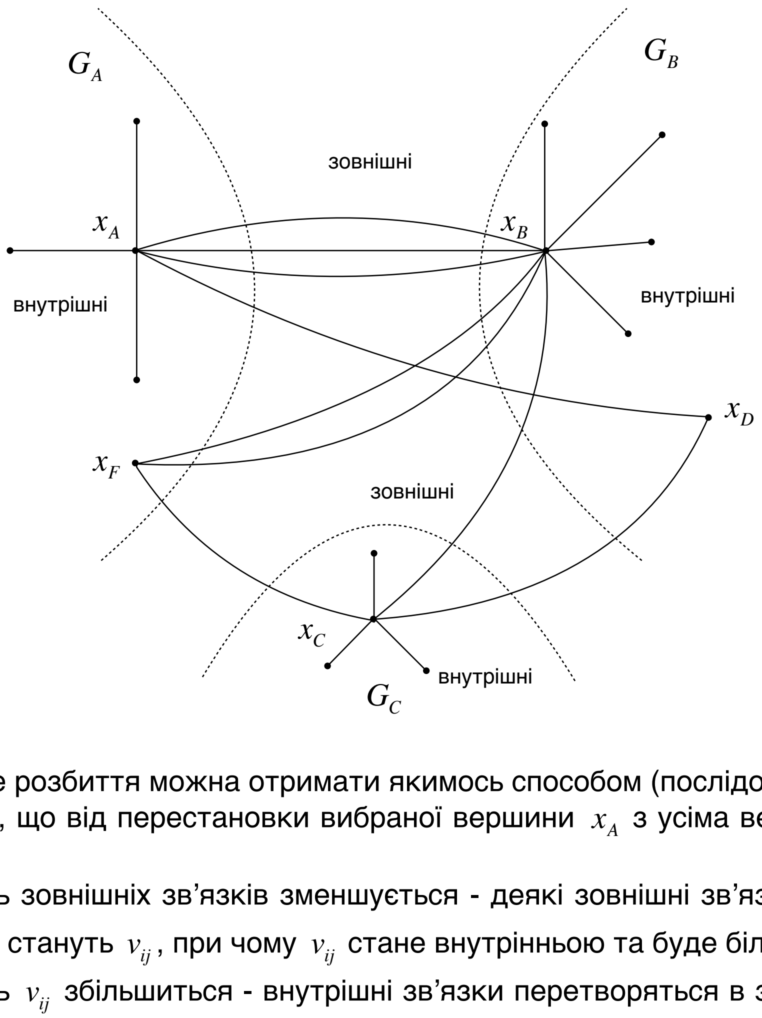
Ітераційний алгоритм, оснований на перестановках всіх вершин з підграфу в підграф

В розглянутому раніше алгоритмі використана процедура парних перестановок вершин,, які вибираються по певним правилам - визначаємо пару вершин, перестановка яких призводить до $\Delta m = \max$.
Сьогодні розглянемо другий спосіб мінімізації числа зовнішніх зв'язків (*m*).

Другий спосіб полягає в наступному.
Вибирається деякий підграф G_A (вузол) в ньому вершина $x_{A_1} \in G_A$. Далі здійснюється перестановка цієї вершини послідовно з усіма вершинами (наприклад) підграфа G_B та кожен раз визначається $\Delta m_{x_{A_1} x_{B_j}}$ $x_{B_j} \in G_B$. При цьому знайдемо таку вершину в G_B, яка при перестановці з $x_{A_1} \in G_A$ приймає максимальне значення $\Delta m = \max$. Потім вибираємо $x_{A_i} \in G_A$, $x_{A_k} \in G_A$ і т.д. по максимальному $\Delta m = \max$ визначаємо вершини для перестановки.

Розглянемо такий алгоритм.
Нехай початкове розбиття графу має вид



$m_{x_A\text{зовн}} = 4$
$m_{x_B\text{зовн}} = 5$
$m_{x_A\text{внутр}} = 3$
$m_{x_B\text{внутр}} = 4$
$a_{x_A x_B} = 3$

Початкове розбиття можна отримати якимось способом (послідовне, довільне розбиття).
Зрозуміло, що від перестановки вибраної вершини x_A з усіма вершинами G_B відбувається наступне:

- кількість зовнішніх зв'язків зменшується - деякі зовнішні зв'язки v_{ij} стануть внутрішніми v_{ii}, а v_{ii} стануть v_{ij}, при чому v_{ij} стане внутрінньою та буде більше чим v_{ii}
- кількість v_{ij} збільшиться - внутрішні зв'язки перетворяться в зовнішні та їх стане більше, чим v_{ij} , які перетворяться в v_{jj}
- кількість зовнішніх зв'язків залишиться без зміни, тобо кількість $v_{ij} \to v_{jj}$ та $v_{jj} \to v_{ij}$ буде одинаковою.

Ми оптимізуємо число зовнішніх зв'язків, тому було б зручно, якщо б зміна-приріст числа зв'язків при перестановці пари вершин можна було б визначити за формулою.
Така формула є, так при перестановці $x_A \leftrightarrow x_B$ вона має вигляд:

$$\Delta m_{AB} = \left(m_{A\text{зовн}} + m_{B\text{зовн}}\right) - \left(m_{A\text{внутр}} + m_{B\text{внутр}}\right) - 2a_{AB} > 0$$

Формула є інваріантною, якщо всі частини умножити на "-1".

Формулу потрібно читати наступним чином: зміна числа зовнішніх зв'язків при $x_A \leftrightarrow x_B$ дорівнює сумі зовнішніх зв'язків вершин $x_A \in G_A$ та $x_B \in G_B$, мінус сума внутрішніх зв'язків вершин $x_A \in G_A$ та $x_B \in G_B$, мінус подвійний добуток числа зв'язків між x_A та x_B.
Зрозуміло, що ця формула отримана з наступної формули:

$$\Delta m_{AB} = \left(\Delta m_{A\text{зовн}} - \Delta m_{A\text{внутр}}\right) + \left(\Delta m_{B\text{зовн}} - \Delta m_{B\text{внутр}}\right) - 2a_{AB} > 0$$

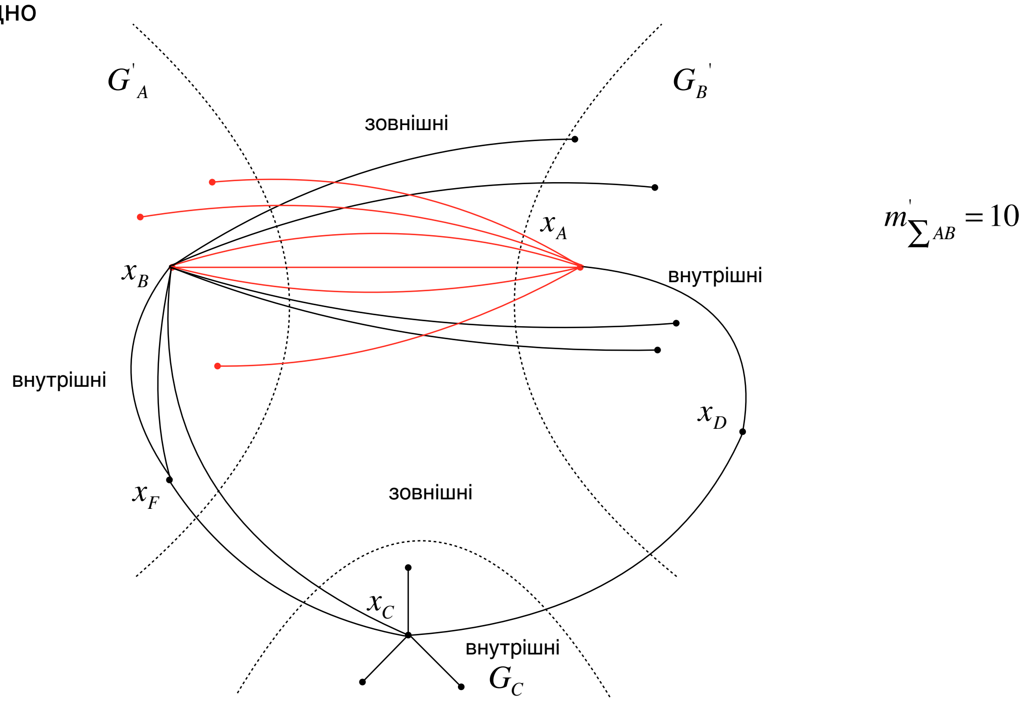
та вона інваріантна до формули:

$$\Delta m_{AB} = \left(\Delta m_{A\text{внутр}} + \Delta m_{B\text{внутр}}\right) - \left(\Delta m_{A\text{зовн}} + \Delta m_{B\text{зовн}}\right) + 2a_{AB} < 0$$

Так для нашого прикладу
$m_{A\text{зовн}} = 4$ - число зв'язків, які має x_A з всіма інцидентними вершинами в G_B. Зв'язки з G_C не враховуються
$m_{B\text{зовн}} = 5$
$m_{A\text{внутр}} = 3$
$m_{B\text{внутр}} = 4$
$a_{AB} = 3$
$m_{G_A G_B} = 6$ - число зовнішніх зв'язків між G_A та G_B для данного розбиття.

Переставимо вершини $x_A \leftrightarrow x_B$ та визначемо
$\Delta m_{AB} = (4+5)-(3+4)-2\cdot 3 = -4$ - збільшиться
($\Delta m_{AB} = (3+4)-(4+5)+2\cdot 3 = +4$ - збільшиться на 4 зв'язки)

Тобто при перестановці вершин x_A та x_B число зовнішніх зв'язків між G_A та G_B збільшиться на 4 та складе $m'_{AB} = 6+4 = 10$.
З прикладу це видно



Алгоритм, оснований на перестановках всіх вершин між двома вибраними підграфами, можливо представити наступним чином:

1. Для вибраних підграфів G_A та G_B виконуємо перестановку всіх вершин $x_{Ai} \leftrightarrow x_{Bj}$, $x_{Ai} \in G_A$, $x_{Bj} \in G_B$. Для кожної перестановки визначаємо значення Δm згідно формули

$$\Delta m_{AB} = \left(m_{A\text{зовн}} + m_{B\text{зовн}}\right) - \left(m_{A\text{внутр}} + m_{B\text{внутр}}\right) - 2a_{AB} > 0$$

2. Ті пари вершин (аналізуються пари вершин), для яких $\Delta m > 0$, та вибираємо вершини, для яких $\Delta m = \max$
3. Переставляються між собою вершини, для яких $\Delta m_{x_A x_B} > 0 = \max$. Якщо є декілька пар вершин, у яких значення $\Delta m = \max$ та рівні між собою, то переставляються вершини будь-якої з пар (алгоритм розгалуджується).
4. Переставлеємі вершини фіксуються та знову процес перестановки пар для тільки що утворених підграфів $G_A^{'}$ та $G_B^{'}$, при чому Δm для вже переставлених вершин не визначається. (Інколи дозволяється визначити Δm для вже переставлених вершин з ціллю їх повернення до початкового графу, щоб покращити якість компонування.
5. 1, 2, 3, 4 повторюються до тих пір поки є пари вершин, для яких $\Delta m > 0$. Якщо таких вершин немає, то процесс перестановки між двома вибраними підграфами закінчується, тобто відсутність вершин, для яких $\Delta m > 0$ є признаком завершення процесу перестановки вершин між двома вибраними підграфами.
6. Початковий граф $G(X,V)$ по умові задачі розбиття містить *k* підграфів $G_A, G_B, \ldots, G_S, \ldots G_K$. Алгоритм отримання підграфа з мінімально зв'язанними підграфами закінчується в виборі з *k* підграфів будь-яких двох та мінімізації числа з'єднань між ними згідно до пп 1-5. Потім, якщо число зв'язків між підграфами G_A та G_B оптимізовано, вибирається наступна будь-яка інша пара підграфів, наприклад $G_A - G_C$ потім $G_B - G_C$, та для них знову повторюється процес перестановки пар вершин, тобто повторюються пп. 4-5. Процес повторюється до тих пір, поки не будуть переглянуті всі пари підграфів початкового графу $G(X,V)$.

Число таких підграфів визначається числом поєднань з *k* підграфів по 2

$$C_k^2 = \frac{k(k-1)}{2}$$

C_m^n - число поєднань без повторень з *m* елементів по *n*.

Таким чином для того щоб оптимізувати розбиття графу $G(X,V)$ на *k* підграфів мінімально зв'язаних, необхідно повторити алгоритм $\frac{k(k-1)}{2}$ разів.

При $k = 3$ $G_3^2 = \frac{3(3-1)}{2} = 3$ - три варіанту обміну вершин між підграфами.

Після цього отримаємо $G_A^0, G_B^0, \ldots G_S^0, \ldots G_K^0$ знову буде три варіанти і так поки при любих вершинах $\Delta m < 0$.

Розглянемо приклад.

Дано граф $G(X,V)$, розбитий довільно на підграфи $G_A(X_A,V_A)$, $G_B(X_B,V_B)$, $G_C(X_C,V_C)$. Потрібно оптимізувати $m_{\sum}$ ітераційного алгоритму перестановками всіх вершин.

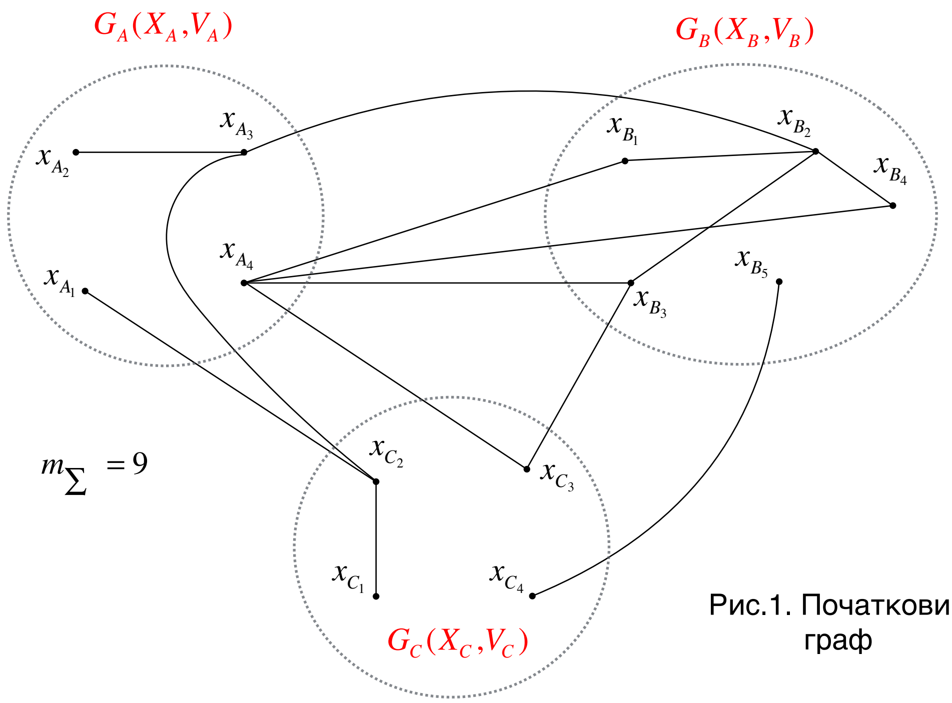


Рис.1. Початковий граф

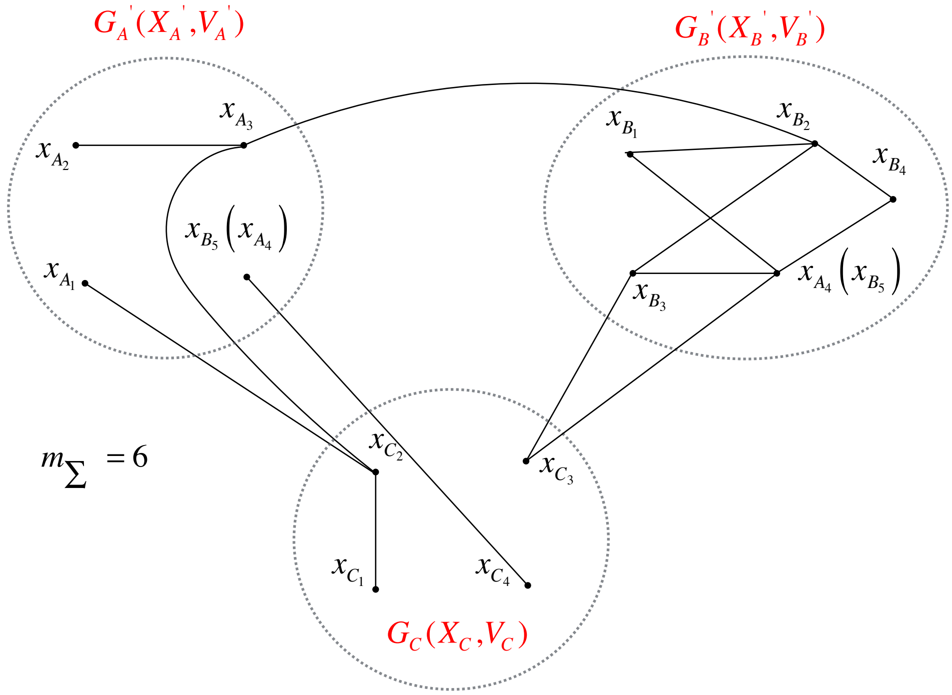
Вибираємо підграфи $G_A(X_A,V_A)$ та $G_B(X_B,V_B)$ - вершини переставляємо між цими двома підграфами. Для кожної пари переставляємих вершин визначаємо Δm. Нагадаємо формулу:

$$\Delta m_{AB} = \left(m_{A\text{зовн}} + m_{B\text{зовн}}\right) - \left(m_{A\text{внутр}} + m_{B\text{внутр}}\right) - 2a_{AB} > 0$$

G_A	G_B	Δm
x_{A_1}	x_{B_1}	$\Delta m_{A_1B_1} = (0+1)-(0+1)-2\cdot 0 = 0$
x_{A_1}	x_{B_2}	$\Delta m_{A_1B_2} = (0+1)-(0+3)-2\cdot 0 = -2$
x_{A_1}	x_{B_3}	$\Delta m_{A_1B_3} = (0+1)-(0+1)-2\cdot 0 = 0$
x_{A_1}	x_{B_4}	•
x_{A_1}	x_{B_5}	•
x_{A_2}	x_{B_1}	$\Delta m_{A_2B_1} = (0+1)-(1+1)-2\cdot 0 = -1$
x_{A_2}	x_{B_2}	$\Delta m_{A_2B_2} = (0+1)-(1+3)-2\cdot 0 = -3$
x_{A_2}	x_{B_3}	$\Delta m = -1$
x_{A_2}	x_{B_4}	$\Delta m = -1$
x_{A_2}	x_{B_5}	$\Delta m = -1$
•	•	•
•	•	•
•	•	•
x_{A_4}	x_{B_1}	•
x_{A_4}	x_{B_2}	•
x_{A_4}	x_{B_3}	•
x_{A_4}	x_{B_4}	$\Delta m_{A_4B_4} = (3+1)-(0+1)-2\cdot 1 = 1$
x_{A_4}	x_{B_5}	$\Delta m_{A_4B_5} = (3+0)-(0+0)-2\cdot 0 = 3 = \max$

Отже, вершину x_{A_4} переставляємо в G_B, а вершину x_{B_5} переставляємо до G_A. В результаті цієї перестановки число зовнішніх зв'язків зменшилося на 3 та складає $m_{\sum} = 6$ (було 9).

Після перестановки $x_{A_4} \leftrightarrow x_{B_5}$ отримаємо граф



Кількість зв'язків G_C з $G_A^{'}$ та $G_B^{'}$ не змінилося - їх кількість збереглася.

Для знову отриманих графів $G_A^{'}$ та $G_B^{'}$ знову складаємо тавблицю та знову визначаємо Δm. Для пари вершин, що мають $\Delta m = \max$, виконуємо перестановку.

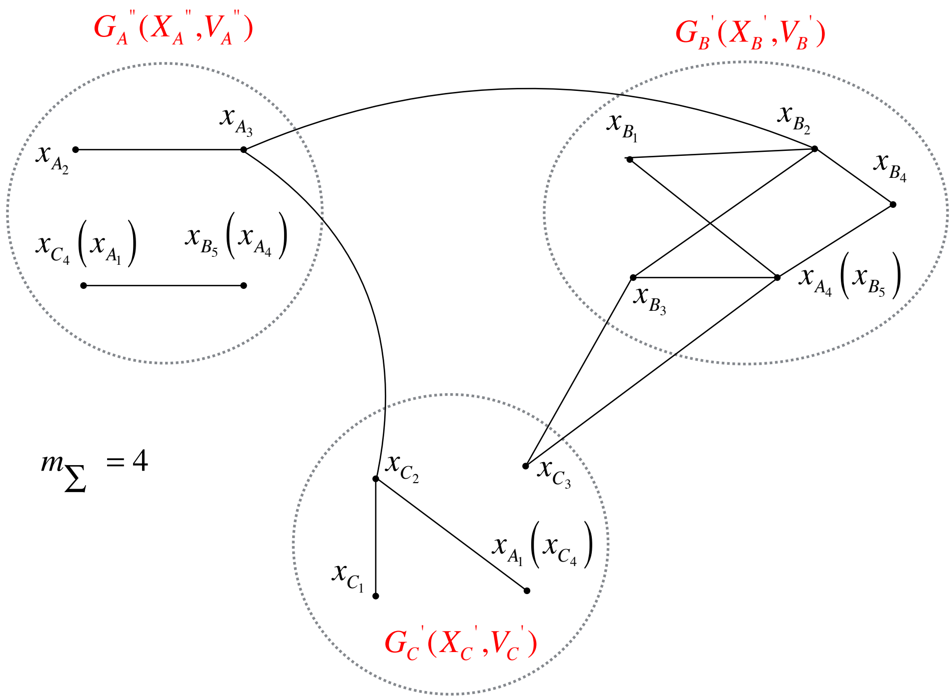
Процедура спростилася, тому що в матричному описі не буде одного рядка та стовпчика. x_{B_5} не враховується - ми вже її переставили.

$G_A^{'}$	$G_B^{'}$	Δm
x_{A_1}	x_{B_1}	Δm
x_{A_1}	x_{B_2}	Δm
x_{A_1}	x_{B_3}	Δm
x_{A_1}	x_{B_4}	•
x_{A_2}	x_{B_1}	•
x_{A_2}	x_{B_2}	•
x_{A_2}	x_{B_3}	•
x_{A_2}	x_{B_4}	•
x_{A_4}	x_{B_1}	•
x_{A_4}	x_{B_2}	•
x_{A_4}	x_{B_3}	•
x_{A_4}	x_{B_4}	Δm

Хочу звернути вашу увагу, що зі збільшенням числа переставляємих вершин спрощується визначення Δm і кожен раз спрощується матриця.

Тобто x_{A_4} та x_{B_5} не включені. Результату доброго нема, тому що між $G_A^{'}$ та $G_B^{'}$ тільки один зв'язок.

Вибираємо підграфи $G_A^{'}(X_A,V_A)$ та $G_C(X_C,V_C)$. Визначаємо пару вершин для перестановок. Ними будуть $x_{A_1} \leftrightarrow x_{C_4}$.
Тоді отримаємо.



В початковому графі $m_{\sum} = 10$ - тобто помітне покращення - зменшення суми числа зовнішніх зв'язків.

Далі необхідно мінімізувати число зовнішніх зв'язків для пари підграфів $G_C^{'}$ та $G_B^{'}$. Ця мінімізація не змінює попереднього результату. Таким чином результуючий граф показаний на рис (див вище).

Переваги алгоритму: простота та наглядність. Можна швидко отримани локальний мінімум, тому що перебираються всі вершини.
Недоліки: алгоритм зменшує кількість зв'язків між окремими підграфами, але часто це збільшує число зв'язків між другими підграфами. Для усунення цього недоліку необхідно після закінчення роботи всього алгоритму мінімізації реалізувати алгоритм повторно.

Ми привикли працювати по матриці зв'язку. Тому цей приклад розглянемо по матриці зв'язку. Детально розкриємо перевагу алгоритму.

Розглянемо приклад згідно графу, що було розлянуто на лекції. Була початкова компоновка, яка описується матрицею зв'язку

Матриця для початкової компоновки (Рис.1)

		G_A				G_B					G_C			
		x_{A_1}	x_{A_2}	x_{A_3}	x_{A_4}	x_{B_1}	x_{B_2}	x_{B_3}	x_{B_4}	x_{B_5}	x_{C_1}	x_{C_2}	x_{C_3}	x_{C_4}
	x_{A_1}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
G_A	x_{A_2}	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	x_{A_3}	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
	x_{A_4}	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0
	x_{B_1}	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
	x_{B_2}	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0
G_B	x_{B_3}	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0
	x_{B_4}	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
	x_{B_5}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
	x_{C_1}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
G_C	x_{C_2}	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
	x_{C_3}	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
	x_{C_4}	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0

$v_{AA} = 1$
$v_{BB} = 3$
$v_{CC} = 4$

$G_A G_A$, $G_B G_B$, $G_C G_C$ - підграфи з внутрішніми зв'язками
$G_A G_B$, $G_A G_C$, $G_B G_C$ - підграфи з зовнішніми зв'язками
$A_{AA(4\times4)}$, $A_{BB(5\times5)}$, $A_{CC(4\times4)}$ - підматриці різної розмірності

$$\Delta m_{x_i x_j} = \left(m_{x_i \text{зовн}} + m_{x_j \text{зовн}}\right) - \left(m_{x_i \text{внутр}} + m_{x_j \text{внутр}}\right) - 2a_{x_i x_j}$$

$$\Delta m_{x_{A_1} x_{B_1}} = (0+1) - (0+1) - 2 \cdot 0 = 0$$

зовнішні зв'язки:
0 - сума елементів рядка x_{A_1} в підматриці $G_A G_B$
1 - сума елементів рядка x_{B_1} в підматриці $G_B G_A$

внутріші зв'язки:
0 - сума елементів рядка x_{A_1} в підматриці $G_A G_A$
1 - сума елементів рядка x_{B_1} в підматриці $G_B G_B$

Тепер ми можемо визначити Δm по матриці:

$$\Delta m_{x_{A_1}x_{B_1}} = (0+1)-(0+1)-2\cdot 0 = 0$$
$$\Delta m_{x_{A_1}x_{B_2}} = (0+1)-(0+3)-2\cdot 0 = -2$$
$$\vdots$$
$$\Delta m_{x_{A_2}x_{B_1}} = (0+1)-(1+1)-2\cdot 0 = -1$$
$$\Delta m_{x_{A_2}x_{B_2}} = (0+1)-(1+3)-2\cdot 0 = -3$$
$$\vdots$$
$$\Delta m_{x_{A_4}x_{B_4}} = (3+1)-(0+1)-2\cdot 1 = +1$$
$$\Delta m_{x_{A_4}x_{B_5}} = (3+0)-(0+0)-2\cdot 0 = +3 = \max$$

Як результат - міняємо з вами місцями вершини x_{A_4} та x_{B_5} ($x_{A_4} \leftrightarrow x_{B_5}$) та закріплюємо у відповідних підграфах. Таким чином відповідні рядки та стовпчики в підматрицях $G_A G_A$, $G_B G_B$, $G_A G_B$, $G_B G_A$ викреслюємо та отримуємо $G_A^{'} G_A$, $G_B^{'} G_B$, $G_A^{'} G_B$, $G_B^{'} G_A$ та відповідні підграфи $G_A^{'}$, $G_B^{'}$.

Нові підматриці мають вигляд

		G'_A			G'_B			
		x_{A_1}	x_{A_2}	x_{A_3}	x_{B_1}	x_{B_2}	x_{B_3}	x_{B_4}
	x_{A_1}	0	0	0	0	0	0	0
G'_A	x_{A_2}	0	0	1	0	0	0	0
	x_{A_3}	0	1	0	0	1	0	0
	x_{B_1}	0	0	0	0	1	0	0
	x_{B_2}	0	0	1	1	0	1	1
G'_B	x_{B_3}	0	0	0	0	1	0	0
	x_{B_4}	0	0	0	0	1	0	0

$v'_{AA} = \frac{1}{2}2 = 1$

$v'_{BB} = \frac{1}{2}\cdot 6 = 3$

$v'_{AB} = 1$

Число зовнішніх зв'язків зменшилося.

Далі беремо підграфи $G_A^{'}$ та G_C

		G'_A			G_C			
		x_{A_1}	x_{A_2}	x_{A_3}	x_{C_1}	x_{C_2}	x_{C_3}	x_{C_4}
	x_{A_1}	0	0	0	0	1	0	0
G'_A	x_{A_2}	0	0	1	0	0	0	0
	x_{A_3}	0	1	0	0	1	0	0
	x_{C_1}	0	0	0	0	1	0	0
G_C	x_{C_2}	1	0	1	1	0	0	0
	x_{C_3}	0	0	0	0	0	0	0
	x_{C_4}	0	0	0	0	0	0	0

Визначаємо Δm по методиці, що розглянута вище. В результаті отримаємо, що $x_{A_1} \leftrightarrow x_{C_4}$ $\Delta m_{x_{A_1} x_{C_4}} = +2$

В результаті отримаємо

		$G^0{}_A$				$G^0{}_B$					$G^0{}_C$			
		x_{C_4}	x_{A_2}	x_{A_3}	x_{B_5}	x_{B_1}	x_{B_2}	x_{B_3}	x_{B_4}	x_{A_4}	x_{C_1}	x_{C_2}	x_{C_3}	x_{A_1}
	x_{C_4}	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$G^0{}_A$	x_{A_2}	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	x_{A_3}	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
	x_{A_4}	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0
	x_{B_1}	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0
	x_{B_2}	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0
$G^0{}_B$	x_{B_3}	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0
	x_{B_4}	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0
	x_{A_4}	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0
	x_{C_1}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
$G^0{}_C$	x_{C_2}	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
	x_{C_3}	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0
	x_{A_1}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0

$m_{\sum \text{зовн}} = 4$

Алгоритм має наступні переваги:

1. Ми використовували тільки дві матриці, тому що вибрані вершини G_A переставлялися з вершинами G_B. Тому не обов’язково писати всю матрицю великої розмірності та відповідно всі підматриці - зменшується масив даних.

2. Підматриці ми не приводимо до єдиної розмірності: $A_{4\times4}$, $B_{5\times5}$, $C_{4\times4}$ - зменшується масив даних.
3. При обміні вершин з підматриці в підматрицю та якщо вони не будуть вернуті до початкових підграфів, то відповідні рядки та стовпчики в підматрицях викреслюються (виключаються). Тому розмірність підматриць при визначенні вершин для перестановки кожен раз зменшується, що скорочує час вирішення задачі.
4. Дозволяє швидко отримати локальний мінімум критерію.

Виділимо такі недоліки:
Алгоритм зменшує кількість зв'язків між окремими підграфами, але часто це збільшує кількість зв'язків між іншими підграфами. Для усунення цього недоліку необхідно після закінчення роботи всього алгоритму мінімізації Δm реалізувати алгоритм повторно з вже переставленими вершинами.