

Ортогональные матрицы

Динамика твёрдого тела и систем тел

Юдинцев В. В.

Кафедра теоретической механики
Самарский университет

2 сентября 2021 г.



САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
SAMARA UNIVERSITY

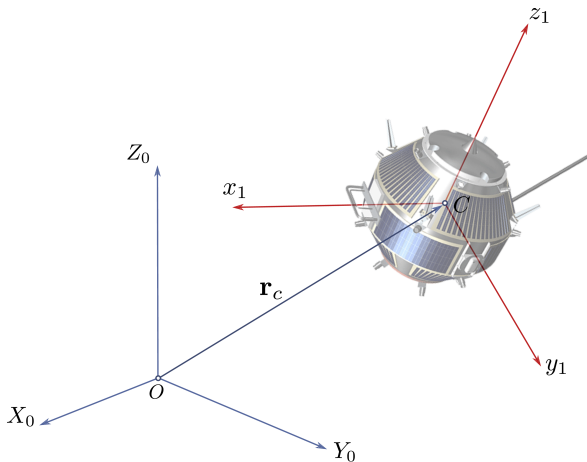
Содержание

- 1 Способы задания ориентации твёрдого тела
- 2 Ортогональные матрицы
- 3 Активная и пассивная точки зрения
- 4 Свойства матрицы поворота
- 5 Сложение поворотов

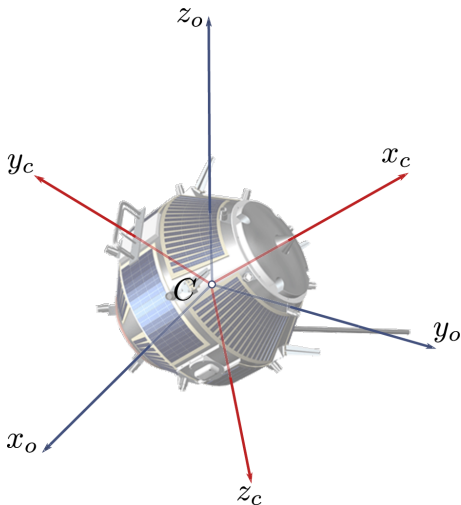
Способы задания ориентации твёрдого тела

Ориентация твёрдого тела

Произвольное движение твёрдого тела складывается из движения произвольной точки твёрдого тела (полюса) и вращения тела вокруг этого полюса.



Ориентация твёрдого тела



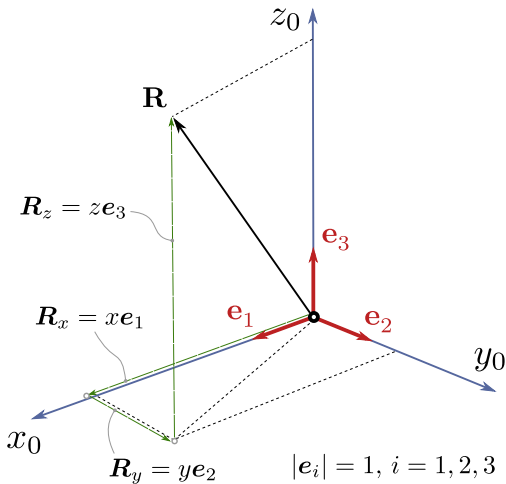
- $Cx_cy_cz_c$ – система координат, связанная с твёрдым телом;
- $Cx_0y_0z_0$ – поступательно движущаяся система координат с началом в точке C .
- Ориентация системы координат $Cx_cy_cz_c$ относительно $Cx_0y_0z_0$ может быть задана несколькими способами.

Способы задания ориентации твёрдого тела

- Матрица направляющих косинусов: $n = 9$.
- Система плоских поворотов (углы Эйлера, углы Брайнта):
 $n = 3$.
- Кватернионы, параметры Кейли-Клейна: $n = 4$.

Ортогональные матрицы

Координаты вектора

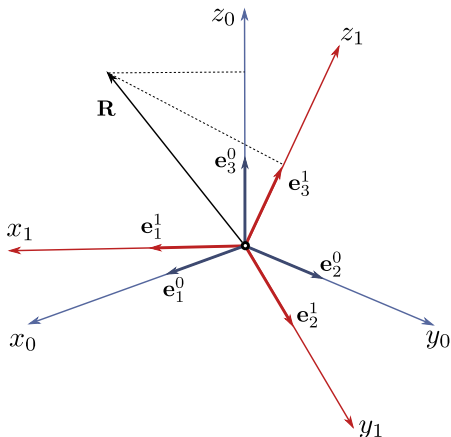


Вектор \vec{R} можно представить как линейную комбинацию базисных векторов:

$$\begin{aligned}\vec{R} &= x \cdot \mathbf{e}_1 + y \cdot \mathbf{e}_2 + z \cdot \mathbf{e}_3 = \\ &= [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \\ &= \mathbf{e}^T \mathbf{R},\end{aligned}$$

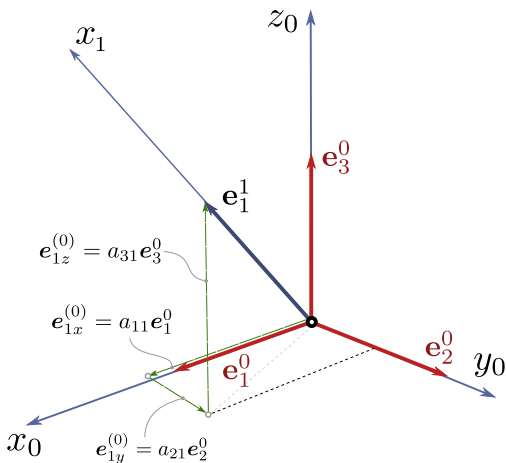
где \mathbf{R} – координатный столбец вектора \vec{R} в базисе $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)^T$.

Координаты вектора в разных базисах



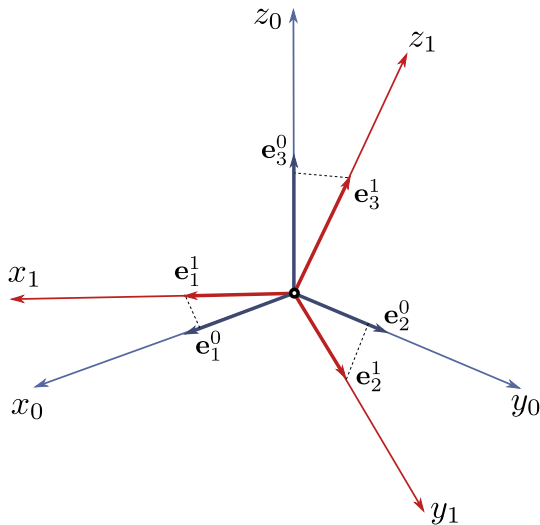
- $\mathbf{R}^{(0)} = (x_0, y_0, z_0)^T$ – координаты вектора в базисе \mathbf{e}^0 ;
- $\mathbf{R}^{(1)} = (x_1, y_1, z_1)^T$ – координаты вектора в базисе \mathbf{e}^1 .

Координаты базисных векторов



$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}_1^1 &= \mathbf{e}_1^0 \cdot |\mathbf{e}_1^1| \cos \alpha_{11} + \\
 &\quad \mathbf{e}_2^0 \cdot |\mathbf{e}_1^1| \cos \alpha_{21} + \\
 &\quad \mathbf{e}_3^0 \cdot |\mathbf{e}_1^1| \cos \alpha_{31} = \\
 &= \mathbf{e}_1^0 \cos \alpha_{11} + \\
 &\quad \mathbf{e}_2^0 \cos \alpha_{21} + \\
 &\quad \mathbf{e}_3^0 \cos \alpha_{31} = \\
 &= \mathbf{e}_1^0 a_{11} + \\
 &\quad \mathbf{e}_2^0 a_{21} + \\
 &\quad \mathbf{e}_3^0 a_{31}.
 \end{aligned}$$

Направляющие косинусы



$$\alpha_{11} = \angle \mathbf{e}_1^0 \mathbf{e}_1^1$$

$$\alpha_{21} = \angle \mathbf{e}_2^0 \mathbf{e}_1^1$$

$$\alpha_{31} = \angle \mathbf{e}_3^0 \mathbf{e}_1^1$$

$$\alpha_{12} = \angle \mathbf{e}_1^0 \mathbf{e}_2^1$$

$$\alpha_{22} = \angle \mathbf{e}_2^0 \mathbf{e}_2^1$$

$$\alpha_{32} = \angle \mathbf{e}_3^0 \mathbf{e}_2^1$$

$$\alpha_{13} = \angle \mathbf{e}_1^0 \mathbf{e}_3^1$$

$$\alpha_{23} = \angle \mathbf{e}_2^0 \mathbf{e}_3^1$$

$$\alpha_{33} = \angle \mathbf{e}_3^0 \mathbf{e}_3^1$$

Матрица направляющих косинусов

Скалярное произведение двух базисных векторов различных базисов равно косинусу угла между ними:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \mathbf{e}_1^0 \cdot \mathbf{e}_1^1 = \cos \angle \mathbf{e}_1^0 \mathbf{e}_1^1, & a_{12} &= \mathbf{e}_1^0 \cdot \mathbf{e}_2^1, & a_{13} &= \mathbf{e}_1^0 \cdot \mathbf{e}_3^1, \\ a_{21} &= \mathbf{e}_2^0 \cdot \mathbf{e}_1^1, & a_{22} &= \mathbf{e}_2^0 \cdot \mathbf{e}_2^1, & a_{23} &= \mathbf{e}_2^0 \cdot \mathbf{e}_3^1, \\ a_{31} &= \mathbf{e}_3^0 \cdot \mathbf{e}_1^1, & a_{32} &= \mathbf{e}_3^0 \cdot \mathbf{e}_2^1, & a_{33} &= \mathbf{e}_3^0 \cdot \mathbf{e}_3^1. \end{aligned}$$

Матрица направляющих косинусов:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Матрица направляющих косинусов

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

i -ый столбец матрицы \mathbf{A} представляет собой координаты единичного вектора \mathbf{e}_i^1 в базисе \mathbf{e}^0 :

$$(\mathbf{e}_1^1)^{(0)} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{e}_2^1)^{(0)} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{e}_3^1)^{(0)} = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}.$$

Преобразование координат вектора

В базисе \mathbf{e}^1 :

$$\mathbf{R}^{(1)} = x'\mathbf{e}_1^1 + y'\mathbf{e}_2^1 + z'\mathbf{e}_3^1.$$

В базисе \mathbf{e}^0 :

$$\mathbf{R}^{(0)} = x\mathbf{e}_1^0 + y\mathbf{e}_2^0 + z\mathbf{e}_3^0.$$

Координаты вектора в базисе \mathbf{e}^0 :

$$x = \mathbf{e}_1^0 \cdot \mathbf{R} = \mathbf{e}_1^0 \cdot (x'\mathbf{e}_1^1 + y'\mathbf{e}_2^1 + z'\mathbf{e}_3^1) = a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z',$$

$$y = \mathbf{e}_2^0 \cdot \mathbf{R} = \mathbf{e}_2^0 \cdot (x'\mathbf{e}_1^1 + y'\mathbf{e}_2^1 + z'\mathbf{e}_3^1) = a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z',$$

$$z = \mathbf{e}_3^0 \cdot \mathbf{R} = \mathbf{e}_3^0 \cdot (x'\mathbf{e}_1^1 + y'\mathbf{e}_2^1 + z'\mathbf{e}_3^1) = a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z'.$$

В матричной форме:

$$\mathbf{R}^{(0)} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{R}^{(1)}.$$

Ортогональное преобразование

Матрица \mathbf{A}

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

задаёт **линейное** отображение трёхмерного евклидового пространства в себя, при котором расстояние между произвольными точками неизменно:

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{R}'^T \mathbf{R}'.$$

Линейность:

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2) = \mathbf{A}\mathbf{R}_1 + \mathbf{A}\mathbf{R}_2$$

$$\mathbf{A}(\alpha \mathbf{R}) = \alpha \mathbf{A}\mathbf{R}$$

Активная и пассивная точки зрения

Активная и пассивная точки зрения

Преобразование координат можно рассматривать с двух точек зрения.

- **Активная** точка зрения – поворачивается вектор в неизменном базисе:

$$\mathbf{R} \xrightarrow{\mathbf{A}} \mathbf{R}', \quad (1)$$

Активная и пассивная точки зрения

Преобразование координат можно рассматривать с двух точек зрения.

- **Активная** точка зрения – поворачивается вектор в неизменном базисе:

$$\mathbf{R} \xrightarrow{\mathbf{A}} \mathbf{R}', \quad (1)$$

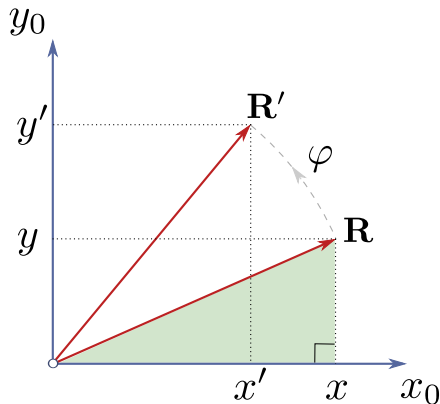
- **Пассивная** точка зрения – поворачивается базис

$$\mathbf{e}^1 \xrightarrow{\mathbf{A}} \mathbf{e}^2, \quad (2)$$

определяются координаты неизменного вектора в новом базисе.

$$\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}'. \quad (3)$$

Активная точка зрения



$$\mathbf{R}' = \mathbf{A}\mathbf{R}.$$

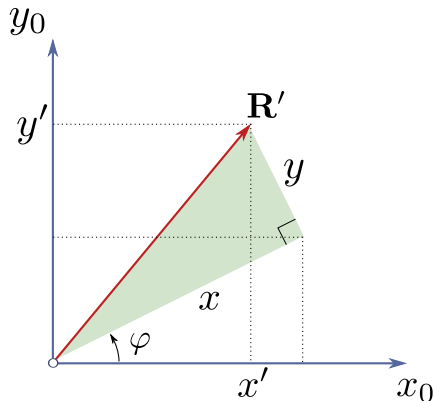
Матрица поворота вокруг оси z :

$$\mathbf{A}_z = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Координаты нового вектора:

$$\mathbf{R}' = \begin{bmatrix} x \cos \varphi - y \sin \varphi \\ x \sin \varphi + y \cos \varphi \\ z \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Активная точка зрения



$$\mathbf{R}' = \mathbf{A}\mathbf{R}.$$

Матрица поворота вокруг оси z :

$$\mathbf{A}_z = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Координаты нового вектора:

$$\mathbf{R}' = \begin{bmatrix} x \cos \varphi - y \sin \varphi \\ x \sin \varphi + y \cos \varphi \\ z \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Матрицы поворота вокруг осей

Поворот вокруг оси x:

$$\mathbf{A}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Поворот вокруг оси y:

$$\mathbf{A}_y = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Поворот вокруг оси z:

$$\mathbf{A}_z = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Пассивная точка зрения

$$\mathbf{R} = x \cdot \mathbf{e}_1^0 + y \cdot \mathbf{e}_2^0 + z \cdot \mathbf{e}_3^0 = x' \cdot \mathbf{e}_1^1 + y' \cdot \mathbf{e}_2^1 + z' \cdot \mathbf{e}_3^1 \quad (8)$$

Исходный базис:

$$\mathbf{e}_1^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Новый базис:

$$\mathbf{e}_1^1 = \mathbf{A}\mathbf{e}_1^0, \quad \mathbf{e}_2^1 = \mathbf{A}\mathbf{e}_2^0, \quad \mathbf{e}_3^1 = \mathbf{A}\mathbf{e}_3^0.$$

Сложение поворотов

Пассивная точка зрения

Из уравнения (8)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} z}_{xe_1^0 + ye_2^0 + ze_3^0} = \mathbf{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x' + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} y' + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} z'}_{x'e_1^1 + y'e_2^1 + z'e_3^1} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

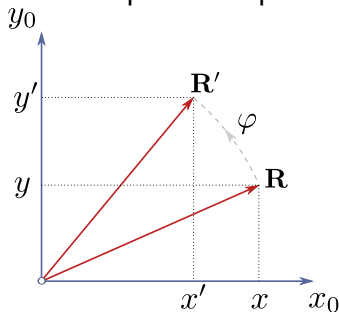
определяются координаты вектора в новом базисе:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \boxed{\mathbf{R}' = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{R}}$$

Координаты вектора в новом базисе определяются при помощи матрицы, обратной матрице поворота базиса

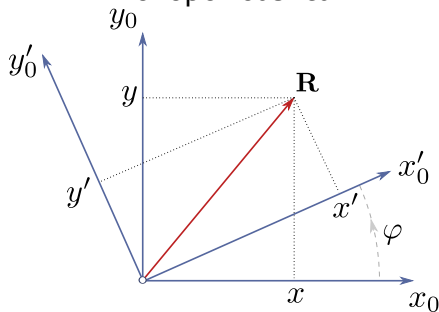
Матрица поворота

Поворот вектора



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Поворот базиса



$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Свойства матрицы поворота

Ортогональность

При преобразовании поворота $\mathbf{R}' = \mathbf{A}\mathbf{R}$ сохраняется модуль вектора $|\mathbf{R}'| = |\mathbf{R}|$, поэтому

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{R}'^T \mathbf{R}' = (\mathbf{A}\mathbf{R})^T \mathbf{A}\mathbf{R} = \mathbf{R}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{R} \Rightarrow \boxed{\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{E}}$$

или:

$$\boxed{\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T} \quad (9)$$

Из $\det(\mathbf{A}\mathbf{A}^T) = 1$ следует:

$$\boxed{\det(\mathbf{A}) = \pm 1} \quad (10)$$

Ортогональность

- Если $\det(\mathbf{A}) = +1$,
 \mathbf{A} определяет **собственное** ортогональное преобразование
 – поворот вокруг некоторой оси.
- Если $\det(\mathbf{A}) = -1$,
 \mathbf{A} определяет **несобственное** ортогональное
 преобразование – композиция поворота вокруг оси и
 отражения в перпендикулярной плоскости.

Ортогональность

Скалярное произведение строки (столбца) на саму себя равно 1, на любую другую строку (столбец) равно 0:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{aligned} a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} &= 0, \\ a_{11}a_{31} + a_{12}a_{32} + a_{13}a_{33} &= 0, \\ a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} &= 0, \\ a_{11}a_{11} + a_{12}a_{12} + a_{13}a_{13} &= 1, \\ &\dots \end{aligned}$$

В общем виде:

$$\sum_i a_{ij}a_{ik} = \delta_{jk}, \quad \sum_i a_{ji}a_{ki} = \delta_{jk}.$$

Произведение двух матриц поворота

Произведение двух ортогональных матриц есть тоже ортогональная матрица.

Если \mathbf{A} и \mathbf{B} ортогональные матрицы, тогда:

$$\begin{aligned}\mathbf{C} = \mathbf{AB} &\rightarrow \mathbf{C}^T = (\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{CC}^T &= \mathbf{A}(\mathbf{BB}^T)\mathbf{A}^T = \mathbf{E}.\end{aligned}$$

Алгебраическое дополнение

Элементы ортогональной матрицы равны их алгебраическим дополнениям

$$a_{ij} = A_{ij}$$

Т.к.

$$\mathbf{A}^{-1} = (A_{ij})^T / \det \mathbf{A} \text{ и } \det \mathbf{A} = 1$$

где $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, M_{ij} – дополнительный минор – определитель матрицы, получающийся из исходной матрицы \mathbf{A} вычёркиванием i -го столбца и j -ой строки.

Собственные векторы и значения

- Уравнение для определения собственных чисел и собственных векторов матрицы \mathbf{A} :

$$\boxed{\mathbf{A}\mathbf{R} = \lambda\mathbf{R}} \quad (11)$$

где собственное число $|\lambda| = 1$, так как ортогональное преобразование не изменяет длины вектора \mathbf{R} .

- Собственные числа находятся из скалярного уравнения:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0.$$

Определение собственных значений

Уравнение $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0$:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix}$$

приводится к кубическому уравнению [1]

$$\boxed{\lambda^3 - \lambda^2 \text{tr} \mathbf{A} + \lambda \text{tr} \mathbf{A} - 1 = 0} \quad (12)$$

где $\text{tr} \mathbf{A} = a_{11} + a_{22} + a_{33}$.

Собственные значения

$$\lambda^3 - \lambda^2 \operatorname{tr} \mathbf{A} + \lambda \operatorname{tr} \mathbf{A} - 1 = 0$$

- Первый корень уравнения для ортогональной матрицы \mathbf{A} равен $+1$.
- Два других корня – комплексно-сопряженные:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = \frac{\operatorname{tr} \mathbf{A} - 1}{2} \pm \sqrt{\frac{(\operatorname{tr} \mathbf{A} - 1)^2}{4} - 1}$$

Тригонометрическая форма представления
комплексно-сопряженных собственных чисел с модулем 1:

$$\lambda_{2,3} = \cos \varphi \pm i \sin \varphi, \quad \cos \varphi = \frac{\operatorname{tr} \mathbf{A} - 1}{2}$$

Тригонометрическая форма

Комплексно-сопряженные собственные числа с модулем равным +1:

$$\lambda_{2,3} = \frac{\text{tr} \mathbf{A} - 1}{2} \pm \sqrt{\frac{(\text{tr} \mathbf{A} - 1)^2}{4} - 1}$$

можно представить в тригонометрической форме:

$$\lambda_{2,3} = \cos \varphi \pm i \sin \varphi, \quad \cos \varphi = \frac{\text{tr} \mathbf{A} - 1}{2}$$

Собственные векторы

- Собственные векторы $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3$ определяются из уравнения (11):

$$\mathbf{A}\mathbf{R}_k = \lambda_k \mathbf{R}_k, \quad k = 1, 2, 3.$$

- Собственному числу $\lambda_1 = 1$ соответствует действительный вектор $\mathbf{R}_1 = (x, y, z)^T$, определяемый решением СЛУ:

$$\begin{cases} (a_{11} - 1)x + a_{12}y + a_{13}z = 0, \\ a_{21}x + (a_{22} - 1)y + a_{23}z = 0, \\ a_{31}x + a_{32}y + (a_{33} - 1)z = 0, \end{cases} \quad (13)$$

с дополнительным требованием единичной нормы вектора \mathbf{R}_1 :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Первый собственный вектор

Решение системы (13):

$$x = \pm \frac{a_{32} - a_{23}}{2 \sin \varphi}, \quad y = \pm \frac{a_{13} - a_{31}}{2 \sin \varphi}, \quad z = \pm \frac{a_{21} - a_{12}}{2 \sin \varphi}.$$

Для матрицы поворота вокруг оси x

$$x = + \frac{\sin \varphi + \sin \varphi}{2 \sin \varphi} = +1, \quad y = \frac{0 - 0}{2 \sin \varphi} = 0, \quad z = \frac{0 - 0}{2 \sin \varphi} = 0.$$

Для правого поворота

$$x = 1, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

Второй и третий собственные векторы

- Векторы, соответствующие двум комплексно-сопряженным корням, также являются комплексно-сопряжёнными:

$$\mathbf{R}_{2,3} = \mathbf{P} \mp i\mathbf{Q}.$$

- Векторы $\mathbf{R}_1, \mathbf{P}, \mathbf{Q}$ образуют правую тройку ортогональных векторов [1].

Ортогональные матрицы и поворот

Теорема

Любое ортогональное преобразование пространства эквивалентно повороту пространства вокруг собственного вектора \mathbf{R}_1 на угол φ .

Ортогональные матрицы и поворот

Доказательство [1]

Запишем уравнения:

$$\mathbf{A}\mathbf{R}_k = \lambda_k \mathbf{R}_k, \quad k = 1, 2, 3 \quad (14)$$

для всех собственных векторов:

$$\mathbf{A}\mathbf{R}_1 = 1 \cdot \mathbf{R}_1,$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{P} - i\mathbf{Q}) = \mathbf{A}\mathbf{P} - i\mathbf{A}\mathbf{Q} = (\cos \varphi + i \sin \varphi)(\mathbf{P} - i\mathbf{Q}),$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{P} + i\mathbf{Q}) = \mathbf{A}\mathbf{P} + i\mathbf{A}\mathbf{Q} = (\cos \varphi - i \sin \varphi)(\mathbf{P} + i\mathbf{Q}).$$

или

$$\mathbf{A}\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_1, \quad (15)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{P} = +\mathbf{P} \cos \varphi + \mathbf{Q} \sin \varphi, \quad (16)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{Q} = -\mathbf{P} \sin \varphi + \mathbf{Q} \cos \varphi. \quad (17)$$

Ортогональные матрицы и поворот

Доказательство

Если оси исходного базиса направлены по векторам \mathbf{R} , \mathbf{P} , \mathbf{Q} :

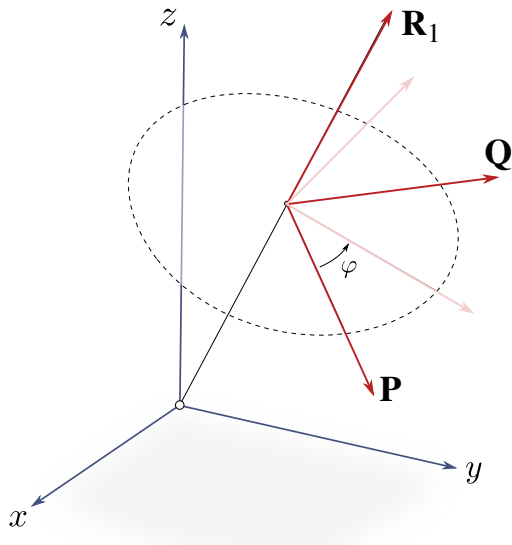
$$\mathbf{R}_1 = \{1, 0, 0\}, \quad \mathbf{P} = \{0, 1, 0\}, \quad \mathbf{Q} = \{0, 0, 1\},$$

то

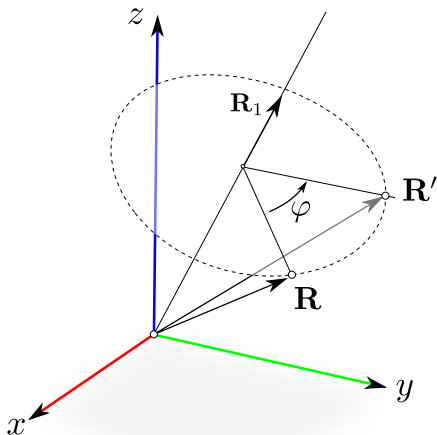
$$\{\mathbf{A}\mathbf{R}_1, \mathbf{A}\mathbf{P}, \mathbf{A}\mathbf{Q}\} = \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в базисе $\mathbf{R}_1, \mathbf{P}, \mathbf{Q}$ ортогональная матрица \mathbf{A} имеет вид матрицы плоского поворота вокруг вектора \mathbf{R}_1 на угол φ .

Ортогональные матрицы и поворот



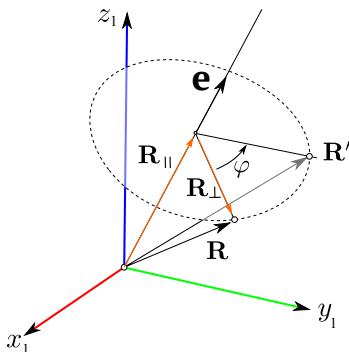
Ортогональные матрицы и поворот



$$\mathbf{A}\mathbf{R}_1 = \lambda_1\mathbf{R}_1, \lambda_1 = 1 \quad (18)$$

$$\cos \varphi = \frac{\text{tr}\mathbf{A} - 1}{2} \quad (19)$$

Поворот вокруг оси \mathbf{e} на угол φ



$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{\parallel} + \mathbf{R}_{\perp}$$

$$\mathbf{R}_{\parallel} = (\mathbf{R} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e} = (\mathbf{e}\mathbf{e}^T)\mathbf{R}$$

$$\mathbf{R}_{\perp} = \mathbf{R} - (\mathbf{e}\mathbf{e}^T)\mathbf{R} = (\mathbf{E} - \mathbf{e}\mathbf{e}^T)\mathbf{R}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{R} = \mathbf{R}_{\parallel} + (\cos \varphi)\mathbf{R}_{\perp} + (\sin \varphi)\mathbf{e} \times \mathbf{R}$$

Поворот вокруг оси \mathbf{e} на угол φ

$$\mathbf{A}\mathbf{R} = \mathbf{R}_{\parallel} + (\cos \varphi)\mathbf{R}_{\perp} + (\sin \varphi)\mathbf{e} \times \mathbf{R}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{R} = (\mathbf{e}\mathbf{e}^T)\mathbf{R} + (\sin \varphi)\mathbf{e} \times \mathbf{R} + (\cos \varphi)(\mathbf{E} - \mathbf{e}\mathbf{e}^T)\mathbf{R}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{R} = \{\mathbf{E} \cos \varphi + \sin \varphi[\mathbf{e} \times] + (1 - \cos \varphi)\mathbf{e}\mathbf{e}^T\} \mathbf{R}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{R} = \{\mathbf{E} + \sin \varphi \tilde{\mathbf{e}} + (1 - \cos \varphi)\tilde{\mathbf{e}}^2\} \mathbf{R}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{E} + \sin \varphi \tilde{\mathbf{e}} + (1 - \cos \varphi)\tilde{\mathbf{e}}^2$$

где

$$\tilde{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} 0 & -e_z & e_y \\ e_z & 0 & -e_x \\ -e_y & e_x & 0 \end{bmatrix}$$

Сложение поворотов

Сложение поворотов

- Выполняется последовательность поворотов: \mathbf{A} , \mathbf{B} :

$$\mathbf{R} \xrightarrow{\mathbf{A}} \mathbf{R}' \xrightarrow{\mathbf{B}} \mathbf{R}''.$$
 (20)

- Как найти результирующий поворот \mathbf{C} ?

$$\mathbf{R} \xrightarrow{\mathbf{C}} \mathbf{R}'', \quad \mathbf{C}=?$$
 (21)

- Определение матрицы поворота \mathbf{C} зависит от активной или пассивной точки зрения на преобразование.

Активная точка зрения

<https://youtu.be/IgR5F35r6Qo>

Активная точка зрения

- Первый поворот:

$$\mathbf{R}' = \mathbf{A}\mathbf{R}.$$

- Второй поворот:

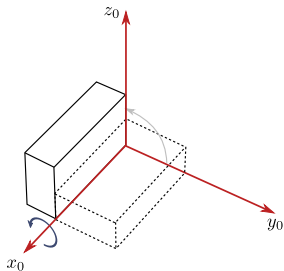
$$\mathbf{R}'' = \mathbf{B}\mathbf{R}'.$$

- Результирующий поворот:

$$\mathbf{R}'' = \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{R} = \mathbf{C}\mathbf{R}, \quad \boxed{\mathbf{C} = \mathbf{B}\mathbf{A}}$$

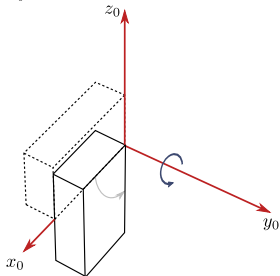
Матрицы последовательных поворотов записываются в исходном базисе и перемножаются в обратном порядке.

Активная точка зрения



- Поворот вокруг оси x_0 на угол $\varphi_1 = \pi/2$:

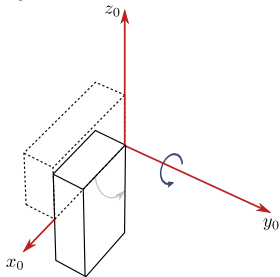
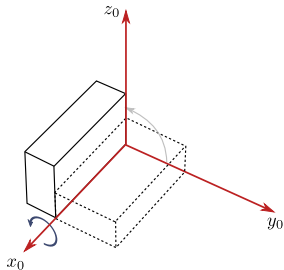
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



- Поворот вокруг оси y_0 на угол $\varphi_2 = \pi/2$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Активная точка зрения



- Итоговое преобразование:

$$\mathbf{C} = \mathbf{B}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Координаты вектора \mathbf{R} , связанного с телом:

$$\mathbf{R}' = \mathbf{C}\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{R}$$

Пассивная точка зрения

<https://youtu.be/6ZLvKHcinMM>

Пассивная точка зрения

- Первое преобразование

$$\mathbf{R}' = \mathbf{A}^T \mathbf{R}$$

- Второе преобразование

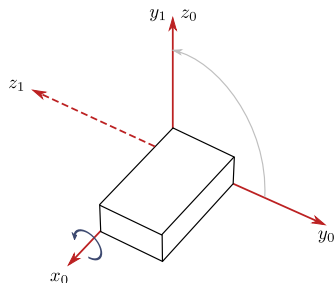
$$\mathbf{R}'' = \mathbf{B}^T \mathbf{R}'$$

- Результирующее преобразование

$$\mathbf{R}'' = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \mathbf{R} = \mathbf{C}^T \mathbf{R}, \quad \boxed{\mathbf{C} = \mathbf{AB}}$$

Матрицы последовательных поворотов записываются в поворачиваемых базисах и перемножаются в прямом порядке

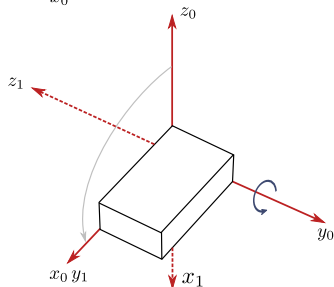
Пассивная точка зрения



- Поворот вокруг оси x_1 (x_0) на угол $\varphi_1 = \pi/2$:

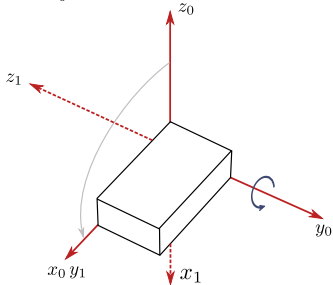
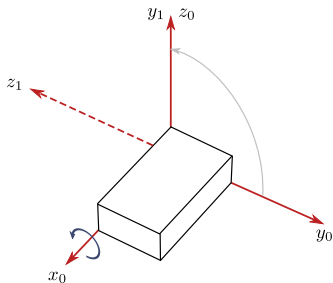
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Поворот вокруг оси z_1 на угол $\varphi_2 = -\pi/2$



$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Пассивная точка зрения



- Итоговое преобразование:

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Координаты вектора \mathbf{R} , связанного с телом, в новом базисе

$$\mathbf{R}' = \mathbf{C}^T \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{R}$$

Активная и пассивная точки зрения

Активная точка зрения

Матрица поворота и координаты повернутого вектора:

$$\mathbf{A}_{31} = \mathbf{A}_3 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1$$

$$\mathbf{R}^{(3)} = \mathbf{A}_{31} \mathbf{R}^{(1)}$$

Матрицы элементарных поворотов записываются в 1-ом (исходном) базисе.

Пассивная точка зрения

Матрица поворота и координаты вектора в новом базисе:

$$\mathbf{A}_{31} = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3$$

$$\mathbf{R}^{(3)} = \mathbf{A}_{31}^T \mathbf{R}^{(1)}$$

Матрицы элементарных поворотов записываются в поворачиваемых базисах.

Задания

- 1 В системе MATLAB напишите функции, возвращающие матрицы элементарных поворотов вокруг осей x , y , z .
- 2 Напишите функцию, возвращающую матрицу сложного последовательного поворота вокруг осей x , y , z (активная точка зрения).
- 3 Напишите функцию, возвращающую матрицу сложного последовательного поворота вокруг осей x , y' , z'' (пассивная точка зрения).
- 4 Напишите функцию, возвращающую матрицу сложного последовательного поворота вокруг осей z , x' , z'' (пассивная точка зрения).

Список использованных источников



В. Ф. Журавлев.

Основы теоретической механики.

Издательство физико-математической литературы, Москва,
2001.