Ітераційні алгоритми розподілу КЕ

Маленький вступ
Суть даної групи алгоритмів полягає в довільному розбитті початкового графу на підграфи та за допомогою парного або групового обміну вершин (по одній, по дві, …) з підграфу в підграф (не в середені підграфу) покращують розбиття. При цьому для кожної ітерації визначають ті вершини, перестановка яких забезпечує максимальне зменшення числа зовнішніх зв'язків між підграфами або максимально покращується інший показник якості з урахуванням використаних обмежень.

Тобто на кожній ітерації ми завжди маємо результат розбиття. Кожному варіанту розбиття початкового графу $G(X,V)$ на підграфи $G_A, G_B, \ldots G_S, \ldots G_K$ відповідає значення показника оптимізації *m*.

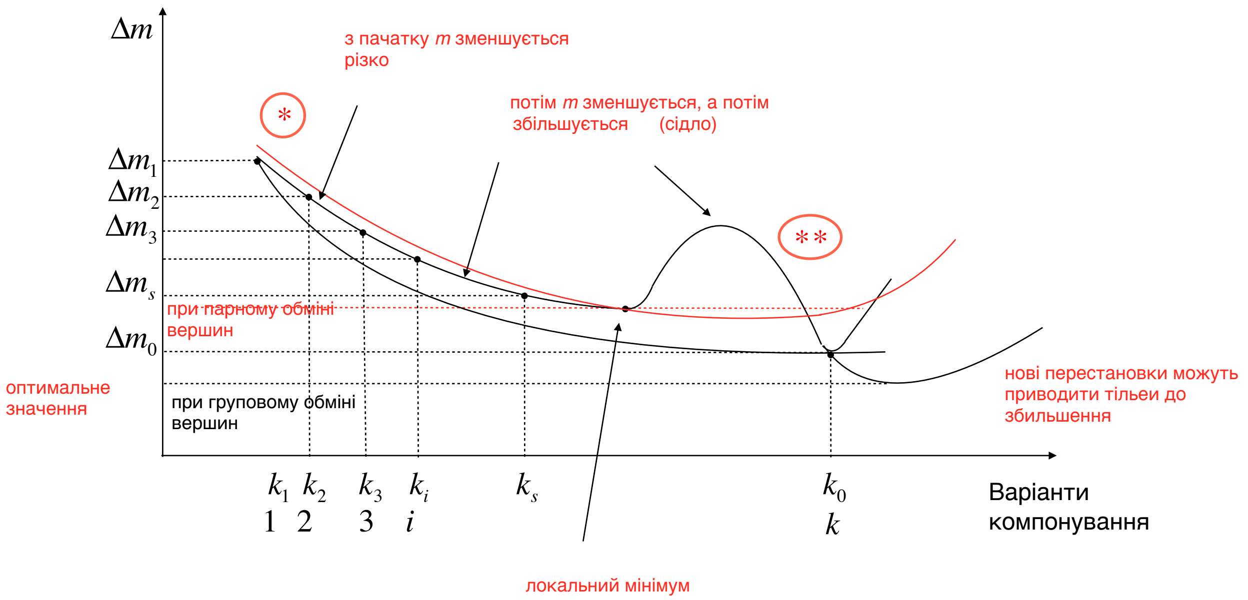
Структура ітераційного процесу покращення варіанту *k* розбиття аналогічна градієнтним методам оптимізації, в яких на кожній ітерації виконується рух у напрямку зменшення (збільшення) показника оптимізації. Зміні змінних в данному випадку відповідає перестановка елементів з різних вузлів (вершини з різних підграфів).

Допустимо, що виконано вибір пари вершин $x_g \in G_A$ та $x_h \in G_B$ та вони взаємно міняються місцями. В цьому випадку отримаємо новий новий варіант розбиття *k1* з підграфами $G_A^{'}, G_B^{'}, \ldots G_S, \ldots G_K$, де $G_A^{'} = G_A\big|_{x_g} \bigcup x_h$, $G_B^{'} = G_B\big|_{x_h} \bigcup x_g$. Цьому варіанту відповідає значення критерію m_1. Якщо $\Delta m_1 = m - m_1 > 0$, то такий обмін є ефективним.
Розглядаючи варіант розбиття *k1* знову як початковий, можна здійснити вибір другої пари вершин, обмін яких приведе до зменшення критерія m_2 і т.д.

Таким чином, у ході указаного ітераційного процесу утворюється послідовність варіантів розбиття $k, k_1, \ldots, k_k (1,2,\ldots,k)$, яким відповідає послідовність, що убуває критерію $\vartriangle m, \vartriangle m_1, \ldots, \vartriangle m_k$.

Оскільки значення критерія обмежено з низу величиною $\vartriangle m_{0\min}$, то на деякому кроці k_0. процес мінімізації закінчиться. Це свідчить про отримання варіанту розбиття, якому відповідає локальний мінімум функції *m*. З цього моменту обмін любої пари елементів не приводить до зменшення значення критерія (зміну критерія *m* приведено на рис.).
Для подальшого покращення варіанту компонування слідує переставляти групи елементів.

Зміна критерію *m*
(зміна числа зовнішніх зв'язків)



Можуть бути різні варіанти

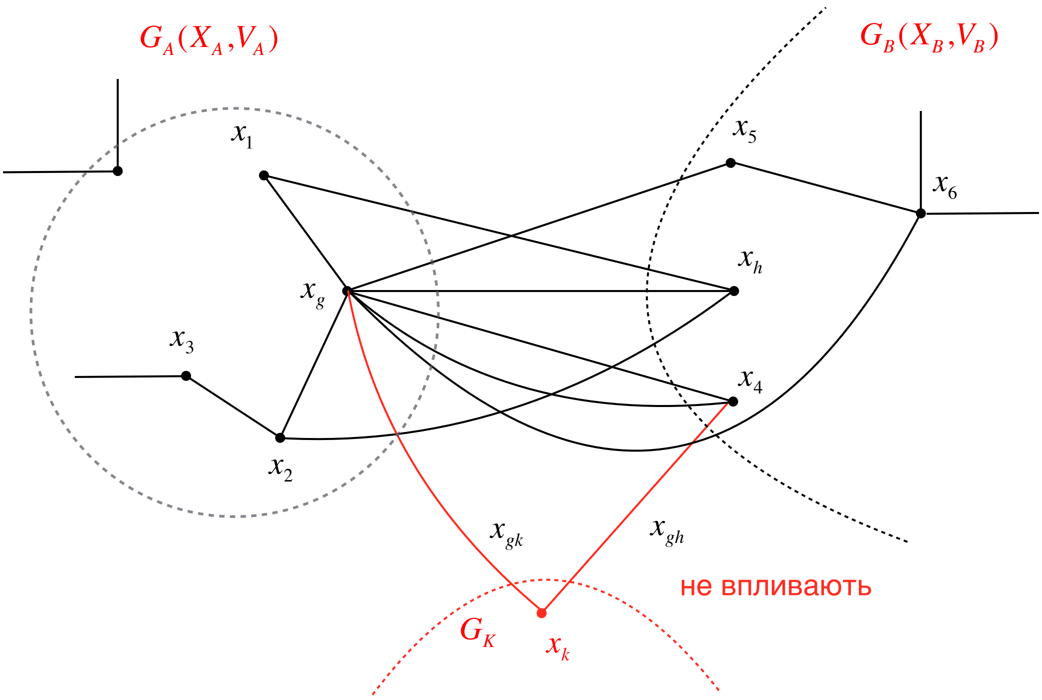
Варіант компонування можна покращити груповими перестановками вершин
$*$ - початковий участок потрібно малювати більш круто, який перейде в пологий участок, а потім паралельно осі k
$**$ - при групових перестановках (при парних перестановках) показник Δm може погіршуватися, а потім починає збільшуватися та знову становиться пологим.

Таким чином розглянута процедура оптимізації лежить в основі алгоритму парних перестановок (по одній вершині з підграфу в підграф). Відомо декілька методів, які відрізняються правилами вибору елементів x_g , x_h для перестановки та моделями опису схеми.

Другий спосіб полягає наступному. Вибирається деякий вузол G_r а в ньому вершина x_i . Здійснюється спроба обміну цього елементу x_i послідовно з усима елементами $x_j \in G_s$ та кожного разу визначається Δm .
В алгоритмі парних перестановок підбирають таку пару вершин, для якої $\Delta m\left(x_g \leftrightarrow x_h\right) = \max$ приймає максимальне значення. Очевидно, в цьому випадку час пошуку успішного обміну збільшується, проте в результаті обміну число міжвузлових з'єднань буде менше.

Розрахунок приростів визначається моделю опису КС.

Початковий варіант компонування (до перестановки)

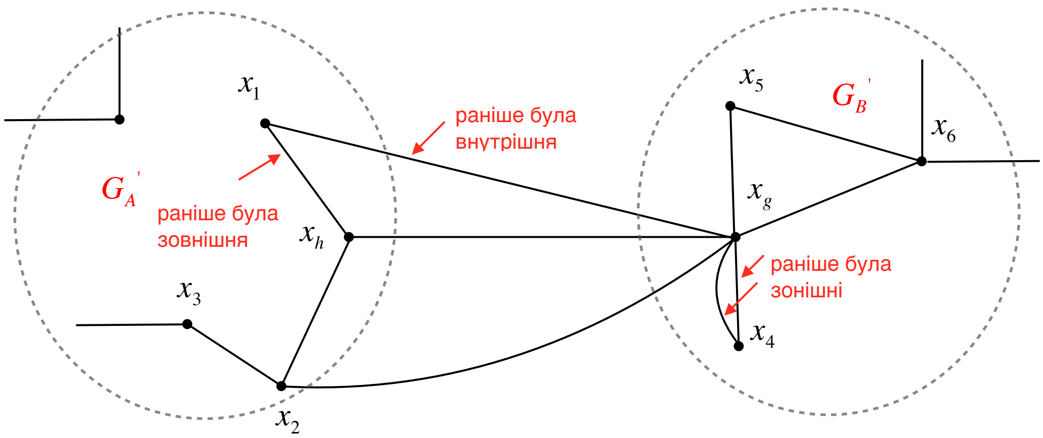


Число зв'язків між вершиною $x_g \in G_A$ та вершинами G_B та вершиною $x_h \in G_B$ з вершинами G_A

$$m_{gh} = 5_{(g)} + 3_{(h)} - 1_{gh} = 7$$

$5_{(g)}$ - сума елементів матриці $|A|$ вершини x_g з інцидентними вершинами G_B.

Початковий варіант компонування після перестановки вершин $x_g \leftrightarrow x_h$



$m_{gh} = 1_{(h)} + 3_{(g)} - 1_{gh} = 3$

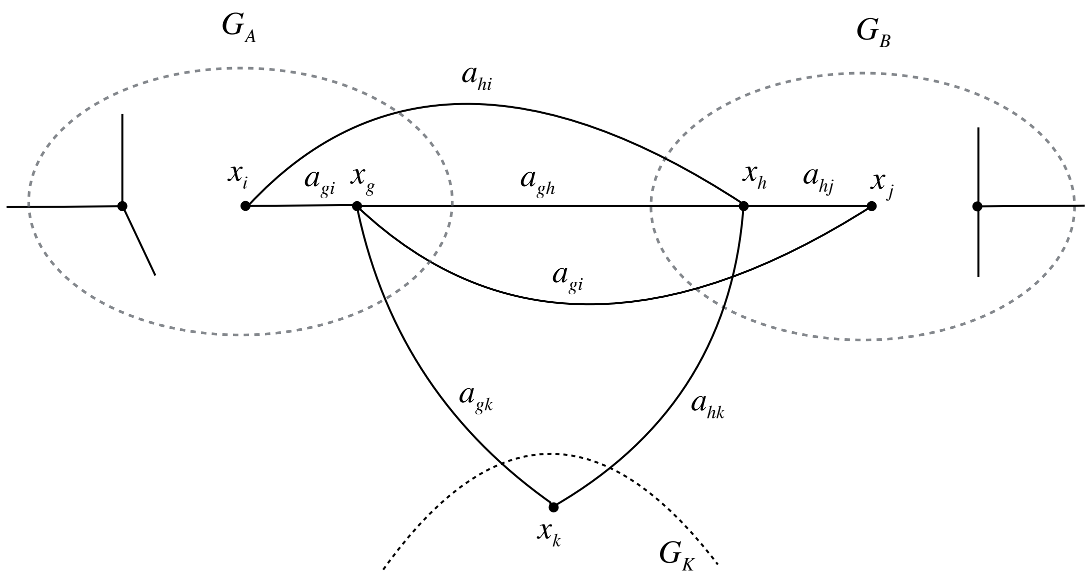
$\Delta m = m_{gh} - m_{hg} = 7 - 3 = 4$

Перстановка є доцільною - ефективна. Кількість зв'язків зменшено на 4.

Зрозуміло, що кожному варіанту компонування тяжко малювати варіант графу та підраховувати Δm при перестановці пари вершин.

Кожного разу бажано знати як змінюється (збільшується/зменшується) число зовнішніх зв'язків при парніх перестановці вершин з підграфу в підграф.
Тому визначемо вираз для підрахунку прирісту числа ребер, що з'єднують підграф $G_A(X_A,V_A)$ та $G_B(X_B,V_B)$ при парному обміні вершин $x_g \leftrightarrow x_h$, $x_g \in G_A$, $x_h \in G_B$.
Очевидно, що парна перестановка вершин x_g та x_h приведе до зміни тільки тих ребер, що зв'язують підграфи $G_A(X_A,V_A)$ та $G_B(X_B,V_B)$, які є інцидентними вершинам, тобто вершинам x_g та x_h.

Зміна ребер при перестановці вершин в загальному випадку визначається так.
Ми працюємо з матрицею зв'язку тому визначемо в загальному випадку зміну зовнішніх (міжвузлових) з'єднань при обміні місцями елементів $x_g \in G_A$ та $x_h \in G_B$. Слід пам'ятати, що при обміні перерозподілюються тільки з'єднання, що належать елементам x_g та x_h (при перестановці вершин x_g та x_h змінюється число тільки тих зв'язуючих ребер, які є інцидентними цим (x_g ;x_h) вершинам).



Згідно рисунку число зовнішніх зв'язків до обміну є рівним.

$$m_{gh} = \sum_{x_j \in (G_B/x_h)} a_{gj} + \sum_{x_i \in (G_A/x_g)} a_{hi} + \sum_{x_k \in v_{ij}} a_{gk} + \sum_{x_k \in v_{ij}} a_{hk} + a_{gh} + c$$

Це так визначається число зовнішніх зв'язків між G_A, G_B, G_K, коли $x_g \in G_A$ та $x_h \in G_B$.

$\sum_{x_j \in (G_B/x_h)} a_{gi}$ - число зв'язків, які має $x_g \in G_A$ з вершинами (без урахування x_h - G_B/x_h) , що розташовані в G_B, крім з вершиною x_h, яка підлягає обміну з x_g.

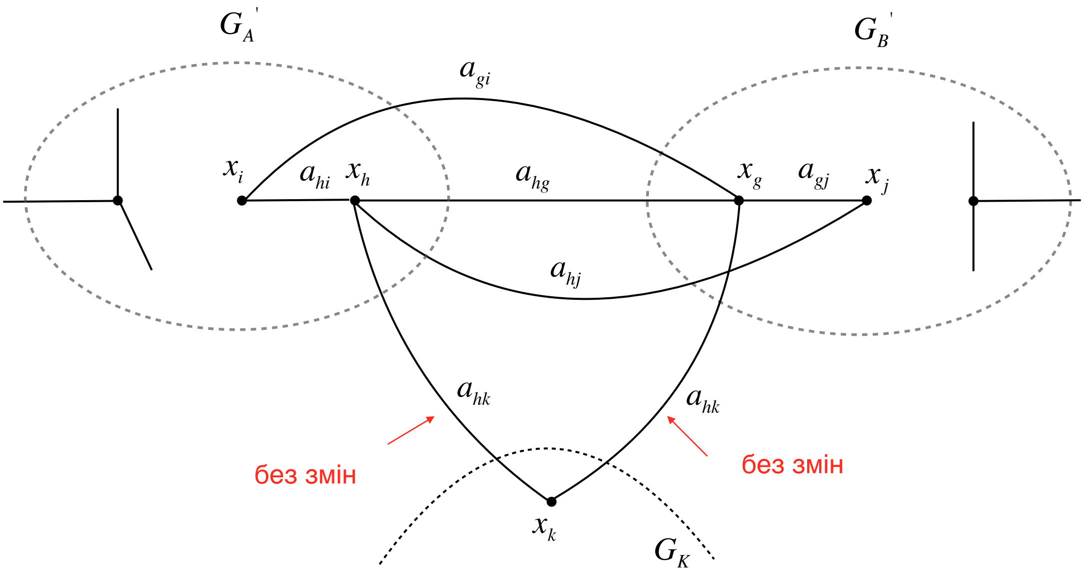
$\sum_{x_i \in (G_A/x_g)} a_{hi}$ - число зв'язків, які має $x_h \in G_B$ з вершинами, що розташовані в G_A, крім з вершиною x_g, яка підлягає обміну с x_h.

$\sum_{x_k \in v_{ij}} a_{gk}, \sum_{x_k \in v_{ij}} a_{hk}$ - кількість зв'яків, які мають вершини x_g та x_h з вершиною x_k, яка разташована в G_K. Треба розуміти, що кількість їх не змінюється при перестановці вершин x_g та x_h.

a_{gh} - число зв'язків між вершинами x_g та x_h, що переставляться, які пораховані до та після перестановки.
c - число зв'язків між елементами, які не переставляються.

Це все в загальному випадку по обміну x_g та x_h

Виконаємо обмін вершини x_g та x_h



Після перестановки кількість зовнішніх зв'язків стане:

$$m_{hg} = \sum_{x_i \in (G_A'/x_h)} a_{gi} + \sum_{x_j \in (G_B'/x_g)} a_{hj} + \sum_{x_k \in v_{ij}} a_{gk} + \sum_{x_k \in v_{ij}} a_{hk} + a_{hg} + c$$

G_A', G_B' - підграфи , в яких x_g та x_h помінялися місцями, тобто x_g переставили з G_A в G_B, а x_h - з G_B в G_A. $m_{gB} = \sum_{x_g \in G_A} a_{gB}$

Тоді приріст числа зовнішніх зв'язків між G_A' та G_B' визначається таким чином:

$$\Delta m = m_{gh} - m_{hg} = \left(\sum_{x_j \in (G_B/x_h)} a_{gj} - \sum_{x_i \in (G_A'/x_h)} a_{gi} \right) + \left(\sum_{x_i \in (G_A/x_g)} a_{hi} - \sum_{x_j \in (G_B'/x_g)} a_{hj} \right)$$

Нехай:

- m_{gA} - кількість з'єднань x_g з елементами G_A, тобто $m_{gA} = \sum_{x_g \in G_A} a_{gA}$ - внутрішні зв'язки
- m_{hB} - кількість з'єднань x_h з елементами G_B, тобто $m_{hB} = \sum_{x_h \in G_B} a_{hB}$ - внутрішні зв'язки
- m_{gB} - кількість з'єднань x_g з елементами G_B, тобто - зонішні зв'язки
- m_{hA} - кількість з'єднань x_h з елементами G_A, тобто $m_{hA} = \sum_{x_h \in G_B} a_{hA}$ - зонішні зв'язки

$$\Delta m_{x_g \leftrightarrow x_h} = \underbrace{(m_{gB} - m_{gA})} + \underbrace{(m_{hA} - m_{hB})} - 2a_{gh}$$

Різниця числа суми зовнішніх та
внутрішніх зв'язків

- a_{gh} число зв'язків між x_g та x_h .

Таким чином, значення Δm може приймати наступні значення:
- $\Delta m = 0$ - тобто при обміні x_g та x_h число зовнішніх зв'язків не змінюються
- $\Delta m > 0$ - тобто при обміні x_g та x_h число зовнішніх зв'язків зменшується
- $\Delta m < 0$ - тобто при обміні x_g та x_h не бажана, тому що призводить до збільшення числа зовнішніх зв'язків

Визначемо $\Delta m_{x_g \leftrightarrow x_h}$ для розглянутого раніше прикладу

$\Delta m_{x_g \leftrightarrow x_h} = (5-2)+(3-0)-2\cdot 1 = 4$

$$\Delta m_{x_g \leftrightarrow x_h} = \left(m_{gB} - m_{gA}\right) + \left(m_{hA} - m_{hB}\right) - 2a_{gh} > 0$$

Для цієї формули $\Delta m > 0$. Ця формула є інваріантною другій формулі. При помноженні на -1 отримаємо

$$-\Delta m_{x_g \leftrightarrow x_h} = \left(m_{gA} - m_{gB}\right) + \left(m_{hB} - m_{hA}\right) + 2a_{gh} < 0$$

$$\Delta m_{x_g \leftrightarrow x_h} = (2-5)+(0-3)+2\cdot 1 = -4$$

Якщо матриця задана матрицею зв'язку $A = \left\|a_{ij}\right\|_{n\times n}$, то розбиття початкового графу $G(X,V)$ на підграфи еквівалентно розбиттю матриці на *K* підматриць, де *K* є кількість вершин в підграфі.
Розбиття початкового графу на підграфи ітераційного алгоритму, описанного матрицею $|A|$ в загальному випадку можна представити так

			G_1 I	G_2 II	G_3 III			
			x_1 $\cdots$ $\cdots$ x_i	x_f $\cdots$ $\cdots$ x_g	x_m $\cdots$ $\cdots$ x_n	$II-I$	$III-I$	
		x_1	a_{11} a_{12} a_{13} $\cdots$ a_{1i}	a_{1f} a_{1k} $\cdots$ a_{1g}	a_{1m} a_{1l} $\cdots$ a_{1n}	$\sum a_{1II} - \sum a_{1I}$	$\sum a_{1III} - \sum a_{1I}$	
		$\vdots$	A_{ii}	A_{ig}	A_{in}	$\vdots$	$\vdots$	
G_1	I	$\vdots$						
		x_i	$\sum g_{nm}$	$\sum n_{nm}$		$\sum a_{iII} - \sum a_{iI}$	$\sum a_{iIII} - \sum a_{iI}$	
						$I-II$		$III-II$
		x_f						
$A=$								
G_2	II	$\vdots$	A_{gi}	A_{gg}	A_{gn}			
		x_g						
							$I-III$	$II-III$
		x_m						
							$\sum a_{mI} - \sum a_{mIII}$	
G_3	III	$\vdots$	A_{ni}	A_{ng}	A_{nn}			
		x_n						$\sum a_{nII} - \sum a_{nIII}$

i, g, n - кількість вершин в підграфах *I, II, III*
i, g, n - кількість рядків-стовпчиків - розмірність підматриць. Враховуючи те, що зручно працювати з квадратними підматрицями однакової розмірності, то *i = g = n*, а A_{ii} , A_{gg} , A_{nn} - підматриці одинакової розмірності. Ми можемо штучно розмірності підматриць вировняти, вводячи фіктивни вершини (вершини з нульовими зв'язками.
A_{ii} , A_{gg} , A_{nn} - диагональні підматриці однакової розмірності

A_{ig}, A_{in}, A_{gn} - побічні півматриці однакової розмірності

$\sum g_{nm}$ - ***сума*** елементів кожного рядка діагональної підматриці - число внутрішніх зв'язків даної вершини у відповідному підграфі $G_1^0 = \{x_8, x_{14}, x_6, x_1\}$, $G_2^0 = \{x_7, x_2, x_3, x_{13}, x_{12}\}$, $G_3^0 = \{x_4, x_5, x_9, x_{10}, x_{11}\}$

$\sum n_{nm}$ - ***сума*** елементів кожного рядка побічної підматриці - число зовнішніх зв'язків даної вершини з вершинами, що знаходяться в інших підграфах.

$\sum a_{1I}$ - ***сума*** зв'язків першої вершини з усіма іншими вершинами, включених до підграфу *I* - внутрішні зв'язки першої вершини в *I* підграфі.

$\sum a_{1II}$ - ***сума*** зв'язків першої вершини, включенної до підграфу *I,* з усима вершинами, ключеними до *II* підграфу (перший рядок II підграфу) - зовнішні зв'язки, які має перша вершина з усима вершинами, включеними до *II* підграфу.

$\sum a_{1II} - \sum a_{1I}$ - різниця зовнішніх та внутрішніх зв'язків первоі вершини.

Визначаємо різницю для всіх вершин, отримаємо вектор стовпчики (*II-I, I-II*), (*III-I, I-III*), (*III-II, II-III*). Вибираємо максимальне (від'ємне ?) значення у відповідних вектор-стовпчиках, які належать конкретним вершинам. Ці вершини переставляються з підграфу в підграф - таким чином ми знайшли вершини x_g та x_h для перестановки. Їх перестановка максимально зменшує кількість зовнішніх зв'язків.
Операція парного обміну вершин x_g та x_h зводиться до перестановки відповідних рядків та стовпчиків (x_g та x_h) в $|A|$.

Процес оптимального розбиття початкового графу $G(X,V)$ на підграфи полягає у визначенні на кожній ітерації таких парних перестановок рядків та стовпчиків в початковій матриці $|A|$,при яких зростає (збільшується) сума елементів у діагональних підматрицях. $A_{gg}, (g = \overline{1,n})$, що рівносильно мінімізації числа з'єднувальних зовнішніх зв'язків (мінімізації суми елементів в побічних підматрицях).
$m = \min$ при умові, що $v_{ii}, v_{gg}, v_{nn} = \max$.

Переваги інтераційного алгоритму можна виділити такі:
- на кожній ітерації маємо результат компонування
- процесом оптимізації ми управляємо
- вибираємо вершини з урахуванням $\Delta m_{x_g \leftrightarrow x_h}$

Ітераційний алгоритм компонування в загальному випадку можна представити