X^m) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m f(x)\,dx\right)$
- Formula Varianza: $Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$

$Z = X+Y$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,dx$$

$Z = X-Y$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, x-z)\,dx$$

$Z = X \cdot Y$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x, \frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|}\,dx$$

$Z = \frac{Y}{X}$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, zx)\,|x|\,dx$$

^ Funzione Gamma di Eulero:

- $\Gamma(1) = 1$ · $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ · $\Gamma(0) = 1$
- $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\,\Gamma(\alpha)$
- $\Gamma(\alpha + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}$

^ Quantile di una v.a $X \sim N(0,1)$

$a \in (0,1)$ QUANTITÀ

$\boxed{P(X \leq \phi_a) = a}$ $\boxed{P(X \leq -\phi_a)} = P(-X \leq -\phi_a) = P(X \geq \phi_a)$

$= 1 - P(X \leq \phi_a) = \boxed{1-a}$

$\phi_{1-a} = -\phi_a$

$q_a = \sigma\phi_a + \mu$ ← quantile per una $Y \sim N(m, \sigma^2)$

^ $P(k \leq Z \leq \lambda) \Longrightarrow \phi(\lambda) - \phi(k)$

→ se $k < 0$

$\boxed{\phi(k) = 1 - \phi(-k)}$

^ Se la v.a non è negativa posso calcolare la $E(X)$ se esiste con $E(X) = \int_0^{+\infty} P(X > t)\,dt$

^ Densità (distribuzione) congiunta

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

densità marginale X e Y $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$ $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$

^ Densità Condizionale

- $f_{X|Y}(x|y) = \dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$
- $f_{Y|X}(y|x) = \dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$

^ Media Condizionale

- $E[X|Y=y] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_{X|Y}(x|y)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}\,dx$
- $E[Y|X=x] = \int_{-\infty}^{+\infty} y\,\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}\,dy$

^ X, Y indip se $f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y)$

Teoremi d'Addizione

$X \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda) \quad Y \sim \text{Gamma}(\beta, \lambda)$

$Z = X + Y \sim \text{Gamma}(\alpha + \beta, \lambda)$

$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2) \quad Y \sim \mathcal{N}(\mu, \tau^2)$

$Z = X + Y \sim \mathcal{N}(m + \mu, \sigma^2 + \tau^2)$

Trasformazione di v.a. continue

$\phi : R^2 \to R^2 \qquad \phi^{-1} : R^2 \to R^2$

$(X,Y) \to (U,V) \qquad (U,V) \to (X,Y)$

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases} \qquad J_{\phi^{-1}} : \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

determinante dello Jacobiano dell'inversa ϕ^{-1}

$$\iint_E f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\phi(E)} f(x(u,v), y(u,v)) \left| J_{\phi^{-1}} \right| du\,dv$$

densità di (U,V) in termini di (X,Y)

$X \sim \text{Beta}(\alpha, \beta) \qquad f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} \mathbb{1}_{(0,1)}(x)$

Densità di $Z = aX + bY + c$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f\left(x, \frac{z-c-ax}{b}\right) \frac{1}{|b|} \quad \begin{cases} +\frac{1}{b} & \text{se } b>0 \\ -\frac{1}{b} & \text{se } b<0 \end{cases}$$

Densità di $Z = aX + c$

$$f_Z(z) = \cancel{\int_{-\infty}^{+\infty}} f_X\left(\frac{z-c}{a}\right)\frac{1}{|a|}$$