Ітераційний алгоритм підвищення якості компонування

Ми з вами розглянули алгоритми, які дозволяють від перестановки вершин відразу збільшувати (зменшувати) критерій якості. Особливо це проявляється на перших кроках.

1. На практиці трапляється так. Є групи сильно зв'язаних елементів, і з ціллю скорочення кроків перестановки та підвищення якості компонування бажано здійснити групові перестановки. Особливі цей процес ефективен на перших кроках алгоритму.
2. Буває і так. Отримуємо результат компонування і парними перестановками вершин (по одній) з підграфа в підграф покращується варіант компонування (локальний мінімум критерія). При груповій перестановці вершин можливо покращити якість уже результуючої перестановки.

Давайте переконаємося в цьому.
Наприклад, маємо варіант результуючого компонування

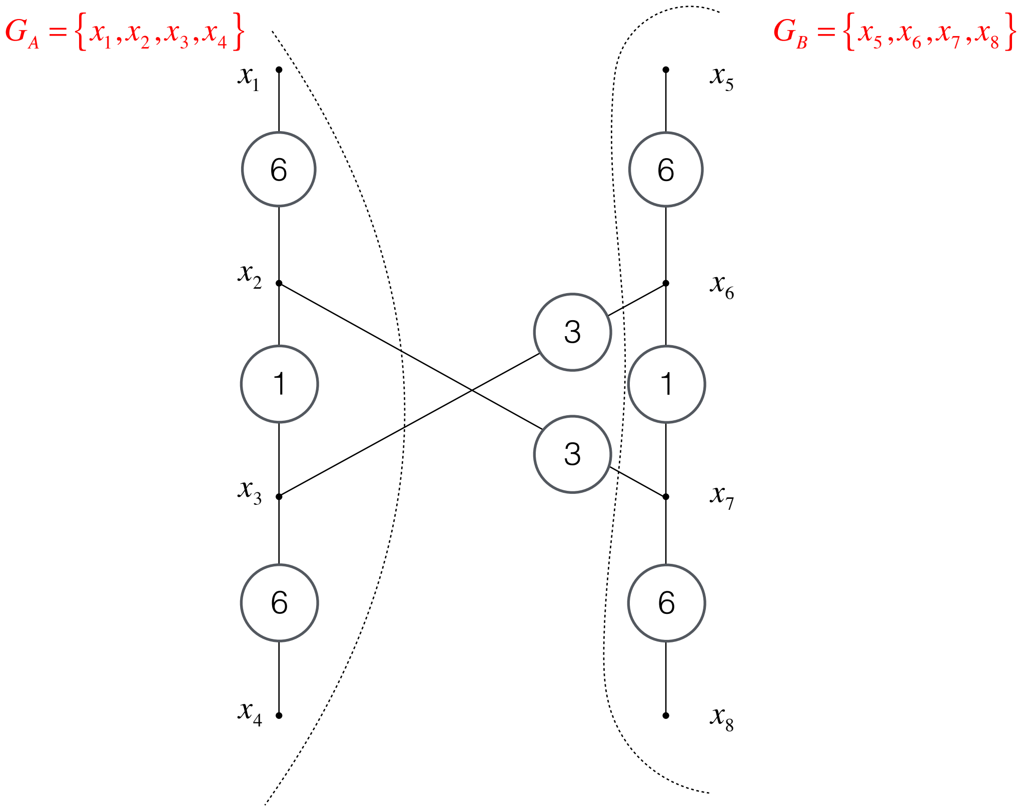


Рис.1

Для цього варіанту компонування при обміні довільної пари вершин з підграфа в підграф число зовнішніх зв'язків між G_A та G_B не зменшується. *Тобто міняємо в підграфі по одній вершині з підграфа в підграф*. *Зручно вирішувати цю задачу ітераційним алгоритмом*.

З рисунку слідує, що число зовнішніх зв'язків між G_A та G_B $m_{AB} = 6$.
Кількість внутрішніх зв'язків G_A та G_B, а також m_{AB} ви вже знаєте як визначити за матрицею.

Для початкового варіанту матриця буде мати наступний вигляд.

$$\begin{array}{cc|cccc|cccc}
 & & & & G_A & & & G_B & & \\
 & & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\
\hline
 & x_1 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
G_A & x_2 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\
 & x_3 & 0 & 1 & 0 & 6 & 0 & 3 & 0 & 0 \\
 & x_4 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
 & x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\
G_B & x_6 & 0 & 0 & 3 & 0 & 6 & 0 & 1 & 0 \\
 & x_7 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\
 & x_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0
\end{array}$$

$$v_{AA} = \frac{6+6+1+1+6+6}{2} = 13$$
$$v_{BB} = \frac{6+6+1+1+6+6}{2} = 13$$
$$v_{AB} = \Delta m = 3+3 = 6$$

Поміняємо почергово місцями попарно вершини $x_1 \leftrightarrow x_5, x_1 \leftrightarrow x_6, x_1 \leftrightarrow x_7, x_1 \leftrightarrow x_8, \quad \ldots$ з G_A в G_B. Для цих перестановок визначаємо Δm. Як це зробити ви вже знаєте - парна перестановка вершін з G_A в G_B означає перестановку відповідних рядків та стовпчиків в початковій матриці.

Виконаємо перестановку $x_1 \leftrightarrow x_5$

$$\Delta m_{x_1x_5} = \left(m_{x_1\text{зовн}} + m_{x_5\text{зовн}}\right) - \left(m_{x_1\text{внутр}} + m_{x_5\text{внутр}}\right) - 2a_{15} = (0+0)-(6+6)-2\cdot 0 = -12$$

Матриця має вигляд:

$$\begin{array}{cc|cccc|cccc}
 & & & & G'_A & & & G'_B & & \\
 & & x_5 & x_2 & x_3 & x_4 & x_1 & x_6 & x_7 & x_8 \\
\hline
 & x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\
G'_A & x_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 0 & 3 & 0 \\
 & x_3 & 0 & 1 & 0 & 6 & 0 & 3 & 0 & 0 \\
 & x_4 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
 & x_1 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
G'_B & x_6 & 6 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 & x_7 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\
 & x_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0
\end{array}$$

Нагадую. Перестановка наприклад вершин $x_1 \leftrightarrow x_5$ значає перестановку відповідних рядків та стовпчиків в початковій матриці.

$v'_{A'A'} = 7$; $v'_{B'B'} = 7$; $m'_{A'B'} = 18$

$\Delta m_{15} = 6 - 18 = -12$ - збільшення зовнішніх зв'язків на 12.

Значення Δm для всіх можливих парних перестановок вершин зведемо до таблиці

вершини, що переставляються	Δm	вершини, що переставляються	Δm	вершини, що переставляються	Δm	вершини, що переставляються	Δm
$x_1 \leftrightarrow x_5$	-12	$x_2 \leftrightarrow x_5$	-10	$x_3 \leftrightarrow x_5$	-10	$x_4 \leftrightarrow x_5$	-12
$x_1 \leftrightarrow x_6$	-10	$x_2 \leftrightarrow x_6$	-8	$x_3 \leftrightarrow x_6$	-14	$x_4 \leftrightarrow x_6$	-10
$x_1 \leftrightarrow x_7$	-10	$x_2 \leftrightarrow x_7$	-14	$x_3 \leftrightarrow x_7$	-8	$x_5 \leftrightarrow x_7$	-10
$x_1 \leftrightarrow x_8$	-12	$x_2 \leftrightarrow x_8$	-10	$x_3 \leftrightarrow x_8$	-10	$x_6 \leftrightarrow x_8$	-12

З таблиці видно, що ни один парний обмін не веде до зменшення зовнішніх (міжвузлових) зв'язків. Це ми з вами й стверджуємо, що для данного компонування перестановками по одній вершині не призводить до зменшення числа зовнішніх зв'язків.

Разом з тим я продожвжую стверджувати, що є варіант компонування меншим числом зовнішніх зв'язків.

Давайте в G_A з G_B переставимо **дві** вершини x_5 та x_6, а з G_B в G_A переставимо також **дві** вершини x_1 та x_2, тобто групами по дві вершини. Тепер подивимося як змінився результат.

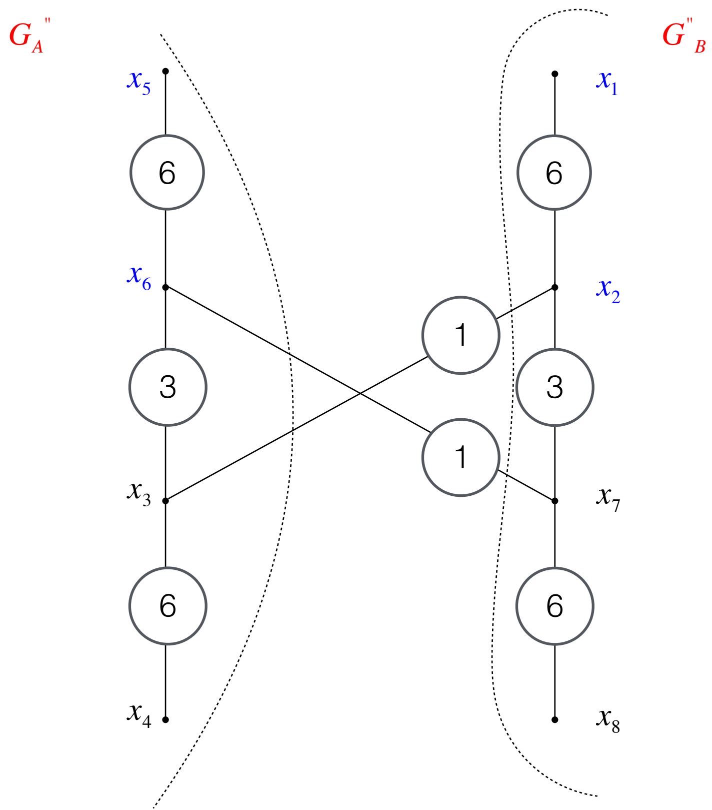


Рис.2

У наявності кращий результат компонування. Якість значно вище по зрівненню з початковим компонуванням.

$m_{A''B''} = 2$, $\Delta m = 4$

Тепер **виникає питання** - *яким чином найти цю групу ("чарівних") вершин (дві) в підграфах*?

Коли ми маємо хороший результат, то завжди бажано знати правило отримання цього результату та використовувати його.

Розглянемо методику пошуку групи вершин для перестановки, які дозволять покращити компонування, або показати, що результуюче компонування є кінцевим і покращити його не має можливості.

Довайте розглянемо з вами загальний випадок, а потім продовжимо розглядати приклад.

Тож, маємо початкове компонування - $G_A = \left\{x_{a_1}, x_{a_2}, \ldots, x_{a_j}, \ldots x_{a_k}\right\}$ та $G_B = \left\{x_{b_1}, x_{b_2}, \ldots, x_{b_j}, \ldots x_{b_k}\right\}$. В результаті перестановки всіх вершин (див. табл. з прикладу) з G_A в G_B вибираємо пару елементів, наприклад $x_{A_1} \in G_A$ та $x_{B_1} \in G_B$, для яких $\Delta m_{x_{A_1} x_{B_1}} = \max$. Виконаємо перестановку цих елементів та тимчасово зафіксуємо $x_{B_1} \in G_A$, $x_{A_1} \in G_B$, отримаємо $G_A^{'}$ та $G_B^{'}$.

Далі з підграфів $G_A^{'} = G_A\big|_{x_{A_1}}$, $G_B^{'} = G_B\big|_{x_{B_1}}$ знайдемо іншу пару елементів x_{A_2} та x_{B_2}, перестановка, яких забезпечує $\Delta m_{x_{A_2}, x_{B_2}} = \max$, фіксуємо та отримуємо $G_A^{''}$ та $G_B^{''}$, і т.д.

Процес парних обмінів вершин проживжується до тих пір, поки **всі** елементи з G_A переставляться до G_B та навпаки з G_B до G_A. Таким чином , якщо в підграфі міститься к-елементів (*різниці немає у випадку, коли підграфи містять ризну кількість елементив - ми порівнюєм один елемент з усіма*).Таким чином, після k - обмінів отримаємо такі дві послідовності елементів $\left\{x_{b_1}, x_{b_2}, \ldots, x_{b_j}, \ldots x_{b_k}\right\} \in G_A$ та $\left\{x_{a_1}, x_{a_2}, \ldots, x_{a_j}, \ldots x_{a_k}\right\} \in G_B$.

Цим перестановкам відповідає послідовність обчислених приростів числа зовнішніх зв'язків $\Delta m_1, \Delta m_2, \ldots, \Delta m_j, \ldots, \Delta m_k$, при цьому пам'ятаємо, що вони можуть бути позитивні та негативні, рівними нулю. При цьому кожен раз визначають сумарний приріст зовнішніх зв'язків q_j після обміну вершин

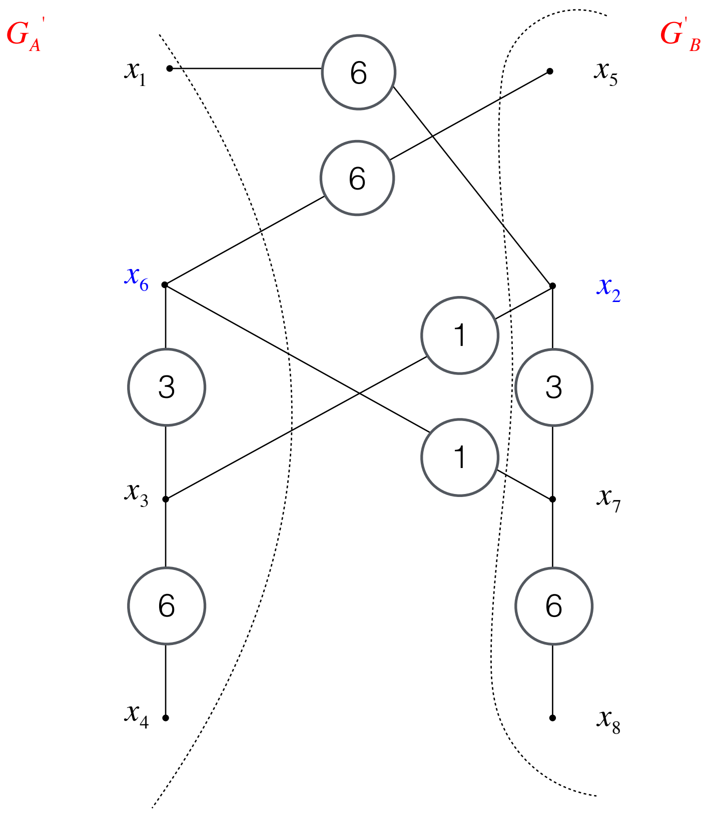
$$q_j = \sum_{j=1}^{k} \Delta m_j$$

Визначемо j перестановку, для якої $q_j = q_{\max} \geq 0$. Якщо $q_j > 0$, то виконуємо діцсну перестановку групи елементів $\left\{x_{a_1}, x_{a_2}, \ldots, x_{a_j}, \ldots x_{a_k}\right\} \in G_A$ з групою елементів $\left\{x_{b_1}, x_{b_2}, \ldots, x_{b_j}, \ldots x_{b_k}\right\} \in G_B$, тобо переставляємо групу елементів $x_{a_1}, x_{a_2}, \ldots, x_{a_j}, \ldots x_{a_k}$ в G_B, а групу елементів $x_{b_1}, x_{b_2}, \ldots, x_{b_j}, \ldots x_{b_k}$ в G_A. Таким чином ми визначили які вершини необхідно переставити та скільки цих вершин. Тоді отримаємо $G_A^j = \left\{x_{b_1}, x_{b_2}, \ldots, x_{b_j}, \ldots x_{b_k}\right\}$ та $G_B^j = \left\{x_{a_1}, x_{a_2}, \ldots, x_{a_j}, \ldots x_{a_k}\right\}$.

Розглянутий спосіб дає можливість обходити локальні мінімуми та максимуми Δm.

Давайте знайдемо групу вершин в G_A та групу вершин в G_B та переставимо їх, при цьому визначемо Δm та проаналізуємо ефективність цієї перестановки.
З першої таблиці вибираємо першу пару вершин, для яких $\Delta m_1 = \Delta m_{1\max}$. Цими вершинами являються x_2 та x_6, а $\Delta m_{26} = -8$. (*підкреслюю, що* Δm *може бути позитивним - добре - або від'ємним* - $|-8| = \min$).
Допускаємо тимчасове збільшення числа зовнішніх з'єднань, але все одно на мінімально допустиму величину.

Переставимо x_2 та x_6.



Переставимо $x_2 \leftrightarrow x_6$ та зафіксуємо. Отримаємо $\Delta m_{26} = -8$. Тобто стало 14 зовнішніх зв'язків. При перестановці $x_2 \leftrightarrow x_6$ отримаємо матрицю (зверніть увагу, що x_2 та x_6 зафіксовано і тому їх виключено з матриці - розмірність матриці зменшено).

	G'_A			G'_B		
	x_1	x_3	x_4	x_5	x_7	x_8
x_1	0	0	0	0	0	0
x_3	0	0	6	0	0	0
x_4	0	6	0	0	0	0
x_5	0	0	0	0	0	0
x_7	0	0	0	0	0	6
x_8	0	0	0	0	6	0

Для пошуку наступної пари вершин-претендентів на перестановку складемо нову таблицю по подобі першої таблиці, але тимчасово виключемо вершини що переставляються x_2 та x_6 з її (зафиксуємо x_2 та x_6).

Таблиця має вигляд

вершини, що переставляються	Δm	вершини, що переставляються	Δm	вершини, що переставляються	Δm
$\boxed{x_1 \leftrightarrow x_5}$	$\boxed{+12}$	$x_3 \leftrightarrow x_5$	-2	$x_4 \leftrightarrow x_5$	0
$x_1 \leftrightarrow x_7$	-2	$x_3 \leftrightarrow x_7$	-16	$x_4 \leftrightarrow x_7$	-14
$x_1 \leftrightarrow x_8$	0	$x_3 \leftrightarrow x_8$	-14	$x_4 \leftrightarrow x_8$	-12

Вершини x_2 та x_6 - перестановкам не підлягають.

Слідує зазначити спрощення таблиці по зрівненню з першою - нема двох рядків та стовпчиків: переставляємі вершини та Δm. Матриці стали меншої розмірності.

З цюеї таблиці вибираємо пару вершин x_1 та x_5, для яких $\Delta m_{15} = \Delta_{2\max} = +12$.

Накопичений приріст

$q_2 = \Delta m_1 + \Delta m_2 = \Delta m_{26} + \Delta m_{15} = -8 + 12 = 4$

Фіксуємо елементи x_1 та x_5 відповідно $G_B^{'}$ та $G_A^{'}$ та знову складаємо таблицю з урахуванням матриці.

$$\begin{array}{ccccc}
 & G''_A & & G''_B & \\
 & x_3 & x_4 & x_7 & x_8 \\
x_3 & 0 & 6 & 0 & 0 \\
x_4 & 6 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & \\
x_7 & 0 & 0 & 0 & 6 \\
x_8 & 0 & 0 & 6 & 0
\end{array}$$

($x_1 : x_5$, $x_2 : x_6$ - зафіксовані)

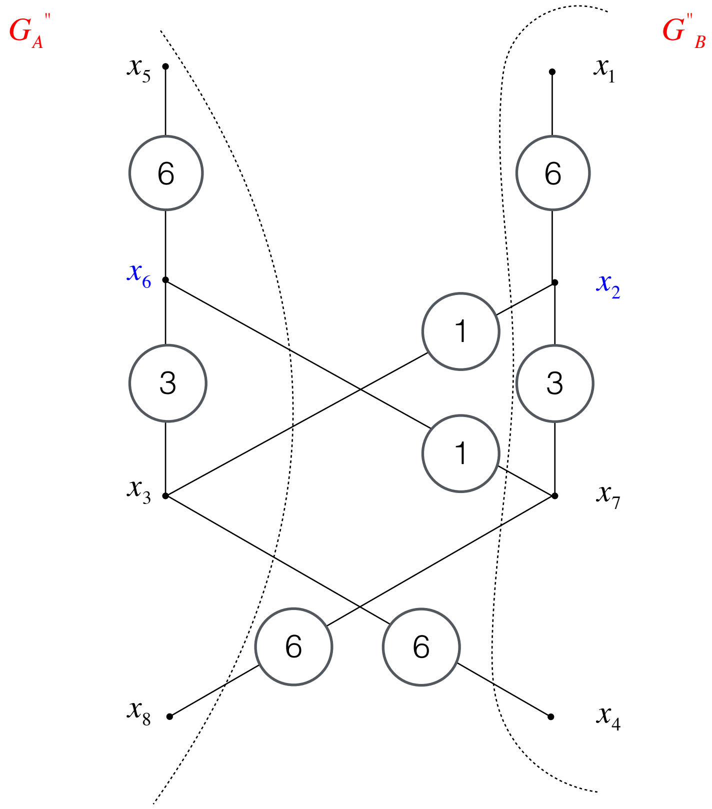
вершини, що переставляються	Δm	вершини, що переставляються	Δm
$x_3 \leftrightarrow x_7$	-16	$x_4 \leftrightarrow x_7$	-14
$x_3 \leftrightarrow x_8$	-14	$\boxed{x_4 \leftrightarrow x_8}$	$\boxed{-12}$

Для перестановки вибирємо x_4 та x_8.

$\Delta m_3 = \Delta m_{3\max} = \Delta m_{48} = -12$

$q_3 = q_2 + \Delta m_{48} = -8 = 4 - 12 = -8$

Після обміну вершин x_4 та x_8 з підграфа в підграф - отримаємо



Зовнішніх зв’язків = 14. Зверніть увагу - для початкового графу число зовнішніх зв’зків = 6. Проведемо обмін єдиної пари вершин, що залишилися - x_3 та x_7, при цьому отримаємо

$\Delta m_4 = (7+7)-(3+3)-0 = 8$

$q_4 = q_3 + \Delta m_4 = -8+8 = 0$ - ***обов’язкова умова, тому що вершини помінялися місцями***.

Так і повинно бути, тому що вершини G_A (всі) переставлені до G_B, а з G_B всі вершини переставлені до G_A.

Випишемо значення ***q*** для кожної пари переставлених вершин. В результаті отримаємо наступну послідовність значень ***q***:

$x_2 \leftrightarrow x_6$	$x_1 \leftrightarrow x_5$	$x_4 \leftrightarrow x_8$	$x_3 \leftrightarrow x_7$	Переставляємі вершини
-8	$+4$	-8	0	q
q_1	q_2	q_3	q_4	

Максимальне значення (перше) q відповідає обміну перших двох пар елементів:
$x_2, x_4 \leftrightarrow x_6, x_5$

Результуюче значення

$m = m_{0\text{початк}} - q_2 = 6-4 = 2$

$m^0 = m_{0\text{початк}} - \left(\Delta m_{26} + \Delta m_{15}\right) = 6-(-8+12) = 2$

Отриманий результат відповідає оптимальному розбиттю, приведенному на рис.2.

Метод групових перестановок доцільно приміняти в тих випадках, коли функція критерію має більше число локальних екстремумів (мінімумів).

Узагальнити метод для γ - вузлів легко способами, що використовуються при парних перестановках елементів.