Системы твердых тел

Уравнения в избыточных координатах

Юдинцев В. В.

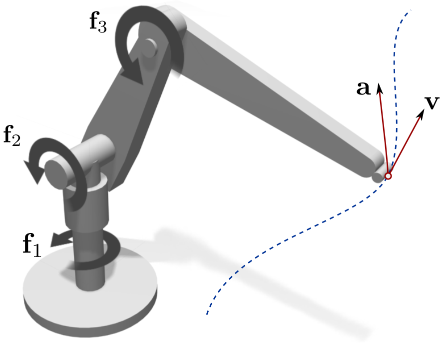
Кафедра теоретической механики

САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
SAMARA UNIVERSITY

Системы твёрдых тел

- Системы раскрытия солнечных батарей, антенн, радиаторов, ...
- Системы отделения ступеней отработавших блоков ракет.
- Роботы-манипуляторы.
- Наземные экспериментальные установки.

Две задачи динамики систем тел



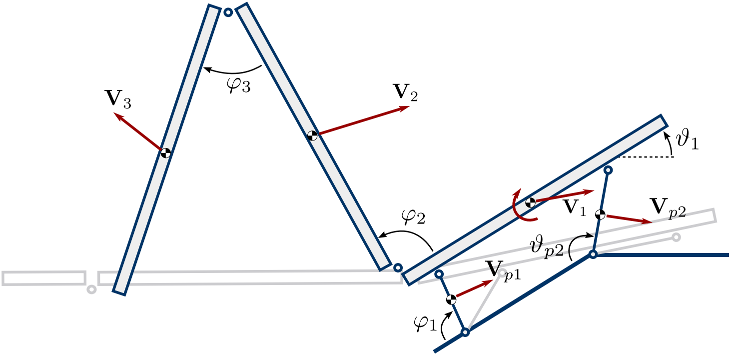
- Прямая задача – определение ускорений движения тел системы по действующим силам
  $\mathbf{f} \to \mathbf{a}$
- Обратная задача – определение сил, вызывающих заданное ускорение тел системы
  $\mathbf{a} \to \mathbf{f}$

История

- 1905 год: модель систем трех тел, соединенных шарнирами
- 60-е годы разработка новых алгоритмов формирования уравнений движения систем тел

КА Ресурс-П

Панель солнечной батареи КА

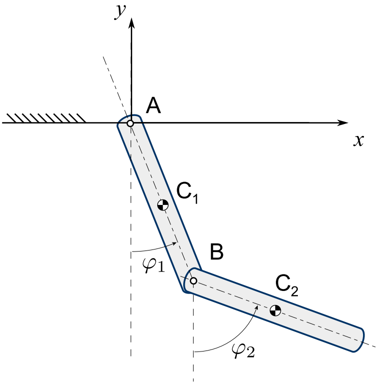


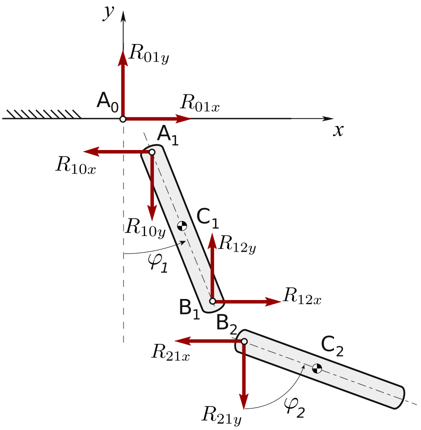
1. $[\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3] \to \vartheta_1(\varphi_1), \vartheta_{p2}(\varphi_1)$
2. $\mathbf{V}_{p1}(\varphi_1, \dot{\varphi}_1), \mathbf{V}_1(\varphi_1, \dot{\varphi}_1), \mathbf{V}_{p2}(\varphi_1, \dot{\varphi}_1), \mathbf{V}_2(\varphi_1, \dot{\varphi}_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_2) \ldots \boldsymbol{\omega}_1 = \ldots$

Уравнения в избыточных координатах

Уравнения в абсолютных координатах

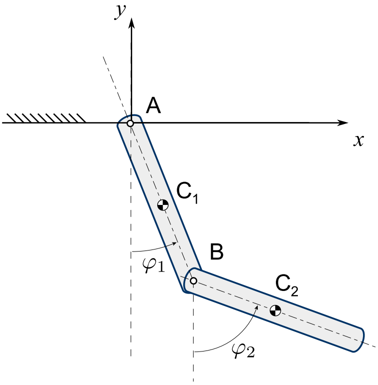
$$(\varphi_1, \varphi_2) \to (x_1, y_1, \varphi_1, x_2, y_2, \varphi_2)$$

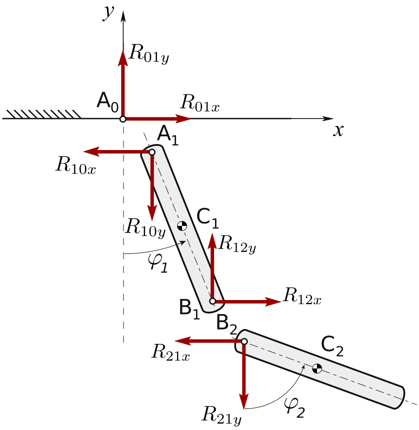




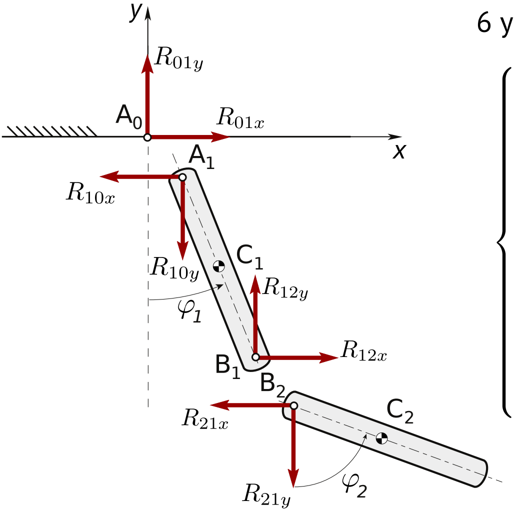
Уравнения в абсолютных координатах

$$(\varphi_1, \varphi_2) \to (x_1, y_1, \varphi_1, x_2, y_2, \varphi_2)$$





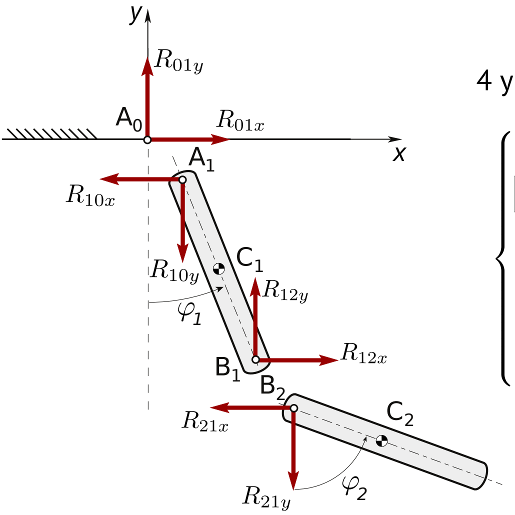
Уравнения движения



6 уравнений движения:

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = F_{1x} - R_{10x} + R_{12x}, \\ m_1\ddot{y}_1 = F_{1y} - R_{10y} + R_{12y}, \\ J_{1z}\ddot{\varphi}_1 = M_{1z} + l_1(R_{10x}\cos\varphi_1 + \\ \qquad + R_{10y}\sin\varphi_1 + \\ \qquad + R_{12x}\cos\varphi_1 + R_{12y}\sin\varphi_1), \\ m_2\ddot{x}_2 = F_{2x} - R_{21x}, \\ m_2\ddot{y}_2 = F_{2y} - R_{21y}, \\ J_{2z}\ddot{\varphi}_2 = M_{2z} + R_{12x}l_2\cos\varphi_2 + \\ \qquad + R_{12y}l_2\sin\varphi_2 \end{cases} \quad (1)$$

Уравнения связи



4 уравнения связи:

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\boxed{x_{A_1} = x_{A_0}} = x_1 - l_1 \sin\varphi_1 = 0 \\
&\boxed{y_{A_1} = y_{A_0}} = y_1 + l_1 \cos\varphi_1 = 0 \\
&\boxed{x_{B_1} = x_{B_2}} = x_1 + l_1 \sin\varphi_1 = \\
&\qquad = x_2 - l_2 \sin\varphi_2 \\
&\boxed{y_{B_1} = y_{B_2}} = y_1 - l_1 \cos\varphi_1 = \\
&\qquad = y_2 - l_2 \cos\varphi_2
\end{aligned}
\right. \tag{2}
$$

Система ДАЕ

$$
\begin{cases}
m_1 \ddot{x}_1 = F_{1x} - R_{10x} + R_{12x}, \\
m_1 \ddot{y}_1 = F_{1y} - R_{10y} + R_{12y}, \\
J_{1z} \ddot{\varphi}_1 = M_{1z} + l_1 (R_{10x} \cos\varphi_1 + R_{10y} \sin\varphi_1 + + R_{12x} \cos\varphi_1 + R_{12y} \sin\varphi_1), \\
m_2 \ddot{x}_2 = F_{2x} - R_{21x}, \\
m_2 \ddot{y}_2 = F_{2y} - R_{21y}, \\
J_{2z} \ddot{\varphi}_2 = M_{2z} + R_{12x} l_2 \cos\varphi_2 + R_{12y} l_2 \sin\varphi_2 \\
x_1 - l_1 \sin\varphi_1 = 0 \\
y_1 + l_1 \cos\varphi_1 = 0 \\
x_1 + l_1 \sin\varphi_1 = x_2 - l_2 \sin\varphi_2 \\
y_1 - l_1 \cos\varphi_1 = y_2 - l_2 \cos\varphi_2
\end{cases}
\tag{3}
$$

Система ДАЕ

$$
\begin{cases}
x_1 - l_1 \sin\varphi_1 = 0 \\
y_1 + l_1 \cos\varphi_1 = 0 \\
x_1 + l_1 \sin\varphi_1 = x_2 - l_2 \sin\varphi_2 \\
y_1 - l_1 \cos\varphi_1 = y_2 - l_2 \cos\varphi_2
\end{cases}
\to \frac{d^2 \ldots}{dt^2} \to
$$

$$
\begin{cases}
\ddot{x}_1 - \ddot{\varphi}_1 l_1 \cos\varphi_1 = \dot{\varphi}_1^2 l_1 \sin\varphi_1 \\
\ddot{y}_1 - \ddot{\varphi}_1 l_1 \sin\varphi_1 = \dot{\varphi}_1^2 l_1 \cos\varphi_1 \\
\ddot{x}_1 + \ddot{\varphi}_1 \cos\varphi_1 - \ddot{x}_2 + \ddot{\varphi}_2 l_2 \cos\varphi_2 = \dot{\varphi}_1^2 l_1 \sin\varphi_1 + \dot{\varphi}_2^2 l_2 \sin\varphi_2 \\
\ddot{y}_1 + \ddot{\varphi}_1 l_1 \sin\varphi_1 - \ddot{y}_2 - \ddot{\varphi}_2 l_2 \sin\varphi_2 = \dot{\varphi}_2^2 l_2 \cos\varphi_2 - \dot{\varphi}_1^2 l_1 \cos\varphi_1
\end{cases}
$$

Система ДАЕ

$$
\begin{cases}
m_1\ddot{x}_1 = F_{1x} - R_{10x} + R_{12x},\\
m_1\ddot{y}_1 = F_{1y} - R_{10y} + R_{12y},\\
J_{1z}\ddot{\varphi}_1 = M_{1z} + l_1(R_{10x}\cos\varphi_1 + R_{10y}\sin\varphi_1 + +R_{12x}\cos\varphi_1 + R_{12y}\sin\varphi_1),\\
m_2\ddot{x}_2 = F_{2x} - R_{21x},\\
m_2\ddot{y}_2 = F_{2y} - R_{21y},\\
J_{2z}\ddot{\varphi}_2 = M_{2z} + R_{12x}l_2\cos\varphi_2 + R_{12y}l_2\sin\varphi_2\\
\ddot{x}_1 - \ddot{\varphi}_1 l_1\cos\varphi_1 = \dot{\varphi}_1^2 l_1\sin\varphi_1\\
\ddot{y}_1 - \ddot{\varphi}_1 l_1\sin\varphi_1 = \dot{\varphi}_1^2 l_1\cos\varphi_1\\
\ddot{x}_1 + \ddot{\varphi}_1\cos\varphi_1 - \ddot{x}_2 + \ddot{\varphi}_2 l_2\cos\varphi_2 = \dot{\varphi}_1^2 l_1\sin\varphi_1 + \dot{\varphi}_2^2 l_2\sin\varphi_2\\
\ddot{y}_1 + \ddot{\varphi}_1 l_1\sin\varphi_1 - \ddot{y}_2 - \ddot{\varphi}_2 l_2\sin\varphi_2 = \dot{\varphi}_2^2 l_2\cos\varphi_2 - \dot{\varphi}_1^2 l_1\cos\varphi_1
\end{cases}
$$

Структура ДАЕ

$$\mathbf{w}_i = \begin{bmatrix} \ddot{x}_i \\ \ddot{y}_i \\ \ddot{\varphi}_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} R_{10x} \\ R_{10y} \\ R_{12x} \\ R_{12y} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{m}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{m}_i = \begin{bmatrix} m_i & 0 & 0 \\ 0 & m_i & 0 \\ 0 & 0 & J_{iz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_i \mathbf{E}_{2\times 2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_{iz} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -l_1 \cos\varphi_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -l_1 \sin\varphi_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & l_1 \cos\varphi_1 & -1 & 0 & l_2 \cos\varphi_2 \\ 0 & 1 & l_1 \sin\varphi_1 & 0 & -1 & -l_2 \sin\varphi_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P}_i = \begin{bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ M_{iz} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \end{bmatrix}.$$

Матричные уравнения

$$\begin{cases} \mathbf{m}\mathbf{w} + \mathbf{Q}^T\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{P} \\ \mathbf{Q}\mathbf{w} = \mathbf{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{m} & \mathbf{Q}^T \\ \mathbf{Q} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

Решение

$$\mathbf{w} = \mathbf{m}^{-1}(\mathbf{P} - \mathbf{Q}^T\boldsymbol{\lambda}),$$

$$\mathbf{Q}\mathbf{m}^{-1}(\mathbf{P} - \mathbf{Q}^T\boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{b},$$

$$\boxed{\mathbf{Q}\mathbf{m}^{-1}\mathbf{Q}^T\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}\mathbf{m}^{-1}\mathbf{P} - \mathbf{b}} - \text{ СЛУ относительно } \boldsymbol{\lambda}$$

$$\boldsymbol{\lambda} = (\mathbf{Q}\mathbf{m}^{-1}\mathbf{Q}^T)^{-1}(\mathbf{Q}\mathbf{m}^{-1}\mathbf{P} - \mathbf{b}),$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{m}^{-1}[\mathbf{P} - \mathbf{Q}^T(\mathbf{Q}\mathbf{m}^{-1}\mathbf{Q}^T)^{-1}(\mathbf{Q}\mathbf{m}^{-1}\mathbf{P} - \mathbf{b})]$$

Пример

Глобальные переменные, параметры

```
% Глобальные переменные
global m1 L1 J1 g;
% Масса стержня
m1 = 1;
% Длина стержня
L1 = 0.5;
% Момент инерции
J1 = (m1*L1^2)/12;
% Ускорение свободного падения
g  = 9.81;
```

Начальные условия

Координаты центра масс и угол поворота стержня

```
x10   =  L1 ;
y10   =  0  ;
f10   =  pi*0.5;
```

Скорость центра масс и угловая скорость стержня

```
vx10  =  0;
vy10  =  0;
w10   =  0;
```

Вектор начальных условий

```
q0  =  [x10  y10  f10  vx10  vy10  w10];
```

Запуск процесса интегрирования

Запуск процесса интегрирования

```
[t,res] = ode113(@dqdt,[0 5],q0);
```

- Используется многошаговый метод численного решения дифференциальных уравнений `ode113`, ореинтированный на решение нежестких д.у. со сложной правой частью.
- Функции `ode113` передается
  - `@dqdt` – ссылка на функцию правой части ДУ;
  - `[0 5]` – интервал интегрирования (от $t_0 = 0$ до $t_k = 5$ с);
  - `q0` – вектор начальных условий.

Объявление файл-функции правой части

```
function dq = dqdt(t,q)
```

Входные переменные

- t – текущее время
- q – столбец обобщенных координат и скоростей в том-же порядке, что и в матрице исходных данных в файле main.m

Выходные переменные

- dq - производная столбца q

Запуск процесса интегрирования

Открываем доступ к объявленным ранее глобальным переменным

```
global m1 L1 J1 g;
```

Для сокращения записи переобозначим элементы вектора q

```
x1 = q(1);   vx1 = q(4);
y1 = q(2);   vy1 = q(5);
f1 = q(3);   wz1 = q(6);
```

Формирование матриц СЛАУ

Формируем матрицу масс системы

```
A=[
    m1  0   0           -1          0;
    0   m1  0            0         -1;
    0   0   J1           L1*cos(f1) L1*sin(f1);
    1   0  -L1*cos(f1)   0          0;
    0   1  -L1*sin(f1)   0          0
    ];
```

Формирование матриц СЛАУ

Формируем матрицу-столбец правой части

```
B = [0;
     -m1*g;
     0;
     -L1*wz1*wz1*sin(f1);
      L1*wz1*wz1*cos(f1)];
```

Решение системы линейных уравнений

Решение СЛУ: определение ускорений и реакций связей

```
x = A\B;
```

Первые три элемента результата содержат компоненты линейного ускорения и угловое ускорение стержня

```
ax1=x(1);
ay1=x(2);
ez1=x(3);
```

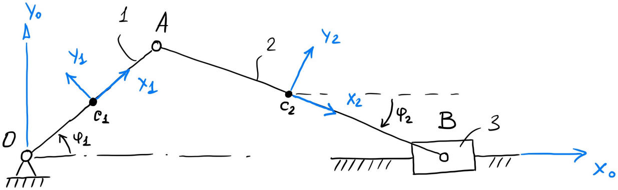
Последние два элемента содержат реакции R_{01x}, R_{01y}

Запуск процесса интегрирования

- Столбец результата представляет собой производную столбца q.
- Первые три элемента столбца q есть координаты и угол поворота стержня, поэтому первые три элемента dq должны содержать проекции линейной скорости стержня и его угловой скорости вокруг оси z.
- Там где у столбца q расположены скорости, у столбца dq должны быть помещены ускорения, вычисленные на предыдущем этапе.

```
dq = [vx1;vy1;wz1;ax1;ay1;ez1];
```

Задание



- Записать и проинтегрировать уравнения движения с уравнениями связей кривошипно-ползунного механизма, движущегося в вертикальной плоскости в поле силы тяжести.
- Звенья OA и AB рассматривать как однородные стержни.
- Массой ползуна пренебречь
- К звену OA приложен постоянный момент M_O = 6 Н·м
- OA = 1 м, AB = 3 м, m_{OA} = 1 кг, m_{AB} = 3 кг.
- Построить график изменения координат точки B. Убедиться, что $y_B(t) \approx 0$

Литература

1. *Й. Виттенбург* Динамика систем твердых тел. М.: Мир, 1980.
2. *Лилов Л. К.* Моделирование систем связанных тел. М.: “Наука”, 1993.
3. *R. Featherstone* Rigid Body Dynamics Algorithm,