

Алгоритми компоновання Послідовний алгоритм

Перед тим, як приступити до розгляду різноманітних алгоритмів компоновки (розбивки) я задам вам питання. Якими критеріями ви користуєтесь при формуванні бригади, наприклад, для лабораторної роботи?

Я смію стверджувати, що ви користуєтесь такими методами:

- є сильні студенти (стільки, скільки й бригад), до них приєднуються, наприклад, трохи слабші стільки, скільки потрібно студентів у бригаді
- інший критерій: дівчата тяжіють до хлопців, хлопці- до дівчат, дівчата- до дівчат, хлопці- до хлопців і т.д.
- В будь якому разі бригада формується по кількості зв'язків між студентами, що до неї входять (Ох же ж ці зв'язки)) зв'язків

Можна формувати бригади й так:

в кожную бригаду включити потрібну кількість студентів згідно алфавітного списку. Зрозуміло, виникають невдоволення (порушені зв'язки). Щоб владнати невдоволення, потрібно дозволити студентам переходити з бригади у бригаду, але кількість студентів у бригаді повинна бути незмінною, постійною.

Зрозуміло, що перехід з бригади до бригади буде здійснюватися з урахуванням зв'язків (тах зв'язків студентів у бригаді).

Таким чином, при формуванні бригад були використані послідовний та ітераційний алгоритми компоновки.

Найбільше застосування на практиці отримали три групи методів розбиття **КС**, математична модель якої представлена **ВГС**

До першої групи віднесені послідовні методи, при використанні яких кожна конструктивно закінчена частина утворюється шляхом послідовного підбору сильно зв'язаних прийнятних елементів нижчого рівня.

Другу групу складають ітераційні методи. Всі підграфи формуються одночасно, а оптимізація забезпечується перестановкою елементів. До цієї групи відноситься метод випадкових призначень.

Метод гілок та границь покладено в основу третьої групи методів. Цей метод дозволяє найбільш точно вирішити задачу розбиття **КС** на конструктивно закінчені частини.

Послідовний алгоритм компонування

Основний критерій розбиття початкового графу $G(X,V)$ на підграфи $G_i(x_i, v_i), G_j(x_j, v_j), \dots, G_k(x_k, v_k)$ - мінімальна кількість зовнішніх з'єднувальних ребер $v_{ij}, v_{jk}, \dots, v_{jn}$ між ними. Якщо формувати виділенні підграфи таким чином, щоб кожен з них містив максимальну кількість внутрішніх ребер v_{ir}, \dots, v_{ij} , тоді отримаємо локальний мінімум кількості зовнішніх з'єднувальних ребер m . Таке формування підграфів містить суть послідовних алгоритмів розбиття.

Таким чином КС задана ВГС $G(X,V)$, який необхідно розбити на k -підграфів G_1, G_2, \dots, G_k з кількістю вершин у кожному відповідно n_1, n_2, \dots, n_k ($n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$) та сумарною кількістю зовнішніх зв'язків не більше m ($n_1 \rightarrow m_1, n_2 \rightarrow m_2, \dots, n_k \rightarrow m_k$). Тобто є 1) кількість вершин в підграфі n ; 2) m - між підграфами.

Задача вирішується наступним чином:

- згідно графа складемо матрицю зв'язку в загальному вигляді $A = \|a_{ij}\|_{n \times n}$

$$\begin{array}{cccccccc}
 & x_1 & x_2 & \cdots & x_f & \cdots & x_g & \cdots & x_n \\
 x_1 & 0 & a_{12} & \cdots & a_{1f} & \cdots & a_{1g} & \cdots & a_{1n} & \rho_{(x_1)} = \sum_{i=1}^n a_{1i} \\
 x_2 & a_{21} & 0 & \cdots & a_{2f} & \cdots & a_{2g} & \cdots & a_{2n} & \cdot \\
 \vdots & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 x_f & a_{f1} & a_{f2} & \cdots & 0 & \cdots & a_{fg} & \cdots & a_{fn} & \cdot \\
 \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 x_g & a_{g1} & a_{g2} & \cdots & a_{gf} & \cdots & 0 & \cdots & a_{gn} & \cdot \\
 \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\
 x_n & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nf} & \cdots & a_{ng} & \cdots & 0 & \rho_{(x_n)} = \sum_{i=1}^n a_{ni}
 \end{array}$$

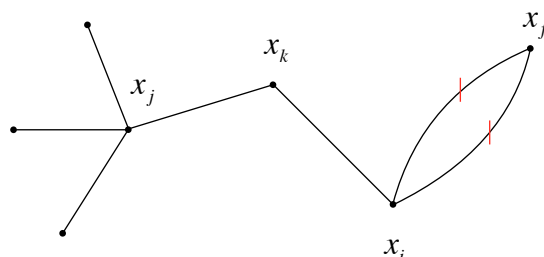
Необхідно визначити першу вершину формуємого першого підграфа

- Визначаєм локальну степінь кожної вершини ρ . Нам потрібно визначити вершину, з якої почнеться формування підграфа. Для цього
- Вибираємо вершину з мінімальною локальною степінню. Нехай вершина x_f має мінімальну локальну степінь: $\rho(x_f) = \min \rho(x_f)$. Та вона одна, то x_f включають в 1-й підграф.

Отримаємо $G_1' = \{x_f\}$

Якщо (зазвичай, часто) таких вершин декілька, то перевага для включення до формованого підграфа надається вершині з максимальною кількістю кратних ребер, що йдуть до однієї вершини.

Наприклад:



Визначемо локальні степені вершин

$$\rho(x_j) = 4; \rho(x_k) = 2; \rho(x_i) = 3; \rho(x_f) = 2$$

$$\rho(x_n) = \rho(x_f) = 2 = \min. \text{ Кратні ребра визначаються за матрицею } |A|$$

x_f має два кратних ребра, вибираємо x_f . З цієї вершини починається формування першого підграфа G_1 , $G_1' = \{x_f\}$.

В G_1 початково включається x_f і всі вершини, що зміжні з x_f . Суміжні вершини x_f дізнаємося з аналізу рядка x_f матриці зв'язку $|A|$. З тими вершинами, з якими вона зв'язана і є суміжними.

Далі може зустрічатися три випадки:

1. Якщо кількість включених вершин до G_1 дорівнює потрібній кількості вершини n_1 то перший підграф можна рахувати сформованим (але рішення буде не оптимальним).
2. Якщо кількість включених вершин більше потрібного $n_i > n_1$, то потрібно видалити "зайві" вершини. Зрозуміло, що видаляються вершини, які мають малу кількість зв'язків з іншими вершинами.
3. Якщо потужність графа G_1 менше $n_i < n_1$, то починаємо формувати інший підграф шляхом приєднання вершин до формуемого підграфу (враховуючи вершини, що мають максимальну кількість зв'язків з включеними вершинами)

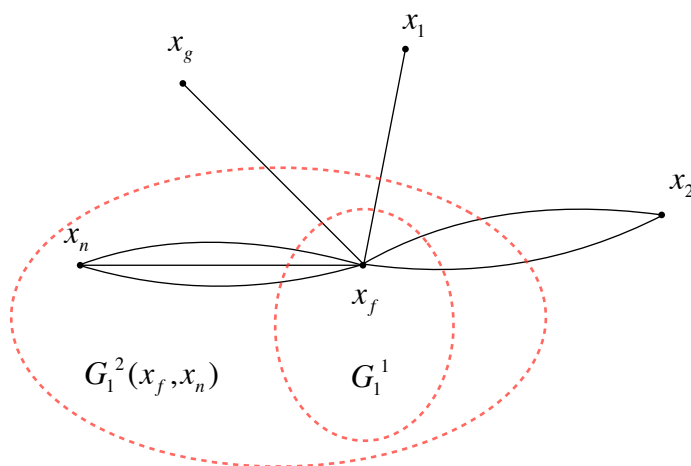
Випадок 2 розглянемо на прикладі

Формування G_1 виконується таким чином.

Початковою вершиною для формування G_1 є вершина x_f , її ми і включаємо G_1 , тобто

$$G_1^{(1)} = \{x_f\}, m_1 = \rho(x_f)$$

Після чого аналізуємо рядок x_f та отримуємо підмножину вершин, з якими зв'язана вершина x_f . Нехай x_f зв'язана з вершинами x_1, x_2, x_g, x_n .



Кожну зміжну вершину умовно включаємо по черзі до формуемого підграфу та для кожної вершини визначаємо приріст кількості зовнішніх зв'язків.

$$\delta(x_1) = \rho(x_1) - 2 \sum_{\varepsilon \in n} a_{1\varepsilon}$$

$$\delta(x_2) = \rho(x_2) - 2 \sum_{\varepsilon \in n} a_{2\varepsilon}$$

- $\delta(x_i) = 0$ - кількість зовнішніх зв'язків не змінюється

- $\delta(x_i) > 0$ - кількість зовнішніх зв'язків збільшується
- $\delta(x_i) < 0$ - кількість зовнішніх зв'язків зменшується. Це те, що нам *потрібне*.

Варіант $\delta(x_i) = 0$ теж є непоганим.

$\delta(x_1)$ - відносна вага вершини x_1 , яка визначає приріст кількості зовнішніх зв'язків формуемого підграфа, при включенні до нього вершини x_1 .

$\rho(x_1)$ - локальна степінь вершини x_1 (ми їх *вміємо визначати*)

ε - підмножина вершин (степінь вершини), з якими вершина x_1 має зв'язки (з матриці), аналізуємо рядок x_1

$\sum a_{1\varepsilon}$ - сума зв'язків вершини x_1 з вершинами $x_{1\varepsilon}$, з якими зв'язана x_1

n - кількість вершин початкового графа; кількість елементів КС

Враховуючи те, що x_f зв'язана з підмножиною вершин, то ми в результаті отримаємо підмножину відносних вагів $\delta(x_2), \dots, \delta(x_g)$. Та вершина, яка має найменшу вагу, її включають на другому кроці в формуемий G_1^2 .

Допустимо $\delta(x_n) = \rho(x_n) - 2 \sum_{\gamma \in n} a_{n\gamma} = \min \delta(x_n)$, γ - підмножина вершин, зв'язаних з вершиною x_n . Таким чином з підмножини проаналізованих вершин включаємо ще одну вершину

$$G_1^2 = \{x_f, x_n\}$$

Далі робимо наступним чином. Вершина x_f зв'язана з вершинами що залишилися впочатковому графу - підмножиною $\{x_1, x_2, x_g\}$. Щойно включена вершина x_n має зв'язки з вершинами першої підмножини а також зв'язана з вершинами нової підмножини. Для цієї нової підмножини знову визначаємо відносні ваги, умовно приєднуючи їх до формуемого підграфу, що містить поки що тільки дві вершини $\{x_f, x_n\}$ (тобто визначити відносну вагу вершин нової підмножини з вершинами x_f та x_n . Для цієї нової підмножини вершин отримаємо підмножину відносних вагів та включимо до G_1^2 вершину з мінімальною відносною вагою. Отримаємо $G_1^3 = \{x_f, x_n, \dots\}$.

Вказаний процес включення вершин до формуемого підграфу продовжується до тих пір, поки G_1 не буде містити потрібну кількість вершин n_1 , або при включенні наступної вершини x_l до $G_1^{n_1}$ призведе до порушення обмеження кількості його зовнішніх зв'язків. Тому при включенні наступної вершини визначають m . При включенні вершини до формуемого підграфу кількість зовнішніх зв'язків визначають як

$$m_1^{n_1} \leq \sum_{q=1}^{n_1} \delta(x_q),$$

n_1 - кількість вершин в G_1 ; кількість кроків

m_1 - кількість зовнішніх зв'язків

$\sum_{q=1}^{n_1} \delta(x_q)$ - сума відносних вагів всіх вершин, що включаються до формуемого підграфу

$$\delta(x_f) = \rho(x_f) - 2 \sum_{\varepsilon \in n} a_{f\varepsilon} = \rho(x_f) - 2 \sum a_{ff} = 0$$

тому

$\delta(x_f) = \rho(x_f)$ для першої вершини, що включається

Таким чином кількість зовнішніх зв'язків визначається як сума відносних вагів вершин, що включаються на кожному кроці. Кількість кроків дорівнює числу вершин в підграфі.

Таким чином в якості кінцевого варіанту формування першого підграфу вибираємо $G_1^0 = \{x_1^0, v_1^0\}$, який містить максимально можливе число вершин з початкового графу $G(X, V)$ та для якого виконуються обмеження на кількість зовнішніх зв'язків m_1^0 .

Таким чином, перший підграф сформовано - що робити далі, як формувати наступний підграф? Для формування другого та наступних підграфів виключають з початкового графу $G(X, V)$ вершини та зв'язки сформованого підграфу G_1^0 , який містить x_1^0 вершини та v_1^0 - зв'язки (викреслюємо з матриці стовпчики та рядки).

Отримаємо новий граф

$$G^*(X^*, V^*), \text{ де } x^* = \frac{x}{x_1^0}, v^* = \frac{v}{v_1^0}$$

Це означає, що з початкової матриці $|A|$ необхідно викреслити стовпчики та рядки, що належать x_1^0 . Тоді отримаємо $G^*(X^*, V^*)$ та нову матрицю $|A^*|$.

Аналогічно в $G^*(X^*, V^*)$, $|A^*|$ вибираємо вершину з локальною степінню та з неї починаємо побудову G_2 , аналогічно, як формували G_1^0 .

Процес формування підграфів продовжується до тих пір, поки початковий граф $G(X, V)$ nebude розбитий на k підграфів.

Розглянутий алгоритм найбільш ефективний для графа, в якому число вершин значно більше числа вершин в будь-якому сформованому підграфі, тобто

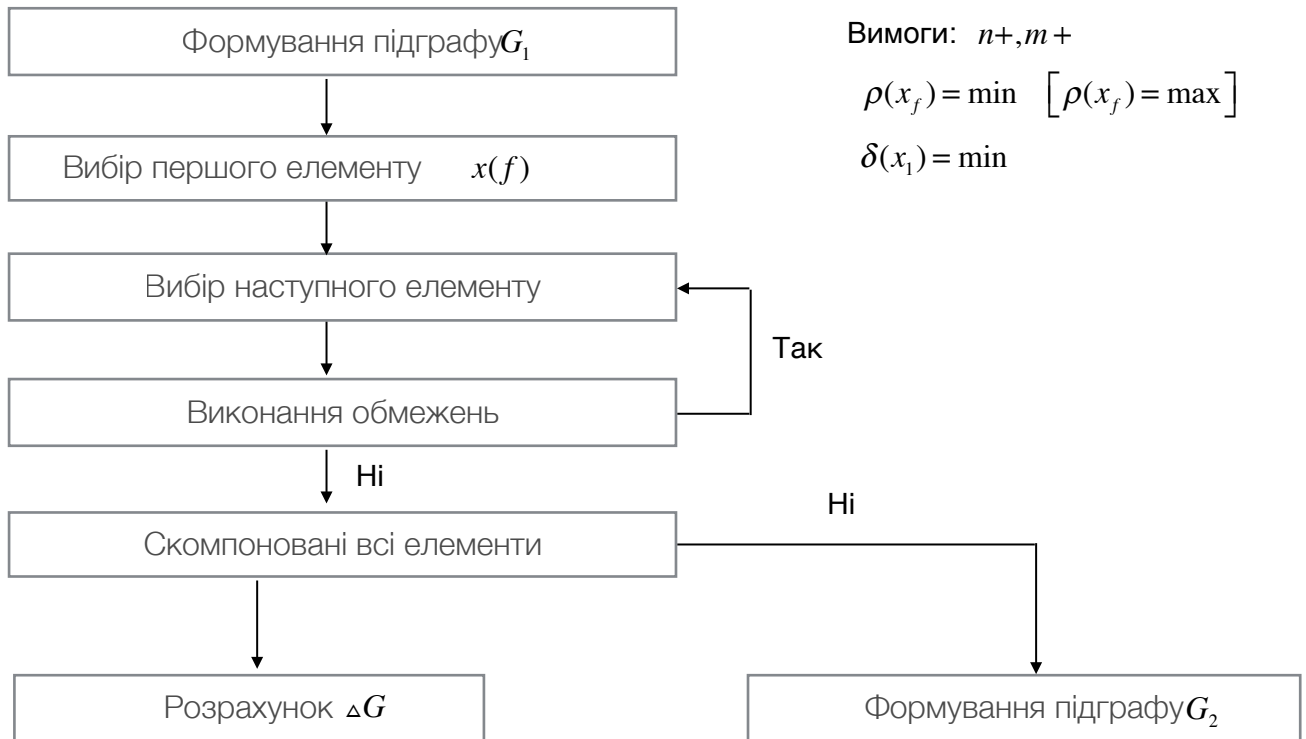
$$n \gg n_1, n_2, \dots, n_k$$

Тому що при цьому існує багато можливостей для вибору первинної вершини та й вершини взагалі.

Таким чином суть послідовного алгоритму полягає у виділенні з початкової схеми "сильно" зв'язаних груп елементів.

Конкретні алгоритми, що реалізують даний метод, відрізняються моделями опису схеми з'єднань та обчислення внутрішньо-вузлових з'єднань v_{ii} та міжвузлових з'єднань v_{ij} , які управляють процесом компонування.

Схема послідовного алгоритму



Головною перевагою послідовних алгоритмів є швидкодія та простота реалізації. Вони також дозволяють враховувати додаткові обмеження на компонування. Несумісність окремих елементів у вузлі (закріплення елементів за визначеними модулями, апіорно задане функціональне розподілення деяких елементів схем).

Основним недоліком алгоритму є локальний покроковий характер оптимізації. Така оптимізація призводить до того, що на перших кроках виділяються групи елементів з більшою зв'язністю, що призводить до включення в наступні вузли малозв'язних елементів або зовсім незв'язаних елементів. Це призводить при чітких обмеженнях на кількість зовнішніх зв'язків до збільшення числа підграфів.