Приклад ітераційного алгоритму

Постановка задачи така:
Розбити початковий граф, описаний матрицею $|A|_{14\times14}$ на три підграфи. Число вершин в кожному підграфі $|x_i| \le 5$ (нема діапазону, як в послідовному алгоритмі). Сумарне число зв'язків між підграфами $m_{\sum} \le 7$ (по зрівненню з послідовним алгоритмом - це особливість).

Враховуючи те, що у вас є результат послідовного алгорітму, то ви задайте число вершин в кожному підграфі та визначіть якість розбиття, таке задайте число зовнішніх зв'язків.

- Складемо матрицю $|A|_{14\times14}$ - майте на увазі - матриця вже є - подивіться на приклад з лекції про послідовний алгоритм.
- Розбиваємо матрицю $|A|_{14\times14}$ на підматриці п'ятого порядку, тобто робимо початкове довільне розбиття графу на три підграфи по п'ять вершин в кожному $|x_i| \le 5$
- Розбиття довільне, але оскільки $|A|_{14\times14}$, а підматриці п'ятого порядку, то вводимо фіктивну вершину x_{15} з нульовими зв'язками (можливо вводити декілька фіктивних вершин). Отримаємо $|A|_{15\times15}$.
- Результати довільного розбиття такі (результати отримані з аналізу нашої матриці та визначення: V_{11}, V_{22}, V_{33}, V_{12}, V_{13}, V_{23}, ΔG)

$A =$

		1					2					3					$\Delta m = (m_{зовн} - m_{внутр}) > 0 \max$			
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	$2-1$	$3-1$		
	x_1	0	0	0	1	0	3	0	1	0	0	0	0	1	1	0	+3	+1	–	
	x_2	0	0	2	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	–1	0	–	
1	x_3	0	2	0 **10**	0	0	0	1	0 **12**	0	0	0	2	1 **9**	0	0	–1	+1	–	
	x_4	1	0	0	0	2	0	0	0	1	1	2	0	0	0	0	–1	–1	–	
	x_5	0	0	0	2	0	0	0	0	3	1	0	0	0	0	0	+2	–2	–	
																	$1-2$		$3-2$	
	x_6	3	0	0	0	0	0	0	2	0	0	2	0	0	1	0	+1	–	+1	
							внутрішні зв'язки x7					зовнішні зв'язки x7								
	x_7	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	+2	–	+3	$= 3-0$
2	x_8	1	0	0	0	0	2	0	0 **6**	0	0	0	0	0 **12**	2	0	–1	–	0	
	x_9	0	0	0	1	3	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	+3	–	0	
	x_{10}	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	2	1	0	0	0	+1	–	+2	
							зовнішні зв'язки x11					внутрішні зв'язки x11						$1-3$	$2-3$	
	x_{11}	0	1	0	2	0	2	0	0	1	2	0	0	0	0	0	–	+3	+5	$= 5-0$
	x_{12}	0	0	2	0	0	0	1	0	0	1	0	0	2	0	0	–	0	0	
3	x_{13}	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	2	0 **4**	0	0	–	+1	–1	
	x_{14}	1	0	0	0	0	1	1	2	0	0	0	0	0	0	0	–	+1	+4	
	x_{15}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	–	0	0	

Для початкового варіанту розбиття ΔG визначаємо відношенням внутрішньовузлових з'єднань до зовнішньовузлових

Число зовнішніх зв'язків mзовн. = $m_{12} + m_{13} + m_{23} = 12 + 9 + 12 = 33$ - сума елементів побічних підматриць.

Число внутрішніх зв'язків m_{внутр.}$=\frac{1}{2}\left(V_{11}+V_{22}+V_{33}\right)=\frac{10+6+4}{2}=10$ - полусума елементів побочних підматриць.

Зв'язність $S=\frac{1}{2}\sum a_{ij}=43$

$\Delta G=\frac{10}{33}$

Цей результат явно далекий від оптимального. Щоб покращити розбиття визначимо вершину для перестановки. Як це робити - ви знаєте.

Для кожного рядка знаходимо різницю сум зв'язків, які має коєна вершина, що включена до відповідного підграфу з вершинами, що вийшли до інших підграфів (підматриць). Прописуємо цю величину кожному рядку для елементів, розташованих в ріщних піддграфах. Отримаємо відповідні ***вектор-стовпчики*** (див. матрицю А).

Проаналізуємо вектор-стовпчики таким чином

2-1 - 1-2; 3-1 - 1-3; 3-2 - 2-3

Це відповідає перестановці вершин з підграфу в підграф - *вершини переставляються тільки так: з I до II; з II в I; з I в III; з III в I; з II в III та з III в II.*

Знайдемо пару вершин x_g та x_n, перестановка яких призводить до максимального зменшення числа зовнішніх зв'язків між відповідними підграфами, в які включені ці вершини. Для цього проаналізуємо можливості перестановки віх пар вершин на умову отримання $\Delta m=\max$.

Такими вкршинами є x_7, що включена до 2-го підграфу, та вершина x_{11}, що знаходиться в 3-му підграфі. Вершину x_7 переставимо до 3-го підграфу, x_{11} пеерставимо в 3-й підграф.

Обов'язкова умова: $\Delta m_{hg}=\max$ для всіх комбінацій вершин з $\Delta m>0$.

Чому виконуємо перестановку вершин? В ітераційному алгоритмі перестановка вершин приводить до оптимізації розбиття. Задача полягає в визначенні пари вершин, що переставляються. Ми це з вами виконали - визначили пару вершин x_7 та x_{11}.
Перестановка вершин з підграфу в підграф відповідає перестановці відповідних рядків та стовпчиків, тобто перестановка вершин x_7 та x_{11} віжповідаж перестановці в $|A|$ x_7 та x_{11} рядків та стовпчиків. В результаті отримаємо матрицю $|A_1|$.
При цьому ми стверджуємо, що якщо переставимо ці вершини, то число зв'язків між 2-м та 3-м підграфами повинно зменшитися.

$A_1 =$

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_{11}	x_8	x_9	x_{10}	x_7	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}			
				1					2	G_2^*				3	G_3^*				
																	2 − 1	3 − 1	
	x_1	0	0	0	1	0	3	0	1	0	0	0	0	1	1	0	+3	+1	–
	x_2	0	0	2	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	−1	0	–
1	x_3	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	1	0	0	−2	+2	–
	x_4	1	0	0	0	2	0	2	0	1	1	0	0	0	0	0	+1	−3	–
	x_5	0	0	0	2	0	0	0	0	3	1	0	0	0	0	0	+2	−2	–
																	1 − 2		3 − 2
	x_6	3	0	0	0	0	0	2	2	0	0	0	0	0	1	0	−1	–	−3
	x_{11}	0	1	0	2	0	2	0	0	1	2	0	0	0	0	0	−2	–	−5
2	x_8	1	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	2	0	−1	–	0
G_2^*	x_9	0	0	0	1	3	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	+2	–	−2
	x_{10}	0	0	0	1	1	0	2	0	1	0	0	1	0	0	0	−1	–	−2
																		1 − 3	2 − 3
	x_7	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	–	−1	−3
	x_{12}	0	0	2	0	0	0	0	0	0	1	1	0	2	0	0	–	−1	−2
3	x_{13}	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	2	0	0	0	–	0	−3
G_3^*	x_{14}	1	0	0	0	0	1	0	2	0	0	1	0	0	0	0	–	0	+2
	x_{15}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	–	0	0

8 10 13 16 4(12) 10

Визначемо зміну числа зовнішніх зв'язків за формулою
$\Delta m_{7\leftrightarrow 11} = m(x_7)_{2\to 3} + m(x_{11})_{3\to 2} - 2a_{711} = (3-0)+(5-0)-0 = 8 = \max$

Перевіримо зміну зв'язків в підграфах.
Для цього підрахуємо

$m_2^2 = 25 = 13+8+4 \le \quad (33)$

$v_{jj}^2 = 18 = \frac{1}{2}(10+16+10) \quad (10)$

$\Delta G_2^2 = \frac{18(10)}{25(33)} > \Delta G$

Таким чином число зовнішніх зв'язків зменшилося на 8, відповідно число внутрішніх зв'язків збільшилося на 8. При цьому зміна зовнішніх зв'язків сталась тільки між 2 та 3 підграфами: було $\Delta m_{23}^1 = 12$ стало $\Delta m_{23}^2 = 4$

Щоб вибрати нові вершини - аналізуємо вектори-стовпчики та вибираємо вершини для перестановки

$x_1 \leftrightarrow x_9 \quad \Delta m = 5$ max

$x_3 \leftrightarrow x_{13}, x_{14}, x_{15} \quad \Delta m = 2$

$x_8 \leftrightarrow x_{14} \quad \Delta m = 2$

$A_2 =$

				1					2					3					
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_{11}	x_8	x_1	x_{10}	x_7	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}			
																	$2-1$	$3-1$	
	x_9	0	0	0	1	3	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	-2	-4	$-$
	x_2	0	0	2	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	-1	0	$-$
1	x_3	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	1	0	0	-2	$+2$	$-$
	x_4	1	0	0	0	2	0	2	0	1	1	0	0	0	0	0	$+1$	-3	$-$
	x_5	3	0	0	2	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-4	-5	$-$
																	$1-2$		$3-2$
	x_6	0	0	0	0	0	0	2	2	3	0	0	0	0	1	0	-7	$-$	-6
	x_{11}	1	1	0	2	0	2	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	$-$	-4
2	x_8	0	0	0	0	0	2	0	0	1	0	0	0	0	2	0	-3	$-$	-1
	x_1	0	0	0	1	0	3	0	1	0	0	0	0	1	1	0	-3	$-$	-2
	x_{10}	1	0	0	1	1	0	2	0	0	0	0	1	0	0	0	$+1$	$-$	-1
																		$1-3$	$2-3$
	x_7	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	$-$	-1	-3
	x_{12}	0	0	2	0	0	0	0	0	0	1	1	0	2	0	0	$-$	-1	-2
3	x_{13}	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	2	0	0	0	$-$	-1	-2
	x_{14}	0	0	0	0	0	1	0	2	1	0	1	0	0	0	0	$-$	-1	$+3$
	x_{15}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-$	0	0

Проаналізуємо різні варіанти перестановки вершин, для яких $\Delta m = 2$ та максимальне.

$x_4 \leftrightarrow x_{10}$: $\Delta m = 2 - 2a_{410} = 2 - 2 = 0$

$\Delta m_{410} = 1 + 1 - 2 = 0$

$x_3 \leftrightarrow x_{15}$: $\Delta m = 2 - 2a_{315} = 2 - 0 = 2$

$\Delta m_{315} = 1 + 0 - 0 = 2$

$x_{14} \leftrightarrow x_{10}$: $\Delta m = 2 - 2a_{1410} = 2 - 0 = 2$

$\Delta m_{1410} = -1 + 3 - 2 = 2$

Вибираємо $x_{14} \leftrightarrow x_{10}$.

$A_6 =$

		1					2					3							
		x_1	x_{10}	x_{11}	x_4	x_5	x_6	x_{15}	x_8	x_1	x_{14}	x_7	x_{12}	x_{13}	x_3	x_2			
																	2 – 1	3 – 1	
	x_9	0	1	1	1	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	–6	–6	–
	x_{10}	1	0	2	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	–5	–4	–
1	x_{11}	1	2	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	1	–3	–4	–
	x_4	1	1	2	0	2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	–5	–6	–
	x_5	3	1	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	–6	–6	–
																	1 – 2		3 – 2
	x_6	0	0	2	0	0	0	0	2	3	1	0	0	0	1	0	–4	–	–6
	x_{15}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	–	0
2	x_8	0	0	0	0	0	2	0	0	1	2	0	0	0	0	0	–5	–	–5
	x_1	0	0	0	1	0	3	0	1	0	1	0	0	1	0	0	–4	–	–4
	x_{14}	0	0	0	0	0	1	0	2	1	0	1	0	0	0	0	–4	–	–3
																		1 – 3	2 – 3
	x_7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	–	–4	–3
	x_{12}	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	2	2	0	–	–4	–5
3	x_{13}	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	2	0	1	1	–	–5	–4
	x_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	1	0	2	–	–6	–6
	x_2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	2	0	–	–3	–4

Результуюча матриця $|A_6|$ була отримана в результаті таких перестановок в початковій матриці $|A|$:

$x_7 \leftrightarrow x_{11} \to A_1$

$x_1 \leftrightarrow x_9 \to A_2$

$x_{10} \leftrightarrow x_{14} \to A_3$

$x_2 \leftrightarrow x_{10} \to A_4$

$x_3 \leftrightarrow x_{15} \to A_5$

$x_{11} \leftrightarrow x_{15} \to A_6$

З матриці слідує, що перестановка вершин не приведе до покращення результату, тому що в вектор-стовпчиках всі значення з "-". Признак закінчення ітерацій - в останніх трьох стовпчиках (вектор-стовпчики) значення будуть або "0" або зі знаком "-".

По результуючій матриці зробимо наступні висновки:

- Перестановка любих вершин з підматриці в підматрицю призведе тільки до збільшення числа зовнішніх зв'язків, тому що в стовпчиках всі елементи зі знаком "-". Отримали локальний мінімум зовнішніх зв'язків. Є алгоритми, які дозволяють покращити результат.
- До підграфів ввійшли такі вершини

$G_1^0 = \{x_9, x_{10}, x_{11}, x_4, x_5\}$

$G_2^0 = \{x_6, x_8, x_1, x_{14}\}$

$G_3^0 = \{x_7, x_{12}, x_{13}, x_3, x_2\}$

x_{15} виключаємо, як фіктивну вершину.

- Число зовнішніх зв'язків між підграфами - *сума елементів побічних підматриць*

$m_{12} = 3, m_{13} = 2, m_{23} = 2$. (Між виділенними підграфами така кількість зовнішніх зв'язків)

- Загальне число зовнішніх зв'язків

$m = m_{12} + m_{13} + m_{23} = 3 + 2 + 2 = 7$

- Число внутрішніх зв'язків кожного підграфу - *половина суми елементів діагональних підматриць*

$v_{11} = 14$; $v_{22} = 10$; $v_{33} = 12$

$$\Delta G = \frac{v_{11} + v_{22} + v_{33}}{m_{12} + m_{13} + m_{23}} = \frac{36}{7},$$

Тобто $\Delta G_{iter\,a\lg} = \Delta G_{posled\,a\lg}$