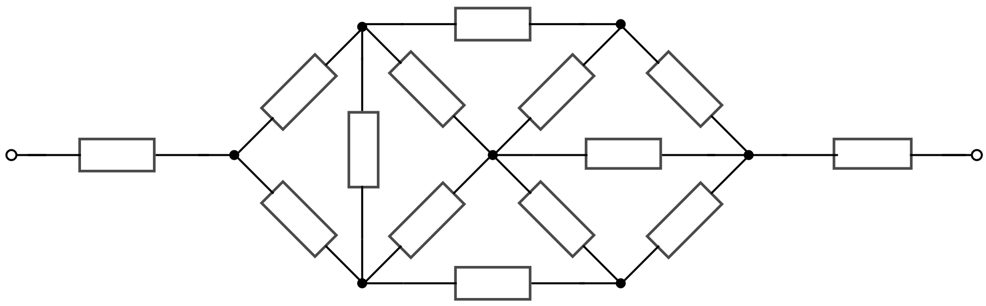
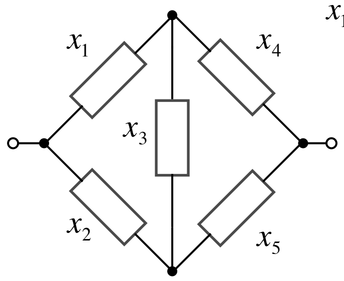
Показники надійності систем зі складною структурою

Багато реальних систем, складних систем, великих систем, до яких відносять багатомашинні системи, радарні системи, системи слідкування мають таку структуру з’єднань, яка не може бути зведенна до відомих з’єднань , тобто *послідовним, паралельним, змішаним*.
Показники надійності таких з’єднань ми знаємо як визначати, а ось як визначити показники надійності, наприклад таких з’єднань



Зрозуміло, щоб визначити показники надійності потрібно звести їх схеми до вже відомих і тоді задача буде вирішена.

Схеми складних систем можна звести до *мостових схем* типу



x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 - самостійні складні системи

В теорії ланцюгів виділяють з’єднання типу *зірка, трикутник*.

Для таких мостових схем показники надійності визначаються наступними методами:
- метод розкладення відносно особливого елемента
- метод мінімальних шляхів тв мінімальних перетинів
- метод прямого перебору
- аналітично-статистичний метод

Детально розглянемо перші два методи.

Метод розкладення відносно особливого елементу.
Для визначення показників надійності складдних схем використовують метод розкладення відносно особливого елементу. Цей метод оснований на *теоремі про розкладення функції логіки по будь-якому аргументу*.

Стосовно задач надійності цю теорему формулюють наступним чином:

$P_p\left(P_c\right) = P_{x_i}\left(P_{x_i=1}\right) + Q_{x_i}\left(P_{x_i=0}\right),$

де: $P_p\left(P_c\right)$ - результуюча ймовірність безвідмовної роботи системи

P_{x_i} - ймовірність безвідмовної роботи x_i елементу (ФВ), відносно якого виконується розкладення.

$P_{x_i=1}$ - ймовірність безвідмовної роботи системи при умові, що x_i елемент (ФВ) є абсолютно надійним (тобто буде нова схема з'єднань елементів (ФВ) в системі; показники надійності нової схеми потрібно визначати).

Q_{x_i} - ймовірність відмови x_i елементу (ФВ)

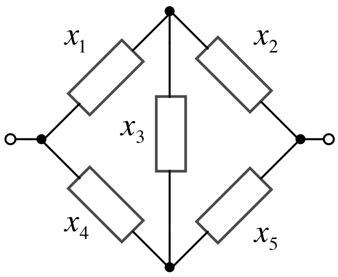
$P_{x_i=0}$ - ймовірність бузвідмовної роботи системи при умові, що x_i елемент (ФВ) відмовив - вийшов з ладу, тобто буде нова схема з'єднань елементів в системі, показники надійності цієї нової системи потрібно визначати.

Ймовірність безвідмовної роботи можна визначити по теоремі розкладення функції ввідносно відносно декількох елементів, при цьому процедура розкладення зводиться до перебору комбінацій елементів з урахуванням їх надійності.

При *розкладенні* функції по *двом елементам*:

$$P_p = P_{x_i}P_{x_j}\left(P_{x_i}=1, P_{x_j}=1\right) + P_{x_i}Q_{x_j}\left(P_{x_i}=1, P_{x_j}=0\right) + P_{x_j}Q_{x_i}\left(P_{x_j}=1, P_{x_i}=0\right) + Q_{x_i}Q_{x_j}\left(P_{x_i}=0, P_{x_j}=0\right)$$

слід відмітити, що конкретних рекомендацій по вибору елементів, відносно яких виконується розкладення, нема. Необхідно перебрати всі комбинації.
На основі теореми про розкладення визначають показники надійності для мостової схеми виду:



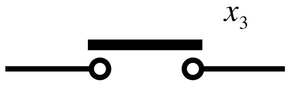
Теорема не дає рекомендації відносно якого елементу робити розкладання
Розкладення будемо виконувати відносно одного елементу, наприклад x_3.
Тоді, згідно загальної формули

$$P_p = P_{x_3}\left(P_{x_3}=1\right) + Q_{x_3}\left(P_{x_3}=0\right)$$

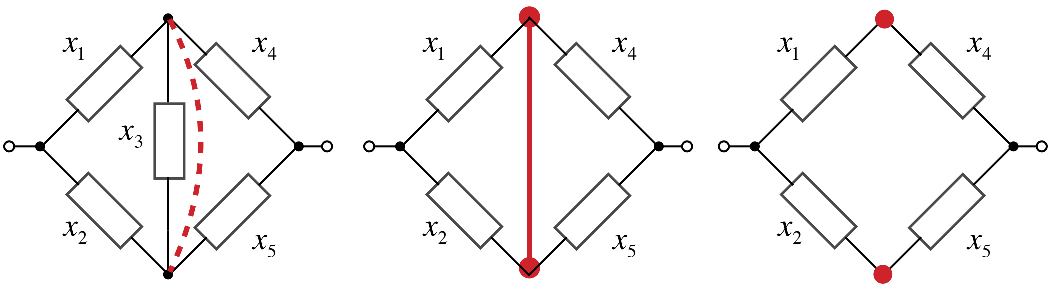
P_{x_1}, P_{x_2}, P_{x_3}, P_{x_4}, P_{x_5} - відомі - це ймовірність безвідмовної роботи пристроїв (систем x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), що входять до складної системи.

Далі з'ясуємо, що означає $P_{x_3}=1$ та $P_{x_3}=0$. Ми з вами вказували, що при $P_{x_3}=1$ та $P_{x_3}=0$,будуть *нові* схеми, показники надійності яких потрібно визначити.

$P_{x_3}=1$ означає, що x_3 елемент є абсолютно надійним і прицює по принципу ключа та знаходиться в замкнутому стані
Тобто x_3 елемент буде коротко замкненим.

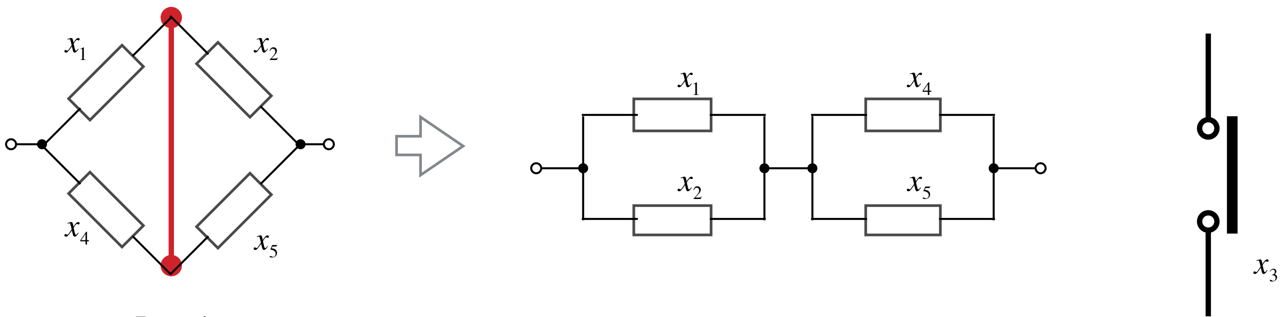


Моделлю x_3 є ключ, який при $P_{x_3}=1$ замкненим, а при $P_{x_3}=0$ - розімкненим. В цьому випадку і виходять *нові* схеми.



$P_{x_3}=1$ $\quad$ $P_{x_3}=0$

При $P_{x_3}=1$ наша мостова схема в результаті перетворення приводиться до виду

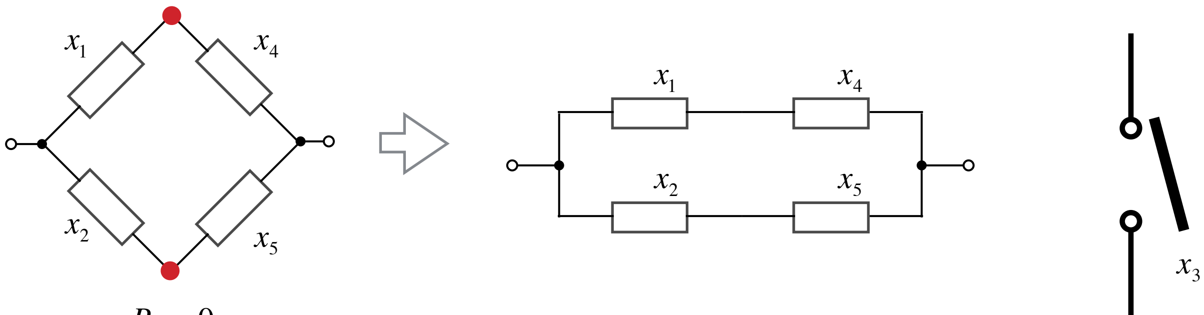


$P_{x_3}=1$

Таку схему ми вже розглядали.
Отримаємо паралельно-послідовне з'єднання. Для цієї схеми ми знаємо як визначати P_p. Тоді

$$\left(P_{x_3}=1\right)=P_{x_1x_2}\cdot P_{x_4x_5}=\left(1-q_{x_1x_2}\right)\cdot\left(1-q_{x_4x_5}\right)$$

При $P_{x_3}=0$, враховуючи те, що x3 *вийшов* з ладу, тобто ключ є розімкненим, то схема приводиться до вигляду



$P_{x_3}=0$

$$\left(P_{x_3}=0\right)=1-q_{x_1x_4}\cdot q_{x_2x_5}=1-\left(1-P_{x_1}P_{x_4}\right)\cdot\left(1-P_{x_2}P_{x_5}\right)$$

При умові $P_{x_1}\neq P_{x_2}\neq P_{x_4}\neq P_{x_5}$ кінцевий результат буде мати вигляд (вирази $P_{x_3}=1$ та $P_{x_3}=0$ підставимо в загальний вираз)

$$P_p=P_{x_3}\left(P_{x_3}=1\right)+Q_{x_3}\left(P_{x_3}=0\right)$$

$$P_p=P_{x_3}\left(1-q_{x_1x_2}\right)\left(1-q_{x_4x_5}\right)+Q_{x_3}\left[1-\left(1-P_{x_1x_2}\right)\left(1-P_{x_4x_5}\right)\right]$$

Часто $P_{x_1} = P_{x_2} = P_{x_3} = P_{x_4} = P_{x_5}$ - багатомашинна система - тоді отримаємо

$$P_p = P_{x_3}\left(1-q^2\right)^2 + Q_{x_3}\left(1-\left(1-P^2\right)^2\right)$$

При $P_{ФВ} = 0.9$, $Q = 0.1$ отримаємо $P_p = 0.981$. Тобто

$$P_p = 0.981 > P_{x_1}, P_{x_2}, P_{x_3}, P_{x_4}, P_{x_5}$$

Таким чином P_p виходить вище, ніж у ФУ в системі - тобто є сенс створювати такі з’єднання складних систем.

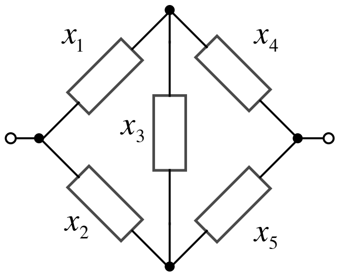
Метод мінімальних шляхів та мінімальних перетинів.

$$P_{перет} \leq P_p \leq P_{шлях}$$

Зразу визначимо що таке *мінімальний шлях* та що таке *мінімальний перетин*.

Мінімальний шлях в структурі довільного типу - це такий мінімальний набор працездатних елементів, вихід з ладу (відмова) будь-якого з них переводить систему зі стану працездатності в стан відмови. *Мінімальний шлях - це набір послідовно з'єднаних елементів*.
Тобто щоб отримати множину мінімальних шляхів роблять наступним чином: рахуємо, що всі елементи системи є *відмовленими*.
Далі складаємо всі можливі *комбінації з'єднань* елементів так, щоб передати сигнал від входу системи на її вихід (очевидно це будуть ланцюги, складаються з послідовно з'єднаних елементів).

Давайте складемо множину шляхів для нашої мостової схеми.



	мінімальні шляхи
1	x_1x_4
2	$x_1x_3x_5$
3	x_2x_5
4	$x_2x_3x_4$

Всі елементи відомовили. Відновили комбінації елементів (шляхів) - система запрацювала. Складемо шляхи ((ланцюги) з мінімального набору поновлених - працездатних елементів. Для прешого шляху працездатні ***x_1x_4*** *, в решта є ті, що відмовили. І таким чином для 2, 3, 4 шляхів.*

Таким чином система з довільною структурою має деяку множину *j* мінімальних шляхів з α_j працездатних елементів , тобто в загальному випадку
$j = \{1,2,\ldots,n_\alpha\}$ мінімальних шляхів, а кожен шлях містить α_j працездатних елементів системи.

Мінімальний перетин в структурі довільного типу є такий мінімальний набір елементів що відмовили, в якому відновлення будь-якого з них переводить систему зі стану відмови до стану працездатності. Тобто щоб отримати мінімальний перетин поступаємо наступним чином: складаємо мінімальні перетини працездатний елементів при умові, що вихід з ладу цих елементів приводить до відмови всієї системи.

Для мостової схеми множина мінімальних перетинів буде такою:

	елементи що відмовили	працездатні
1	x_1x_2	$x_3x_4x_5$
2	$x_1x_3x_5$	x_2x_4
3	$x_2x_3x_4$	x_1x_5
4	x_4x_5	$x_1x_2x_3$

Набори елементів що відмовили, решта елементів - працездатні і система в цьому випадку не працює. Але відновивши один з елементів мінімального перетину і система стає працездатною.

Таким чином система з довільною структурою елементів множина мінімальних перетинів $K=\{1,2,\ldots,n_\beta\}$, а кожен перетин включає β_k елементів системи.

Перевага методу складається в тому , що дає верхню та нижню оцінку P_p. Вона виражена через параметри надійності елементві, що входять до мінімальних шляхів і мінімальних перетинів.

$P_{перет} \le P_p \le P_{шлях}$

$P_{перет}$ та $P_{шлях}$ відповідно визначаються наступним чином:

$$P_{перет} = \prod_{k=1}^{n_\beta}\left[1-\prod_{i\in\beta_k}(1-P_i)\right]$$

n_β - кількість мінімальних перетинів

β_k - кількість функціональних елементів, що входять до мінімального перетину. Тобто кількість добутків така, скільки елементів в перетіні.

$$P_{шлях} = 1-\prod_{j=1}^{n_\alpha}\left(1-\prod_{i\in\alpha_j}P_i\right)$$

n_α - кількість мінімальних шляхів

α_j - кількість функціональних елементів, що входять до мінімального шляху.

Для нашого прикладу визначимо $P_{перет}$ (*згадаємо перетини*: $x_1x_2;\ x_1x_3x_5;\ x_2x_3x_4;\ x_4x_5$)

Згідно формули - добутків стільки скільки перетинів

$P_{перет} = (1-q_1q_2)\cdot(1-q_1q_3q_5)\cdot(1-q_2q_3q_4)\cdot(1-q_4q_5)$

Для нашого прикладу визначимо $P_{шлях}$ (*згадаємо перетини*: $x_1x_4;\ x_1x_3x_5;\ x_2x_5;\ x_2x_3x_4$)

$P_{шлях} = 1-(1-P_1P_4)\cdot(1-P_1P_3P_5)\cdot(1-P_2P_5)\cdot(1-P_3P_4)$

При рівних значеннях *P* та *q* отримаємо

$$P_{перет} = (1-q^2)^2\cdot(1-q^3)^2 \le P_p \le P_{шлях} = 1-(1-P^2)^2\cdot(1-P^3)^2 \qquad (1)$$

Приклад

Для нашого випадку $\lambda = 0.01\,{}^1\!/_{год}$ - інтенсивність відмов ФВ; $t_0 = 10$ год - час безперервної роботи для функціональних елементів. Тоді

$P(t_0) = e^{-\lambda t_0} = e^{-0.01\cdot10} = e^{-0.1} \approx 0.92$

$Q(t_0) \approx 0.08$

Підставляючи ці значення до (1) отримаємо
$0.978 \le P_p \le 0.9976$

Таким чином при $\lambda = 0.01 \, {}^1\!/_{год}$ на протязі 10 годин безперервної роботи ймовірність безвідмовної роботи системи знаходиться в межах $0.978 \div 0.9976$ та значно вище ніж функціонального вузла, що входить в систему (0.92).

Діапазон показників більш переважний, ніж коли *Pр* задається точним, як правило, наближеним значенням.

1. При послідовно-паралельному з'єднанні ми отримуємо наступне:
При $P_A = 0.9$, $P_B = 0.8$, $P_C = 0.7$, $P_D = 0.6$
$P_p = 0.8624$
Тобто $P_p > P_B$, $P_p > P_C$, $P_p > P_D$

2. При паралельно-послідовному з'єднанні отримаємо $P_p = 0.8076$ - хоча й менше, чім в першому випадку, але знову ж $P_p > P_B$, $P_p > P_C$, $P_p > P_D$.

3. У випадку мостової схеми при $P_x = 0.9$ отримаємо $P_p = 0.981$.