

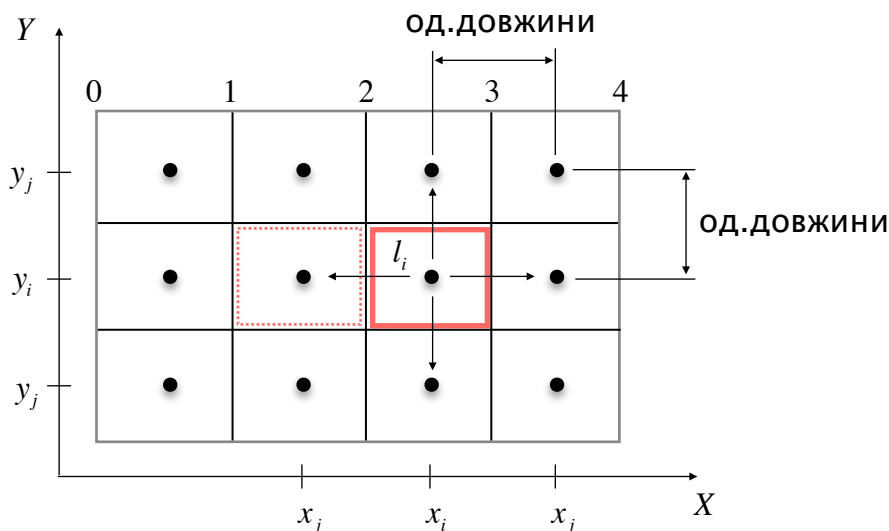
Алгоритм розміщення Хіллера

Число можливих парних перестановок на кожній ітерації з n -елементів визначається

$$N = \frac{n \cdot (n-1)}{2}, \text{ і тому зв'язано зі значними часовими затратами, деколи це є недоцільно.}$$

Тому в ряді алгоритмів на кожній ітерації досліджуються тільки перестановки сусідніх елементів - ми виділяли групи сильно зв'язаних елементів. В цьому випадку скорочується кількість розраховуваних приростів сумарної довжини, а також спрощується й обчислення самих приростів.

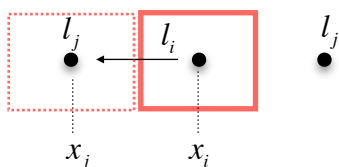
При матричному розміщенні є початкове розміщення, є прямокутний масив позицій (ПМ) та матриця $|A|$. Відстань між сусідніми позиціями примемо за одиницю довжини



Елемент обзначимо як l_i (а не x_i), тому що використовуємо координати x_i (потім перейдемо до звичних обзначень).

Оцінимо зміну сумарної довжини з'єднань при переміщенні елементу l_i в одну з позицій, розташованих безпосередньо зліва, справа, зверху та знизу від нього, відповідно обзначимо $\Delta L_{i \leftarrow}, \Delta L_{i \rightarrow}, \Delta L_{i \uparrow}, \Delta L_{i \downarrow}$.

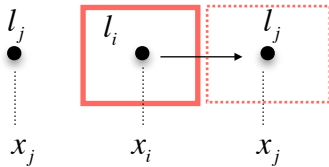
Ці зміни можна визначити по матриці зв'язку $|A|$ та поточному розміщенню елементів. При переміщенні одного елементу зміну сумарної довжини в загальному випадку визначається так



$$\Delta L_{i \leftarrow} = \overbrace{\sum_{\substack{j, x_j < x_i \\ \text{Розташовані зліва} \\ \text{елементи } l_j}} a_{ij}}^{\text{Розташовані зліва} \\ \text{елементи } l_j} - \overbrace{\sum_{j, x_j \geq x_i} a_{ij}}^{\text{Розташовані справа} \\ \text{елементи } l_j}$$

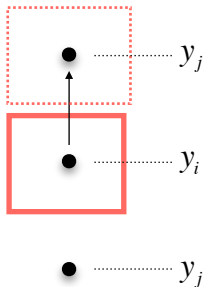
Тут сума - сума зв'язків l_i елементів з усіма елементами l_j , що розташовані лівіше l_i ($x_j < x_i$), правіше l_i ($x_j > x_i$) та стовпчика з координатами x_i ($x_i = x_j$).

Оскільки при переміщені елементу l_i вліво (\leftarrow) зменшується на одиницю довжини його з'єднань зі всіма елементами l_j , розташованими лівіше стовпчика x_i та збільшується на одиницю довжини з усіма елементами l_j ($j \neq i$), розташованими в стовпчику x_i , і правіше його.

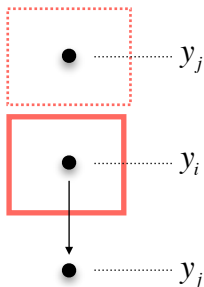


$$\Delta L_{i \rightarrow} = \sum_{j, x_j > x_i} a_{ij} - \sum_{j, x_j \leq x_i} a_{ij}$$

Скорочується вище - зменшується нижче.



$$\Delta L_{i \uparrow} = \sum_{i, y_j > y_i} a_{ij} - \sum_{j, y_j \leq y_i} a_{ij}$$



$$\Delta L_{i \downarrow} = \sum_{i, y_j < y_i} a_{ij} - \sum_{j, y_j \geq y_i} a_{ij}$$

i - зміщення по рядкам

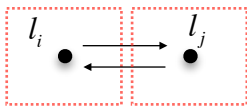
Ці формули дозволяють визначити зміну суми довжин зв'язків при перестановці елементу $\leftrightarrow \updownarrow$ - одного елементу. Якщо елемент l_i ми зміщуємо в нову позицію, то елемент з цієї позиції ми повинні переставити в позицію елементу l_i .

$$\left. \begin{aligned} \Delta L_{i \leftarrow} &= \sum_{j, x_j < x_i} a_{ij} - \sum_{j, x_j \geq x_i} a_{ij} \\ \Delta L_{i \rightarrow} &= \sum_{j, x_j > x_i} a_{ij} - \sum_{j, x_j \leq x_i} a_{ij} \end{aligned} \right\} \text{зміщення по } x_i : y = \text{const}, x_j = x_i \pm 1$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta L_{i \uparrow} &= \sum_{j, y_j < y_i} a_{ij} - \sum_{j, y_j \geq y_i} a_{ij} \\ \Delta L_{i \downarrow} &= \sum_{j, y_j > y_i} a_{ij} - \sum_{j, y_j \leq y_i} a_{ij} \end{aligned} \right\} \text{зміщення по } y_i : x = \text{const}, y_j = y_i \pm 1$$

Визначемо приріст сумарної довжини з'єднань при перестановці пари сусідніх елементів $l_i \leftrightarrow l_j$.

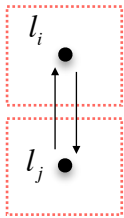
Для випадку, коли елементи розташовані в одному рядку горизонтального масиву, тобто $y_i = y_j$ та нехай $x_j = x_i \pm 1$, тоді отримаємо при зміщенні двох елементів



або $\Delta L_{l_i \leftrightarrow l_j} = \Delta L_{l_i \rightarrow} + \Delta L_{l_j \leftarrow} - 2a_{l_i l_j} \Big|_{\max}$
 (аналог з компонентуванням - Δm)

$2a_{l_i l_j}$ - враховує безпосередньо зв'язки елементів l_i та l_j , які використовувалися при розрахунку як $\Delta L_{l_j \leftarrow}$ так і $\Delta L_{l_i \rightarrow}$.

Для вертикального розташування переставляємих елементів ($x_i = x_j, y_j = y_i \pm 1$) -отримаємо аналогічну формулу



$$\Delta L_{l_i \updownarrow l_j} = \Delta L_{l_i \uparrow} + \Delta L_{l_j \downarrow} - 2a_{l_i l_j} \Big|_{\max}$$

Тому з ціллю збільшення ймовірності отримання результативного обміну місцями сусідніх елементів в алгоритмі Хіллера використовується такий спосіб.

По матриці зв'язку та для даного поточного розташування елементів визначають $\Delta L \rightarrow$, $\Delta L \leftarrow$, $\Delta L \uparrow$, $\Delta L \downarrow$ при зміщенні його в сусідні позиції. Складають таблицю змін сум довжин зв'язків. Тобто розраховується таблиця змін сум довжин зв'язків для кожного елемента при його зміщенні $\updownarrow \leftrightarrow$ до всіх сусідніх позицій.

$x_i(l_i)$	$\Delta L_{x_i \leftarrow}$	$\Delta L_{x_i \rightarrow}$	$\Delta L_{x_i \uparrow}$	$\Delta L_{x_i \downarrow}$
x_1	$\Delta L_1 < 0$			
x_2	$\Delta L_2 = 0$			
\vdots				
x_i	$\Delta L > 0$			
\vdots				
x_k	$\Delta L > 0 = \max$			
\vdots				
x_n				

З таблиці вибираємо максимальне додатнє значення ΔL , яке визначає перший елемент для перестановки та напрямлення його переміщення . Другим переставляємим елементом є сусідній до першого. При цьому другий елемент переміщається в протилежному напрямку відносно раніш розглянутого першого елемента (по $+\Delta L = \max$).

Розглянемо приклад.

В алгоритмі Хіллера завжди дано:

- 1) матриця з'єднань
- 2) початкове розміщення елементів

Визначимо два елемента для перестановки та зміну $\Delta L_{x_i x_j}$

Матриця зв'язків має вид:

		l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6	l_7	l_8	l_9	l_{10}	l_{11}	l_{12}
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}
$A =$	$l_1 \quad x_1$	0	5	2	4	1	0	0	6	2	1	1	1
	$l_2 \quad x_2$	5	0	3	0	2	2	2	0	4	5	0	0
	$l_3 \quad x_3$	2	3	0	0	0	0	0	5	5	2	2	2
	$l_4 \quad x_4$	4	0	0	0	5	2	2	10	0	0	5	5
	$l_5 \quad x_5$	1	2	0	5	0	10	0	0	0	5	1	1
	$l_6 \quad x_6$	0	2	0	2	10	0	5	1	1	5	4	0
	$l_7 \quad x_7$	0	2	0	2	0	5	0	10	5	2	3	3
	$l_8 \quad x_8$	6	0	5	10	0	1	10	0	0	0	5	0
	$l_9 \quad x_9$	2	4	5	0	0	1	5	0	0	0	10	10
	$l_{10} \quad x_{10}$	1	5	2	0	5	5	2	0	0	0	5	0
	$l_{11} \quad x_{11}$	1	0	2	5	1	4	3	5	10	5	0	2
	$l_{12} \quad x_{12}$	1	0	2	5	1	0	3	0	10	0	2	0

Та початкове розміщення має вигляд

$x_4(l_4)$	$x_9(l_9)$	$x_{11}(l_{11})$	$x_{10}(l_{10})$
$x_6(l_6)$	$x_{12}(l_{12})$	$x_7(l_7) \rightarrow$	$\leftarrow x_8(l_8)$
$x_3(l_3)$	$x_1(l_1)$	$x_2(l_2)$	$x_5(l_5)$

x_8 - визначаємо по таблиці (максимальне значення) та напрямлення зміщення. Другий елемент для зміщення буде сусідній з x_8 , тобто x_7 . Направлення зміщення - зворотне напрямленню x_8 - тобто $x_7 \rightarrow$.

По матриці зв'язків A та початковому розміщенню складаємо таблицю ΔL змін довжини з'єднань при переміщенні елементів в сусідні позиції.

$x_i(l_i)$	$\Delta L_{x_i \leftarrow}$	$\Delta L_{x_i \rightarrow}$	$\Delta L_{x_i \uparrow}$	$\Delta L_{x_i \downarrow}$
x_1	-11	+5	+7	-
x_2	+5	-9 (-5)	+3	-
x_3	-	+21	+11	-
x_4	-	+29	-	+23
x_5	+15	-	+19	-
x_6	-	+26	-6	-6
x_7	-2 (+28)	-8 (-)	-8	-28
x_8	+37 (+7)	- (-17)	-7	-15
x_9	-25	+1	-	+17
x_{10}	+15 (+11)	-	-	+15
x_{11}	+10	-16 (-20)	-	-2
x_{12}	-10	-12	+10	-16

Проаналізуємо таблицю

⊕ - зменшення сумарної довжини

⊖ - збільшується сумарна довжина

‘-’ - не можна проводити зміщення

0 - сумарна довжина не змінюється

Розглянемо, наприклад, розрахунок значень ΔL для x_8 . При переміщенні його вліво зменшується на одиницю довжини зв'язків з елементами $x_4, x_6, x_3, x_9, x_{12}, x_1, x_{11}, x_7, x_2$ і збільшується на одиницю довжини зв'язків з елементами x_{10} та x_5 , розташованими в стовпчику. ΔL_{x_8} можливо визначити так: по стовпчикам або по рядкам - результат буде той самий.

По стовпчикам:

$$\Delta L_{x_8 \leftarrow} = (a_{84} + a_{86} + a_{83} + a_{89} + a_{8.12} + a_{81} + a_{8.11} + a_{87} + a_{82}) \times 1 - (a_{8.10} + a_{85}) \times 1 = \\ = (10 + 1 + 5 + 0 + 0 + 6 + 5 + 10 + 0) \times 1 - (0 + 0) \times 1 = +37$$

По рядкам:

$$\Delta L_{x_8 \leftarrow} = (a_{84} + a_{89} + a_{8.11} + a_{86} + a_{8.12} + a_{87} + a_{83} + a_{81} + a_{82}) \times 1 - (a_{8.10} + a_{85}) \times 1 = +37$$

$\Delta L_{x_8 \rightarrow}$ - переміщати неможна, тому що елемент виходить за габарити монтажного простору.

$$\Delta L_{x_8 \uparrow} = \left(\underbrace{a_{84} + a_{89} + a_{8.11} + a_{8.10}}_{\text{всі елементи, які вище } x_8} \right) - \left(\underbrace{a_{83} + a_{81} + a_{82} + a_{85}}_{\text{всі елементи, які нижче } x_8} + \underbrace{a_{86} + a_{8.12} + a_{87}}_{\text{всі елементи, які знаходяться в рядку } x_8} \right) = \\ = (10 + 0 + 5 + 0) - (5 + 6 + 0 + 0 + 1 + 0 + 10) = 15 - 22 = -7$$

$$\begin{aligned}
\Delta L_{x_1 \leftarrow} &= (a_{14} + a_{16} + a_{13}) - (a_{15} + a_{1.12} + a_{12} + a_{17} + a_{1.11} + a_{15} + a_{18} + a_{10}) = \\
&= (4 + 0 + 2) - (2 + 5 + 1 + 0 + 1 + 1 + 1 + 6 + 1) = 6 - 17 = -11 \\
\Delta L_{x_2 \leftarrow} &= (a_{24} + a_{26} + a_{23} + a_{29} + a_{2.12} + a_{21}) - (a_{2.11} + a_{27} + a_{25} + a_{28} + a_{2.10}) = \\
&= (0 + 2 + 3 + 4 + 0 + 5) - (0 + 2 + 2 + 0 + 5) = 14 - 9 = +5 \\
\Delta L_{x_3 \leftarrow} &= - \\
\Delta L_{x_4 \leftarrow} &= - \\
\Delta L_{x_5 \leftarrow} &= (a_{54} + a_{56} + a_{53} + a_{59} + a_{5.12} + a_{51} + a_{5.11} + a_{57} + a_{52}) - (a_{5.10} + a_{52}) = \\
&= (5 + 10 + 0 + 0 + 1 + 1 + 1 + 0 + 2) - (5 + 0) = +15 \\
\Delta L_{x_6 \leftarrow} &= - \\
\Delta L_{x_7 \leftarrow} &= (a_{74} + a_{76} + a_{73} + a_{79} + a_{7.12} + a_{71}) - (a_{7.11} + a_{72} + a_{7.10} + a_{78} + a_{75}) = \\
&= (2 + 5 + 0 + 5 + 3 + 0) - (3 + 2 + 2 + 10 + 0) = 15 - 17 = -2 \\
\Delta L_{x_8 \leftarrow} &= (a_{84} + a_{86} + a_{83} + a_{89} + a_{8.12} + a_{81} + a_{8.11} + a_{87} + a_{82}) - (a_{8.10} + a_{85}) = \\
&= (10 + 1 + 5 + 0 + 0 + 6 + 5 + 10 + 0) - (0 + 0) = +37 \\
\Delta L_{x_9 \leftarrow} &= (a_{94} + a_{96} + a_{93}) - (a_{9.12} + a_{91} + a_{9.11} + a_{97} + a_{92} + a_{9.10} + a_{98} + a_{95}) = \\
&= (0 + 1 + 5) - (10 + 2 + 10 + 5 + 4 + 0 + 0 + 0) = +6 - 31 = -25 \\
\Delta L_{x_{10} \leftarrow} &= (a_{10.4} + a_{10.6} + a_{10.3} + a_{10.9} + a_{10.12} + a_{10.1} + a_{10.11} + a_{10.7} + a_{10.2}) - (a_{10.8} + a_{10.5}) = \\
&= (0 + 5 + 2 + 0 + 0 + 1 + 5 + 2 + 5) - (0 + 5) = +15 \\
\Delta L_{x_{11} \leftarrow} &= (a_{11.4} + a_{11.6} + a_{11.3} + a_{11.9} + a_{11.12} + a_{11.1}) - (a_{11.7} + a_{11.2} + a_{11.10} + a_{11.8} + a_{11.5}) = \\
&= (5 + 4 + 2 + 10 + 2 + 1) - (3 + 0 + 5 + 5 + 1) = 24 - 14 = +10 \\
\Delta L_{x_{12} \leftarrow} &= (a_{12.4} + a_{12.6} + a_{12.3}) - (a_{12.9} + a_{12.1} + a_{12.11} + a_{12.7} + a_{12.2} + a_{12.10} + a_{12.8} + a_{12.5}) = \\
&= (5 + 0 + 2) - (10 + 1 + 2 + 3 + 0 + 0 + 0 + 1) = 7 - 17 = -10 \\
\\
\Delta L_{x_i} &= \\
\Delta L_{x_1 \rightarrow} &= (a_{12} + a_{17} + a_{1.11} + a_{15} + a_{18} + a_{1.10}) - (a_{11.2} + a_{19} + a_{13} + a_{16} + a_{14}) = \\
&= (5 + 0 + 1 + 1 + 6 + 1) - (1 + 2 + 2 + 0 + 4) = 14 - 9 = +5 \\
\Delta L_{x_2 \rightarrow} &= (a_{25} + a_{28} + a_{2.10}) - (a_{27} + a_{2.11} + a_{21} + a_{2.12} + a_{29} + a_{23} + a_{26} + a_{24}) = \\
&= (2 + 0 + 5) - (2 + 0 + 5 + 0 + 4 + 3 + 2 + 0) = 7 - 16 = -9 \\
\Delta L_{x_3 \rightarrow} &= (a_{31} + a_{3.12} + a_{39} + a_{32} + a_{37} + a_{3.11} + a_{35} + a_{38} + a_{3.10}) - (a_{36} + a_{34}) = \\
&= (2 + 2 + 5 + 3 + 0 + 2 + 0 + 5 + 2) - (0 + 0) = +21 \\
\Delta L_{x_4 \rightarrow} &= (a_{49} + a_{4.12} + a_{41} + a_{4.11} + a_{47} + a_{42} + a_{4.10} + a_{48} + a_{45}) - (a_{46} + a_{43}) = \\
&= (0 + 5 + 4 + 5 + 2 + 0 + 0 + 10 + 5) - (2 + 0) = +29 \\
\Delta L_{x_5 \rightarrow} &= - \\
\Delta L_{x_6 \rightarrow} &= (a_{69} + a_{6.12} + a_{61} + a_{6.11} + a_{67} + a_{62} + a_{6.10} + a_{68} + a_{65}) - (a_{64} + a_{63}) = \\
&= (1 + 0 + 0 + 4 + 5 + 2 + 5 + 1 + 10) - (2 + 0) = +26 \\
\Delta L_{x_7 \rightarrow} &= (a_{7.10} + a_{78} + a_{75}) - (a_{7.11} + a_{72} + a_{79} + a_{7.12} + a_{71} + a_{74} + a_{76} + a_{73}) = \\
&= (2 + 10 + 0) - (3 + 2 + 5 + 3 + 0 + 2 + 5 + 0) = 12 - 20 = -8 \\
\Delta L_{x_8 \rightarrow} &= -
\end{aligned}$$

$$\Delta L_{x_9 \rightarrow} = (a_{9.11} + a_{97} + a_{92} + a_{9.10} + a_{98} + a_{95}) - (a_{9.12} + a_{91} + a_{94} + a_{96} + a_{93}) =$$

$$= (10 + 5 + 4 + 0 + 0 + 0) - (10 + 2 + 0 + 1 + 5) = 19 - 18 = +1$$

$$\Delta L_{x_{10} \rightarrow} = -$$

$$\Delta L_{x_{11} \rightarrow} = (a_{11.10} + a_{11.8} + a_{11.5}) - (a_{11.7} + a_{11.2} + a_{11.9} + a_{11.12} + a_{11.1} + a_{11.4} + a_{11.6} + a_{11.3}) =$$

$$= (5 + 5 + 1) - (3 + 0 + 10 + 2 + 1 + 5 + 4 + 2) = 11 - 24 = -16$$

$$\Delta L_{x_{12} \rightarrow} = (a_{12.11} + a_{12.7} + a_{12.2} + a_{12.10} + a_{12.8} + a_{12.5}) - (a_{12.9} + a_{12.1} + a_{12.4} + a_{12.6} + a_{12.3}) =$$

$$= (2 + 3 + 0 + 0 + 0 + 1) - (10 + 1 + 5 + 0 + 2) = 6 - 18 = -12$$

$$\Delta L_{x_i \uparrow}$$

$$\Delta L_{x_1 \uparrow} = (a_{16} + a_{14} + a_{1.12} + a_{19} + a_{17} + a_{1.11} + a_{18} + a_{1.10}) - (a_{13} + a_{12} + a_{15}) =$$

$$= (0 + 4 + 1 + 2 + 0 + 1 + 6 + 1) - (2 + 5 + 1) = 15 - 8 = +7$$

$$\Delta L_{x_8 \uparrow} = (a_{84} + a_{89} + a_{8.11} + a_{8.10}) - (a_{86} + a_{8.12} + a_{87} + a_{83} + a_{81} + a_{82} + a_{85}) = -7$$

$$\Delta L_{x_4 \uparrow} = -$$

$$\Delta L_{x_9 \uparrow} = -$$

$$\Delta L_{x_{11} \uparrow} = -$$

$$\Delta L_{x_{10} \uparrow} = -$$

$$\Delta L_{x_{12} \uparrow} = (a_{12.4} + a_{12.9} + a_{12.11} + a_{12.10}) - (a_{12.6} + a_{12.7} + a_{12.8} + a_{12.3} + a_{12.1} + a_{12.2} + a_{12.5}) = +10$$

$$\Delta L_{x_i \downarrow}$$

$$\Delta L_{x_3 \downarrow} = -$$

$$\Delta L_{x_1 \downarrow} = -$$

$$\Delta L_{x_2 \downarrow} = -$$

$$\Delta L_{x_5 \downarrow} = -$$

$$\Delta L_{x_{12} \downarrow} = (a_{12.3} + a_{12.1} + a_{12.2} + a_{12.5}) - (a_{12.6} + a_{12.7} + a_{12.8} + a_{12.4} + a_{12.9} + a_{12.11} + a_{12.10}) = -16$$

Аналогічно можливо обчислити приріст довжин з'єднань при переміщенні всіх елементів вліво, вправо, вгору, вниз. Значення змін приростів ΔL зведені до таблиці, що представлена.

З таблиці слідує, що $\Delta L_{x_8 \leftarrow} = 37$ є максимальною. Так вибирається перший елемент для переміщення x_8 та його направлення переміщення $x_8 \leftarrow$. Тому згідно алгоритму Хіллера, зробимо обмін $x_8 \leftarrow$ з сусіднім з ним елементом $x_7 \rightarrow$.

$$\text{Визначемо } \Delta L_{x_7 \leftrightarrow x_8} = \Delta L_{x_7 \leftarrow} + \Delta L_{x_8 \rightarrow} - 2a_{x_7 x_8} = -8 + 37 - 2 \cdot 10 = 9$$

Дана перестановка є результативною та отримаємо нове розміщення з меншою довжиною з'єднань.

Отримаємо нове розміщення

$x_4(l_4)$	$x_9(l_9)$	$x_{11}(l_{11})$	$x_{10}(l_{10})$
$x_6(l_6)$	$x_{12}(l_{12})$	$x_8(l_8)$	$x_7(l_7)$
$x_3(l_3)$	$x_1(l_1)$	$x_2(l_2)$	$x_5(l_5)$

Щоб заповнити нову таблицю необхідно визначити $\Delta L_{x_8 \leftarrow}$ та $\Delta L_{x_7 \rightarrow}$

$\Delta L_{x_8 \leftarrow} = (a_{84} + a_{86} + a_{83} + a_{89} + a_{8.12} + a_{81}) - (a_{8.11} + a_{82} + a_{8.10} + a_{87} + a_{85}) = 22 - 15 = +7$ - значення в дужках в таблиці

$\Delta L_{x_7 \rightarrow} = -$. x_7 в праву сторону переставляти не можна

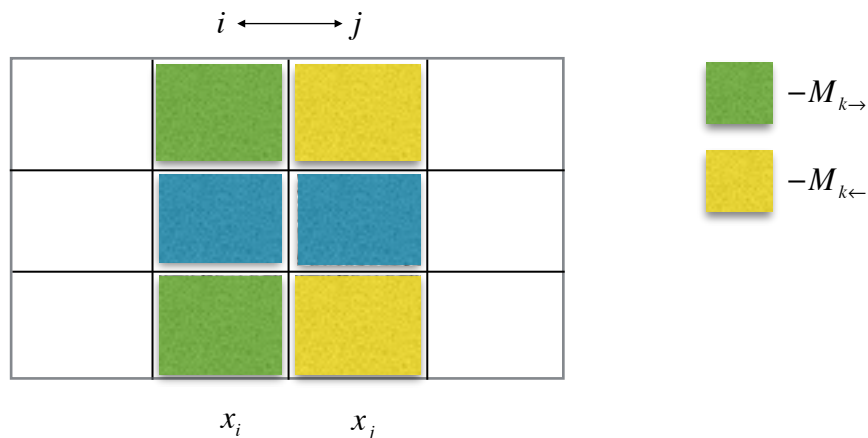
Слідє відмітити, що на кожній наступній перестановці з ціллю скорочення операцій при обчисленні приростів можливо перераховувати тільки деякі елементи таблиці.

Нехай виконали перестановку сусідніх елементів l_i та l_j в одному рядку масиву позицій $y_i = y_j$ $x_j = x_i + 1$.

Очевидно, що $\Delta L_{k \uparrow}$ та $\Delta L_{k \downarrow}$ при цьому не змінюється. Ми визначили $\Delta L_{7 \leftarrow}$ та $\Delta L_{7 \rightarrow}$; $\Delta L_{8 \rightarrow}$ та $\Delta L_{8 \leftarrow}$. Аналогічно для випадку $x_i = x_j$; $y_j = y_i + 1$ (елемент змінюється стовпчику, тоді $\Delta L_{k \leftarrow}$ та $\Delta L_{k \rightarrow}$ при цьому не змінюється.

Для елементів $l_k(x_k = x_i)$ змінюється праві $M_{k \rightarrow}$, а для елементів $l_k(x_k = x_j)$ змінюються ліві $M_{k \leftarrow}$. Схематично зони зміни характеристики для випадку

“горизонтального” обміну



та “вертикального” обміну



Алгоритми розміщення, в яких досліджується тільки перестановки сусідніх елементів, мають переваги порівняно з алгоритмами, в яких аналізується вся множина можливих парних обмінів, в тому випадку, коли вони використовуються для гарного початкового розміщення. Для такого розміщення ймовірність розміщення сильно зв'язаних елементів в безпосередній близькості одне від одного достатньо велика.