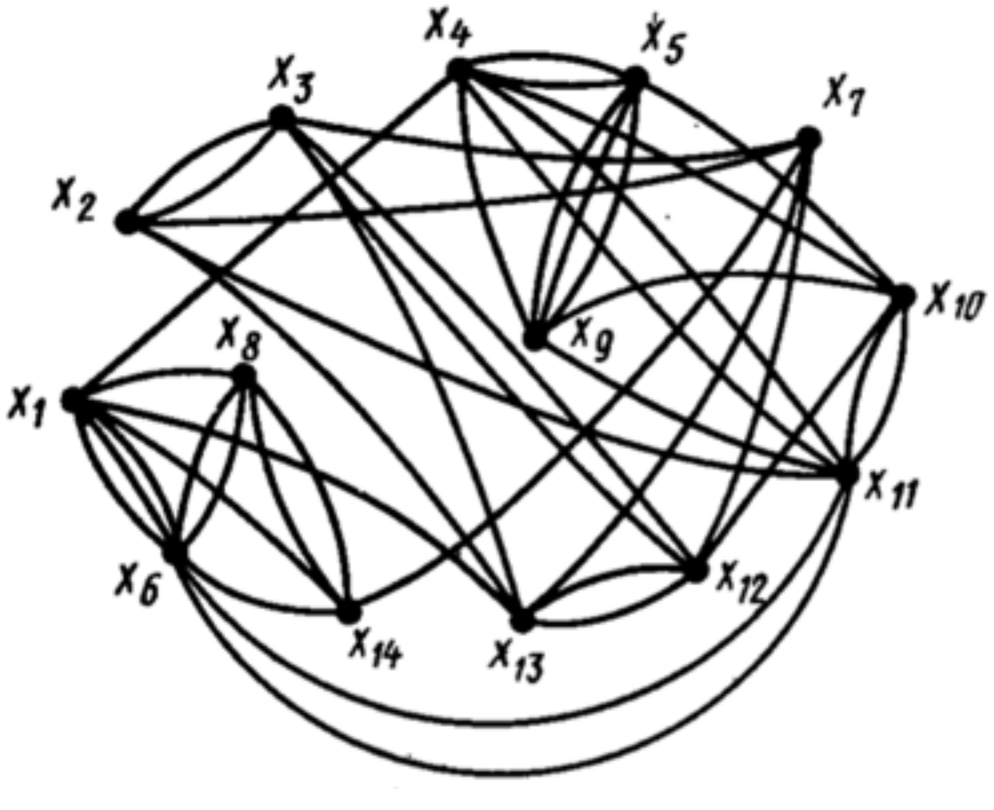
Приклад послідовного алгоритму розбиття.
Розглянемо приклад розбиття графа (схеми) на підграфи (частини) за допомогою послідовного алгоритму (ПА).

Ми вже з вами знаємо, що суть ПА полягає в виділенні з початкового графу сильно зв'язанних підграфів, що відповідають визначенним критеріям оптимізації.

Таким чином, в згальному випадку, там відома початкова схема (вам вона видана), яку ми описали ВГС - $G(X,V)$; матрицею зв'яків $|A|$.
Потрібно розбити початковий граф $G(X,V)$ на *k*-підграфів, кожен з яких містить n_i вершин.Вам потрібно розбити $G(X,V)$ на стільки підграфів,скільки рядків елементів на ПУ; кількість елементів в підграфах $G_1, G_2, \dots$ відповідно $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ елементів.
Оптимізувати *m*-число зв'язків між сформованими підграфами.

Для Вас m-скільки вийде в результаті ваших обчислень, тобто m не оптимізується, фле відслідковується.

Так формується задача в загальному випадку, ми будемо вирішцвати конкретні задачі. Для конкретного випадку задача формується наступним чином.



Розбити на частини (вузли) граф $G(X,V)$, заданий матрицею зв'язку $A_{14\times 14}$ при таких обмеженнях:

1. Максимальне число зв'язків кожного окремо взятого підграфа $G_i(X_i, V_i)$ не повинно первищувати 6: $m \le 6$.
2. Число вершин в підграфі $3 \le |x_i| \le 5$. (Для ЛР число вершин в підграфі - скільки елементів в рядку ПУ, число вузлів - скільки рядків)

Стратегія. Завжди прагнуть формувати графи з максимальним числом вершин.

По схемі складемо матрицю зв’язків (суміжності)

Матриця суміжності схеми (*Деньдобренько???*) має вигляд

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	$\rho(x_i)$	
x_1	0	0	0	1	0	3	0	1	0	0	0	0	1	1	7	
x_2	0	0	2	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	5	$=\rho(x_2)$
x_3	0	2	0	0	0	0	1	0	0	0	0	2	1	0	6	
x_4	1	0	0	0	2	0	0	0	1	1	2	0	0	0	7	
x_5	0	0	0	2	0	0	0	0	3	1	0	0	0	0	6	
x_6	3	0	0	0	0	0	0	2	0	0	2	0	0	1	8	
x_7	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	5	$=\rho(x_7)$
x_8	1	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	2	5	$=\rho(x_8)$
x_9	0	0	0	1	3	0	0	0	0	1	1	0	0	0	6	
x_{10}	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	2	1	0	0	6	
x_{11}	0	1	0	2	0	2	0	0	1	2	0	0	0	0	8	
x_{12}	0	0	2	0	0	0	1	0	0	1	0	0	2	0	6	
x_{13}	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	2	0	0	6	
x_{14}	1	0	0	0	0	1	1	2	0	0	0	0	0	0	5	$=\rho(x_{14})$

- Визначаємо локальні степені кожної вершини:

$$\rho(x_i)=\sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{i=1}^{14}a_i$$

- Вибираємо вершину з мінімальною локальною степінню. Декілька вершин мають однакову локальну степінь

$\rho(x_2)=\rho(x_7)=\rho(x_8)=\rho(x_{14})=5=\min$

Яку з цих вершин приймати за початкову, з якої починається формування першого підграфа?

Ми з вами знаємо, що є друга умова вибору першої вершини - вона (вершина) повинна мати найбільше число кратних ребер.

З матриці слідує: аналізуємо рядки x_2, x_7, x_8, x_{14}

x_2 - два кратних зв’язки між x_2 та x_3 $(a_{23}=2)$

x_7 - не має кратних зв’язків

x_8 - x_8-x_6, x_8-x_{14} - має з двома вершинами кратні зв’язки

x_{14} - $x_{14}-x_8$ - має один кратний зв’язок

Вибираємо першу вершину для формування першого підграфа x_8, таким чином $G_1^1=\{x_8\}$.

Визначемо відносну вагу вершини $\delta(x_8)$, згідно загальної формули:

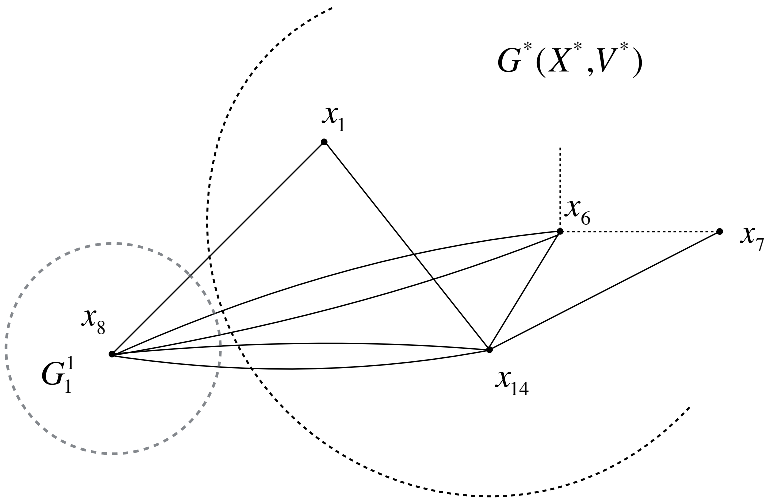
$$\delta(x_8)=\rho(x_8)-2a_{88}=5-0=5$$

Відносна вага першої вершини, включеної до формованого підграфу, дорівнює її локальній степені: $\delta(x_8)=\rho(x_8)=5$

Її можна й не визначати, але потрібно знати $m_1^1=5$

Таким чином перший підграф з однією вершиною x_8 зв'язаний з другим підграфом з 13 вершин, має 5 зовнішніх зв'язків.

Подивимося на Рис.1, що складений за матрецею $|A|$. Теоретично і практично все співпадає.



$$G_1^1=\{x_8\}$$
$$m_1^1=\rho(x_8)=5$$
$$m=5$$

Рис.1

Звертаю вашу увагу на те, що
$m_1=\rho(x_8)=\delta(x_8)$ тільки для першого кроку

Таким чином $G_1^1=\{x_8\}$ $m_1^1=5$

- Для включення другої вершини до G_1 визначемо підмножину вершин суміжних (зв'язаних) з x_8. Аналізуємо рядок x_8 в $|A|$. x_8 зв'язана з вершинами $\{x_1,x_6,x_{14}\}$.
- Для того щоб вІдповісти, яку з підмножини цих вершин включати на другому кроці до формуємого підграфу G_1. Визначемо відносні ваги, по черзі включаючи їх до G_1^1.

Маємо таку таблицю

Визначемо відносні ваги вершин

$\delta(x_1)=\rho(x_1)-2a_{18}=7-2\bullet 1=5$

$\delta(x_6)=\rho(x_6)-2a_{68}=8-2\bullet 2=4$

$\delta(x_{14})=\rho(x_{14})-2a_{148}=5-2\bullet 2=1=\min$

$\{x_r^2\}$	x_1	x_6	x_{14}
$\delta(x_r^2)$	5	4	1

Це вершини, з якими зв'язана x8

min

Відносні ваги цих вісів

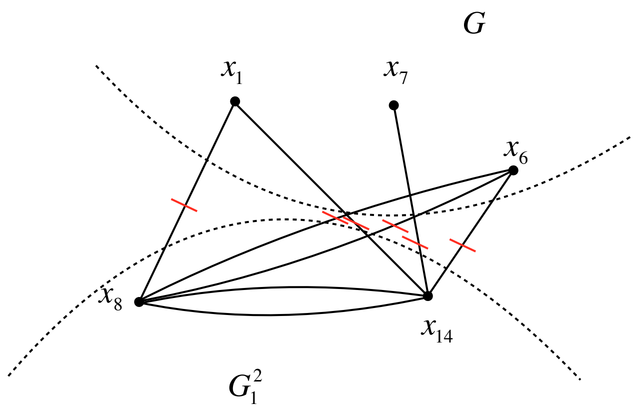
Вибираємо вершину з мінімальною відносною вагою, тобто приєднуємо x_{14} до x_8.

Тобто на другому кроці x_{14} додається до $G_1^2=\{x_8,x_{14}\}$

Визначемо число зовнішніх зв'язків для G_1^2 з іншими 12 вершинами:

$$\delta(x_i^2)=\delta(x_8)+\delta(x_{14})=5+1=6=m_1^2$$

Подивимося на рис.2. Перевіримо чи виконуються умови поставленної задачі



$G_1^2 = \{x_8, x_{14}\}$

$m_1^2 = 6$

$x_8 \leftrightarrow x_{14}$

внутрішні зв'язки становляться зовнішніми, а зовнішні - внутрішніми

Рис.2

Враховуючи те, що всі вимоги виповнюються, то будемо включати наступну вершину

- Тепер розглянемо множину зв'язків, які мають вершини x_{14} та x_8, що включкні до G_1^2. Для цього аналізуємо рядки x_{14} та x_8 :

x_8 - зв'язана з x_6 та x_1 (вершини, що залишилися)

x_{14} - в'язана з x_7 - нова вершина. x_{14} також зв'язана з x_6 та x_1, але ці вершини вже зв'язані з x_8

Для цих вершин визначаємо їх відносні ваги.

$\delta(x_1) = \rho(x_1) - 2(a_{18} + a_{114}) = 7 - 2 \bullet (1+1) = 3$

$\delta(x_6) = \rho(x_6) - 2(a_{68} + a_{614}) = 8 - 2 \bullet (2+1) = 2 = \min$

$\delta(x_7) = \rho(x_7) - 2(a_{78} + a_{714}) = 5 - 2 \bullet (0+1) = 3$

Тепер вже сума. В дужках буде стільки сум, скільки вершин включається до формуємого графу. У нашому випадку - дві вершини - дві суми.

$\{x_r^3\}$	x_1	x_6	x_7
$\delta(x_r^3)$	3	2	3

min

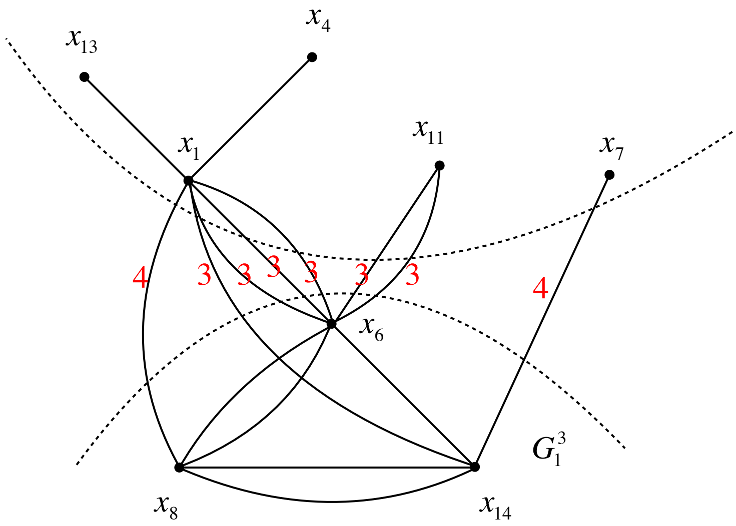
На третьому кроці включаємо x_6 $G_1^3 = \{x_8, x_{14}, x_6\}$

Число зовішніх зв'язків підграфа G_1^3 визначається по сумарній видносній вазі

$$\delta(x_r^3) = \delta(x_r^2) + \delta(x_6) = 6 + 2 = 8 = m_1^3,\ G_1^3 = \{x_8, x_{14}, x_6\}$$

Тобто $m_1^3 = 8 > m_{dop} = 6$. Не виконується одна з вимог $m_1^3 > m_{dop} > 6$. Формально можна закінчили формування підграфів, але ми їх не сформували.

Подивимося на рис.3. Проаналізуємо $|A|$. x_6 має 5 зв'язків з вершинами, що включені до графу G_1^3.



$G_1^3 = \{x_8, x_{14}, x_6\}$

$m_1^3 = 8$

$x_8 \leftrightarrow x_6$

стали внутрішніми

Рис.3

Таким чином при включені x_6 до G_1^3 ми маємо число зовнішніх зв'язків більше, чим задано по умові задачі. Більш того, ми також не сформували підграф з необхідним числом вершин. Давайте проаналізуємо рис.3. З Рис.3 видно, що нам може допомогти вершина x_1. З рис.3 видно, що нам може допомогти вершина x_1. Якщо на четвертому кроці ми включемо вершину x_1 до , то число зовнішніх з в'язків зменшиться на 3, а число вершин в G_1 буде 4. Поступимо таким чином. Останній результат запам'ятаємо. Зробимо наступний крок - четвертий крок, аналогічно попередньому - другому, третьому кроку.

$$\delta(x_1) = \rho(x_1) - 2(a_{18} + a_{114} + a_{16}) = 7 - 2 \bullet (1+1+3) = -3 = \text{min}$$
$$\delta(x_7) = \rho(x_7) - 2(a_{78} + a_{714} + a_{76}) = 5 - 2 \bullet (0+1+0) = 3$$
$$\delta(x_{11}) = \rho(x_{11}) - 2 \bullet (0+0+2) = 4$$

$\{x_r^4\}$	x_1	x_7	x_{11}
$\delta(x_r^4)$	-3	3	4

min

Приєднання вершини x_1 на четвертому кроці до формуємого підграфу G_1 зменшує число зовнішніх зв'яків на 3. В результаті отримаємо

$\delta(x_r^4) = \delta(x_r^3) + \delta(x_1) = 8 - 3 = 5$

Тобто на четвертому кроці отримаємо

$G_1^4 = \{x_8, x_{14}, x_6, x_1\}$

$\delta(x_r^4) = 5 = m_1^4 < m_{dop} = 6$

Подивимося на рис.4.

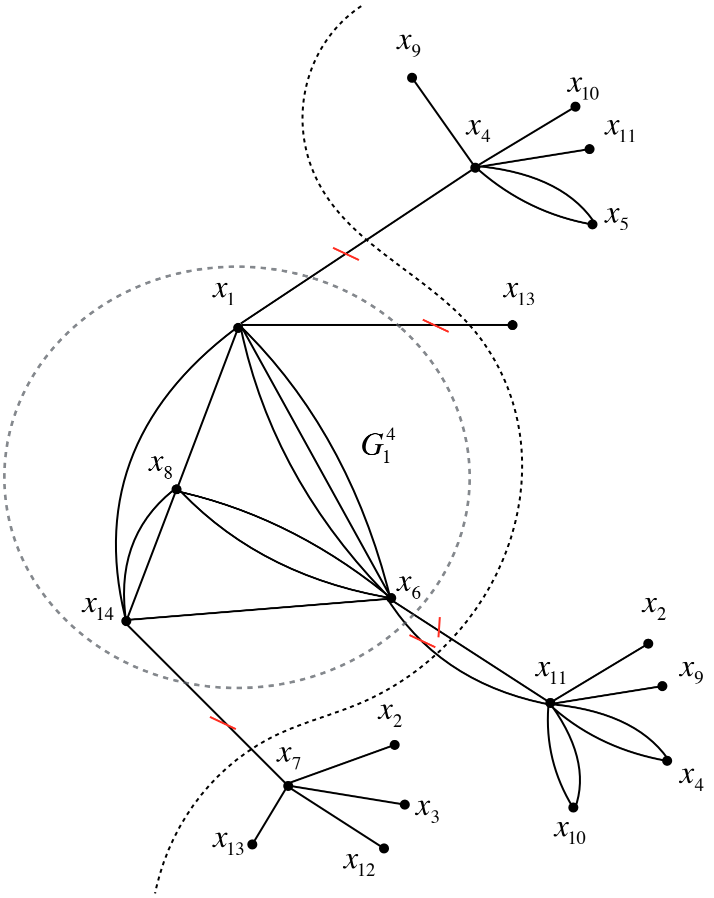
Нагадаю. Відносна вага в за гальному випадку може приймати наступні значення:

$\delta(x_i) = 0$ при включені вершини x_i до формуємого підграфу число зовнішніх зв'язків не помінялося

$\delta(x_i) < 0$ включення вершини x_i зменшує число зовнішніх зв'язків

$\delta(x_i) > 0$ включення вершини x_i збільшує число зовнішніх зв'язків

Стратегія така, до формуємого підграфу прагнуть включити максимальне число вершин (але повинні виконуватися всі умови). Тому зробимо наступний крок. Дивимося на рис. 5.



$G_1^4 = \{x_8, x_{14}, x_6, x_1\}$

$m_1^4 = 5$

$G_1^0 = \{x_8, x_{14}, x_6, x_1\}$

$m_1^0 = 5$

між вершинами графу на вершинами, що залишилися

Рис.4

вершини, що залишилися

$\{x_r^5\}$	x_7	x_{11}	x_4	x_{13}
$\delta(x_r^5)$	3	4	5	4

min

нові вершини, що зв'язані з x1

$$\delta(x_7) = \rho(x_7) - 2(a_{78} + a_{714} + a_{76} + a_{71}) = 5 - 2 \bullet (0 + 1 + 0 + 0) = 3$$
$$\delta(x_{11}) = 4$$
$$\delta(x_4) = 5$$
$$\delta(x_{13}) = 4$$

Включаємо x_7

$$\delta(x_r^5) = 5 + \delta(x_7) = 5 + 3 = 8 = m_1^5 > m_{dop} = 6$$

Таким чином включення x_7 дозволяє отримати підграф з потрібним максимальним числом вершин $|x_i| = 5$, але при цьому число зовнішніх зв'язків складає 8, що є більшим допустимого значення.
Підграф рахується сформованим, коли виконується дві умови: числа вершин та кількості зовнішніх зв'язків.
Тому

$G_1^4 = \{x_8, x_{14}, x_6, x_1\}$

$m_1^0 = 5$ - це кількість зв'язкив 4-х вершин, що включені до G_1^0 , з 10-ма вершинами, що залишилися в G^* (визначаємо по матриці).

Приступаємо до формування другого підграфа. Для цього з початкової матриці $|A|$ вершини, які увійшли до G_1^0 , тобто викреслюємо відповідні стовпчики та рядки та отримаємо нову матрицю $|A^*|$, яка містить вершини $x_2, x_3, x_4, x_5, x_7, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}$.
Далі ми можемо поступити двояко, при цьому отримаємо один та той же результат:

1. Сформувати другий підграф за розглянутою вище методикою, але з перехуванням ρ
2. Сформувати другий підграф за розглянутою вище методикою, але локальні степені не перераховувати, тобто їх значення залишити з початкової матриці (щоб не плутатися).

$A^* =$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	$\rho(x_i)$	
x_1	0	0	0	1	0	3	0	1	0	0	0	0	1	1	7	
x_2	0	0	2	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	5	$= \rho(x_2)$
x_3	0	2	0	0	0	0	1	0	0	0	0	2	1	0	6	
x_4	1	0	0	0	2	0	0	0	1	1	2	0	0	0	7	
x_5	0	0	0	2	0	0	0	0	3	1	0	0	0	0	6	
x_6	3	0	0	0	0	0	0	2	0	0	2	0	0	1	8	
x_7	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	5	$= \rho(x_7)$
x_8	1	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	2	5	$= \rho(x_8)$
x_9	0	0	0	1	3	0	0	0	0	1	1	0	0	0	6	
x_{10}	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	2	1	0	0	6	
x_{11}	0	1	0	2	0	2	0	0	1	2	0	0	0	0	8	
x_{12}	0	0	2	0	0	0	1	0	0	1	0	0	2	0	6	
x_{13}	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	2	0	0	6	
x_{14}	1	0	0	0	0	1	1	2	0	0	0	0	0	0	5	$= \rho(x_{14})$

$\rho(x_2) = \rho(x_7)$, вибираємо x_1 , тому що вершина має кратні ребра

$m_2^1 = 5$

$G_2^1 = \{x_2\}$

$\{x_{r_2}^2\}$	x_3	x_7	x_{11}	x_{13}
$\delta(x_r^2)$	2	3	6	4

min

$\delta(x_3) = \rho(x_3) - 2a_{32} = 6 - 2 \cdot 2 = 2 = \text{min}$
$\delta(x_7) = \rho(x_7) - 2a_{72} = 5 - 2 \cdot 1 = 3$
$\delta(x_{11}) = \rho(x_{11}) - 2a_{112} = 8 - 2 \cdot 1 = 6$
$\delta(x_{13}) = \rho(x_{13}) - 2a_{132} = 6 - 2 \cdot 1 = 4$

$G_2^2 = \{x_2, x_3\}$; $m_2^2 = m_2^1 + m_2^2 = 5 + 2 = 7 > m = 6$

Давайте спробуємо ще включити вершину до вормуємого графу G_2.
Підмножина вершин, що зв'язані з $G_2^2 = \{x_2, x_3\}$ така

$\{x_{r_2}^3\}$	x_7	x_{11}	x_{12}	x_{13}
$\delta(x_r^3)$	1	6	2	2

min

Як ми бачимо - добавилася вершина x_{12} - залишок вершин x_2^2 після писля включення x_3

$\delta(x_7) = \rho(x_7) - 2(a_{72} + a_{73}) = 5 - 2 \cdot (1+1) = 1 = \text{min}$
Все зрозуміло - заповнимо таблицю

$G_2^3 = \{x_2, x_3, x_7\}$; $m_2^3 = m_2^2 + \delta(x_7) = 7 + 1 = 8 > m = 6$ - ще збільшилося

Складемо таблицю

$\{x_r^4\}$	x_{11}	x_{12}	x_{13}
$\delta(x_r^4)$	6	0	0

min

Звертаю вашу увагу. Включення вершини x_7 не має зв'яків з новими вершинами, а тільки з тими, що ми розгядаємо $\delta(x_{12}) = \delta(x_{13}) = 0$, тобто включення x_{12} та x_{13} до G_2^3 не призведе до збільшення зовнішніх зв'язків.

$G_2^4 = \{x_2, x_3, x_7, x_{12}\}$; $m_2^4 = m_2^3 + \delta(x_{12}) = 8 > m = 6$

При $\delta(x_{12}) = \delta(x_{13}) = 0$ ми можемо включити любу з цих вершин, але тільки одну!

Складемо нову таблицю

$\{x_r^5\}$	x_{10}	x_{11}	x_{13}
$\delta(x_r^5)$	4	6	-4

min

x_{10} зв'язана з x_{12}
Бажаний "-" - дістався він нам при значно додатковій кількості кроків.
$G_2^0 = \{x_2, x_3, x_7, x_{12}, x_{13}\}$; $m_2^0 = m_2^4 + \delta(x_{13}) = 8 - 4 = 4 < m = 6$

Отже, всі умови виконуються:

- Включаємо максимально допустиму кількість вершин до другого підграфу $|x_i| < 5 - \max$
- число зовнішніх зв'язків менше допустимого

Сформуємо другий підграф

$G_2^0 = \{x_2, x_3, x_7, x_{12}, x_{13}\}$

$m_2^0 = 4$

При визначенні $\delta(x_r)$ вершин, що включаються до другого підграфа ρ необхідно брати з початкової матриці.

З матриці $|A^*|$ викреслюємо рядки та стовпчики, що відповідають вершинам, включеним до G_2^0, тоді отримаємо нову матрицю $|A^{**}|$.

$A^{**} =$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	$\rho(x_i)$	
x_1	0	0	0	1	0	3	0	1	0	0	0	0	1	1	7	
x_2	0	0	2	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	5	$= \rho(x_2)$
x_3	0	2	0	0	0	0	1	0	0	0	0	2	1	0	6	
x_4	1	0	0	0	2	0	0	0	1	1	2	0	0	0	7	
x_5	0	0	0	2	0	0	0	0	3	1	0	0	0	0	6	
x_6	3	0	0	0	0	0	0	2	0	0	2	0	0	1	8	
x_7	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	5	$= \rho(x_7)$
x_8	1	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	2	5	$= \rho(x_8)$
x_9	0	0	0	1	3	0	0	0	0	1	1	0	0	0	6	
x_{10}	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	2	1	0	0	6	
x_{11}	0	1	0	2	0	2	0	0	1	2	0	0	0	0	8	
x_{12}	0	0	2	0	0	0	1	0	0	1	0	0	2	0	6	
x_{13}	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	2	0	0	6	
x_{14}	1	0	0	0	0	1	1	2	0	0	0	0	0	0	5	$= \rho(x_{14})$

В результаті отримаємо

$$G_3^0 = \{x_4, x_5, x_9, x_{10}, x_{11}\}$$

тобто G_3^0 - сформувався автоматично. *Останній підграф завжди формується автоматично*. Якщо б в G_3^0 було вершин більше ніж 5, то формування цього підграфа виконується так, як вище ми з вами робили для першого та другого.

Але давайте вернемося до нашого випадку, а в загалі-то завжди останній підграф буде формуватися автоматично. Тоді виникає питання, а як визначити кількість завнішніх зв'язків G_3^0? Для цього випадку сумарна видноса вага всіх вершин, що залишилися (всіх включених до G_3^0 вершин) визначають наступним чином

$$\sum_{x_g \in G_3^0} \delta(x_g) = \sum_{x_g \in G_3^0} \rho(x_g) - 2 \sum_{\substack{x_g \in G_3^0 \\ h \in G_3^0}} a_{gh}$$

$\sum_{x_g \in G_3^0} \rho(x_g)$ - сума локальних степенів включених вершин до G_3^0

$2\sum_{\substack{x_g \in G_3^0 \\ h \in G_3^0}} a_{gh}$ - сума зв'язків між вершинами включеними до G_3^0

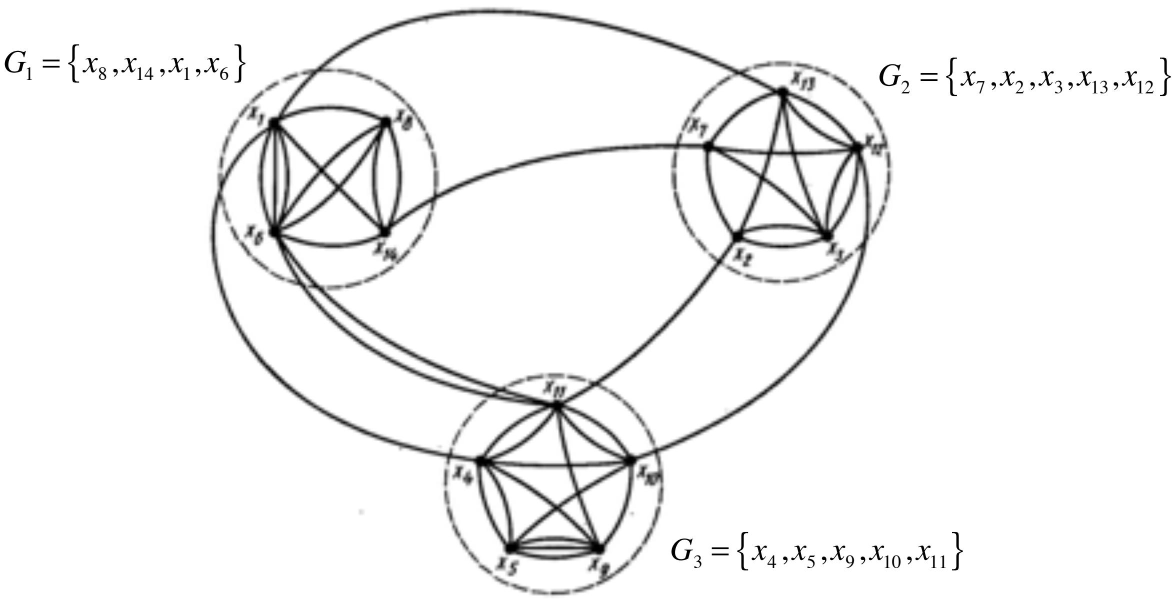
$$\sum_{x_g \in G_3^0} \delta(x_g) = \sum_{x_g \in G_3^0} \rho(x_g) - 2\sum_{\substack{x_g \in G_3^0 \\ h \in G_3^0}} a_{gh} = \rho(x_4) + \rho(x_5) + \rho(x_9) + \rho(x_{10}) + \rho(x_{11}) - 2(a_{45} + a_{49} + a_{410} + a_{411} +$$

$$+a_{59} + a_{510} + a_{511} + a_{910} + a_{911} + a_{1011} =$$
$$= (7+6+6+6+8) - 2(2+1+1+2+3+1+0+1+1+2) =$$
$$= 33 - 2(14) = 5 < m_{dop} = 6$$

$$m_3^0 = 5$$

Таким чином умова задачі виконана. Початковий граф розрізаний на три підграфа, з потрібним числом вершин в кожному з них та числом зовнішніх зв'язків кожного окремо взятого підграфу $m \le 6$.

В результаті отримали



Як визначити число внутрішньовузлових (v_{ii}, v_{jj}, v_{kk}) зв'язків. Це є число зв'зків між вершинами включеними до відповідного підграфу, так $v_{11} = a_{18} + a_{14} + a_{16} + a_{814} + a_{86} + a_{146}$. Це визначення виконується по матриці $|A|$.

Як визначити число зовнішніх зв'язків між підграфами ($v_{ij}, v_{jk}, v_{jk}, ...$). визначається числом зв'язків між вершинами, включеними до підграфів: v_i та v_i, v_i та v_k, v_j та v_k і т.д.

$$v_{12} = a_{113} + a_{112} + a_{13} + a_{12} + a_{17} + a_{813} + a_{812} + a_{83} + a_{87} + a_{1413} + a_{1412} + a_{143} + a_{142} + a_{147} + a_{613} + a_{612} + \cdots$$

Число зовнішніх зв'язків між першим підграфом та двома іншими - 5, другим та двома іншими 4,третім та твома іншими - 5. Загальне ж число зовнішніх зв'язків - 7

Якість компонування:

$$\Delta G = \frac{1}{2}\frac{\sum v_{ii}}{\sum v_{ij}} = \frac{36}{7}$$

$\sum v_{ii}$ - сума всіх внутрішніх зв’язків (внутрішньовузлові зв’язки)

$\sum v_{ij}$ - сума всіх зовнішніх зв’язків

$\frac{1}{2}$ - пишеться, коли ми з вами включаємо a_{12} та a_{21}.