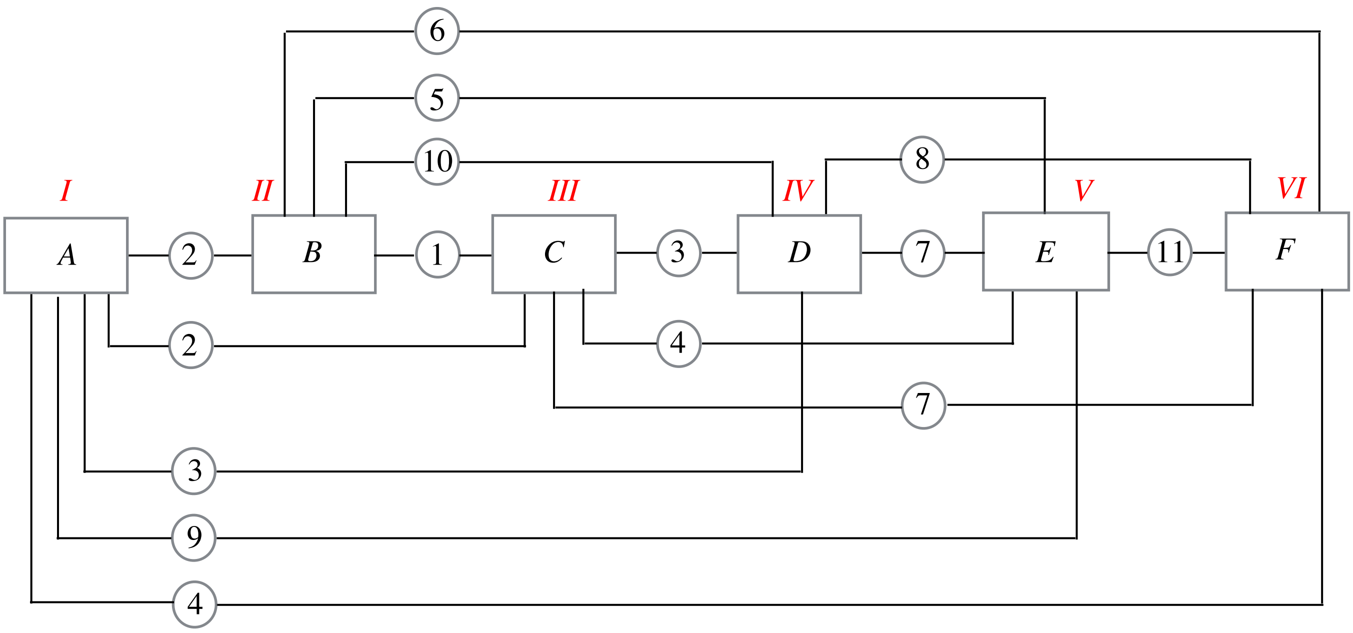
Алгоритм парних перестановок

Цей алгоритм оснований на окремому переборі можливого розміщення КЕ на множині ПМ на монтажній площині, монтажного простору, монтажного поля.

Критерієм якості розміщення є $\sum L$ між елементами, яку мінімізують перестановками елементів.

Для прикладу візьмемо початкове розміщення представлене на рис.



Виділені елементи для перестановки повинні відповідати вимогам групи розміщення:

- повинні бути однотипними по конструктивному виконанню
- мати однакову орієнтацію
- $DX = const$
- посадкові місця повинні мати однакові конструкторсько-технологічні параметри
- відстань між ПМ є одиниця довжини

Пронумеруємо ПМ *I, II, III, IV, V, VI.*

Пронумеруємо КЕ *A, B, C, D, E, F* та розмістимо їх відповідно по ПМ

Приймаємо, що відстань між сусідніми ПМ дорівнює умовній одиниці довжини

Ось таку попередню роботу потрібно зробити

Враховуючи те, що $\sum L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} d_{ij} = \max$

Тобто, щоб визначити $\sum L$ потрібно скласти дві матриці - матрицю зв'язків та матрицю відстаней.

Матриця зв'язків має вигляд - рядкам та стовпчикам матриці видповідають КЕ:

$$
A = \begin{array}{c|cccccc|c}
 & A & B & C & D & E & F & \sum a_{ij} \\
A & 0 & 2 & 2 & 3 & 9 & 4 & 20 \\
B & 2 & 0 & 1 & 10 & 5 & 6 & 24 \\
C & 2 & 1 & 0 & 3 & 4 & 7 & 17 \\
D & 3 & 10 & 3 & 0 & 7 & 8 & 31 \\
E & 9 & 5 & 4 & 7 & 0 & 11 & 36 \\
F & 4 & 6 & 7 & 8 & 11 & 0 & 36
\end{array}
$$

Визначемо число зв'язків кожного КЕ з усіма іншими - $\sum a_{ij}$

Складемо матрицю відстаней між ПМ. Рядкам та стовпчикам цюєї матриці відповідають номера ПМ

$$
D = \begin{array}{c|cccccc|c}
 & I & II & III & IV & V & VI & \sum d_i \\
I & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 15 \\
II & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 11 \\
III & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 9 \\
IV & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 9 \\
V & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 11 \\
VI & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 15
\end{array}
$$

$\sum d_i$ - визначає сумарну відстань між кожним ПМ та усіма іншими

Нам потрібно визначити сумарну довжину зв'язків для даного (початкового) розміщення $\sum L$. Це розміщення ми будемо покращувати.

Початкове розміщення - на рис.

Сумарну довжину визначемо так.
Спочатку визначемо сумарну довжину зв'язків всіх сусідніх КЕ - L_1 - тобто відстань між ПМ дорівнює 1 од. довжини).
Потім визначемо сумарну довжину між ПМ через один КЕ - L_2, потім через два - L_3, через три - L_4, через чотири - L_5. Отримані L_i просумуємо та отримаю сумарну довжину зв'язків. Тобто $L_{\sum} = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5$. Визначемо L_1, L_2, L_3, L_4, L_5.

$$L_1 = a_{AB} d_{I,II} + a_{BC} d_{II,III} + a_{CD} d_{III,IV} + a_{DE} d_{IV,V} + a_{EF} d_{V,VI} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 7 \cdot 1 + 11 \cdot 1 = 24$$
$$L_2 = a_{AC} d_{I,III} + a_{BD} d_{II,IV} + a_{CE} d_{III,V} + a_{DF} d_{IV,VI} = (2 + 10 + 4 + 8) \cdot 2 = 48$$
$$L_3 = a_{AD} d_{I,IV} + a_{BC} d_{II,V} + a_{CF} d_{III,VI} = (3 + 5 + 7) \cdot 3 = 45$$
$$L_4 = a_{AE} d_{I,V} + a_{BF} d_{II,VI} = (9 + 6) \cdot 4 = 60$$
$$L_5 = a_{AF} d_{I,VI} = 4 \cdot 5 = 20$$

$L_{\sum}^{n} = 197$ - така сумарна довжина всіх зв'язків для нашого початкового розміщення.

Не лякайтеся складністю визначення $L_1, L_2, \ldots L_5$. Вони визначаються дуже просто. Подивіться уважно на матрицю $|A|$ та матрицю $|D|$, з яких слідує, що в дужках є сума добутків елементів відповідних побічних діагоналей матриці $|A|$ та матриці $|D|$. Але це справедливо тільки для одиничної довжини між ПМ.

Виконаємо упорядкування КЕ (алгоритм зворотнього розміщення). Для цього будуємо таку таблицю

$\sum d_i$	**ПМ**	$\sum a_i$	**КЕ**
15	VI	17	C
15	I	20	A
11	V	24	B
11	II	31	D
9	IV	36	F
9	III	36	E

В центральній частині монтажного простору розміщаються сильно зв’язані елементи, тобто елементи з більшим значенням $\sum a_i$.

В цій таблиці $\sum d_i$ розташовуємо по спаданню, $\sum a_i$ розташовуємо по зростанню кількості зв’язків ставимо у відповідність КЕ:

$$\underbrace{17 \to C}_{VII\ \text{ПМ}}, \underbrace{20 \to A}_{I\ \text{ПМ}}, \underbrace{24 \to B}_{V\ \text{ПМ}}, \underbrace{31 \to D}_{II\ \text{ПМ}}, \underbrace{31 \to E}_{III\ \text{ПМ}}, \underbrace{36 \to F}_{IV\ \text{ПМ}}$$

КЕ “С” має мінімальне число зв’язків розміщується до останього ПМ - VI з таким же $d_i = 15$, але більшим числом зв’язків - навпаки до І ПМ. Замітимо, що є певна свобода при формуванні послідовності номерів елементів та позицій у виді рівності деяких характеристик. Отже можуть бути розглянуті інші варіанти розміщення.

Далі необхідно КЕ розставити по ПМ, а тут однозначності бути не може, тому що рівні значення $\sum d_i$ мають КЕ парами, тобто КЕ мають різну кількість зв’язків, в цей час $\sum d_i$ - рівні.Але ми знаємо, що хороші результати при трасуванні можна отримати, якщо КЕ, що мають мале число зв’язків розташовувати далі від роз’єму ДП (винести на край). КЕ, що мають більше число зв’язків необов’язково розташовувати ближче до роз’єму. В цьому випадку виходить менше перешкод для наступної прокладки провідників. Це є суть алгоритма зворотнього розміщення.

Паралельно-послідовне розміщення
Алгоритм зворотнього розміщення.

В цьому алгоритмі виконується попередня оцінка кожного з нерозміщених елементів $x_1, x_2, \ldots, x_n$ та кожній вільній позиції $P_1, P_2, \ldots, P_m$ після цього всі елементи розміщуються одночасно.
Ми знаємо, що при розміщені дана матриця з'єднань $A = \left|a_{ij}\right|_{n\times n}$ та матриця відстаней між позиціями $D = \left|d_{ij}\right|_{n\times n}$
Для кожного елемента x_i по матриці A визначаємо сумарне число з'єднань (зв'язність) цього елемента з іншими елементами

$$a_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}, i = 1,2,\ldots n$$

Для кожного посадкового P_i по матриці D характеризується (відстань ПМ до всіх інших)

$$d_i = \sum_{j=1}^{n} d_{ij}, i = 1,2,\ldots n$$

яка визначає сумарну відстань цюєї позиції до інших ПМ.

Очевидно, що позиції в центральній частині монтажного простору (МП) мають меншу характеристику $\sum d_{ij}$, чим ПМ на перефирії (по периметру ДП). Тому ПМ в центральній частині МП (в центрі ДП) найбільш сприятливі для розміщення сильно зв'язаних елементів, тобто елеметів з більшим значенням $\sum a_i$.
Розглядаючи з цюєї точки зору вираз для сумарної врівноваженої довжини з'єднань

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{j=1}^{j=n} a_{ij} d_{P(i)P(j)} = \min$$

та враховуючи умови мінімальності скалярного добутку $a_{ij}d_{ij}$, отримаємо наступний еврістичний алгоритм розміщення:

1. Упорядкувати елементи по зростанню характеристики $a_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}, i = \overline{1,n}$:

   $i_1, i_2, \ldots, i_n \quad \left(a_1 \le a_2 \le a_3 \ldots \le a_n\right)$

2. Упорядкувати позиції по спаданню характеристики $d_{ij} = \sum_{j=1}^{n} d_{ij}, j = \overline{1,n}$:

   $j_1, j_2, \ldots j_n \quad \left(d_1 \ge d_2 \ge \ldots \ge d_n\right)$

3. Визначити розміщення $p\left(i_k\right) = j_k, \quad k = 1,2,\ldots,n$

Розглянемо приклад
Розміщення КЕ по МП показано на рис.

Еврістичний алгоритм - алгоритм, який приводить до компромісного рішення, близького до ідеального, але для отримання якого затрачується прийнятний час.

На основі алгоритму зворотнього розміщення ми отримаємо нове розміщення з $\sum L_{зв}$ менше чим $\sum L_{зв}{}^{н}$. З таблиці розміщення маємо вид

$$\frac{I}{A} \quad \frac{II}{D} \quad \frac{III}{E} \quad \frac{IV}{F} \quad \frac{V}{B} \quad \frac{VI}{C}$$

Щоб упевнитися, що розміщення краще, чим початкове - тобто, що $\sum L_{\text{зв}}{}^{\text{У}} \le \sum L_{\text{зв}}{}^{\text{Н}}$, визначемо $\sum L_{\text{зв}}{}^{\text{У}}$. Для цього складемо матрицю зв'язку для даного розміщення.
Помінялися місцями елементи - в початковій матриці міняються відповідні рядки та стовпчики.

$$A_1 = \begin{array}{c|cccccc} & A & D & E & F & B & C \\ \hline A & 0 & 3 & 9 & 4 & 2 & 2 \\ D & 3 & 0 & 7 & 8 & 10 & 3 \\ E & 9 & 7 & 0 & 11 & 5 & 4 \\ F & 4 & 8 & 11 & 0 & 6 & 7 \\ B & 2 & 10 & 5 & 6 & 0 & 1 \\ C & 2 & 3 & 4 & 7 & 1 & 0 \end{array}$$

$$2\times 5 = 10$$
$$(2+3)\times 4 = 20$$
$$(4+10+4)\times 3 = 54$$
$$(9+8+5+7)\times 2 = 58$$
$$(3+7+11+6+1)\times 1 = 28$$

$\sum L_{\text{зв}}{}^{\text{У}} = 170$, тобто для нового розміщення $\sum L_{\text{зв}}{}^{\text{У}}$ суттєво зменшилося.
Хочу підкреслити, що це істотний прийом зменшення $\sum L_{\text{зв}}{}^{\text{Н}}$, але він ув'язується з топологічними правилами проектування ДП та дозволяє зменшити $\sum L_{\text{зв}}{}^{\text{Н}}$.

Ми не помилилися, дійсно після упорядкування КЕ отримаємо $\sum L_{\text{зв}}{}^{\text{У}} \le \sum L_{\text{зв}}{}^{\text{Н}}$.

Після цього ми приступаємо до перестановок. Як визначити які КЕ переставити між собою , щоб отримати максимальне зменшення $\sum L_{\text{зв}}$. Необхідно попарно переставити КЕ, визначаючи кожного разу $\sum L_{\text{зв}}$. Для перестановки $x_i \leftrightarrow x_j$ при якій $\sum L_{\text{зв}} = \min$ - зафіксуємо КЕ.
Алгоритм ефективний для початкового розміщення. На цьому етапі завжди висока ймовірність упорядкувати елементи. Упорядкувати, коли мало КЕ.

Тепер необхідно визначити перестановка яких елементів дає нам $\sum L_{\text{зв}} = \min$, тобто необхідно вибрані елементи попарно переставити між собою та визначити $\sum L_{\text{зв}}$. Потім необхідно вибрати іншу пар$\sum L_{\text{зв}}$у елементів та переставити їх між собою. Визначити $\sum L_{\text{зв}2}$ і т.д.

Отримаємо послідовність розміщень $P_{\text{початкове}}, P_1, P_2, \ldots P_k$ та убуваючу послідовність значень $\sum L_{\text{зв. почат.}} > \sum L_{\text{зв. 1}} > \sum L_{\text{зв. 2}} > \cdots$. Алгоритм закінчує працювати як ми відмічали при $\delta = \min$

Розумієте, як в алгоритмі парних перестановок завжди потрібно вибрати пару елементів, переставити їх, визначити і так поступати до тих пір поки не переставимо елементи попарно з отриманих значень $\sum L_{\text{зв}}$ необхідно вибрати $\sum L_{\text{зв}} = \min$ та переставити відповідні елементи і цей процес повторювати до тих пір поки $\sum L_{\text{зв}} = \min\min$.

Потім переставляємо КЕ через один, два, … . Перестановку виконуємо тих КЕ для яких $\sum L_{\text{зв}} = \min\min$. Зрозуміло, що таке рішення потребує великих об'ємів обчислень та часу.

Алгоритм розміщення по зміненю $\sum \Delta L$.

Маємо інший, більш ефективни метод визначення переставляємих КЕ (пару). Для цього визначаємо ΔL - зміну $\sum L_{зв}$ від перестановки пари КЕ. Оскільки визначаємо зміну сумарної довжини зв'язків, то ці довжини зв'язків можуть зменшуватися та $\Delta L > 0$, можуть збільшуватися і $\Delta L < 0$ або залишається без змін - $\Delta L = 0$.

Тобто переставляти необхідно ті КЕ (ту пару КЕ), які мають максимальні позитивні значення ΔL, тобто $\Delta L > 0 = \max$.

Але як визначити ΔL для кожної пари переставляємих КЕ. Якщо ми маємо матрицю зв'язків

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
\hline
1 & 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\
2 & a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\
3 & a_{31} & a_{32} & 0 & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\
4 & a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 & a_{45} & a_{46} \\
5 & a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & 0 & a_{56} \\
6 & a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & 0
\end{array}
$$

Розглянемо крайні положення

При перестановці x_1 та x_2 ΔL_{12} визначається так
Для нашої лінійки $A \leftrightarrow B$ ($x_1 \leftrightarrow x_2$):

$$\Delta L_{12} = (a_{13} - a_{23}) + (a_{14} - a_{24}) + (a_{15} - a_{25}) + (a_{16} - a_{26})$$

При перестановці x_5 та x_6 ΔL_{56} визначається так
Для нашої лінійки $E \leftrightarrow F$ ($x_5 \leftrightarrow x_6$):

$$\Delta L_{56} = (a_{61} - a_{51}) + (a_{62} - a_{52}) + (a_{63} - a_{53}) + (a_{64} - a_{54})$$

При перестановці x_3 та x_4 ΔL_{34} визначається так
Для нашої лінійки $C \leftrightarrow D$ ($x_3 \leftrightarrow x_4$):

$$\Delta L_{34} = (a_{41} - a_{31}) + (a_{42} - a_{32}) + (a_{35} - a_{45}) + (a_{36} - a_{46})$$

При умові, що відстань між переставляємими елементами = 1од. довжини.

При цьому $\Delta L > 0$ - відстань зменшується; $\Delta L < 0$ - відстань збільшується; $\Delta L = 0$ - відстань від перестановки залишилися незмінною.

В результаті можна швидко визначити зміну сумарної довжини зв'язків при перестановці відповідних КЕ. Так для нашого випадку (для останньої матриці)

$\underset{A\leftrightarrow D}{\Delta L_{AD}} = (9-7)+(4-8)+(2-10)+(2-3) = -11$ - максимально збільшується

$\underset{D\leftrightarrow E}{\Delta L_{DE}} = (9-3)+(8-11)+(10-5)+(3-4) = 7$ - зменшення довжини

$\underset{E\leftrightarrow F}{\Delta L_{EF}} = (4-9)+(8-7)+(5-6)+(4-7) = -8$

$\Delta L_{\underset{F\leftrightarrow B}{FB}} = 0$ - не змінюється

$\Delta L_{\underset{B\leftrightarrow C}{BC}} = -7$

$\Delta L_{DE} = 7$ - максимальне зменшення.

Таким чином, при перестановці елементів D та E сумарна довжина зв'язків зменшується на 7.

Перевіримо це ствердження за матрицею. Ми знаємо, що при перестановці КЕ необхідно переставити відповідні їм рядки та стовпчики в матриці зв'язків.

$$
A_{X_D \leftrightarrow X_E} = \begin{array}{c|cccccc|l}
 & A & E & D & F & B & C & \\
A & 0 & 9 & 3 & 4 & 2 & 2 & 2\times 5 = 10 \\
E & 9 & 0 & 7 & 11 & 5 & 4 & 6\times 4 = 24 \\
D & 3 & 7 & 0 & 8 & 10 & 3 & 12\times 3 = 36 \\
F & 4 & 11 & 8 & 0 & 6 & 7 & 31\times 2 = 62 \\
B & 2 & 5 & 10 & 6 & 0 & 1 & 31\times 1 = 31 \\
C & 2 & 4 & 3 & 7 & 1 & 0 &
\end{array}
$$

$\sum L_{DE} = 163$

$\Delta L_{DE} = \sum L^{\text{у}} - \sum L_{DE} = 7$

Це підтверджує суть метода, що він дозволяє визначити пару елементів для перестановки та визначити наскільки при цьому змінюється $\sum L_{\text{зв}}$.

Виконуємо перестановки далі та визначаємо ΔL. Для перестановки використовуємо останню матрицю.

$\Delta L_{\underset{A\leftrightarrow E}{AE}} = -16 = (3-7)+(4-11)-(2-5)-(2-4)$

$\Delta L_{\underset{E\leftrightarrow D}{ED}} = -7$

$\Delta L_{\underset{D\leftrightarrow F}{DF}} = 5 = \max$

$\Delta L_{FB} = 0$

$\Delta L_{\underset{B\leftrightarrow C}{BC}} = -7 = (2-2)+(4-5)+(3-10)+(1-0) = -7$

При перестановці КЕ DF сумарна довжина зв'язків зменшується на 5.

$\sum L_{DF} = 158$

Знову виконуємо перестановку для останньої матриці (A E F D B C)

$\Delta L_{AE} = -16$

$\Delta L_{EF} = -10$

$\Delta L_{FD} = -5$

$\Delta L_{DB} = -3$

$\Delta L_{BC} = -7$

Таким чином при даній перестановці сумарна довжина зв’язків збільшується. На цьому перестановки припиняємо. Таким чином - ознакою закінчення роботи алгоритма є $\Delta L < 0$.

Остаточно отримаємо:

$$\frac{I}{A} \quad \frac{II}{E} \quad \frac{III}{F} \quad \frac{IV}{D} \quad \frac{V}{B} \quad \frac{VI}{C}$$

Для цього розміщення $\sum L^0 = 158$ од. довжини

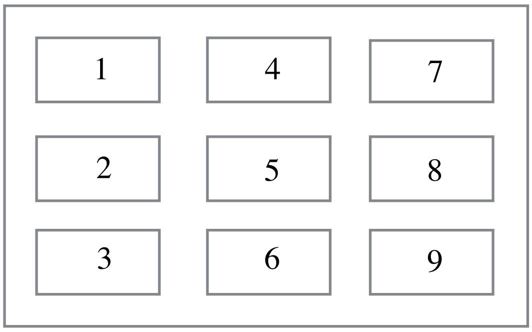
Звертаю вашу увагу, що в алгоритмі пару елементів для перестановки визначається:

- за сумарною довжиною (зменшенню сумарної довжини) $\sum L_{зв} = \min$.
- за зміною сумарної довжини ($\Delta L = \max$).

Ми з вами розглянули так зване рядкові розташування елементів. Таке розміщення має широке застосування., наприклад при розташуванні елементів в МБК (???).

Але більш загальним є матричне розміщення елементів. І в цьому випадку алгоритм парних перестановок зберігається, тобто:

1. Потрібно скласти матрицю зв’язків
2. Скласти матрицю відстаней
3. Виділити рядкові групи розміщення і тільки в них виконувати перестановки елементів.



в якій рядкам та стовпчикам відповідають номера відповідних ПМ, а відстані між ними визначаються одним з відомих способів. Далі все так як ми розглядали. При цьому виникають такі питання:

1. $|P| \gg |X|$
2. $DX \neq DY$