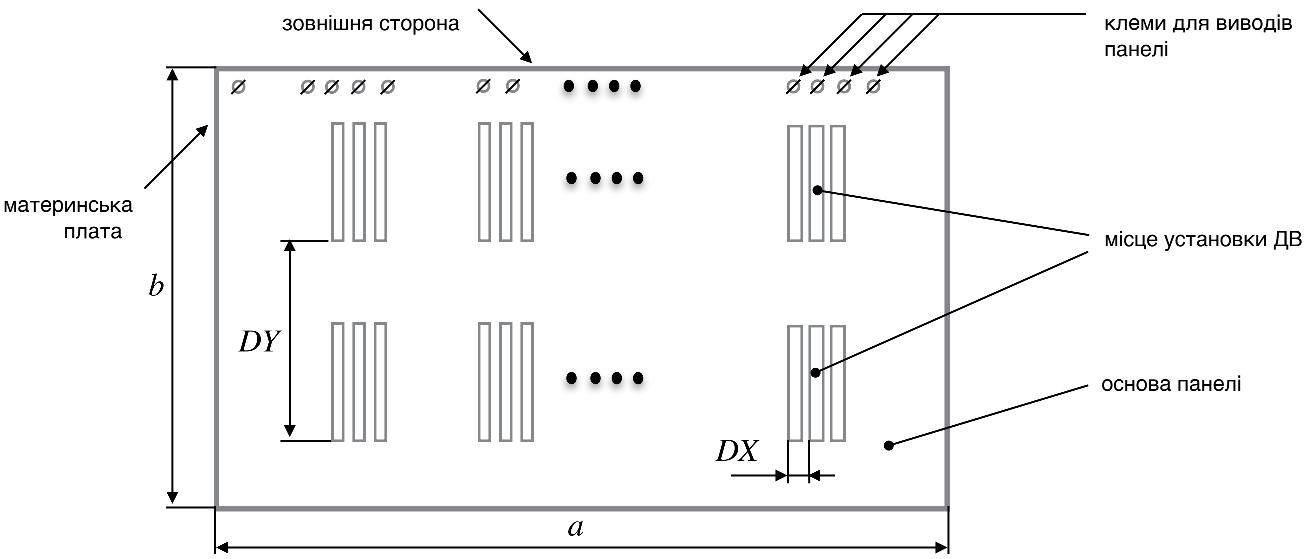
Алгоритми розміщення, що використовують силові функції.
Алгоритм розміщення Лінського.

Давайте розглянемо розміщення пристроїв всередині пристрою, що має на одиницю більший конструктивний рівень, тобто це буде відповідати задачи розміщення ДВ в панелі, блоці і т.д.

Обмеження такі
Передбачається, що конструкція розміщених (сот/комірок) ДВ однотипна. Панель, в якій виконується розміщення, є прямокутником, на якому $n \times m$ ПМ. Зовнішні з'єднання ДВ підводяться до клем однієї сторони панелі, яка називається зовнішньою.

Також передбачається, що між розміщуваними ДВ є внутрішні зв'язки, а також задані зовнішні зв'язки, які виконуються через клеми зовнішньої сторони панелі.



Все вище сказане можна повністю віднести до розміщення ІС на ДП (друкована плата).
Давайте розглянемо, що послужило причиною для розробки даного алгоритму.
Давайте ще раз поміркуємо про критерій

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} d_{ij} ,$$

d_{ij} - відстань між ПМ з координатами (x_i, y_i) та (x_j, y_j), що визначають положення елементів l_i та l_j (ПМі та ПМj). Функція L є функція $2n$ змінних $x_i(i = 1,2\ldots n)$ та $y_i(i = 1,2\ldots n)$. Якщо $d_{ij} = d(x_i y_i; x_j y_j)$, то для мінімізації L можна використовувати аналітичні методи. Для відшуку мінімуму L прирівнюємо частині похідні по нефіксованим змінним нулю та отримаємо систему алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\delta d(x_i y_i, x_j y_j)}{\delta x_i} = 0 \quad i = 1,2,\ldots n$$

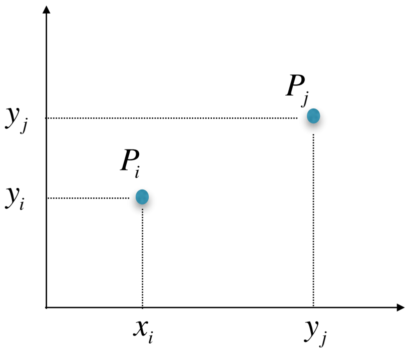
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\delta d(x_i y_i, x_j y_j)}{\delta y_i} = 0 \quad i = 1,2,\ldots n$$

Якщо всі змінні незалежні, то маємо рішення $x_i = const(i = 1,2,\ldots n) \quad y_i = const(i = 1,2,\ldots n)$

Отже, дана модель не може бути безпосередньо використана для розміщення елементів (високого рівня), оскільки всі елементи “стягуються” в точку. Можливо декілька шляхів коректування цюєї моделі.

Останнє про розміщення.
Ми розглянули розміщення КЕ в лінійку:
- алгоритм парних перестановок **A B C D E F**
- на практиці - 7 ДВ розмістити в ряд
- зараз розглянули панель - в панелі ДВ розміщені також в ряд

Діло в тому, що перед розміщенням була вирішена задача розбиття. В результаті рішення цюєї задачі були виділені групи сильно зв’язаних елементів. При вирішенні задачі розміщення ми знаходили ПМ елементів в кожній з цих груп, але не між групами. Тому ми достатньо правильно все робимо.
Але якщо все-таки матричне розміщення в загальному випадку, або якесь інше, то
$L_{зв} = \sum a_{ij} d_{ij}$
а значить по іншому буде визначатися d_{ij}, тобто в ортогональній метриці



$$d_{P_iP_j} = |x_j - x_i| + |y_j - y_i|$$

Цей метод розміщення дає істотні позитивні результати, якщо основною вимогою при розміщенні є мінімізація загальної довжини з’єднувальних проводів. В цьому випадку слідує замітити, що під довжиною проводу, що з’єднує ДВ, розуміється геометричну відстань між ДВ, а не фактична довжина провода, яка виходить після його прокладки (жгути збільшують довжину з’єднувальних проводів)

Таким чином в даному алгоритмі мінімізується сума

$$L = \sum_{i=1}^{n(N)} \sum_{j=1}^{n(N)} a_{ij} \left[\left(x_i - x_j\right)^2 + \left(y_i - y_j\right)^2 \right]$$

Чим ближче знаходяться ДВ - тим легше провести з’єднання між ними.
Основна різниця - це кретерій оптимізації.

$N = n_{КЕ} + n_{кон}$

Рішення задачі в такій постановці, цим методом розбивається на три етапи. Розглянемо ці етапи в загальному випадку.
На першому етапі будемо нехтувати розмірами ДВ та заміняємо їх матеріальними точками. ДВ розміщуються без умови попадання їх в заздалегідь визначені ПМ та рівномірності розміщення. Тоді задача зводиться до рішення ситеми лінійних алгебраїчних рівнянь, які дозволяють отримати $L_{зв} = \min$.

На другому етапі вводяться сили тяжіння між зв'язаними матеріальними точками (критерій оптимізації), а також сили відштовхування точок одне від одного і від границь основи панелі, в якій виконується розміщення.
Під дією цих сил, а також введених ще сил тріння, щоб систему можна привести в стан рівноваги.

При цьому досягається нерівномірність розміщення, тобто в одне ПМ може попасти декілька ДВ (ДВ не попадає в центр ПМ).

На третьому етапі виконується зсув матеріальних точок до визначених для них ПМ з мінімальною зміною порядку їх взаємного розташування.

Розглянемо кожен з етапів детально.
На першому етапі будемо мінімізувати суму

$$L = \sum_{i=1}^{n(N)} \sum_{j=1}^{n(N)} a_{ij} \left[\left(x_i - x_j \right)^2 + \left(y_i - y_j \right)^2 \right] \quad (2)$$

Візьмемо часткові похідні від L' по всім координатам x_i та y_i та прирівняємо їх до нулю.
Координати ПМ повинні мінятися всередині основи панелі, тобто $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, де a, b - розміри панелі. Також задаються початкові дані розташування роз'єма, фіксованих ДВ.
В результаті диференціювання отримаємо системи лінійних алгебраїчних рівнянь

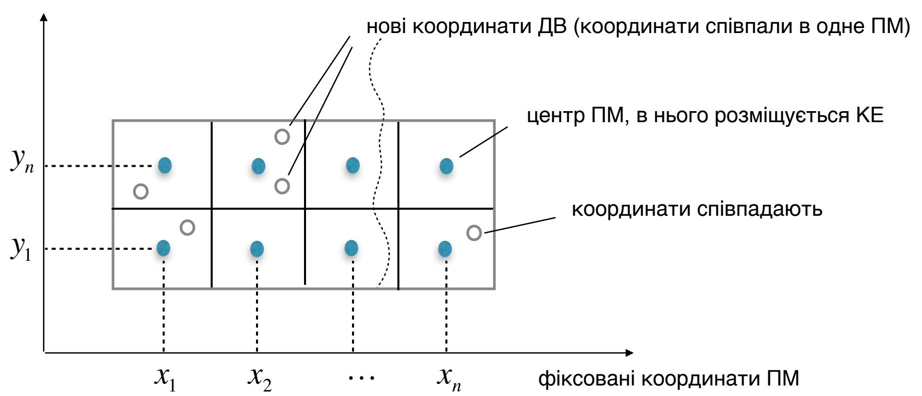
$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \left(x_i - x_j \right) = 0 \quad j = \overline{1,n} \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \left(y_i - y_j \right) = 0 \quad j = \overline{1,n} \quad (4)$$

При вирішенні яких отримаємо координати ПМ.

Рішення отриманих систем є рішення задачі (2). Системи рівнянь (3) та (4) зручно вирішувати методом Зейделя.

В результаті рішення систем (3) та (4) отримаємо деяке розміщення ДВ (тобто координати) в основі панелі. Але, це розміщення не можна визнати задовільним, тому що ДВ розташовуються нерівномірно і навіть деяки з них можуть попасти в одне й те ж ПМ. Але $L_{зв} = \min$



Рішення, отримане на першому етапі, використовується в якості початкових даних при рішенні задачі на другому етапі. Ці результати відкоректуємо на другому етапі.

На другому етапі будемо розглядати КЕ (ДВ) як матеріальні точки одиничної ваги, на які діють деякі сили. Тобто ми вводимо в модель розміщення обмеження на розташування елементів.
При чому, якщо дві матеріальні точки відповідають ПМ P_i та P_j (рядом), то між ними діють сили тяжіння

$$\overline{F_{ij}} = a_{ij}\overline{f}\left(P_i,P_j\right) = a_{ij}\overline{f}\left(x_i y_i, x_j y_j\right)$$

Ця сила враховує число зв'язків a_{ij}. Такі сили можуть бути різні (механічні, електричні, магнітні, гравітаційні,….). Сили визначають предметну область для алгоритму (Кохання - СИЛА!)

Для того, щоб матеріальні точки не співпадали (див. рис) між P_i та P_j вводиться сила відштовхування між КЕ.

$$\overline{\Phi_{ij}} = \overline{\varphi}\left(P_i,P_j\right) = \overline{\varphi}\left(x_i y_i, x_j y_j\right)$$

Для кожної точки P_i вводиться також сила відштовхування від меж основи панелі, яку обозначимо через

$$\overline{G_i} = \overline{g}\left(P_i\right) = g\left(x_i, y_i\right)P_i$$

Враховуючи те, що це механічно кількісна система, то вводимо силу опору середовища - К (коефіцієнт тертя).
З урахуванням введених сил систему звільнили (затухання). Буде зміщення точок. Зміщення точок, відповідних нефіксованим елементам, описується системою диференційних рівнянь другого порядку - переміщення матеріальних точок до становища рівноваги.

$$\ddot{x}_i = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_{x_i}\left(P_i,P_j\right)}_{\text{сила тяжіння}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \varphi_{x_i}\left(P_i,P_j\right)}_{\text{сила відштовхування між КЕ}} + \underbrace{g_{x_i}\left(P_i\right)}_{\text{сила відштовхування від меж ДП}} - \underbrace{k\dot{x}_i}_{\text{сила, що враховує затухання}} \qquad i=\overline{1,n}$$

$$\ddot{y}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_{y_i}\left(P_i,P_j\right) + \sum_{j=1}^{n} \varphi_{y_i}\left(P_i,P_j\right) + g_{y_i}\left(P_i\right) = k\dot{y}_i \quad i=\overline{1,n}$$

Та початковими умовами (отримані координати на першому етапі)

$$x_i(0) = x_i^{(0)}, \quad \dot{x}_i(0) = 0,$$
$$y_i(0) = y_i^{(0)}, \quad \dot{y}_i(0) = 0$$

Розшифруємо індекси
f_{ijX} та f_{ijY} - проекції сили $\overline{F_{ij}}$ на вісі $0X$ та $0Y$ відповідно
$x_i^{(0)}$, $y_i^{(0)}$ - координати, отримані при рішені рівнянь (3) та (4) - на першому етапі.

Можна взяти й інші початкові умови, тоді ускладниться рішення.
Введемо наступні обозначення $\dot{x}_i = \vartheta_i$, $\dot{y}_j = \vartheta_j$. Зведемо систему диференційних рівнянь другого порядку до системи диференційних рівнянь першого порядку, які вирішуються методом Ейлера.

Вирішення системи рівнянь - діло складне та кропітке. Необхідно:
- визначити кількість сум в першому та другому додатному
- визначити сили відштовхування (точки можуть розлітатися на великі відстані)
- визначити сили. щоб не виштовхувати точки за периметр панелі (від меж прямокутника)

- визначити сили тяжіння

Таким чином на другому етапі ми визначимо координати матеріальних точок, які будуть не цілочисельними, але ми матеріальні точки розмістимо в ПМ.
Сумарна довжина зв'язків залишилася з 1-го етапа. Підібрали сили такими, що матеріальні точки розмістилися в ПМ.

Таким чином ствердження, що перевагою алгоритму є використання добре розробленого апарату диференційних рівнянь стає для нас проблематичним. Апарат диференційних рівнянь дійсно оброблений добре, але деяких додатків, наприклад механіка.

Враховуючи те, що на другому етапі координати точок будуть нецілочисельні (точки тільки попали в ПМ), то необхідно пересунути матеріальні точки в цілочисельні точки - **третій етап**.
При цьому переміщення повинно бути таким, щоб як можно менше змінити отримане розміщення на другому етапі. Тому зрушити точки потрібно так, щоб отримати в мінімумі суми квадратів всих зсувів.

Нехай $x_i y_i \ldots x_n y_n$ - координати центрів розміщенних ПМ (точки)
$\xi(k_{j1}l_{j1},\ldots,k_{jn}l_{jn})$ -координати цілочисельних точок (елементів)

Сума квадратів зсувів визначається

$$S=\left(x_1-k_{j1}\right)^2+\left(y_1-l_{j1}\right)^2+\cdots+\left(x_n-k_{jn}\right)^2+\left(y_n-l_{jn}\right)^2\Big|_{\min}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{i=1}^{n}y_i^2+\sum_{j=1}^{n}k_j^2+\sum_{j=1}^{n}l_j^2-\underbrace{2\left[\left(x_1k_{j1}+y_1l_{j1}\right)+\cdots+\left(x_nk_{jn}+y_nl_{jn}\right)\right]}_{\max}=\min$$

Враховуючи те, що перші чотири суми постійні, то мінімум досягається при максимумі виразу, що стоїть в квадратних дужках.

Задача максимізації виразу в квадратних дужках зводиться до відомої задачі про оптимальне призначення на посаду.

Гейл Д. Теорія лінійних економічних моделей.
Вид-во ІЛ, 1963

Спеціалісту (вектору $\{x_i,y_i\}$) та посаді (вектору $\{a_j,b_j\}$) ставиться у відповідність ефективність його роботи а даній посаді (скалярний добуток $x_ia_j+y_ib_j$). Вимагається так провести призначення, щоб отримати найбільшу суму ефективностей (рішення див. Гейл Д. Терія лінійних економічних моделей).

Знайдемо добре наближення до максимуму за допомогою більш простого алгоритму.
Нехай в прямокутнику R є s цілих координат по вісі $0X(1,2,\ldots,s)$ та l координат по вісі $0Y(1,2,\ldots,l)$.

Допустимо, що число вершин графу G дорівнює $s\cdot l$. Упорядкуємо координати вершин G по y в порядку убування. Візьмемо s перших вершин та присвоїмо їм по вісі $0Y$

координату l, потім візьмемо наступні s вершин та присвоїмо їм по вісі $0Y$ координати $l-1$ і т.д.
Всереденi кожного отриманої таким чином підмножини виконаємо упорядкування по $0X$, наприклад, в порядку зростання та присвоїмо цим вершинам по вісі $0X$ координати $1,2,\ldots,s$

Якщо число вершин графу G менше $s \cdot l$, то, викинувши з розгляду потрібне число цілочисельних точок, ми отримаємо аналогічний алгоритм. Викидаючи різні множини цілочисельних точок, можно з отриманих розміщень вибрати розміщення з найменшою сумою квадратів зсувів.

Алгоритм Лінського дає однозначне рішення задачі розміщення. Розміщення КЕ виконується оптимальним по критерію мінімуму сумарної довжини всих проводів.

Переваги:
1. Алгоритм базується на добре розробленому математичному апараті. Визначення стійкого стану механічної системи досягається вирішенням системи нелінійних диференційних рівнянь
2. Даний алгоритм, якщо по ньому є рішення, дозволяє визначити глобальний критерій якості ($L_{зв} = \min \min$)

Недоліки:
1. Ефективно розміщуються тільки регулярні структури
2. Велика кількість перетворень при вирішенні задачі - потрібно потужність ЕОМ
3. Складність алгоритмів є перешкодою для його широкого використання
4. При розміщені відмовляються від конкретних розмірів КЕ.

Алгоритми, що використовують силові функції

Дані алгоритми основані на механічній або електричній інтерпретації задачі розміщення. При механічному подані задача розміщення зводиться до задачі руху матеріальних точок (компонентів) до становища рівноваги при дії на них деяких сил тяжіння та відштовхування. Ці сили відповідно пропорційні числу зв'язків між компонентами та їх розмірами.

Вирішення задачі розміщення досягається шляхом представлення компонентів у вигляді матеріальних точок; зв'язки між компонентами та контактами роз'єма представляються фізичними пружними з'єднаннями (пружинами) та подальшого розрахунку статистичної моделі. При цьому використовується квадратичний критерій якості розміщення. В такій моделі ребра графу моделюються у вигляді пружин, що мають пружність - m .

Критерій розміщення визначається

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n+N} \sum_{j=1}^{n+N} d_{ij}^2 m_{ij} = L = \min$$

d_{ij} - відстань між x_i та x_j -компонентами та контактами роз'єму

n - число компонентів

N - число контактів роз'єму

m_{ij} - характеризує пружність між x_i та x_j

Таким чином мінімізація $\Phi(L)$ розглядається як задача пошуку рівноваги системи матеріальних точок шляхом вирішення системи диференційних рівнянь.

Для вирішення такої задачі найбільш широке розповсюдження отримав динамічний алгоритм Лінського.

Алгоритм Лінського

За допомогою цього алгоритму задача розміщення вирішується в три етапи:

1. На першому етапі розміщення проводиться по принципу отримання мінімальної сумарної довжини провідників. При цьому компоненти розміщуються нерівномірно, тому що отримані координати нецілочислені.

Задача вирішується так:

Є вихідний функціонал

$$L = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} d_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left[\left(x_i - x_j \right) + \left(y_i - y_j \right) \right]^2$$

a_{ij} - число зв'язків КЕ

Щоб отримати $L_{\min}$ потрібно продиферинцювати вираз по всім x_{ij}, y_{ij} та $\frac{\partial L}{\partial x_{ij} \partial y_{ij}} = 0$.

Враховуючи те що координати компонент можуть змінюватися тільки всередині плати, то вводяться обмеження $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, де a , b - розміри плати, при цьому задається вихідне розташування роз'ємів на платі.

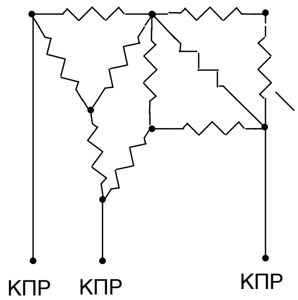
В результаті диференціювання по координатам та визначення початкових та граничних умов отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\left(x_i - x_j\right) = 0 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(y_i - y_j\right) = 0 \end{cases}$$

В результаті вирішення отримаємо значення координат x_i, x_j, y_i, y_j для всіх компонент. При цьому отримаємо $L = \min$. Слід відмітити, що ми отримаємо нерівномірне розміщення та координати КЕ нецілочислені.

2. На другому етапі всі КЕ заміняються матеріальними точками. Між матеріальними точками діють сили тяжіння, які відображають прагнення до $L = \min$ між КЕ. Діють також сили відштовхування, які не дозволяють КЕ виходити (розташовуватися) за межами ДП, а також нагоромоджуватися одне на одного.

А щоб дана система перейшла у рівновагу, вводиться ще сила тертя.
Таким чином на другому етапі розташування проводиться фізичне моделювання, тобто система КЕ заміняється системою матеріальних точок, зв'язаних між собою пружинами.



Якщо на таку систему матеріальних точок (кульок) не діють зовнішні сили, то при закінченні деякого часу вона перейде в стан рівноваги. Це відповідає оптимальному розміщенню КЕ на ДП. В якості критерію оптимізації приймається $L_{зв} = \min$. Для визначення координат розташування КЕ вирішується складна система диференційних рівнянь.

$$\ddot{x}_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\left[F_{ij}\left(P_{Xi}, P_{Xj}\right) + \Phi_{ij}\left(P_{Xi}, P_{Xj}\right)\right] + G_{ij}\left(P_{Xi}, P_{Xj}\right) - k\dot{x}_i$$

$$\ddot{y}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left[F_{ij}\left(P_{Yi}, P_{Yj}\right) + \Phi_{ij}\left(P_{Yi}, P_{Yj}\right)\right] + G_{ij}\left(P_{Yi}, P_{Yj}\right) - k\dot{y}_i$$

F_{ij} - сила тяжіння

Φ_{ij} - сила відштовхування

G_{ij} - сила відштовхування вид границь ДП

k - коефіцієнт тертя

Всі ці величини залежать від конкретних вимог до розміщення КЕ на ДП. Тому при вирішенні систем рівнянь приймають певні початкові та граничні умови.
В результаті вирішення отримаємо цілочислені значення координат КЕ, відповідних оптимальному рівномірному розміщенню.

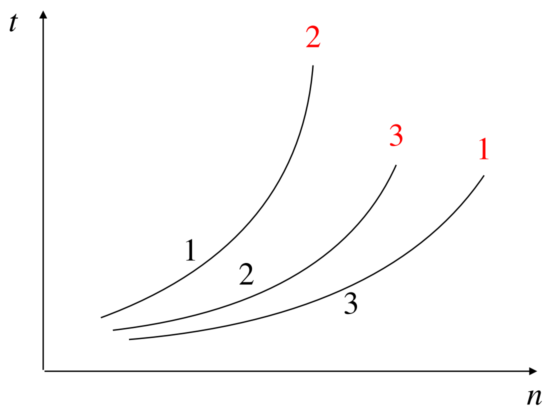
3. На третьому етапі розміщення КЕ зсуваються до найближчих сот (комірок), щоб координати КЕ були цілочисленими. При цьому сума квадратів всіх зсувив повинна бути мінімальною, тобто

$$S=\left(x_1-a_{ji}\right)^2+\left(y_1-b_{ji}\right)^2+\cdots+\left(x_i-a_{ji}\right)^2+\left(y_i-b_{ji}\right)^2=\min$$

$$S=\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{i=1}^{n}y_i^2+\sum_{i=1}^{n}a_i^2+\sum_{i=1}^{n}b_i^2-\underbrace{2\left[\left(a_{i1}x_1+b_{i1}y_1\right)+\cdots+\left(a_{in}x_i+b_{in}y_i\right)\right]}_{\max}$$

Щоб S було мінімальним

Час розміщення залежить від кількості КЕ, що розміщуються. Якісна оцінка різних алгоритмів приведена на відповідних графіках



1. Парні перестановки
2. Послідовний алгоритм
3. Динамічний алгоритм

По якості розміщення
1. Динамічний алгоритм
2. Парних перестановок
3. Послідовний алгоритм