Curso de Límites para Ciencias de la Computación

Lic. Felipe Martínez

3 de agosto de 2025

Índice general

Capítulo 1

Límites de una Función en un Punto

1.1. Introducción

Bienvenidos a este curso de límites, una herramienta fundamental en el estudio del cálculo y, por ende, en diversas ramas de la ciencia y la ingeniería, especialmente en las ciencias de la computación. Aunque a primera vista los límites puedan parecer un concepto abstracto, su comprensión es crucial para entender cómo se comportan las funciones en puntos específicos o en el infinito, lo que tiene aplicaciones directas en algoritmos, análisis de complejidad, procesamiento de señales y gráficos por computadora.

En este capítulo, nos adentraremos en la noción de límite de una función en un punto. Exploraremos qué significa que una función se .ªcerque.ª un valor particular a medida que su variable independiente se aproxima a un cierto punto. Esta idea intuitiva es la base para construir una definición más rigurosa y para desarrollar las técnicas necesarias para calcular límites.

Breve Nota Histórica

El concepto de límite, aunque formalizado en el siglo XIX, tiene raíces mucho más antiguas. Matemáticos de la antigua Grecia, como Arquímedes (c. 287-212 a.C.), ya utilizaban métodos que se asemejan a la idea de límite para calcular áreas y volúmenes de figuras curvas, como el área de un círculo, mediante el "método de exhaución". Este método consistía en inscribir y circunscribir polígonos con un número creciente de lados para aproximarse cada vez más al área de la figura curva. Sin embargo, no fue hasta los trabajos de matemáticos como Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) en el desarrollo del cálculo diferencial e integral, que la noción de cantidades ïnfinitesimalmente pequeñasçomenzó a tomar forma. La formalización rigurosa del concepto de límite, tal como lo conocemos hoy, se atribuye principalmente a Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) y Karl Weierstrass (1815-1897), quienes establecieron la definición épsilon-delta, proporcionando una base sólida para el análisis matemático.

1.2. Definición Intuitiva de Límite

Consideremos una función $f(x)$. Queremos entender qué sucede con los valores de $f(x)$ a medida que x se acerca a un número específico, digamos a. No nos interesa necesariamente el valor de la función en $x = a$, sino cómo se comporta la función en las proximidades de a. Si a medida que x se aproxima a a (tanto por la izquierda como por la derecha), los valores de $f(x)$ se acercan a un único número L, decimos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es L. Esto se denota como:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

Es importante destacar que para que el límite exista, la función no tiene por qué estar definida en $x = a$. Incluso si $f(a)$ existe, el valor del límite puede ser diferente de $f(a)$. El límite describe la tendencia de la función.

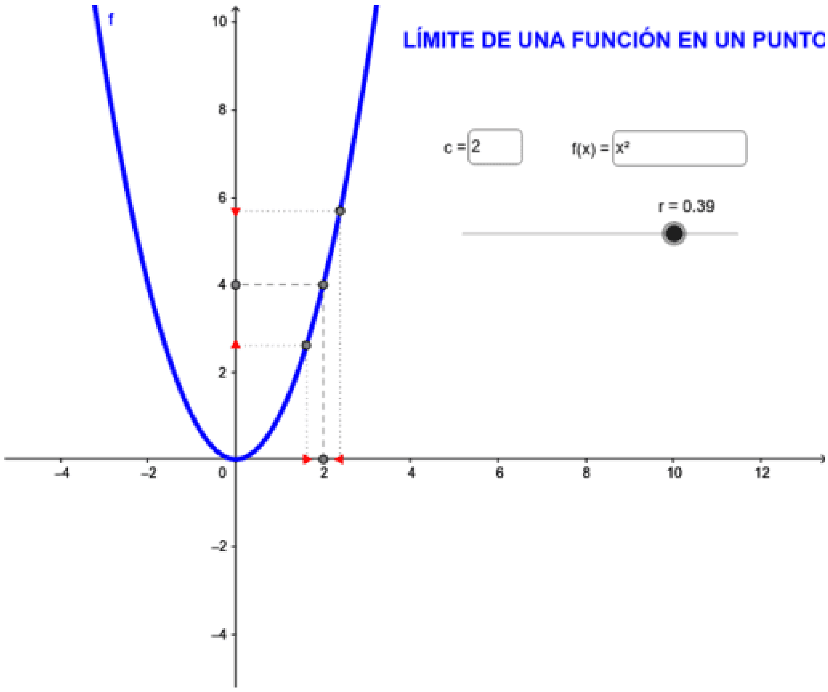

Figura 1.1: Representación gráfica del límite de una función en un punto.

1.3. Límites Laterales

Para que el límite de una función en un punto exista, es necesario que los límites laterales existan y sean iguales. Los límites laterales describen el comportamiento de la función a medida que x se acerca a a desde un lado específico:

- **Límite por la derecha:** Si x se acerca a a tomando valores mayores que a, se denota como $\lim_{x\to a^+} f(x)$.
- **Límite por la izquierda:** Si x se acerca a a tomando valores menores que a, se denota como $\lim_{x\to a^-} f(x)$.

El límite $\lim_{x\to a} f(x) = L$ existe si y solo si $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$.

1.4. Cálculo de Límites por Sustitución Directa

Para muchas funciones comunes (polinómicas, racionales, trigonométricas, exponenciales, logarítmicas), si la función está definida en el punto a, el límite se puede calcular simplemente sustituyendo x por a. Es decir, si f es una función continua en a, entonces:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Sin embargo, esta regla no aplica cuando la sustitución directa resulta en una indeterminación, lo cual veremos en capítulos posteriores.

1.5. Ejercicio Resuelto

Ejercicio 1.1

Calcule el límite de la función $f(x) = x^2 - 3x + 2$ cuando x tiende a 4.

Solución

Para calcular el límite de la función $f(x) = x^2 - 3x + 2$ cuando x tiende a 4, podemos utilizar la propiedad de sustitución directa, ya que $f(x)$ es una función polinómica y, por lo tanto, continua en todos los puntos.

1. **Identificar la función y el punto:** La función es $f(x) = x^2 - 3x + 2$ y el punto al que x tiende es $a = 4$.
2. **Aplicar la propiedad de sustitución directa:** Sustituimos el valor de $x = 4$ en la función.
$$\lim_{x \to 4}(x^2 - 3x + 2) = (4)^2 - 3(4) + 2$$
3. **Realizar las operaciones aritméticas:**

$$= 16 - 12 + 2$$

$$= 4 + 2$$

$$= 6$$

Por lo tanto, el límite de la función $f(x) = x^2 - 3x + 2$ cuando x tiende a 4 es 6.

1.6. Ejercicios de Práctica

Resuelva los siguientes límites. Las respuestas se encuentran al final del capítulo.

1. $\lim_{x \to 2}(5x - 3)$
2. $\lim_{x \to -1}(x^2 + 2x + 1)$
3. $\lim_{x \to 0}(\frac{x+1}{x-1})$

4. $\lim_{x\to 3}(\sqrt{x+1})$
5. $\lim_{x\to 0}(e^x+1)$
6. $\lim_{x\to 1}(\ln x+5)$
7. $\lim_{x\to -2}(x^3-4x)$
8. $\lim_{x\to 5}(\frac{2x}{x-3})$
9. $\lim_{x\to 0}(\cos x)$
10. $\lim_{x\to \pi}(\sin x)$
11. $\lim_{x\to 4}(\frac{1}{x})$
12. $\lim_{x\to 1}(x^4-2x^2+3)$
13. $\lim_{x\to -3}(\frac{x^2-9}{x+3})$
14. $\lim_{x\to 0}(\frac{\sin x}{x})$
15. $\lim_{x\to 2}(\frac{x^2-4}{x-2})$
16. $\lim_{x\to 1}(\frac{x^3-1}{x-1})$
17. $\lim_{x\to 0}(\frac{e^x-1}{x})$
18. $\lim_{x\to 9}(\sqrt{x})$
19. $\lim_{x\to 0}(\tan x)$
20. $\lim_{x\to 1}(\frac{x^2+x-2}{x-1})$

Respuestas a los Ejercicios de Práctica

1. 7
2. 0
3. -1
4. 2
5. 2
6. 5
7. 0
8. 5
9. 1
10. 0

11. $1/4$
12. 2
13. -6
14. 1
15. 4
16. 3
17. 1
18. 3
19. 0
20. 3

Capítulo 2

Concepto de Límite

2.1. Introducción

En el capítulo anterior, exploramos la noción intuitiva de límite de una función en un punto, observando cómo los valores de una función se comportan a medida que nos acercamos a un valor específico de la variable independiente. Ahora, profundizaremos en la formalización de este concepto, que es la piedra angular del cálculo diferencial e integral. Comprender la definición formal de límite es esencial para cualquier estudiante de ciencias de la computación, ya que subyace a muchos algoritmos de optimización, métodos numéricos y el análisis de la convergencia de series y secuencias, aspectos cruciales en el desarrollo de software eficiente y robusto.

Breve Nota Histórica

Aunque la idea de aproximación ha existido desde la antigüedad, la definición rigurosa de límite que utilizamos hoy en día fue desarrollada en el siglo XIX. Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), un matemático francés, fue pionero en la formalización del cálculo, introduciendo la definición de límite basada en la idea de "épsilon-delta". Posteriormente, Karl Weierstrass (1815-1897), un matemático alemán, refinó esta definición, haciéndola más precisa y rigurosa. Esta formalización permitió establecer el cálculo sobre bases sólidas, eliminando las ambigüedades que habían persistido desde los tiempos de Newton y Leibniz. La definición épsilon-delta es un testimonio de la búsqueda de la precisión matemática y es fundamental para el desarrollo de la teoría de funciones y el análisis moderno.

2.2. Definición Formal de Límite (Definición Épsilon-Delta)

La definición formal de límite, conocida como la definición épsilon-delta, puede parecer intimidante al principio, pero es una herramienta poderosa que nos permite demostrar rigurosamente la existencia de un límite. Se enuncia de la siguiente manera:

Se dice que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es L, denotado como $\lim_{x\to a} f(x) = L$, si para cada número $\epsilon > 0$ (épsilon, una cantidad positiva arbitrariamente pequeña), existe un número $\delta > 0$ (delta, una cantidad positiva que depende de ϵ) tal que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \epsilon$.

En términos más sencillos, esto significa que podemos hacer que los valores de $f(x)$ estén tan cerca de L como queramos (dentro de una distancia ϵ), siempre que tomemos valores de x lo suficientemente cerca de a (dentro de una distancia δ), pero sin que x sea igual a a.

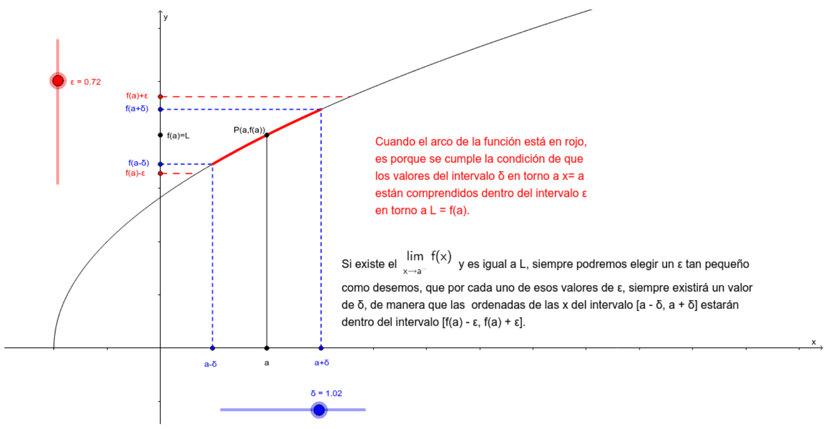

Figura 2.1: Representación gráfica de la definición épsilon-delta del límite.

2.3. Interpretación Gráfica de la Definición Épsilon-Delta

La definición épsilon-delta puede visualizarse gráficamente. Si dibujamos una banda horizontal de ancho 2ϵ centrada en L en el eje y, la definición nos asegura que podemos encontrar una banda vertical de ancho 2δ centrada en a en el eje x (excluyendo $x = a$) tal que, para cualquier x dentro de esta banda vertical, el valor de $f(x)$ caerá dentro de la banda horizontal. Esto ilustra cómo, al acercarnos a a, los valores de la función se confinan cada vez más cerca de L.

2.4. Importancia de la Definición Formal en Ciencias de la Computación

Aunque la aplicación directa de la definición épsilon-delta en la programación diaria es rara, la lógica subyacente es fundamental para comprender conceptos avanzados en ciencias de la computación. Por ejemplo:

- **Análisis de Algoritmos:** Al analizar la complejidad de un algoritmo, a menudo se utilizan límites para describir el comportamiento del tiempo de ejecución o el uso de memoria a medida que el tamaño de la entrada tiende a infinito. La notación O-grande, por ejemplo, se basa en ideas de límites.

- **Precisión Numérica:** En la computación numérica, donde las operaciones con números reales se aproximan con números de punto flotante, la comprensión de los límites ayuda a entender los errores de redondeo y la convergencia de métodos iterativos.

- **Gráficos por Computadora:** En la renderización de gráficos, los límites se utilizan para suavizar curvas y superficies, y para modelar el comportamiento de la luz y las sombras a medida que se acercan a puntos singulares.

La capacidad de pensar de manera rigurosa sobre la aproximación y la convergencia, inculcada por el estudio de los límites, es una habilidad invaluable para cualquier científico de la computación.

2.5. Ejercicio Resuelto

Ejercicio 2.1

Demuestre, usando la definición épsilon-delta de límite, que $\lim_{x\to 2}(3x-1)=5$.

Solución

Para demostrar que $\lim_{x\to 2}(3x-1)=5$ usando la definición épsilon-delta, necesitamos mostrar que para cada $\epsilon>0$, existe un $\delta>0$ tal que si $0<|x-2|<\delta$, entonces $|(3x-1)-5|<\epsilon$.

1. **Partir de la desigualdad $|f(x)-L|<\epsilon$ y simplificar:**
$$|(3x-1)-5|<\epsilon$$
$$|3x-6|<\epsilon$$
2. **Factorizar para obtener $|x-a|$:**
$$|3(x-2)|<\epsilon$$
$$3|x-2|<\epsilon$$
3. **Despejar $|x-a|$:**
$$|x-2|<\frac{\epsilon}{3}$$
4. **Identificar δ:** Comparando esta expresión con $0<|x-2|<\delta$, podemos elegir $\delta=\frac{\epsilon}{3}$.
5. **Conclusión:** Dado cualquier $\epsilon>0$, podemos elegir $\delta=\frac{\epsilon}{3}$. Entonces, si $0<|x-2|<\delta$, se sigue que:
$$|x-2|<\frac{\epsilon}{3}$$
$$3|x-2|<\epsilon$$
$$|3x-6|<\epsilon$$
$$|(3x-1)-5|<\epsilon$$

   Esto demuestra que $\lim_{x\to 2}(3x-1)=5$ según la definición épsilon-delta.

2.6. Ejercicios de Práctica

Resuelva los siguientes límites. Las respuestas se encuentran al final del capítulo.

a) Demuestre, usando la definición épsilon-delta, que $\lim_{x\to 1}(2x+3) = 5$.

b) Demuestre, usando la definición épsilon-delta, que $\lim_{x\to -1}(4x+1) = -3$.

c) Demuestre, usando la definición épsilon-delta, que $\lim_{x\to 3}(x^2) = 9$.

d) Demuestre, usando la definición épsilon-delta, que $\lim_{x\to 0}(x^3) = 0$.

e) Demuestre, usando la definición épsilon-delta, que $\lim_{x\to 4}(\sqrt{x}) = 2$.

f) Demuestre, usando la definición épsilon-delta, que $\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x+1}) = 1$.

g) Demuestre, usando la definición épsilon-delta, que $\lim_{x\to 2}(x^2-4x+5) = 1$.

h) Demuestre, usando la definición épsilon-delta, que $\lim_{x\to -2}(x^2+3x+2) = 0$.

i) Demuestre, usando la definición épsilon-delta, que $\lim_{x\to 1}(\frac{1}{x}) = 1$.

j) Demuestre, usando la definición épsilon-delta, que $\lim_{x\to 0}(\sin x) = 0$.

k) Demuestre, usando la definición épsilon-delta, que $\lim_{x\to 0}(\cos x) = 1$.

l) Demuestre, usando la definición épsilon-delta, que $\lim_{x\to 0}(e^x) = 1$.

m) Demuestre, usando la definición épsilon-delta, que $\lim_{x\to 1}(\ln x) = 0$.

n) Demuestre, usando la definición épsilon-delta, que $\lim_{x\to 0}(\frac{x}{2}) = 0$.

ñ) Demuestre, usando la definición épsilon-delta, que $\lim_{x\to 5}(7) = 7$.

o) Demuestre, usando la definición épsilon-delta, que $\lim_{x\to -3}(-2x) = 6$.

p) Demuestre, usando la definición épsilon-delta, que $\lim_{x\to 0}(\frac{x^2}{x+1}) = 0$.

q) Demuestre, usando la definición épsilon-delta, que $\lim_{x\to 1}(x^3) = 1$.

r) Demuestre, usando la definición épsilon-delta, que $\lim_{x\to 2}(\frac{x-2}{x^2-4}) = \frac{1}{4}$.

s) Demuestre, usando la definición épsilon-delta, que $\lim_{x\to 0}(\frac{\sin x}{x}) = 1$.

Respuestas a los Ejercicios de Práctica

a) Para cada $\epsilon > 0$, elija $\delta = \frac{\epsilon}{2}$.

b) Para cada $\epsilon > 0$, elija $\delta = \frac{\epsilon}{4}$.

c) Para cada $\epsilon > 0$, elija $\delta = \min(1, \frac{\epsilon}{7})$.

d) Para cada $\epsilon > 0$, elija $\delta = \sqrt[3]{\epsilon}$.

e) Para cada $\epsilon > 0$, elija $\delta = \min(1, 2\epsilon)$.

f) Para cada $\epsilon > 0$, elija $\delta = \min(\frac{1}{2}, \frac{\epsilon}{2})$.

g) Para cada $\epsilon > 0$, elija $\delta = \min(1, \frac{\epsilon}{3})$.

h) Para cada $\epsilon > 0$, elija $\delta = \min(1, \epsilon)$.

i) Para cada $\epsilon > 0$, elija $\delta = \min(\frac{1}{2}, \frac{\epsilon}{2})$.

j) Para cada $\epsilon > 0$, elija $\delta = \epsilon$.

k) Para cada $\epsilon > 0$, elija $\delta = \epsilon$.

l) Para cada $\epsilon > 0$, elija $\delta = \ln(1+\epsilon)$.

m) Para cada $\epsilon > 0$, elija $\delta = \text{mín}(\frac{1}{2}, \frac{\epsilon}{2})$.

n) Para cada $\epsilon > 0$, elija $\delta = 2\epsilon$.

ñ) Para cada $\epsilon > 0$, δ puede ser cualquier número positivo.

o) Para cada $\epsilon > 0$, elija $\delta = \frac{\epsilon}{2}$.

p) Para cada $\epsilon > 0$, elija $\delta = \text{mín}(\frac{1}{2}, \frac{\epsilon}{2})$.

q) Para cada $\epsilon > 0$, elija $\delta = \text{mín}(1, \frac{\epsilon}{7})$.

r) Para cada $\epsilon > 0$, elija $\delta = \text{mín}(1, 4\epsilon)$.

s) Para cada $\epsilon > 0$, elija $\delta = \epsilon$.

Capítulo 3

Propiedades de los Límites

3.1. Introducción

Una vez que hemos comprendido la definición intuitiva y formal de límite, el siguiente paso crucial es aprender a calcularlos de manera eficiente. Afortunadamente, no siempre es necesario recurrir a la definición épsilon-delta o a la evaluación de límites laterales. Existen una serie de propiedades fundamentales que nos permiten simplificar el cálculo de límites de funciones más complejas, descomponiéndolas en operaciones con límites más sencillos. Estas propiedades son la base para el cálculo algebraico de límites y son herramientas indispensables en el análisis matemático y, por extensión, en la resolución de problemas computacionales que involucran el comportamiento de funciones.

Breve Nota Histórica

Las propiedades de los límites no surgieron de forma aislada, sino que se desarrollaron a medida que el cálculo se formalizaba. Si bien los matemáticos del siglo XVII como Newton y Leibniz ya operaban con ideas de límites de manera intuitiva, fue en el siglo XIX, con la rigurosa formalización de Cauchy y Weierstrass, cuando estas propiedades se establecieron de manera axiomática. La necesidad de un conjunto de reglas que permitieran manipular los límites de forma consistente y predecible fue evidente a medida que el cálculo se aplicaba a problemas más complejos en física, ingeniería y otras ciencias. Estas propiedades son un reflejo de la estructura algebraica de los límites y su compatibilidad con las operaciones aritméticas básicas.

3.2. Propiedades Fundamentales de los Límites

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones, y c una constante. Si $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$ existen, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

a) **Límite de una constante:** El límite de una constante es la propia constante.

$$\lim_{x\to a} c = c$$

b) **Límite de una función identidad:** El límite de x cuando x tiende a a es a.

$$\lim_{x\to a} x = a$$

c) **Límite de una suma o diferencia:** El límite de una suma o diferencia de funciones es la suma o diferencia de sus límites.

$$\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$$

d) **Límite de un producto:** El límite de un producto de funciones es el producto de sus límites.

$$\lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

e) **Límite de un producto por una constante:** El límite de una constante por una función es la constante por el límite de la función.

$$\lim_{x\to a}[c \cdot f(x)] = c \cdot \lim_{x\to a} f(x)$$

f) **Límite de un cociente:** El límite de un cociente de funciones es el cociente de sus límites, siempre que el límite del denominador no sea cero.

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}, \quad \text{si } \lim_{x\to a} g(x) \neq 0$$

g) **Límite de una potencia:** El límite de una función elevada a una potencia es el límite de la función elevado a esa potencia.

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n$$

h) **Límite de una raíz:** El límite de la raíz n-ésima de una función es la raíz n-ésima del límite de la función, siempre que el límite sea positivo si n es par.

$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$$

i) **Límite de una función compuesta:** Si $\lim_{x\to a} g(x) = L$ y f es continua en L, entonces:

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(\lim_{x\to a} g(x)) = f(L)$$

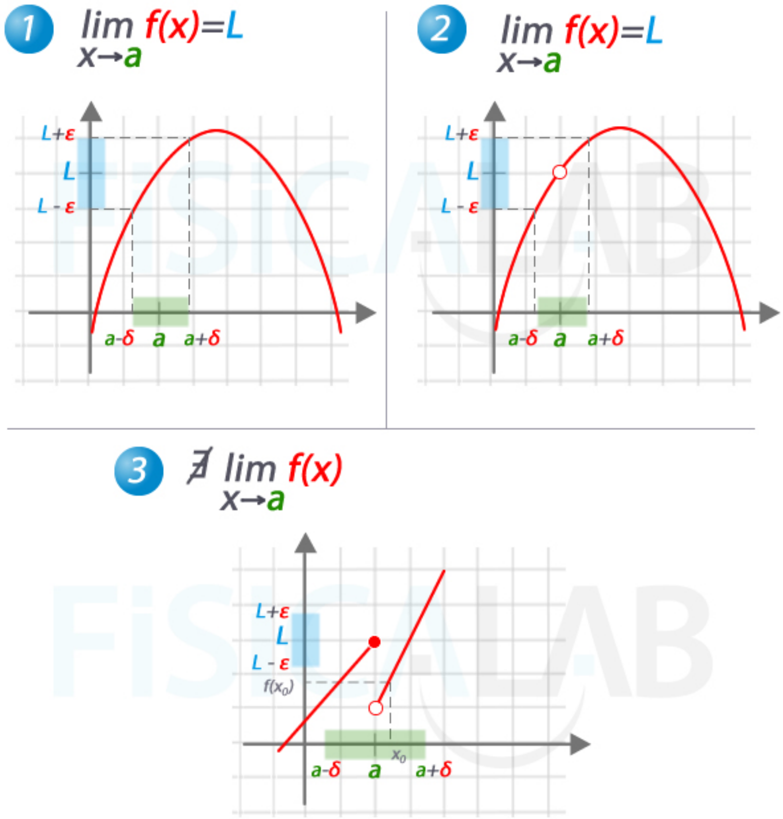

Figura 3.1: Representación visual de algunas propiedades de los límites.

3.3. Relevancia en Ciencias de la Computación

Las propiedades de los límites son de gran utilidad en ciencias de la computación, especialmente en áreas como:

- **Análisis Numérico:** Al desarrollar algoritmos para resolver ecuaciones, integrar funciones o aproximar soluciones, es común trabajar con series y secuencias. Las propiedades de los límites son esenciales para determinar la convergencia de estos métodos y para analizar la estabilidad de los algoritmos.
- **Procesamiento de Señales:** En el procesamiento digital de señales, las transformadas (como la Transformada de Fourier) a menudo involucran integrales que pueden interpretarse como límites de sumas. Comprender las propiedades de los límites ayuda a analizar el comportamiento de las señales y los filtros.
- **Optimización:** Muchos algoritmos de optimización buscan minimizar o maximizar funciones. El cálculo de límites es fundamental para encontrar puntos críticos y para entender el comportamiento de las funciones objetivo en los extremos o en puntos de discontinuidad.
- **Gráficos por Computadora y Animación:** En la creación de modelos 3D y animaciones, las curvas y superficies se definen matemáticamente. Las

propiedades de los límites son cruciales para asegurar la suavidad y continuidad de estas representaciones, evitando artefactos visuales y garantizando un renderizado realista.

El dominio de estas propiedades no solo facilita el cálculo de límites, sino que también fortalece el razonamiento lógico y la capacidad de descomponer problemas complejos en partes más manejables, habilidades transferibles y altamente valoradas en el campo de la computación.

3.4. Ejercicio Resuelto

Ejercicio 3.1

Calcule el límite de la función $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x-1}$ cuando x tiende a 1.

Solución

Para calcular el límite de la función $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x-1}$ cuando x tiende a 1, primero intentamos la sustitución directa:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{x-1} = \frac{(1)^2+2(1)-3}{1-1} = \frac{1+2-3}{0} = \frac{0}{0}$$

Obtenemos una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$. Para resolverla, podemos factorizar el numerador.

a) **Factorizar el numerador:** El numerador es un polinomio cuadrático $x^2 + 2x - 3$. Buscamos dos números que multiplicados den -3 y sumados den 2. Estos números son 3 y -1. Por lo tanto, $x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1)$.

b) **Reescribir la expresión del límite:**

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x+3)(x-1)}{x-1}$$

c) **Simplificar la expresión:** Dado que $x \to 1$, $x \neq 1$, por lo que podemos cancelar el término $(x - 1)$ en el numerador y el denominador.

$$\lim_{x\to 1}(x+3)$$

d) **Sustituir el valor de x:** Ahora, sustituimos $x = 1$ en la expresión simplificada.

$$1 + 3 = 4$$

Por lo tanto, el límite de la función $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x-1}$ cuando x tiende a 1 es 4.

3.5. Ejercicios de Práctica

Resuelva los siguientes límites utilizando las propiedades de los límites. Las respuestas se encuentran al final del capítulo.

a) $\lim_{x\to 2}(x^3 - 3x + 5)$

b) $\lim_{x\to -1}(\frac{x^2+5}{x+2})$

c) $\lim_{x\to 0}(\sqrt{4x+9})$

d) $\lim_{x\to 3}(2x^2 - 4x + 1)$

e) $\lim_{x\to 1}(\frac{x^2-1}{x-1})$

f) $\lim_{x\to 0}(\frac{\sin(2x)}{x})$

g) $\lim_{x\to 4}(\frac{x-4}{\sqrt{x}-2})$

h) $\lim_{x\to -2}(\frac{x^3+8}{x+2})$

i) $\lim_{x\to 0}(\frac{e^{3x}-1}{x})$

j) $\lim_{x\to 1}(\frac{\ln x}{x-1})$

k) $\lim_{x\to 5}(\frac{x^2-25}{x-5})$

l) $\lim_{x\to 0}(\frac{\tan x}{x})$

m) $\lim_{x\to 3}(\frac{x^2-9}{x^2-5x+6})$

n) $\lim_{x\to 0}(\frac{1-\cos x}{x^2})$

ñ) $\lim_{x\to 2}(\frac{x^2-5x+6}{x-2})$

o) $\lim_{x\to -1}(\frac{x^2+3x+2}{x+1})$

p) $\lim_{x\to 0}(\frac{\sqrt{x+1}-1}{x})$

q) $\lim_{x\to 4}(\frac{x^2-16}{x-4})$

r) $\lim_{x\to 0}(\frac{\sin(ax)}{bx})$

s) $\lim_{x\to 1}(\frac{x^3-3x+2}{x^2-1})$

Respuestas a los Ejercicios de Práctica

a) 7

b) 6

c) 3

d) 7

e) 2

f) 2

g) 4

h) 12

$i)$ 3

$j)$ 1

$k)$ 10

$l)$ 1

$m)$ 6

$n)$ $1/2$

$\tilde{n})$ -1

$o)$ 1

$p)$ $1/2$

$q)$ 8

$r)$ a/b

$s)$ 0

Capítulo 4

Indeterminaciones

4.1. Introducción

En los capítulos anteriores, hemos explorado el concepto de límite y las propiedades que nos permiten calcularlos de manera directa en muchos casos. Sin embargo, al intentar calcular el límite de ciertas funciones, nos encontramos con expresiones que no tienen un valor definido de inmediato, como $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$. Estas expresiones se conocen como **indeterminaciones**. La aparición de una indeterminación no significa que el límite no exista, sino que necesitamos aplicar técnicas adicionales para "salvar"la indeterminación y encontrar el valor real del límite, si es que existe. Este capítulo se centrará en identificar las diferentes formas indeterminadas y en las estrategias para resolverlas, lo cual es de vital importancia en el análisis de funciones y en la resolución de problemas en ciencias de la computación donde el comportamiento de un sistema puede volverse ambiguo en ciertos puntos.

Breve Nota Histórica

El manejo de las indeterminaciones ha sido un desafío en el desarrollo del cálculo. Aunque matemáticos como Newton y Leibniz trabajaron con límites, la comprensión y el tratamiento sistemático de las formas indeterminadas se consolidaron con los trabajos de matemáticos posteriores. Guillaume de l'Hôpital (1661-1704), por ejemplo, es conocido por la regla que lleva su nombre, la cual proporciona un método para resolver indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$ utilizando derivadas. Sin embargo, la regla de L'Hôpital fue en realidad descubierta por Johann Bernoulli (1667-1748), quien la compartió con L'Hôpital bajo un acuerdo de confidencialidad. La necesidad de métodos rigurosos para abordar estas situaciones ambiguas impulsó el desarrollo de técnicas algebraicas y analíticas que son fundamentales en el cálculo moderno.

4.2. Tipos Comunes de Indeterminaciones

Existen siete formas indeterminadas principales que podemos encontrar al calcular límites:

a) $\frac{0}{0}$ (Cero sobre cero)

b) $\frac{\infty}{\infty}$ (Infinito sobre infinito)

c) $\infty - \infty$ (Infinito menos infinito)

d) $0 \cdot \infty$ (Cero por infinito)

e) 1^∞ (Uno elevado a infinito)

f) 0^0 (Cero elevado a cero)

g) ∞^0 (Infinito elevado a cero)

Cada una de estas formas requiere un enfoque específico para su resolución.

4.3. Técnicas para Resolver Indeterminaciones

4.3.1. Indeterminación $\frac{0}{0}$

Esta indeterminación suele aparecer en funciones racionales cuando al sustituir el valor de x en el numerador y el denominador, ambos se anulan. Las técnicas comunes para resolverla incluyen:

- **Factorización y Simplificación:** Si el numerador y el denominador son polinomios, se pueden factorizar para encontrar factores comunes que se anulan en el punto problemático. Al simplificar la expresión, se elimina la indeterminación.
- **Multiplicación por el Conjugado:** Útil cuando la expresión contiene raíces cuadradas. Multiplicar el numerador y el denominador por el conjugado de la expresión con la raíz puede ayudar a eliminar la raíz y permitir la simplificación.
- **Regla de L'Hôpital:** Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones derivables y $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, entonces:

  $$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

  Esta regla también aplica para la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$.

4.3.2. Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$

Comúnmente se presenta en límites al infinito de funciones racionales. Las estrategias incluyen:

- **Dividir por la Potencia Más Alta:** Dividir cada término del numerador y del denominador por la potencia más alta de x en el denominador. Esto transforma la expresión en términos que tienden a cero o a una constante, resolviendo la indeterminación.
- **Regla de L'Hôpital:** Al igual que con $\frac{0}{0}$, la regla de L'Hôpital es aplicable si las condiciones de derivabilidad se cumplen.

4.3.3. Otras Indeterminaciones

Las otras formas indeterminadas ($\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0) a menudo se pueden transformar en las formas $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ mediante manipulaciones algebraicas o el uso de logaritmos, para luego aplicar las técnicas mencionadas.

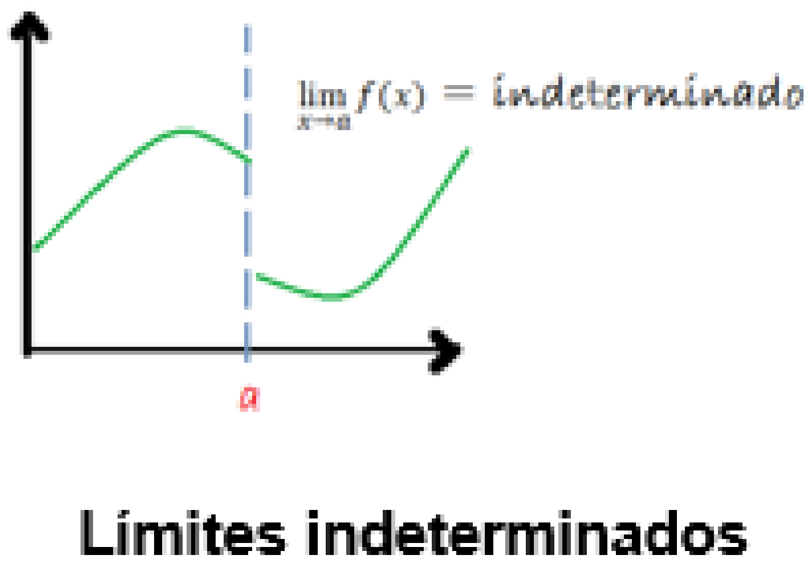

Figura 4.1: Ejemplo de una función con una indeterminación.

4.4. Aplicaciones en Ciencias de la Computación

La resolución de indeterminaciones es crucial en varios contextos de las ciencias de la computación:

- **Análisis de Complejidad Asintótica:** Al analizar el rendimiento de algoritmos, especialmente para entradas muy grandes, se utilizan límites para describir la complejidad asintótica (notación O-grande, Ω, Θ). Las indeterminaciones pueden surgir al comparar el crecimiento de diferentes funciones de complejidad, y su resolución permite determinar qué algoritmo es más eficiente para grandes volúmenes de datos.
- **Gráficos por Computadora y Modelado:** En el modelado de superficies y curvas complejas, las indeterminaciones pueden indicar puntos donde la función se comporta de manera inusual (singularidades). Resolver estas indeterminaciones es vital para renderizar gráficos sin artefactos y para asegurar la continuidad y suavidad de los modelos.

- **Procesamiento de Imágenes y Visión por Computadora:** En algoritmos que involucran filtros o transformaciones, pueden aparecer divisiones por cero o valores infinitos en ciertos puntos. La comprensión de las indeterminaciones permite diseñar algoritmos robustos que manejen estas situaciones de manera adecuada, evitando errores o resultados inesperados.
- **Inteligencia Artificial y Machine Learning:** En la optimización de modelos de aprendizaje automático, las funciones de costo pueden presentar indeterminaciones en ciertos puntos del espacio de parámetros. La capacidad de identificar y resolver estas indeterminaciones es fundamental para que los algoritmos de optimización converjan a soluciones óptimas.

Dominar las técnicas para resolver indeterminaciones no solo es una habilidad matemática, sino una capacidad analítica fundamental para cualquier profesional de la computación que deba enfrentarse a sistemas complejos y ambiguos.

4.5. Ejercicio Resuelto

Ejercicio 4.1

Calcule el límite de la función $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ cuando x tiende a 2.

Solución

Para calcular el límite de la función $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ cuando x tiende a 2, primero intentamos la sustitución directa:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(2)^2 - 4}{2 - 2} = \frac{4 - 4}{0} = \frac{0}{0}$$

Obtenemos una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$. Para resolverla, podemos utilizar la factorización.

a) **Factorizar el numerador:** El numerador es una diferencia de cuadrados, $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$.

b) **Reescribir la expresión del límite:**

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2}$$

c) **Simplificar la expresión:** Dado que $x \to 2$, $x \neq 2$, por lo que podemos cancelar el término $(x - 2)$ en el numerador y el denominador.

$$\lim_{x \to 2} (x + 2)$$

d) **Sustituir el valor de x:** Ahora, sustituimos $x = 2$ en la expresión simplificada.

$$2 + 2 = 4$$

Por lo tanto, el límite de la función $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ cuando x tiende a 2 es 4.

4.6. Ejercicios de Práctica

Resuelva los siguientes límites con indeterminaciones. Las respuestas se encuentran al final del capítulo.

a) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$

b) $\lim_{x\to -1} \frac{x^2+3x+2}{x+1}$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

d) $\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

e) $\lim_{x\to \infty} \frac{2x^2+3x-1}{x^2-5x+2}$

f) $\lim_{x\to \infty} \frac{x^3-2x+1}{x^4+3x^2-5}$

g) $\lim_{x\to \infty} \frac{x^5+7x^3-2}{x^2-4x+1}$

h) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{x}$

i) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

j) $\lim_{x\to \infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$

k) $\lim_{x\to 0}(x \cdot \ln x)$

l) $\lim_{x\to 0}(\frac{e^x-1}{x})$

m) $\lim_{x\to 1}(\frac{\ln x}{x-1})$

n) $\lim_{x\to \infty}(1+\frac{1}{x})^x$

ñ) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

o) $\lim_{x\to 0}(\frac{\tan x-\sin x}{x^3})$

p) $\lim_{x\to 0}(\frac{e^x-e^{-x}}{x})$

q) $\lim_{x\to 0}(\frac{\sin x-x}{x^3})$

r) $\lim_{x\to 0}(\frac{\ln(1+x)-x}{x^2})$

s) $\lim_{x\to 0}(\frac{\sqrt{1+x}-1-x/2}{x^2})$

Respuestas a los Ejercicios de Práctica

a) 6

b) 1

c) 1/2

d) 4

e) 2

f) 0

g) ∞

h) 5

i) $1/2$

j) $1/2$

k) 0

l) 1

m) 1

n) e

ñ) e

o) $1/2$

p) 2

q) $-1/6$

r) $-1/2$

s) $-1/8$

Capítulo 5

Infinitésimos

5.1. Introducción

En el estudio de los límites, hemos encontrado situaciones donde las funciones tienden a cero o a infinito. En este capítulo, nos centraremos en un concepto particular: los **infinitésimos**. Un infinitésimo es una función que tiende a cero en un punto dado. Aunque pueda parecer trivial que algo se acerque a cero, la comparación de la velocidad con la que diferentes funciones se aproximan a cero es de suma importancia. Esta comparación nos permite simplificar el cálculo de límites complejos, especialmente aquellos que involucran indeterminaciones. Para los estudiantes de ciencias de la computación, comprender los infinitésimos es relevante para el análisis de la eficiencia de algoritmos, la precisión de los métodos numéricos y la comprensión de cómo los errores se propagan en los cálculos.

Breve Nota Histórica

La idea de cantidades ïnfinitesimalmente pequeñas"ha sido un tema recurrente en la historia de las matemáticas, desde los antiguos griegos con sus métodos de exhaución hasta el desarrollo del cálculo por Newton y Leibniz. Sin embargo, la formalización y el estudio sistemático de los infinitésimos como funciones que tienden a cero se consolidaron con el rigor del análisis matemático del siglo XIX. Matemáticos como Augustin-Louis Cauchy y Karl Weierstrass, al establecer la definición formal de límite, también sentaron las bases para el estudio de los infinitésimos y su comparación. La noción de ïnfinitésimos equivalentes"se convirtió en una herramienta poderosa para simplificar el cálculo de límites, proporcionando un atajo elegante para resolver problemas que de otra manera serían muy laboriosos.

5.2. Definición de Infinitésimo

Una función $f(x)$ es un **infinitésimo** en un punto a si su límite en ese punto es cero, es decir:

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0$$

De manera similar, una función $f(x)$ es un infinitésimo en el infinito si:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$

5.3. Comparación de Infinitésimos

Cuando tenemos dos infinitésimos $f(x)$ y $g(x)$ en el mismo punto a, podemos comparar su .ºrden.º la velocidad con la que tienden a cero, analizando el límite de su cociente:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Dependiendo del valor de este límite, podemos clasificar los infinitésimos:

- Si $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0$ (y L es un número finito), entonces $f(x)$ y $g(x)$ son **infinitésimos del mismo orden**.
- Si $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, entonces $f(x)$ es un **infinitésimo de orden superior** a $g(x)$ (es decir, $f(x)$ tiende a cero más rápido que $g(x)$).
- Si $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$, entonces $f(x)$ es un **infinitésimo de orden inferior** a $g(x)$ (es decir, $f(x)$ tiende a cero más lento que $g(x)$).
- Si $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, entonces $f(x)$ y $g(x)$ son **infinitésimos equivalentes**. Esta es una propiedad muy útil, ya que nos permite sustituir un infinitésimo por su equivalente en el cálculo de límites, simplificando la expresión.

5.4. Tabla de Infinitésimos Equivalentes Comunes (cuando $x \to 0$)

Infinitésimo	**Infinitésimo Equivalente**
$\sin x$	x
$\tan x$	x
$\arcsin x$	x
$\arctan x$	x
$e^x - 1$	x
$\ln(1 + x)$	x
$1 - \cos x$	$\frac{x^2}{2}$
$(1 + x)^\alpha - 1$	αx

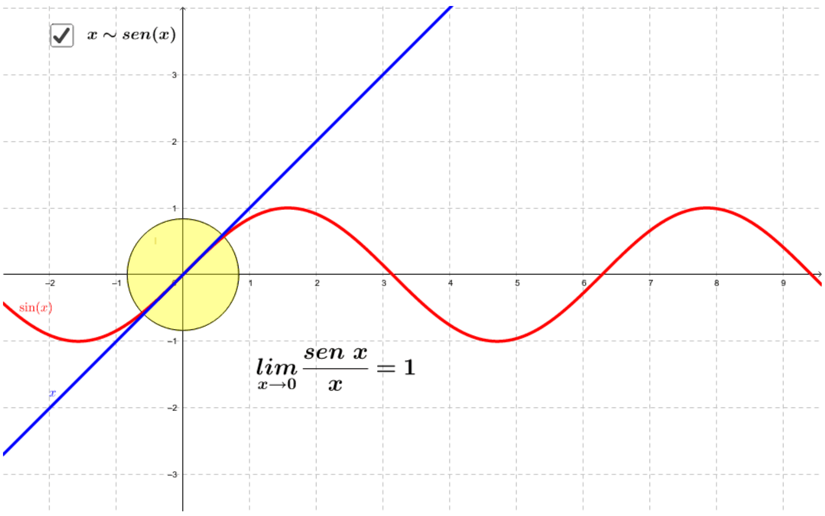

Figura 5.1: Ejemplo de infinitésimos equivalentes.

5.5. Aplicaciones en Ciencias de la Computación

La comprensión de los infinitésimos y su comparación es valiosa en varias áreas de las ciencias de la computación:

- **Análisis de Errores Numéricos:** En la computación numérica, los errores de truncamiento y redondeo a menudo se modelan como infinitésimos. Comprender su orden permite predecir la precisión de los métodos numéricos y diseñar algoritmos más estables.
- **Optimización Numérica:** Los algoritmos de optimización, como el descenso de gradiente, se basan en la idea de moverse en la dirección donde la función disminuye más rápidamente. La velocidad de convergencia de estos algoritmos puede analizarse utilizando infinitésimos, lo que ayuda a seleccionar los parámetros adecuados para una convergencia eficiente.
- **Procesamiento de Señales y Filtrado:** En el diseño de filtros digitales, las funciones de transferencia pueden tener polos y ceros que se comportan como infinitésimos en ciertas frecuencias. La teoría de infinitésimos ayuda a entender la respuesta en frecuencia de los filtros y a diseñar filtros con características deseadas.
- **Teoría de la Información y Compresión de Datos:** En la compresión de datos, a menudo se busca aproximar una señal o un conjunto de datos con una representación más simple. Los infinitésimos pueden utilizarse para cuantificar la pérdida de información en estas aproximaciones y para diseñar algoritmos de compresión más eficientes.

El concepto de infinitésimo, aunque abstracto, proporciona una lente poderosa para analizar el comportamiento de funciones en las proximidades de un punto y es una herramienta esencial para el desarrollo de algoritmos y sistemas computacionales robustos y eficientes.

5.6. Ejercicio Resuelto

Ejercicio 5.1

Calcule el límite $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x)}{x}$ utilizando infinitésimos equivalentes.

Solución

Para calcular el límite $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x)}{x}$ utilizando infinitésimos equivalentes, podemos aplicar la propiedad de que $\sin u \sim u$ cuando $u \to 0$.

a) **Identificar el infinitésimo:** En este caso, cuando $x \to 0$, $3x \to 0$. Por lo tanto, $\sin(3x)$ es un infinitésimo.

b) **Aplicar el infinitésimo equivalente:** Sabemos que $\sin u \sim u$ cuando $u \to 0$. Si hacemos $u = 3x$, entonces $\sin(3x) \sim 3x$ cuando $x \to 0$.

c) **Sustituir en el límite:**

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{3x}{x}$$

d) **Simplificar y calcular el límite:**

$$= \lim_{x \to 0} 3$$

$$= 3$$

Por lo tanto, el límite de la función $\frac{\sin(3x)}{x}$ cuando x tiende a 0 es 3.

5.7. Ejercicios de Práctica

Resuelva los siguientes límites utilizando infinitésimos equivalentes. Las respuestas se encuentran al final del capítulo.

a) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan(2x)}{x}$

b) $\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin(4x)}{x}$

c) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{5x}-1}{x}$

d) $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+6x)}{x}$

e) $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(3x)}{x^2}$

f) $\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^7-1}{x}$

g) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x \cdot \tan x}{x^2}$

h) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x-1-x}{x^2}$

i) $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$

j) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$

k) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$

l) $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x - x}{x^3}$

m) $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - x}{x^3}$

n) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x}{x}$

ñ) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x^2}$

o) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$

p) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x}$

q) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3}$

r) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2}$

s) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}$

Respuestas a los Ejercicios de Práctica

a) 2

b) 4

c) 5

d) 6

e) 9/2

f) 7

g) 1

h) 1/2

i) $-1/2$

j) $-1/6$

k) 1/3

l) 1/6

m) $-1/3$

n) 1

ñ) $-1/2$

o) 1/2

p) 1/3

q) $-1/2$

r) 1

s) $-1/2$