安徽大学 2019—2020 学年第一学期

《 高等数学 A（一）》期末考试试卷答案详解

一、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

1. A　2. C　3. B　4. D　5. C

二、填空题（每小题 2 分，共 10 分）

6. $y=-x$　**7.** 6　**8.** $x\sin x+\cos x+C$　**9.** $\dfrac{\pi}{6}$　**10.** $\left(0,\dfrac{2}{\pi}\right)$

三、计算题（每小题 9 分，共 54 分）

11.【解】 $\int_0^x tf(x^2-t^2)\,dt \overset{x^2-t^2=u}{=} -\dfrac{1}{2}\int_{x^2}^0 f(u)\,du=\dfrac{1}{2}\int_0^{x^2} f(u)\,du$

故 $$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x tf(x^2-t^2)\,dt}{x^2(1-e^{x^2})}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\int_0^{x^2} f(u)\,du}{x^2(-x^2)}=-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\int_0^{x^2} f(u)\,du}{x^4}$$

$$\overset{\text{洛比达}}{=}-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}f(x^2)\cdot 2x}{4x^3}=-\lim_{x\to 0}\frac{f(x^2)}{4x^2}$$

$$=-\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{f(x^2)-f(0)}{x^2-0}$$

$$=-\frac{1}{4}f'_+(0)=-\frac{1}{4}f'(0)=-\frac{1}{4}$$　　9 分

12. 【解】由已知，有

$$f(x)=\begin{cases}-xe^{-x}, & x<0,\\ xe^{-x}, & x\ge 0,\end{cases}$$

$f(x)$ 在 $x=0$ 点处连续

故 $$f'(x)=\begin{cases}e^{-x}(x-1), & x<0,\\ e^{-x}(1-x), & x>0,\end{cases}$$

又 $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-xe^{-x}}{x}=-1$，$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{xe^{-x}}{x}=1$，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 点处不可导.

令 $f'(x)=0$，得 $f(x)$ 的唯一驻点 $x=1$；

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	—	不存在	+	0	—

$f(x)$	]	极小值	Z	极大值	]

则 $f(x)$ 的极大值 $f(1)=e^{-1}$，极小值 $f(0)=0$；

又 $f''(x)=\begin{cases} e^{-x}(2-x), & x<0, \\ e^{-x}(x-2), & x>0, \end{cases}$ 令 $f''(x)=0$，得 $x=2$； $x=0$ 为 $f(x)$ 不可导点，

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f''(x)$	+	不存在	—	0	+
$f(x)$	凹	拐点	凸	拐点	凹

则 $f(x)$ 的拐点为 $(0,0)$ 和 $(2,2e^{-2})$ 9 分

13.【解】

$$\int \ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)dx \overset{\sqrt{\frac{1+x}{x}}=t}{\underset{x=\frac{1}{t^2-1}}{=}} \int \ln(1+t)\,d\left(\frac{1}{t^2-1}\right)=\frac{\ln(1+t)}{t^2-1}-\int\frac{dt}{(t-1)(t+1)^2}$$

$$=\frac{\ln(1+t)}{t^2-1}-\int\left(\frac{\frac{1}{4}}{t-1}+\frac{-\frac{1}{4}}{t+1}+\frac{-\frac{1}{2}}{(t+1)^2}\right)dt$$

$$=\frac{\ln(1+t)}{t^2-1}-\frac{1}{2}\frac{1}{t+1}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$$

$$=x\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)-\frac{1}{2}\ln(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})-\frac{1}{2}x\left(\sqrt{\frac{1+x}{x}}-1\right)+C$$ 9 分

14.【解】方法一（倒代换）

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x}} \overset{\frac{1}{x}=t}{=} \int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{\sqrt{1+4t}}$$

$$=\frac{1}{2}(1+4t)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-1\right).$$ 9 分

方法二（三角换元）

$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x}}=\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{(x+2)^2-4}} \overset{x+2=2\sec t}{=} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sec t\cdot\tan t}{2(\sec t-1)\cdot 2\tan t}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec t}{\sec t-1}dt=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1-\cos t}dt=\frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\csc^2\frac{t}{2}dt$$

$$=-\frac{1}{2}\cot\frac{t}{2}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$$ 9 分

15.【解】 $a_n=\int_0^{2\pi}e^{-x}\sin nxdx=-\int_0^{2\pi}\sin nxd(e^{-x})$

$$=-\left(e^{-x}\sin nx\Big|_0^{2\pi}-n\int_0^{2\pi}e^{-x}\cos nxdx\right)=n\int_0^{2\pi}e^{-x}\cos nxdx$$

$$=-n\int_0^{2\pi}\cos nxd(e^{-x})=-n\left(e^{-x}\cos nx\Big|_0^{2\pi}+n\int_0^{2\pi}e^{-x}\sin nxdx\right)$$

$$=-n(e^{-2\pi}-1)-n^2\int_0^{2\pi}e^{-x}\sin nxdx=-n(e^{-2\pi}-1)-n^2a_n$$

移项，得 $a_n=\dfrac{n(1-e^{-2\pi})}{1+n^2}$；

故 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2(1-e^{-2\pi})}{1+n^2}=1-e^{-2\pi}$. 9 分

16.【解】（1）$\int_{-a}^{a}f(x)g(x)dx\overset{x=-t}{=}-\int_{a}^{-a}f(-t)g(-t)dt=\int_{-a}^{a}f(-x)g(-x)dx$

$$=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}\left[f(x)+f(-x)\right]g(x)dx=A\int_0^a g(x)dx.$$

（2）$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\arctan e^x dx$ 中 $f(x)=\arctan e^x$，$g(x)=|\sin x|$，

$g(x)$ 为偶函数，下证 $f(x)+f(-x)=A$，考虑其导数，有

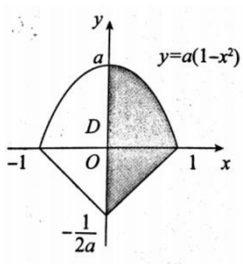
$$\left[f(x)+f(-x)\right]'=\left(\arctan e^x+\arctan e^{-x}\right)'=0,$$

所以 $f(x)+f(-x)\equiv A$，取 $x=0$，可得 $A=\dfrac{\pi}{2}$，则

$$f(x)+f(-x)=\arctan e^x+\arctan e^{-x}=\frac{\pi}{2},$$

则 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\arctan e^x dx=\dfrac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|dx=\dfrac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx=\dfrac{\pi}{2}$. 9 分

四、应用题（每小题 12 分，共 12 分）



17.【解】（1）由 $y=a(1-x^2)$，有 $y'=-2ax$，则过点 $A(1,0)$ 的法线斜率为 $\dfrac{1}{2a}$，从而得到过点 $A(1,0)$ 的法线方程为 $y=\dfrac{1}{2a}(x-1)$；

如图所示，由于图形关于 y 轴对称，故 D 的面积为

$S(a)=2\int_0^1\left[a(1-x^2)-\frac{1}{2a}(x-1)\right]dx=\frac{4a}{3}+\frac{1}{2a}$，

令 $S'(a)=\frac{4}{3}-\frac{1}{2a^2}=0$，解得 $a=\frac{\sqrt{6}}{4}$ 或 $a=-\frac{\sqrt{6}}{4}$（舍去），又 $S''\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)>0$，故当 $a=\frac{\sqrt{6}}{4}$ 时，$S(a)$ 最小，最小面积为 $S\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)=\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

（2）由于 D 的下半部分三角形区域绕 y 轴旋转为圆锥体，其体积为

$$V_1=\frac{1}{3}\pi\times 1^2\times\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{9}\pi,$$

且 D 的上半部分绕 y 轴旋转体的体积为

$$V_2=\int_0^{\frac{\sqrt{6}}{4}}\pi\cdot x^2(y)dy=\int_0^{\frac{\sqrt{6}}{4}}\pi\cdot\left(1-\frac{4}{\sqrt{6}}y\right)dy=\frac{\sqrt{6}}{4}\pi-\frac{3\pi}{4\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{8}\pi,$$

故所求旋转体的体积为

$$V=V_1+V_2=\frac{\sqrt{6}}{9}\pi+\frac{\sqrt{6}}{8}\pi=\frac{17\sqrt{6}}{72}\pi.$$ 12 分

五、证明题（每小题 7 分，共 14 分）

18.【证明】

（1）先证 $f(x)<f'(0)x$

当 $x\in(0,1)$，令 $g(x)=f(x)-f'(0)x$，$g'(x)=f'(x)-f'(0)<0$，

则 $g(x)$ 单调递减，又 $g(0)=0$，可知 $g(x)<g(0)=0$，有 $f(x)<f'(0)x$；

（2）再证 $f(1)x<f(x)$

令 $h(x)=\frac{f(x)}{x}$，只要证 $h(x)>h(1)$，即只要证 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减.

$h'(x)=\frac{f'(x)\cdot x-f(x)}{x^2}=\frac{f'(x)\cdot x-\left[f(x)-f(0)\right]}{x^2}=\frac{f'(x)\cdot x-f'(\xi)x}{x^2}$，其中 $0<\xi<x$

因为 $f'(x)$ 单调递减，所以 $h'(x)<0$，即 $h(x)$ 单调递减，则 $h(x)=\frac{f(x)}{x}>\frac{f(1)}{1}$，

即 $f(1)x<f(x)$； 7 分

19.【证明】

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(x)}{x-\frac{1}{2}}=0$ 及 $f(x)$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 处连续，则 $0=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}f(x)=f(\frac{1}{2})$，进而可得

$$f'(\frac{1}{2})=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}=0;$$

又由积分中值定理可知，存在$\eta \in \left(1, \dfrac{3}{2}\right)$，使得

$$f(2) = 2\int_{1}^{\frac{3}{2}} f(x)dx = 2f(\eta) \cdot \frac{1}{2} = f(\eta);$$

由$f(x)$在$[\eta, 2]$上连续，在$(\eta, 2)$内可导，$f(2) = f(\eta)$，由罗尔定理，存在$\tau \in (\eta, 2)$，使得$f'(\tau) = 0$；

又$f'(x)$在$[\dfrac{1}{2}, \tau]$上连续，在$\left(\dfrac{1}{2}, \tau\right)$内可导，$f'(\dfrac{1}{2}) = f'(\tau)$，由罗尔定理，存在$\xi \in (\dfrac{1}{2}, \tau) \subset (0, 2)$，使得$f''(\xi) = 0$.　　7 分