Ітераційний алгоритм компонування при перестановці вершин групами

Для зменшення числа ітерацій обміну вершин між підграфами використовується групова перестановка взаємно непересічних пар вершин (тобто декілька вершин з одного підграфа міняються з декількома вершинами другого підграфу).

$T_0 \in X_r$ граф $G_r\left(X_r, V_r\right)$

$L_0 \in X_s$ граф $G_s\left(X_s, V_s\right)$

$\left|T_0\right| = \left|L_0\right|$ - кількість переставляємих вершин з одного підграфу до другого повинна бути одинаковою в підграфах $G_r\left(X_r, V_r\right)$ та $G_s\left(X_s, V_s\right)$.

Вибір групи вершин для перестановки виконується згідно критерію

$\Delta m_{T_0,L_0} = \max\limits_{\substack{T_0 \in X_r \\ L_0 \in X_s}} \Delta m_{T_0,L_0}$, $r,s = \overline{1,k}$, T_0, L_0 - група вершин

Тобто кожна наступна пара вершин (пара вершин) з $x_q \in X_r$ та $x_h \in X_s$ включається до множини T_0, L_0 тільки в тому випадку, коли збільшується Δm (необхідно знати коли $\Delta m_{T_0,L_0}$ зростає).

Зміна числа з'єднувальних ребер між підграфами $G_s\left(X_s, V_s\right)$ та $G_s\left(X_s, V_s\right)$ при перестановці групи (декілька, масив, деякої підмножини $T_0 \in X_r$ та $L_0 \in X_s$ визначається за формулою:

$$\Delta m_{T_0,L_0} = \sum_{x_q \in T_o} \Delta m_{rs}\left(x_q\right) + \sum_{x_h \in L_o} \Delta m_{sr}\left(x_h\right) + \sum_{q \in F}\sum_{j \in F} a_{qj} + \sum_{h \in H}\sum_{i \in H} a_{hi} - 2 \cdot \sum_{q \in F}\sum_{h \in H} a_{qh}$$

де $F \in J$ та $H \in I$ - це множини індексів вершин, що входять до масивів (множин) $T_0 \in X_r$ та $L_0 \in X_s$.

- "**1**" - $\sum\limits_{x_q \in T_o} \Delta m_{rs}\left(x_q\right)$ - зміна числа зовнішніх зв'язків при перестановці групи вершин T_0 з G_r в G_s (Δm_{rs} беруть з вектор-стовпчиків)
- "**2**" - $\sum\limits_{x_h \in L_o} \Delta m_{sr}\left(x_h\right)$ - зміна числа зовнішніх зв'язків при перестановці групи вершин L_0 з G_s в G_r (Δm_{sr} беруть з вектор-стовпчиків)
- "**3**" - $\sum\limits_{q \in F}\sum\limits_{j \in F} a_{qj}$ - сума зв'язків між групою вершин T_0 в G_r
- "**4**" - $\sum\limits_{h \in H}\sum\limits_{i \in H} a_{hi}$ - сума зв'язків між групою вершин L_0 в G_s
- "**5**" - $2 \cdot \sum\limits_{q \in F}\sum\limits_{h \in H} a_{qh}$ - сума зв'язків між групою вершин T_0 та L_0 відповідно в G_r та G_s

*1,2,3.4 - ці суми повинні **max,** а різниця **min** тільки тоді, коли* $\Delta \underset{T_0 \leftrightarrow L_0}{m} = \max$

Підкреслюю, що $\Delta \underset{T_0 \leftrightarrow L_0}{m} = \max$ при $\sum\limits_{q \in F}\sum\limits_{h \in H} a_{qh} = 0$ або $\sum\limits_{q \in F}\sum\limits_{h \in H} a_{qh} = \min$ - це признак вибору групи вершин для перестановки.

Задача. Визначемо дві вершини в одному підграфі та дві вершини в іншому підграфі для перестановки та Δm після їх перестановки.

Матриця має вид $A_{13\times 13}$. Вводимо дві фіктивні вершини та розбиваємо на G_1, G_2, G_3 ($n_1 = n_2 = 5; n_3 = 3$).

$A =$

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}			
		G_1					G_2					G_3					$II-I$	$III-I$	
	x_1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	−1	0	
	x_2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−1	−1	
G_1	x_3	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−2	−2	
	x_4	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−2	−2	
	x_5	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−1	
																	$I-II$		$III-II$
	x_6	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1		0
	x_7	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	−2		−1
G_2	x_8	0	0	0	0	0	0	1	0	3	2	2	2	0	0	0	−6		−2
	x_9	0	0	0	0	0	0	1	3	0	3	2	2	0	0	0	−7		−3
	x_{10}	0	0	0	0	0	0	1	2	3	0	3	2	0	0	0	−6		−1
																		$I-III$	$II-III$
	x_{11}	0	0	0	0	0	0	1	2	2	3	0	3	0	0	0		−3	5
G_3	x_{12}	1	0	0	0	0	0	1	2	2	2	3	0	0	0	0		−2	4
	x_{13}	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		1	0
	x_{14}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		0	0
	x_{15}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		0	0

Всі підготовчі роботи аналогічні як ми розглядити вище, тобто довільно визначаємо вектор стовпчики та аналізуємо їх.

Знайдемо по дві вершини, перестановка котрих призведе до максимального скорочення числа зв'язків між підграфами.
Сформуємо вектор-стовпчики - як ми з вами раніше робили. З аналізу стовпчиків слідує, що такими вершинами є $x_6 \leftrightarrow x_{11}$ та $x_7 \leftrightarrow x_{12}$.
Таким чином підмножину вершин для перестановки знайшли. Таким чином вершини переставляються між G_2 та G_3. Тепер визначимо $\Delta m_{\substack{6\leftrightarrow 11\\7\leftrightarrow 12}}$. Аналіз стовпчиків **2-1** та **1-2** показує, що вершин для перестановки нема. Аналіз стовпчиків **3-1** та **1-3** - нема вершин. Аналіз вершин **3-2** та **2-3** стовпчиків дає результат.

Вершини знайдені, визначені. Давайте визначемо як змінеться число зв'язків.
Згідно загальної формули

$$\Delta m_{\substack{6\leftrightarrow 11\\7\leftrightarrow 12}} = \sum_{\substack{x_q\in II\\q=6,7}} a_{II-III}\left(x_q\right) + \sum_{\substack{x_h\in III\\h=11,12}} a_{III-II}\left(x_h\right) + \sum_{\substack{q\in II\\q=6,7}} \sum_{\substack{j\in II\\j=6,7}} a_{qj} + \sum_{\substack{h\in III\\h=11,12}} \sum_{\substack{i\in III\\i=11,12}} a_{hi} - 2\cdot \sum_{\substack{q\in II\\q=6,7}} \sum_{\substack{h\in III\\h=11,12}} a_{qh}$$

$\sum\limits_{\substack{x_q\in II\\q=6,7}} a_{II-III}\left(x_q\right) = \Delta m_6 + \Delta m_7 = 0 - 1$ - "1" сума

- Δm_6 в стовпчику III-II
- Δm_7 в стовпчику III-II

$\sum\limits_{\substack{x_h\in III\\h=11,12}} a_{III-II}\left(x_h\right) = \Delta m_{11} + \Delta m_{12} = 5 + 4$ - "2" сума

- Δm_{11} в стовпчику **II-III**
- Δm_{7} в стовпчику **II-III**

“3” сума - число зв’язків між вершинами, вибраними для перестановки в G_2
$a_{611} + a_{612} + a_{711} + a_{712}$

“4” сума - число зв’язків між вершинами, вибраними для перестановки в G_3
$a_{1111} + a_{1112} + a_{1211} + a_{1212}$

“5” сума - число зв’зків між всіма вершинами, що переставляються між графами G_2 та G_3
$2 \cdot \left(a_{611} + a_{612} + a_{711} + a_{712}\right)$

$$\Delta m_{\substack{6\leftrightarrow 11 \\ 7\leftrightarrow 12}} = 0 - 1 + 5 + 4 + a_{66} + a_{67} + a_{76} + a_{77} + a_{1111} + a_{1112} + a_{1211} + a_{1212} - 2 \cdot \left(a_{611} + a_{612} + a_{711} + a_{212}\right)$$
$$= 0 - 1 + 5 + 4 + (0 + 0 + 0 + 0) + (0 + 3 + 3 + 0) - 2 \cdot (0 + 0 + 1 + 1) = 10$$

За одну ітерацію
$\Delta m_{x_6 \leftrightarrow x_{11}} = 5$

Таким чином число зв’язків між G_2 та G_3 повинно зменшитися на 10 за одну ітерацію. Зробимо перестановку $x_6 \leftrightarrow x_{11}; x_7 \leftrightarrow x_{12}$. Тобто в початковій матриці $|A|$ поміняємо місцями відповідні стовпчики та рядки.

$$A_1 = \begin{array}{cc|ccccc|ccccc|ccccc|cc}
 & & & & G_1 & & & & & G_2 & & & & & G_3 & & & & \\
 & & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_{11} & x_{12} & x_8 & x_9 & x_{10} & x_6 & x_7 & x_{13} & x_{14} & x_{15} & II-I & III-I \\
 & x_1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0^* \\
 & x_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\
G_1 & x_3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\
 & x_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\
 & x_5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0^* \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & I-II & III-II \\
 & x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -10 & -9 \\
 & x_{12} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -8 & -8 \\
G_2 & x_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -9 & -8 \\
 & x_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 3 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -10 & -9 \\
 & x_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -10 & -9 \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & I-III & II-III \\
 & x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\
G_3 & x_7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1^* & +5 \\
 & x_{13} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1^* & 0 \\
 & x_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & x_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

З матриці A_1 вибираємо для перестановки $x_1 \leftrightarrow x_7; x_5 \leftrightarrow x_{13}$, що належить I та II підграфам. Визначаємо зміну зовнішніх зв’язків при обміні цих вершин.

$$\Delta m_{\substack{x_1\leftrightarrow x_7 \\ x_5\leftrightarrow x_{13}}} = 0 + 0 + 1 + 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 - 2 \cdot (1 + 1 + 0 + 0) = -2$$

Таким чином обмін вершин по дві з I до III підграфів виконувати неможна, тому що число зовнішніх зв'язків збільшується.

Тоді виконаємо перестановку тільки однієї пари вершин $x_5 \leftrightarrow x_{13}$ та визначемо зміну числа зовнішніх зв'язків (*)

$$\Delta m_{x_5 \leftrightarrow x_{13}} = a_{I,II}(x_5) + a_{II,I}(x_{13}) - 2a_{513} = 0 + 1 - 2 \cdot 0 = +1$$

Матриця зв'язків A_2 після перестановки 5-го та 13-го рядків та стовпчиків буде мати наступний вигляд:

$A_2 =$

		G_1					G_2					G_3							
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_{13}	x_{11}	x_{12}	x_8	x_9	x_{10}	x_6	x_7	x_5	x_{14}	x_{15}	$II-I$	$III-I$	
	x_1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	−2	−2	
	x_2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−1	−1	
G_1	x_3	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−2	−2	
	x_4	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	−1	0^*	
	x_{13}	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−1	−1	
																	$I-II$		$III-II$
	x_{11}	0	0	0	0	0	0	3	2	2	3	0	1	0	0	0	−10		−9
	x_{12}	1	0	0	0	0	3	0	2	2	2	0	1	0	0	0	−8		−8
G_2	x_8	0	0	0	0	0	2	2	0	3	2	0	1	0	0	0	−9		−8
	x_9	0	0	0	0	0	2	2	3	0	3	0	1	0	0	0	−10		−9
	x_{10}	0	0	0	0	0	3	2	2	3	0	0	1	0	0	0	−10		−9
																		$I-III$	$II-III$
	x_6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0		−1	−1
G_3	x_7	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0		$+1^*$	+5
	x_5	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0		0	−1
	x_{14}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		0	0
	x_{15}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		0	0

З A_2 вибираємо для перестановки $x_4 \leftrightarrow x_7$, що належать I та III підграфам. При цьому скорочується число зв'язків $\Delta m_{x_4 \leftrightarrow x_7} = 0 + 1 - 2 \cdot 0 = +1$. Отримаємо матрицю A_3

$A_3 =$

		G_1					G_2					G_3							
		x_1	x_2	x_3	x_7	x_{13}	x_{11}	x_{12}	x_8	x_9	x_{10}	x_6	x_4	x_5	x_{14}	x_{15}	$II-I$	$III-I$	
	x_1	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	–3	–4	
	x_2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	–1	–1	
G_1	x_3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	–1	0	
	x_7	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	4	–1	
	x_{13}	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	–1	–1	
																	$I-II$		$III-II$
	x_{11}	0	0	0	1	0	0	3	2	2	3	0	0	0	0	0	–9		–10
	x_{12}	1	0	0	1	0	3	0	2	2	2	0	0	0	0	0	–7		–9
G_2	x_8	0	0	0	1	0	2	2	0	3	2	0	0	0	0	0	–8		–9
	x_9	0	0	0	1	0	2	2	3	0	3	0	0	0	0	0	–9		–10
	x_{10}	0	0	0	1	0	3	2	2	3	0	0	0	0	0	0	–9		–10
																		$I-III$	$II-III$
	x_6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0		–1	–1
G_3	x_4	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0		0	–1
	x_5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0		–2	–2
	x_{14}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		0	0
	x_{15}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		0	0

Проаналізувавши A_3, бачимо, що дане розбиття є оптимальним (для данного початкового розбиття).

$G_1^0 = \{x_1, x_2, x_3, x_7, x_{13}\}$

$G_2^0 = \{x_{11}, x_{12}, x_8, x_9, x_{10}\}$

$G_3^0 = \{x_6, x_4, x_5\}$

Число внутрішніх зв'язків

$v_{11} = 4$

$v_{22} = 24$

$v_{33} = 1$

Число зовнішніх зв'язків

$v_2 = 1$

$v_{12} = 2$

$v_{23} = 5$