

安徽大学 2019—2020 学年第一学期

《高等数学 A (一)》期末考试试卷

(闭卷 时间 120 分钟)

一、选择题 (每小题 2 分, 共 10 分)

1. 函数 $f(x) = \frac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列 () 区间内有界.

- (A) $(-1, 0)$ (B) $(0, 1)$ (C) $(1, 2)$ (D) $(2, 3)$

2. 设函数 $y = f(x)$ 具有二阶导数, 且 $f'(x) > 0, f''(x) > 0, \Delta x$ 为自变量 x 在点 x_0 处的增量, Δy 与 dy 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分, 若 $\Delta x > 0$, 则 ().

- (A) $dy < \Delta y < 0$ (B) $\Delta y < dy < 0$ (C) $0 < dy < \Delta y$ (D) $0 < \Delta y < dy$

3. 设 $f(x)$ 有二阶连续导函数, 且 $f(0) = f'(0) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{|x|} = -1$, 则存在 $\delta > 0$, 有 ().

- (A) $\int_{-\delta}^{\delta} f(x) dx > 0$ (B) $\int_{-\delta}^{\delta} f(x) dx < 0$
(C) $\int_{-\delta}^{\delta} f(x) dx = 0$ (D) $\int_{-\delta}^{\delta} f(x) dx > 0$ 且 $\int_{-\delta}^{\delta} f(x) dx < 0$

4. 曲线 $y = \frac{1+x}{1-e^{-x}}$ 有 () 条渐近线.

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

5. 下列反常积分中收敛的是 ().

- (A) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$ (B) $\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^3}$ (C) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln \sqrt{x})^2} dx$ (D) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)} dx$

二、填空题 (每小题 2 分, 共 10 分)

6. 设 $y = y(x)$ 由方程 $e^{-y} + x(y-x) = 1+x$ 所确定, 则曲线 $y = y(x)$ 在 $x = 0$ 处的切线方程为 _____.

7. 曲线 $\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$ 在点 $t = 1$ 处的曲率半径为 _____.

8. 设 $f(x)$ 有连续导函数且 $f(x) > 0, \ln f(x) = \sin x$, 则 $\int \frac{xf'(x)}{f(x)} dx =$ _____.

9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{4n^2 - 1^2}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - 2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - n^2}} \right) = \underline{\hspace{2cm}}.$

10. 半径为 1 的半圆周 $x^2 + y^2 = 1 (y \geq 0)$ 的质心坐标为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

三、计算题 (每小题 9 分, 共 54 分)

11. 设 $f(x)$ 可导, 且 $f(0) = 0, f'(0) = 1$, 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t f(x^2 - t^2) dt}{x^2(1 - e^{x^2})}.$

12. 求 $f(x) = |xe^{-x}|$ 的极值与拐点.

13. 计算不定积分 $\int \ln \left(1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}} \right) dx.$

14. 计算 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 4x}}.$

15. 已知 $a_n = \int_0^{2\pi} e^{-x} \sin nx dx$ (n 为正整数), 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n.$

16. 设 $f(x), g(x)$ 在区间 $[-a, a] (a > 0)$ 上连续, $g(x)$ 为偶函数, 且 $f(x)$ 满足条件 $f(x) + f(-x) = A$ (A 为常数).

(1) 证明: $\int_{-a}^a f(x)g(x)dx = A \int_0^a g(x)dx;$

(2) 利用 (1) 的结果计算 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| \arctan e^x dx.$

四、应用题 (每小题 12 分, 共 12 分)

17. 设曲线 $y = a(1 - x^2) (a > 0)$ 在点 $A(1, 0)$ 和点 $B(-1, 0)$ 处的法线与曲线所围成封闭图形为 $D.$

(1) 当 D 的面积最小时, 求 a 的值和最小面积.

(2) 当 D 的面积最小时, 求 D 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积.

五、证明题 (每小题 7 分, 共 14 分)

18. 设 $f(x)$ 可导, $f(0) = 0, f'(x)$ 单调递减. 证明: 对 $x \in (0, 1)$, 有 $f(1)x < f(x) < f'(0)x.$

19. 已知 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续, 在 $(0, 2)$ 上二阶可导, 且 $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \left(\frac{f(x)}{x - \frac{1}{2}} \right) = 0, f(2) =$

$2 \int_1^3 f(x) dx.$ 试证: 存在 $\xi \in (0, 2)$ 使得 $f''(\xi) = 0.$