

# ДИНАМИКА РАСКРЫТИЯ СТОРОК СОЛНЕЧНЫХ БАТАРЕЙ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

Юдинцев В. В.

ФГУП ГНП РКЦ «ЦСКБ-Прогресс», Самара

Рассматривается процесс раскрытия створок панелей солнечных батарей космического аппарата. Для построения уравнений движения системы используется модифицированный для плоских систем метод отдельных тел, учитывающий возможное отсутствие в механической системе тела, с заданным законом движения. Представлена методика построения модели процесса, учитывающая упругость элементов фиксации в узлах вращения створок. На численном примере показана работоспособность представленного алгоритма построения уравнений движения и его эффективность.

*Ключевые слова: космический аппарат, солнечная батарея, метод отдельных тел.*

## Введение

Среди множества задач, возникающих при проектировании космических аппаратов (КА) отметим задачи синтеза подвижных элементов конструкции КА. К таким системам относятся и механические системы раскрытия створок панелей солнечных батарей (СБ). На этапе проектирования КА, когда необходимо выбрать энергетически характеристики приводов створок СБ (обычно используют пружины кручения или торсионы), часто бывает достаточно ограничиться упрощенной моделью СБ, представляющей собой систему связанных твёрдых тел. Приводы створок должны обеспечивать, с одной стороны, гарантированное раскрытие батареи, с другой – минимизацию нагрузок на её конструкцию. Алгоритм выбора параметров приводов предполагает многократное проведение численных экспериментов процесса раскрытия, что и требует использование эффективной модели процесса.

Для построения уравнений движения могут быть использованы различные методы, некоторые из них представлены в работах [1-3]. Большая часть методов предполагает формирование матрицы масс всей системы и разрешение на каждом шаге процедуры численного интегрировании системы дифференциальных уравнений, линейных уравнений для определения вторых производных обобщенных координат, то есть приведение системы к форме Коши. В работе [3] представлен альтернативный метод, не требующий формирования матрицы масс всей системы: все матричные операции выполняются с матрицами или векторами размерность которых не превышает 6 (для пространственной системы). Это позволяет создать эффективную процедуру численного моделирования движения механической системы.

В статье рассматривается адаптация предложенного в работе [3] метода для моделирования плоской механической системы раскрытия створок панели солнечных

батарей. Статья разделена на три части: в первой части представлена процедура построения уравнений движения, основанная на методе отдельных тел, учитывающая возможное отсутствие в системе, тела с известным законом движения. Во второй части рассматривается модель элементов фиксации створок. В третьей части приведен пример построения модели процесса раскрытия створок СБ, демонстрирующий адекватность и эффективность представленного в работе метода.

### Уравнения движения

Механическая система представляет собой систему связанных твердых тел со структурой дерева. Тела системы соединены цилиндрическими шарнирами с взаимно параллельными осями. Для записи уравнений движения используется метод, предложенный в работе [3]. Тела системы пронумерованы так, чтобы номер тела увеличивался по мере удаления от корневого шарнира, соединяющего первую створку с КА.

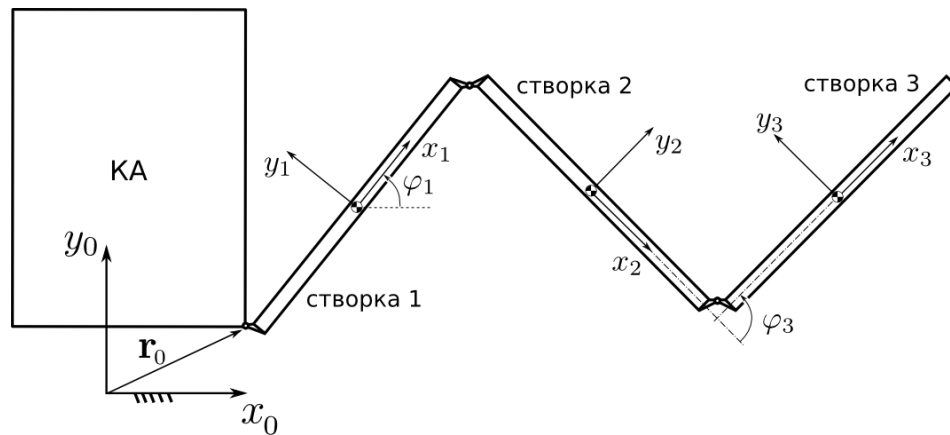


Рисунок 1 – Схема системы (показана одна панель батареи КА)

В качестве обобщенных координат выбраны углы  $\varphi_i$  между базисом  $\mathbf{e}^{(i-1)}$ , связанным с со створкой  $i - 1$ , и базисом  $\mathbf{e}^{(i)}$ , связанным со створкой  $i$ . Преобразование координат

$$\mathbf{e}^{(i-1)} = \mathbf{A}^i \cdot \mathbf{e}^{(i)}$$

между базисами  $\mathbf{e}^{(i-1)}$  и  $\mathbf{e}_i^{(i)}$  задается ортогональной матрицей  $\mathbf{A}^i$ :

$$\mathbf{A}^i = \begin{pmatrix} \cos \varphi_i & \sin \varphi_i \\ -\sin \varphi_i & \cos \varphi_i \end{pmatrix}.$$

Здесь и далее полужирным начертанием обозначаются векторы или их координатные столбцы в соответствующей системе координат, которая указывается верхним индексом в круглых скобках. Матрица преобразования координат из системы  $\mathbf{e}^{(i)}$  в систему  $\mathbf{e}^{(0)}$ , связанной с КА, есть результат последовательных преобразований:

$$\mathbf{e}^{(0)} = \mathbf{A}^1 \cdot \mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{A}^3 \dots \mathbf{A}^i \cdot \mathbf{e}^{(i)}, \quad i = 1, \dots, n$$

Для записи уравнений движения используется метод отдельных тел, преобразованный к виду, удобному для анализа плоских систем. Введем вектор  $\mathbf{w}_i$  включающий в себя вектор линейного  $\ddot{\mathbf{r}}_i$  и углового ускорения  $\dot{\boldsymbol{\omega}}_i$   $i$  створки:  $\mathbf{w}_i = \{\ddot{\mathbf{r}}_i, \dot{\boldsymbol{\omega}}_i\}^T$ . Уравнение движения последней створки имеет следующий вид [4]:

$$\mathbf{M}_n \mathbf{w}_n = \mathbf{Q}_n + \mathbf{Y}_n \quad (1)$$

где  $\mathbf{M}_n$  – матрица масс створки  $n$ :

$$\mathbf{M}_n = \begin{pmatrix} m_n \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_n \end{pmatrix},$$

$m_n$  – масса створки,  $\mathbf{J}_n$  – тензор инерции створки. Столбец  $\mathbf{Q}_n = \{\mathbf{F}_n, \mathbf{L}_n\}^T$  включает в себя главный вектор внешних сил  $\mathbf{F}_n$  и моментов  $\mathbf{L}_n$ , действующих на створку  $n$ , приведённых к её центру масс;  $\mathbf{Y}_n = \{\mathbf{R}_n, \mathbf{L}_{Rn}\}^T$  – столбец, состоящий из главного вектора сил  $\mathbf{R}_n$  и моментов  $\mathbf{L}_{Rn}$  реакции, также приведенных к центру масс створки  $n$  (рисунок 2).

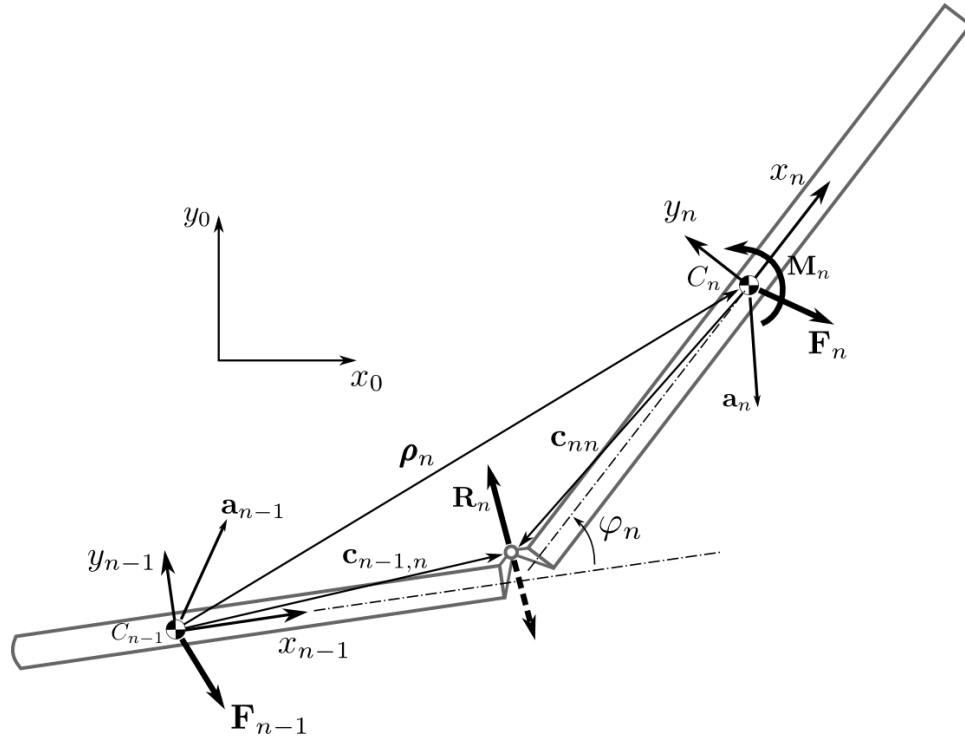


Рисунок 2 – Кинематика относительного движения створок

Вектор линейных и угловых ускорений концевой створки можно записать следующим образом:

$$\mathbf{w}_n = \mathbf{C}_n \cdot \mathbf{w}_{n-1} + \mathbf{S}_n \cdot \ddot{\mathbf{q}}_n + \mathbf{w}'_n \quad (2)$$

где

$$\mathbf{C}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{3 \times 3} & -\tilde{\mathbf{p}}_n \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{E}_{3 \times 3}$  – единичная матрица размера  $3 \times 3$ ;  $\mathbf{q}_n$  – координатный столбец обобщенных координат, задающих положение створки  $n$  относительно створки  $n - 1$ . Вектор  $\mathbf{p}_n$  представляет собой разность шарнирных векторов двух смежных створок:  $\mathbf{p}_n = \mathbf{c}_{n-1,n} - \mathbf{c}_{n,n}$ , он определяет радиус-вектор положения центра масс концевой створки  $n$  относительно предшествующей створки  $n - 1$ . Оператор тильда в выражении для  $\mathbf{C}_n$  позволяет записать векторное произведение  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  в форме произведения тензора  $\tilde{\mathbf{a}}$  и вектора  $\mathbf{b}$  [1]. Для рассматриваемой плоской системы вектор  $\mathbf{w}_i$  имеет следующий вид:

$$\mathbf{w}_i = \{\ddot{x}_i, \ddot{y}_i, \dot{\omega}_{zi}\}^T = \{\ddot{x}_i, \ddot{y}_i, \dot{\omega}_i\}^T$$

Матрицу  $\mathbf{C}_n$  для плоской системы запишем следующим образом:

$$\mathbf{C}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{E} & -\tilde{\mathbf{p}}_n \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} & -\mathbf{D} \cdot \mathbf{p}_n \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}, \text{ где } \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

где  $\mathbf{e}_3$  – орт оси  $z$ . Поскольку рассматривается вращение только вокруг оси  $z$  и движения в плоскости  $xu$  матрица инерции створки будет иметь вид:

$$\mathbf{M}_n = \begin{pmatrix} m_n \mathbf{E}_{2 \times 2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_{nz} \end{pmatrix},$$

$J_{nz}$  – момент инерции створки относительно оси  $z$  проходящей через её центр масс.

Матрица  $\mathbf{S}_n$  определяется кинематикой относительного движения створок; для цилиндрического шарнира с осью вращения параллельной оси  $z$  эта матрица определяется как:

$$\mathbf{S}_n = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{c}}_{n,n} \cdot \mathbf{e}_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{D} \cdot \mathbf{c}_{n,n} \\ 1 \end{pmatrix},$$

Последнее слагаемое выражения (2)(2) –  $\mathbf{w}'_n$  представляет собой сумму составляющих ускорения центра масс створки  $n$ , не зависящих от углового ускорения предшествующей створки и второй производной обобщенной координаты  $\ddot{q}_n$ . Слагаемое  $\mathbf{w}'_n$  в общем виде для пространственной системы записывается следующим образом:

$$\mathbf{w}'_n = \boldsymbol{\omega}_{n-1} \times (\boldsymbol{\omega}_{n-1} \times \mathbf{p}_n) - 2 \boldsymbol{\omega}_{n-1} \times (\boldsymbol{\Omega}_n \times \mathbf{c}_{nn}) - \boldsymbol{\Omega}_n \times (\boldsymbol{\Omega}_n \times \mathbf{c}_{nn}),$$

где  $\boldsymbol{\Omega}_n$  – вектор угловой скорости створки  $n$  относительно  $n - 1$ . Для рассматриваемой плоской системы столбец  $\mathbf{w}'_n$  имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}'_n &= \begin{pmatrix} -\omega_{n-1}^2 (\mathbf{c}_{n-1,n} - \mathbf{c}_{n,n}) + \dot{\phi}_n^2 \mathbf{c}_{n,n} + 2\dot{\phi}_n \omega_{n-1} \mathbf{c}_{n,n} \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (\dot{\phi}_n + \omega_{n-1})^2 \mathbf{c}_{n,n} - \omega_{n-1}^2 \mathbf{c}_{n-1,n} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Учитывая идеальность связей между створками, справедливо соотношение  $\mathbf{S}_n^T \mathbf{R}_n = 0$ , что позволяет, умножив уравнение движения (1) на  $\mathbf{S}_n^T$ , с учетом (2), выразить вторую производную обобщенной координаты  $\ddot{q}_n \equiv \ddot{\phi}_n$ :

$$\ddot{q}_n = \mathbf{U}_n^{-1} \mathbf{S}_n^T (\mathbf{Q}_n - \mathbf{M}_n (\mathbf{C}_n \mathbf{w}_{n-1} + \mathbf{w}'_n)) \quad (3)$$

где  $\mathbf{U}_n = \mathbf{S}_n^T \mathbf{M}_n \mathbf{S}_n$ . В соответствии с процедурой, изложенной в [4], подставив  $\mathbf{q}_n$  из (3) в (2), получим выражение для  $\mathbf{w}_n$ , которое подставим в уравнения движения последней створки (1), после чего выразим столбец сил и моментов реакции  $\mathbf{Y}_n$ :

$$\mathbf{Y}_n = (\mathbf{E} - \mathbf{M}_n \mathbf{S}_n \mathbf{U}_n^{-1} \mathbf{S}_n^T) \mathbf{M}_n \mathbf{C}_n \mathbf{w}_{n-1} + \mathbf{M}_n \mathbf{S}_n \mathbf{U}_n^{-1} \mathbf{S}_n^T (\mathbf{Q}_n - \mathbf{M}_n \mathbf{w}'_n) + \mathbf{M}_n \mathbf{w}'_n - \mathbf{Q}_n$$

Полученный столбец  $\mathbf{Y}_n$  входит в уравнение движения створки  $n - 1$

$$\mathbf{M}_{n-1} \mathbf{w}_{n-1} = \mathbf{Q}_{n-1} + \mathbf{Y}_{n-1} - \mathbf{C}_n^T \mathbf{Y}_n$$

Подставив полученное выражение для  $\mathbf{Y}_n$  в это уравнение, получим:

$$\mathbf{M}_{n-1}^* \mathbf{w}_{n-1} = \mathbf{Q}_{n-1}^* + \mathbf{Y}_{n-1},$$

которое справедливо для любого  $n = k$ , где матрицы  $\mathbf{M}_{k-1}^*$  и  $\mathbf{Q}_{k-1}^*$  вычисляются при помощи следующих рекуррентных формул [4]:

$$\mathbf{M}_{k-1}^* = \mathbf{M}_{k-1} + \mathbf{C}_k^T \mathbf{M}_k^* \mathbf{C}_k - \mathbf{C}_k^T \mathbf{M}_k \mathbf{S}_k (\mathbf{U}_k^*)^{-1} \mathbf{S}_k^T \mathbf{M}_k^* \mathbf{C}_k, \quad (4)$$

$$\mathbf{Q}_{k-1}^* = \mathbf{Q}_{k-1} - \mathbf{C}_k^T [\mathbf{M}_k^* \{ \mathbf{S}_k (\mathbf{U}_k^*)^{-1} \mathbf{S}_k^T (\mathbf{Q}_k^* - \mathbf{M}_k^* \mathbf{w}'_k) + \mathbf{w}'_k \} - \mathbf{Q}_k^*] \quad (5)$$

Матрица  $\mathbf{U}_k^*$  также вычисляется при помощи матрицы  $\mathbf{M}_k^*$ :  $\mathbf{U}_k^* = \mathbf{S}_k^T \mathbf{M}_k^* \mathbf{S}_k$ .

Если масса космического аппарата существенно больше массы солнечной батареи и можно допустить, что створки в процессе движения не оказывают существенного влияния на движение космического аппарата, и считать, что движение аппарата известно:  $\mathbf{w}_0 = \mathbf{f}(t)$ . Это позволяет найти  $\ddot{\mathbf{q}}_1$  при помощи выражения (3), при этом матрицы, входящие в выражение (3) вычислены при помощи рекуррентных соотношений (4) и (5). Подставив  $\ddot{\mathbf{q}}_1$  в (2) найдем  $\mathbf{w}_1$ . Далее процедура повторяется для  $\ddot{\mathbf{q}}_2, \mathbf{w}_2, \ddot{\mathbf{q}}_3, \dots, \ddot{\mathbf{q}}_n$ . Таким образом в каждый момент времени могут быть получены значения вторых производных обобщенных координат, необходимые для численного интегрирования системы.

Если необходимо учитывать и движение КА в процессе раскрытия створок, то в этом случае к уравнениям движения необходимо добавить уравнение движения центра масс системы

$$\sum_{i=1}^n m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^n m_i \ddot{\mathbf{r}}_c = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i. \quad (6)$$

Также, между телом 1 механической системы и базисом инерциальной системы координат необходимо ввести фиктивный шарнир с тремя степенями свободы (для пространственной системы с шестью степенями свободы). Матрица  $\mathbf{S}_1$  для этого шарнира единичная  $\mathbf{S}_1 = \mathbf{E}_{3 \times 3}$ , а вектор обобщенных координат, задающий положение первого тела, включает в себя положение его центра масс и угол поворота –  $\mathbf{q}_1 = \{x_1, y_1, \varphi_1\}^T$ . Ускорение первого тела, на котором расположен фиктивный шарнир определяется из уравнения (1). Учитывая, что силы и моменты реакции фиктивного шарнира равны нулю  $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{0}$ , ускорение первого тела может быть определено следующим образом:

$$\mathbf{w}_1 = (\mathbf{M}_1^*)^{-1} \mathbf{Q}_1^*$$

### Модель элементов фиксации створок

По достижении створками заданного угла поворота в шарнире на смежные створки начинает действовать момент, создаваемый элементами фиксации – защелками. Будем считать, что этот удерживающий момент пропорционален углу поворота створок друг относительно друга:

$$M_{si} = -k_{ij}(\varphi_i - \varphi_{ik}) - d_{ij} \dot{\varphi}_i$$

где  $k_{ij}$  – угловая (крутильная) жесткость, которую обеспечивает механизм фиксации,  $d_{ij}$  – коэффициент демпфирования;  $\varphi_{ik}$  – конечный угол поворота створки в раскрытом положении солнечной батареи.

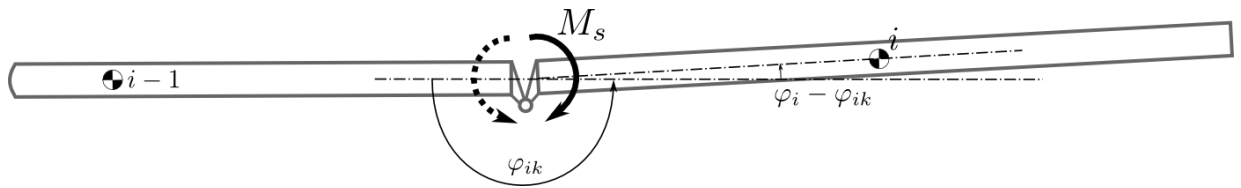


Рисунок 3 – Удерживающий момент  $M_s$

Для «включения» удерживающего момента по достижении заданного угла можно воспользоваться функцией  $f_{si}(\varphi_i)$ , которая моделирует ступенчатую функцию [5]:

$$f_{si}(\varphi_i) = \begin{cases} \varphi_i \leq \varphi_{i0}, & \varphi_i \leq \varphi_{i0}, \\ h_0 + \Delta h u_{\varphi_i}^2 (3 - 2 \Delta), & \varphi_{i0} < \varphi_i < \varphi_{i1}, \\ h_1, & \varphi_i \geq \varphi_{i0}. \end{cases}$$

где  $\Delta h = h_1 - h_0$ ;  $u_{\varphi_i} = (\varphi_i - \varphi_{i0})/(\varphi_{i1} - \varphi_{i0})$ . На рисунке 2,а изображен график функции  $f_{si}(\varphi_i)$  для  $h_0 = 0$ ,  $h_1 = 1$ . Несмотря на то, что из-за наличия демпфирования колебания створки после фиксации будут затухающими, возможен случай, когда створка под действием внешних сил в своём движении достигнет таких значений углов, для которых значение функции  $f_{si}(\varphi_i)$  снова станет равно нулю (для  $\varphi_i \leq \varphi_{i0}$ ), что приведёт к «отключению» удерживающего момента. На рисунке 2.б показан график изменения функции  $f_{si}(\varphi_i)$  от времени, который иллюстрирует такую возможность. Для того чтобы удерживающий момент действовал всегда после достижения створкой заданного угла – угла фиксации, вместо функции  $f_{si}(\varphi_i)$  можно использовать значение интеграла:

$$S_i(\varphi_i) = \int_0^t f_{si}(\varphi_i) dt$$

и «включение» удерживающего момента осуществлять при условии  $S(\varphi_i) > 0$ . Для реализации этого алгоритма к дифференциальным уравнениям движения системы необходимо добавить дополнительное дифференциальное уравнение

$$\dot{S}_i(t) = f_{st}(\varphi_i(t)).$$

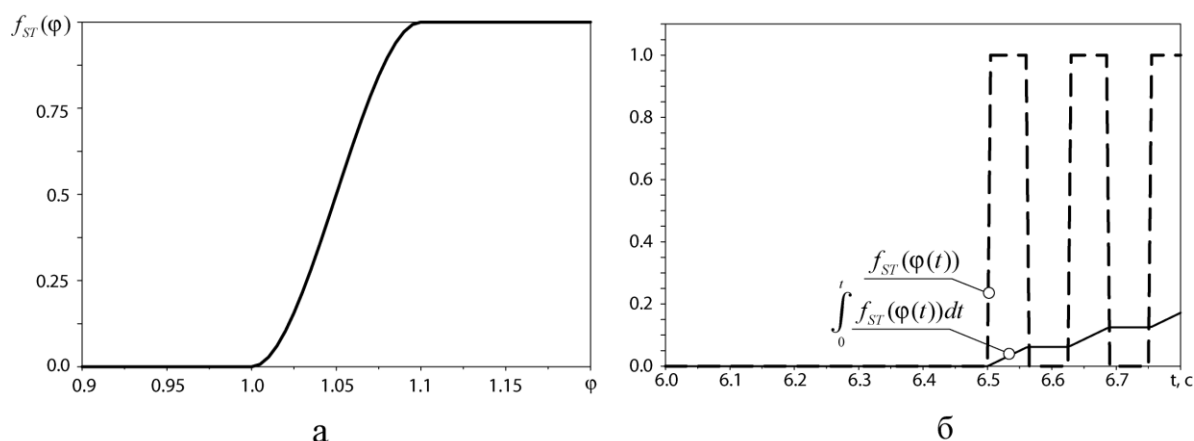


Рисунок 2 – Функция  $f_{st}(\varphi)$

В общем виде выражение для момента, действующего на створку будет иметь следующий вид:

$$M_i = S_i(t)M_{si} + M_{Ti} + M_f$$

где  $M_{Ti}$  – момент торсиона, пропорциональный углу поворота створки:

$$M_{Ti} = M_{Ti0} - \frac{M_{Tik} - M_{Ti0}}{\varphi_{ik} - \varphi_{i0}} (\varphi_i - \varphi_{i0}).$$

где  $M_{Ti0}, M_{Tik}$  – начальное конечное значение момента торсиона при  $\varphi_i = \varphi_{i0}$  и  $\varphi_i = \varphi_{ik}$  соответственно;  $M_f$  – момент сопротивления трения, кабелей, зависящий от угла поворота и угловой скорости створки.

### Пример

Рассмотрим пример механической системы раскрытия солнечных батарей, состоящей из трех створок, прикрепленных к КА, который будем считать неподвижным. Схема системы приведена на рисунке 1. Параметры системы представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Параметры системы

Параметр	Значение
Масса створки, $m_i$ , $i = 1 \dots n$ , кг	10
Момент инерции створки относительно центра масс, $J_{iz}$ , $i = 1 \dots n$ , кг·м <sup>2</sup>	0,5
Крутильная жесткость узла вращения после фиксации, $k_{01}, k_{i,i+1}$ $i = 1 \dots n - 1$ , Н·м/рад	$10^4$
Коэффициент демпфирования фиксации, $d_{ij}$ , Н·м·с/рад	100
Шарнирные векторы, м	
$c_{11}, c_{33}$	$\{-0,505; +0,02\}^T$
$c_{22}$	$\{-0,505; -0,02\}^T$
$c_{23}$	$\{+0,505; +0,02\}^T$
Параметры торсионов	
$M_{T10}, M_{T1k}$ , Н·м	2; 1,4
$M_{T20}, M_{T2k}$ , Н·м	1,5; 0,5
$M_{T30}, M_{T3k}$ , Н·м	0,75; 0,1

Интегрирование дифференциальных уравнений, построенных при помощи описанной здесь методики, проводилось в системе MATLAB (интегратор ode113). Результаты моделирования приведены на рисунках 5-6. На рисунке 5 показан график изменения углов поворота створок:  $\varphi_1, \varphi_2$  и  $\varphi_3$ . На рисунке 6 показан приведен график изменения относительных угловых скоростей створок  $\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2, \dot{\varphi}_3$ .

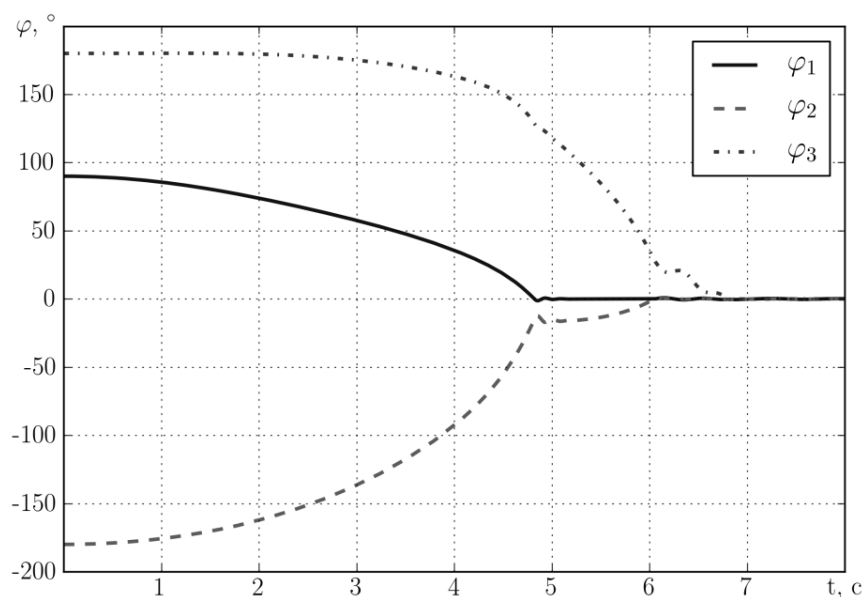


Рисунок 4 – Изменения углов поворота створок в процессе раскрытия панели солнечной батареи

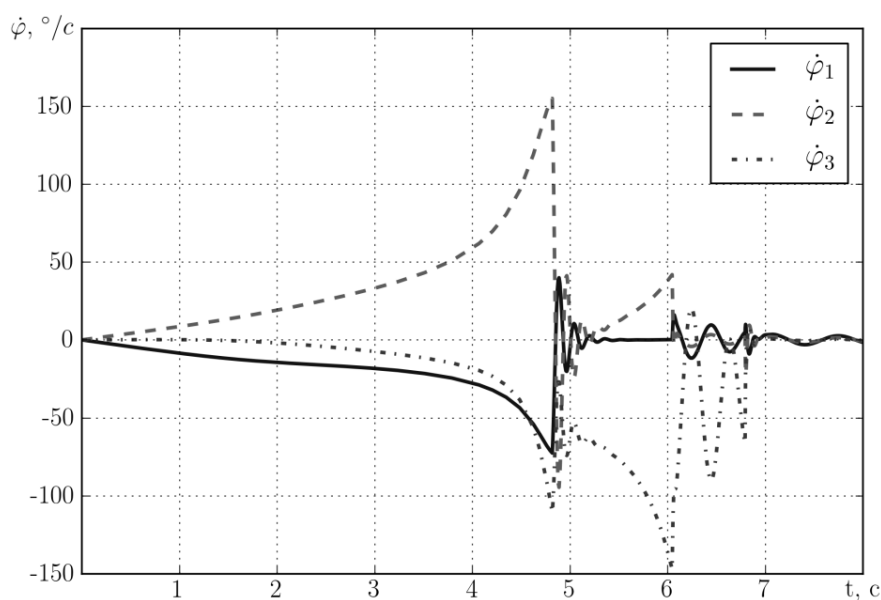


Рисунок 5 – Изменения относительных угловых скоростей створок в процессе раскрытия панели солнечной батареи

Отметим, что кинематические параметры створок на момент их фиксации будут определяться большим количеством параметров системы: инерционно-массовыми и центровочными характеристиками створок, параметрами торсионов, моментами



сопротивления кабелей, трения, защелок. Эти параметры, учитывая их возможные отклонения от средних значений, могут рассматриваться как случайные числа с известными законами и параметрами распределения. В связи с этим, для оценки величин кинематических параметров створок целесообразно использовать метод статистических испытаний при котором проводится большая серия численных экспериментов с различными наборами исходных данных, определяемых при помощи генератора псевдослучайных чисел в соответствии с заданными параметрами распределения. Приведенная здесь модель, благодаря своей эффективности позволяет использовать её при моделировании систем методом статистических испытаний.

### **Заключение**

В работе представлена модификация метода отдельных тел для моделирования процесса раскрытия створок панелей солнечных батарей. Представлена процедура получения уравнений движения системы, учитывающая возможное отсутствие в системе тела с заданным законом движения, упругость элементов фиксации створок, создающих дополнительные шарнирные моменты. Приведены результаты численного моделирования процесса раскрытия солнечной батареи, состоящей из трех створок. Построенная модель позволяет определить параметры торсионов, необходимые для гарантированного раскрытия панели СБ, оценить угловые скорости створок на момент их фиксации.

### **Список литературы**

1. *Й. Вумтенбург* Динамика систем тел [Текст] М: Мир, 1980.
2. *V. Aslanov, G. Kruglov, V. Yudintsev* Newton–Euler equations of multibody systems with changing structures for space applications. *Acta Astronautica* (2011), doi:10.1016/j.actaastro.2010.11.013.
3. *Верецагин А. Ф.* Компьютерное моделирование динамики сложных механизмов роботов-манипуляторов *Инженерная кибернетика*, вып. 6, 1974, с. 65-70.
4. *Дмитrochenko О. Н.* Эффективные методы численного моделирования динамики нелинейных систем абсолютно твердых и деформируемых тел. Дис... канд. физ. мат. наук: 01.02.01 М. 2003.
5. *Юдинцев В. В.* Использование пакета MSC/ADAMS для моделирования механических систем ракетно-космической техники, Сборник трудов IX международной научно-технической конференции «Компьютерное моделирование 2008», г. Санкт-Петербург.