

# Преобразование поворота

## Компьютерная графика

Юдинцев В. В.

Кафедра теоретической механики  
Самарский университет

22 апреля 2018 г.



САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
SAMARA UNIVERSITY

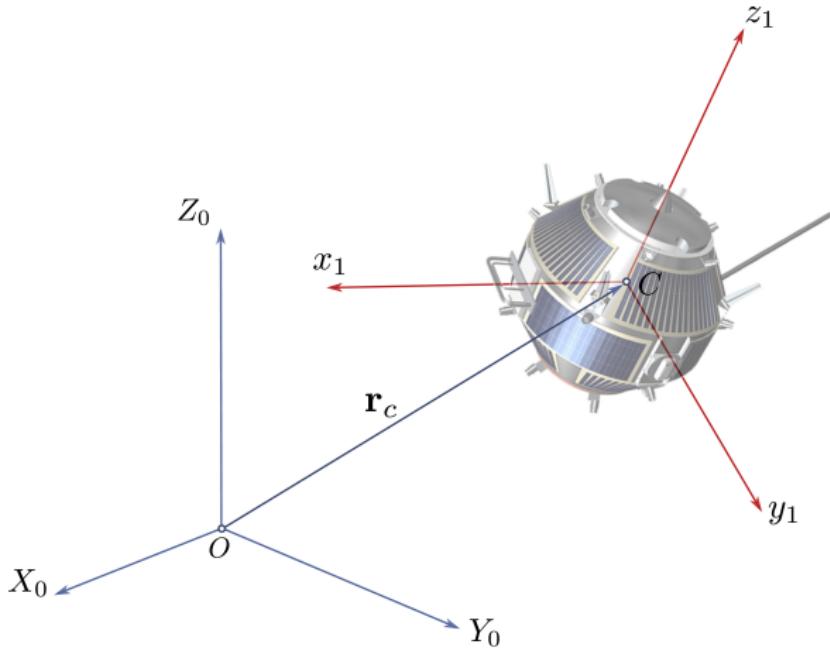
# Содержание

- 1 Способы задания ориентации твёрдого тела
- 2 Ортогональные матрицы
- 3 Активная и пассивная точки зрения
- 4 Сложение поворотов
- 5 Углы Эйлера
- 6 Пример

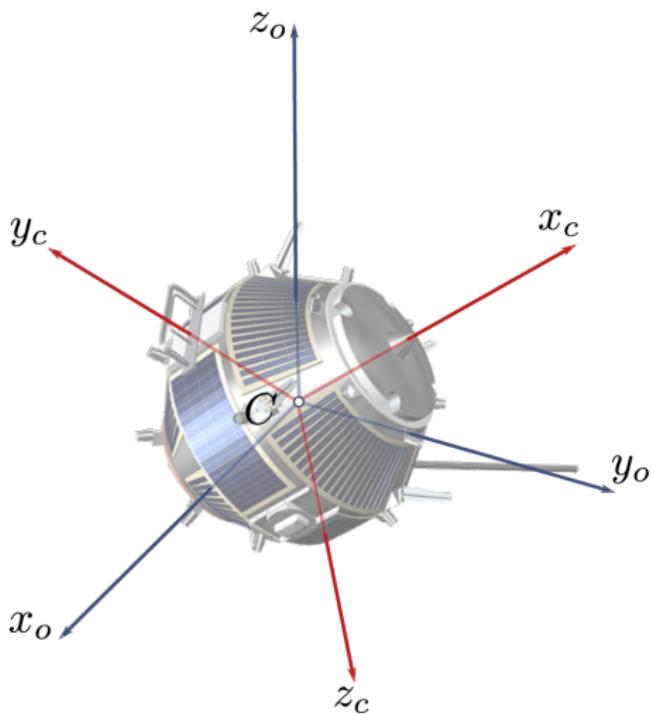
# Способы задания ориентации твёрдого тела

# Ориентация твёрдого тела

Произвольное движение твёрдого тела складывается из движения произвольной точки твёрдого тела (полюса) и вращения тела вокруг этого полюса.



# Ориентация твёрдого тела



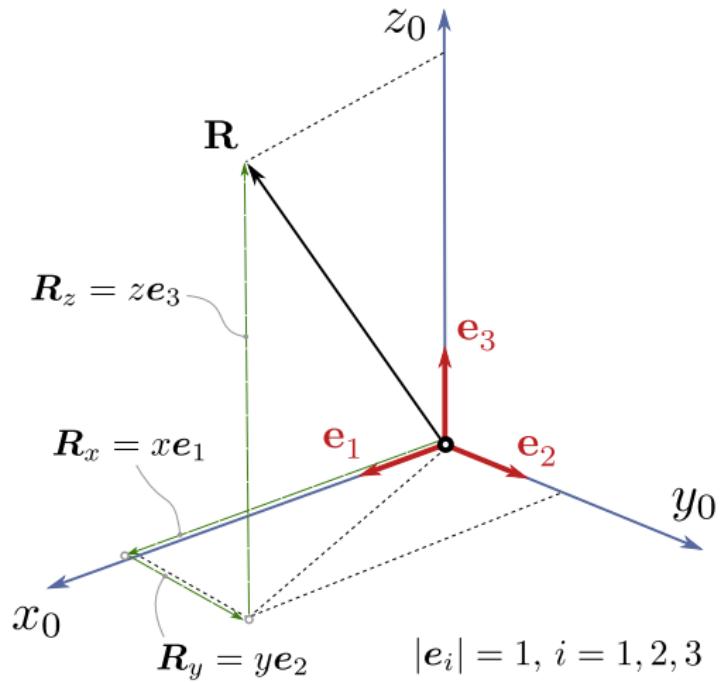
- $Cx_c y_c z_c$  – система координат, связанная с твёрдым телом;
- $Cx_o y_o z_o$  – поступательно движущаяся система координат с началом в точке С.
- Ориентация системы координат  $Cx_c y_c z_c$  относительно  $Cx_o y_o z_o$  может быть задана несколькими способами.

# Способы задания ориентации твёрдого тела

- Матрица направляющих косинусов:  $n = 9$ .
- Система плоских поворотов (углы Эйлера, углы Брайнта):  
 $n = 3$ .
- Кватернионы, параметры Кейли-Клейна:  $n = 4$ .

# Ортогональные матрицы

# Координаты вектора

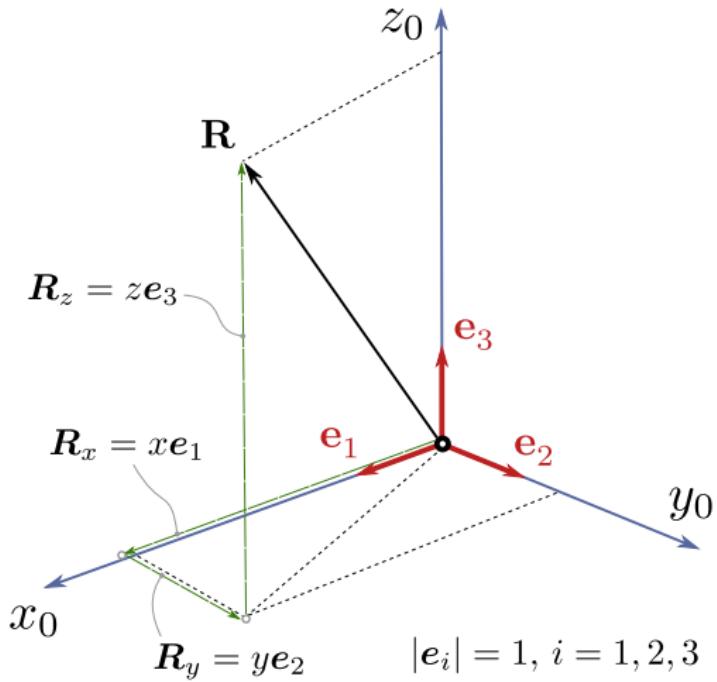


Вектор  $\vec{R}$  можно представить как линейную комбинацию базисных векторов:

$$\begin{aligned}\vec{R} &= x \cdot \mathbf{e}_1 + y \cdot \mathbf{e}_2 + z \cdot \mathbf{e}_3 = \\ &= [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \\ &= \mathbf{e}^T \mathbf{R},\end{aligned}$$

где  $\mathbf{R}$  – координатный столбец вектора  $\vec{R}$  в базисе  $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)^T$ .

# Проекции $R$ на оси



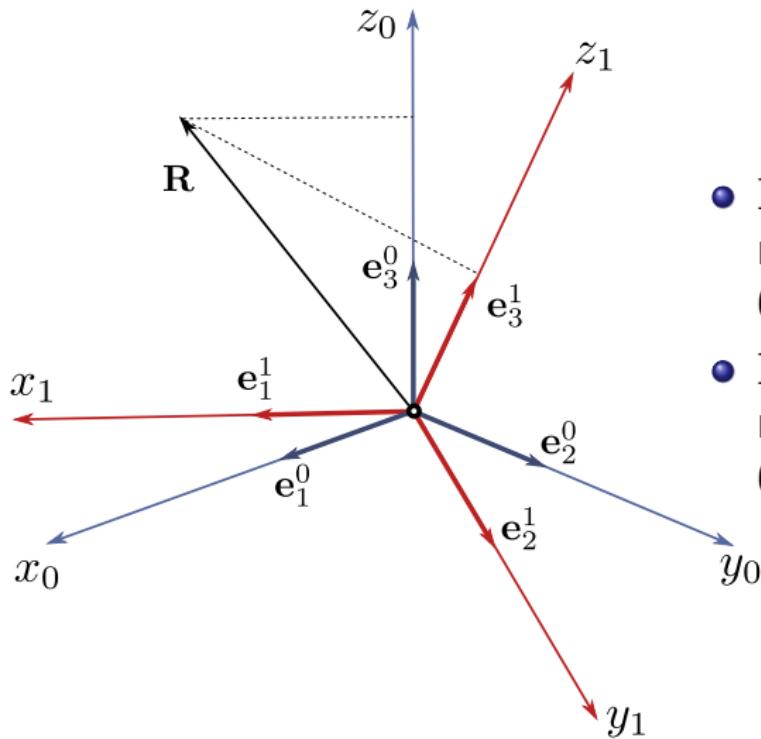
$$x = \mathbf{R} \cdot \mathbf{e}_1 = |\mathbf{R}| \cos(\angle \mathbf{e}_1 \mathbf{R})$$

$$y = \mathbf{R} \cdot \mathbf{e}_2 = |\mathbf{R}| \cos(\angle \mathbf{e}_2 \mathbf{R})$$

$$z = \mathbf{R} \cdot \mathbf{e}_3 = |\mathbf{R}| \cos(\angle \mathbf{e}_3 \mathbf{R})$$

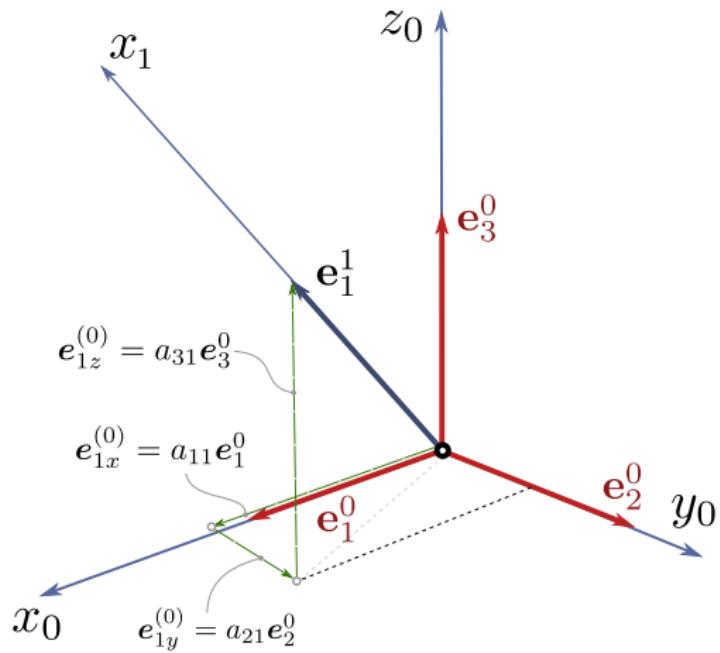
$$|\mathbf{e}_i| = 1, i = 1, 2, 3$$

# Координаты вектора в разных базисах



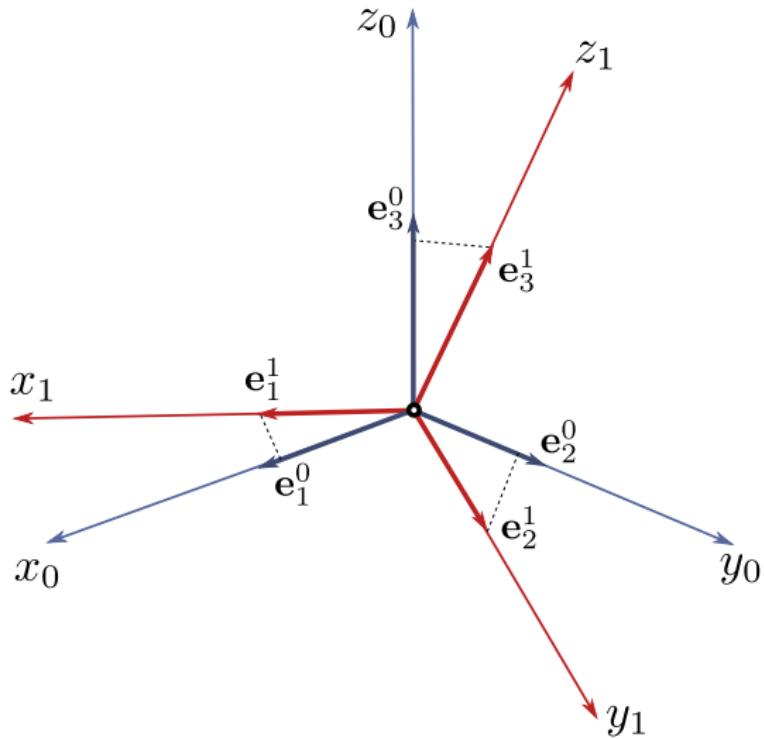
- $\mathbf{R}^{(0)} = (x_0, y_0, z_0)^T$  – координаты вектора в базисе  $e^0$ ;
- $\mathbf{R}^{(1)} = (x_1, y_1, z_1)^T$  – координаты вектора в базисе  $e^1$ .

# Координаты базисных векторов



$$\begin{aligned} e_1^1 &= e_1^0 \cdot |e_1^1| \cos \alpha_{11} + \\ &\quad e_2^0 \cdot |e_1^1| \cos \alpha_{21} + \\ &\quad e_3^0 \cdot |e_1^1| \cos \alpha_{31} = \\ &= e_1^0 \cos \alpha_{11} + \\ &\quad e_2^0 \cos \alpha_{21} + \\ &\quad e_3^0 \cos \alpha_{31} = \\ &= e_1^0 a_{11} + \\ &\quad e_2^0 a_{21} + \\ &\quad e_3^0 a_{31}. \end{aligned}$$

# Направляющие косинусы



$$\alpha_{11} = \angle \mathbf{e}_1^0 \mathbf{e}_1^1$$

$$\alpha_{21} = \angle \mathbf{e}_2^0 \mathbf{e}_1^1$$

$$\alpha_{31} = \angle \mathbf{e}_3^0 \mathbf{e}_1^1$$

$$\alpha_{12} = \angle \mathbf{e}_1^0 \mathbf{e}_2^1$$

$$\alpha_{22} = \angle \mathbf{e}_2^0 \mathbf{e}_2^1$$

$$\alpha_{32} = \angle \mathbf{e}_3^0 \mathbf{e}_2^1$$

$$\alpha_{13} = \angle \mathbf{e}_1^0 \mathbf{e}_3^1$$

$$\alpha_{23} = \angle \mathbf{e}_2^0 \mathbf{e}_3^1$$

$$\alpha_{33} = \angle \mathbf{e}_3^0 \mathbf{e}_3^1$$

# Матрица направляющих косинусов

Скалярное произведение двух базисных векторов различных базисов равно косинусу угла между ними:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \mathbf{e}_1^0 \cdot \mathbf{e}_1^1 = \cos \angle \mathbf{e}_1^0 \mathbf{e}_1^1, & a_{12} &= \mathbf{e}_1^0 \cdot \mathbf{e}_2^1, & a_{13} &= \mathbf{e}_1^0 \cdot \mathbf{e}_3^1, \\ a_{21} &= \mathbf{e}_2^0 \cdot \mathbf{e}_1^1, & a_{22} &= \mathbf{e}_2^0 \cdot \mathbf{e}_2^1, & a_{23} &= \mathbf{e}_2^0 \cdot \mathbf{e}_3^1, \\ a_{31} &= \mathbf{e}_3^0 \cdot \mathbf{e}_1^1, & a_{32} &= \mathbf{e}_3^0 \cdot \mathbf{e}_2^1, & a_{33} &= \mathbf{e}_3^0 \cdot \mathbf{e}_3^1. \end{aligned}$$

Матрица направляющих косинусов:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

# Матрица направляющих косинусов

Матрица  $\mathbf{A}$  описывает ориентацию базиса  $e^1$  относительно  $e^0$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

$i$ -ый столбец матрицы  $\mathbf{A}$  представляет собой координаты единичного вектора  $\mathbf{e}_i^1$  в базисе  $\mathbf{e}^0$ :

$$(\mathbf{e}_1^1)^{(0)} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}, (\mathbf{e}_2^1)^{(0)} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix}, (\mathbf{e}_3^1)^{(0)} = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}.$$

# Преобразование координат вектора

В базисе  $\mathbf{e}^1$ :

$$\mathbf{R}^{(1)} = x' \mathbf{e}_1^1 + y' \mathbf{e}_2^1 + z' \mathbf{e}_3^1.$$

В базисе  $\mathbf{e}^0$ :

$$\mathbf{R}^{(0)} = x \mathbf{e}_1^0 + y \mathbf{e}_2^0 + z \mathbf{e}_3^0.$$

Координаты вектора в базисе  $\mathbf{e}^0$ :

$$x = \mathbf{e}_1^0 \cdot \mathbf{R} = \mathbf{e}_1^0 \cdot (x' \mathbf{e}_1^1 + y' \mathbf{e}_2^1 + z' \mathbf{e}_3^1) = a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z',$$

$$y = \mathbf{e}_2^0 \cdot \mathbf{R} = \mathbf{e}_2^0 \cdot (x' \mathbf{e}_1^1 + y' \mathbf{e}_2^1 + z' \mathbf{e}_3^1) = a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z',$$

$$z = \mathbf{e}_3^0 \cdot \mathbf{R} = \mathbf{e}_3^0 \cdot (x' \mathbf{e}_1^1 + y' \mathbf{e}_2^1 + z' \mathbf{e}_3^1) = a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z'.$$

В матричной форме:

$$\mathbf{R}^{(0)} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \mathbf{A} \mathbf{R}^{(1)}.$$

# Ортогональное преобразование

Матрица  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

задаёт линейное отображение трёхмерного евклидового пространства в себя, при котором расстояние между произвольными точками неизменны:

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{R}'^T \mathbf{R}'.$$

# **Активная и пассивная точки зрения**

# Активная и пассивная точки зрения

Преобразование координат можно рассматривать с двух точек зрения.

- Активная точка зрения – поворачивается вектор в неизменном базисе:

$$\mathbf{R} \xrightarrow{\mathbf{A}} \mathbf{R}', \quad (1)$$

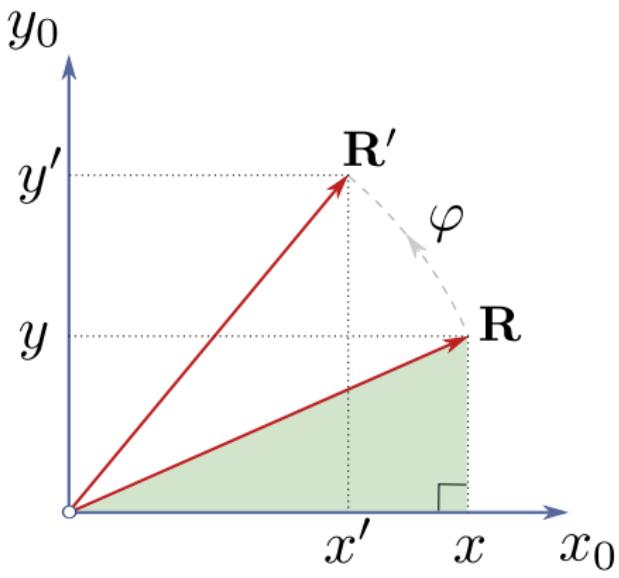
- Пассивная точка зрения – поворачивается базис

$$\mathbf{e}^1 \xrightarrow{\mathbf{A}} \mathbf{e}^2, \quad (2)$$

определяются координаты неизменного вектора в новом базисе.

$$\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}'. \quad (3)$$

# Активная точка зрения



$$\mathbf{R}' = \mathbf{A}\mathbf{R}.$$

Матрица поворота вокруг оси  $z$ :

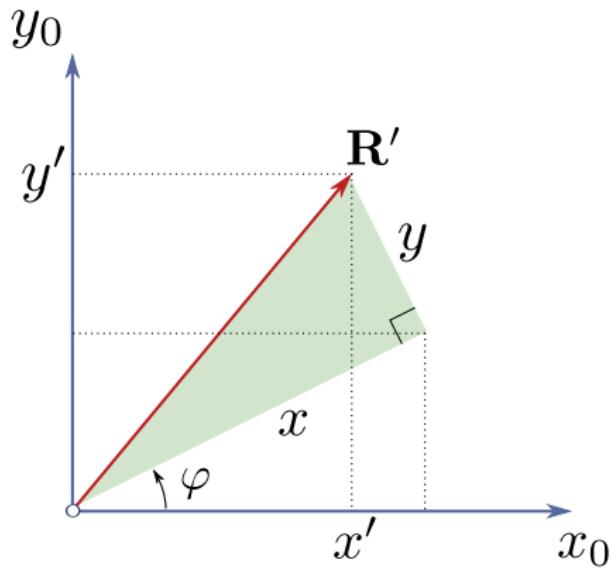
$$\mathbf{A}_z = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Координаты нового вектора:

$$\mathbf{R}' = \begin{bmatrix} x \cos \varphi - y \sin \varphi \\ x \sin \varphi + y \cos \varphi \\ z \end{bmatrix}. \quad (4)$$

# Активная точка зрения

$$\mathbf{R}' = \mathbf{A}\mathbf{R}.$$



Матрица поворота вокруг оси  $z$ :

$$\mathbf{A}_z = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Координаты нового вектора:

$$\mathbf{R}' = \begin{bmatrix} x \cos \varphi - y \sin \varphi \\ x \sin \varphi + y \cos \varphi \\ z \end{bmatrix}. \quad (4)$$

# Матрицы поворота вокруг осей

Поворот вокруг оси x:

$$\mathbf{A}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Поворот вокруг оси y:

$$\mathbf{A}_y = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Поворот вокруг оси z:

$$\mathbf{A}_z = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

# Пассивная точка зрения

$$\mathbf{R} = x \cdot \mathbf{e}_1^0 + y \cdot \mathbf{e}_2^0 + z \cdot \mathbf{e}_3^0 = x' \cdot \mathbf{e}_1^1 + y' \cdot \mathbf{e}_2^1 + z' \cdot \mathbf{e}_3^1 \quad (8)$$

Исходный базис:

$$\mathbf{e}_1^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Новый базис:

$$\mathbf{e}_1^1 = \mathbf{A}\mathbf{e}_1^0, \quad \mathbf{e}_2^1 = \mathbf{A}\mathbf{e}_2^0, \quad \mathbf{e}_3^1 = \mathbf{A}\mathbf{e}_3^0.$$

# Пассивная точка зрения

Из уравнения (8)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} z}_{x\mathbf{e}_1^0 + y\mathbf{e}_2^0 + z\mathbf{e}_3^0} = \mathbf{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x' + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} y' + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} z'}_{x'\mathbf{e}_1^1 + y'\mathbf{e}_2^1 + z'\mathbf{e}_3^1} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

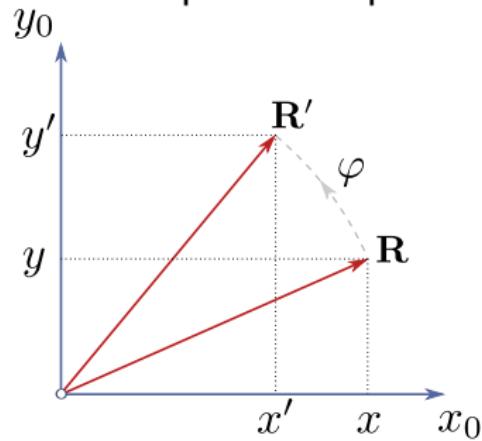
определяются координаты вектора в новом базисе:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \boxed{\mathbf{R}' = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{R}}$$

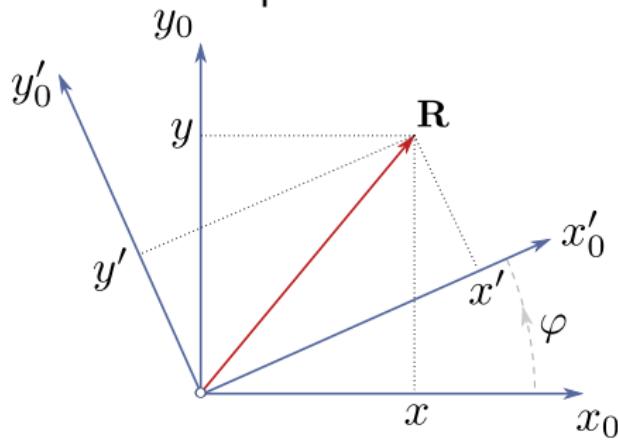
Координаты вектора в новом базисе определяются при помощи матрицы, обратной матрице поворота базиса

# Активная и пассивная точка зрения

Поворот вектора



Поворот базиса



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Сложение поворотов

# Сложение поворотов

- Выполняется последовательность поворотов: А, В:

$$R \xrightarrow{A} R' \xrightarrow{B} R''. \quad (9)$$

- Как найти результирующий поворот С?

$$R \xrightarrow{C} R'', \quad C - ? \quad (10)$$

- Определение матрицы поворота С зависит от активной или пассивной точки зрения на преобразование.

# Активная точка зрения

<https://www.youtube.com/watch?v=IgR5F35r6Qo>

# Активная точка зрения

- Первый поворот:

$$\mathbf{R}' = \mathbf{A}\mathbf{R}.$$

- Второй поворот:

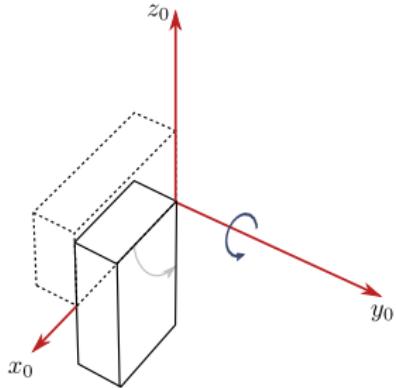
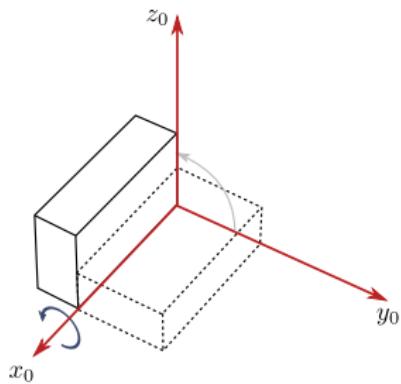
$$\mathbf{R}'' = \mathbf{B}\mathbf{R}'.$$

- Результирующий поворот:

$$\mathbf{R}'' = \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{R} = \mathbf{C}\mathbf{R}, \quad \boxed{\mathbf{C} = \mathbf{B}\mathbf{A}}$$

Матрицы последовательных поворотов записываются в исходном базисе и перемножаются в обратном порядке.

# Активная точка зрения



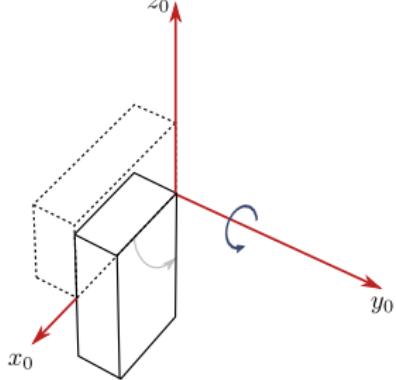
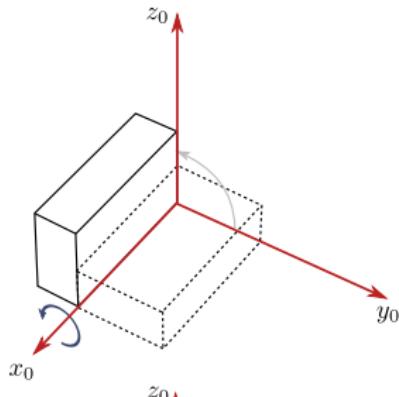
- Поворот вокруг оси  $x_0$  на угол  $\varphi_1 = \pi/2$ :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Поворот вокруг оси  $y_0$  на угол  $\varphi_2 = \pi/2$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Активная точка зрения



- Итоговое преобразование:

$$\mathbf{C} = \mathbf{B}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Координаты вектора  $\mathbf{R}$ , связанного с телом:

$$\mathbf{R}' = \mathbf{C}\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{R}$$

# Пассивная точка зрения

<https://www.youtube.com/watch?v=6ZLvkHcinMM>

# Пассивная точка зрения

- Первое преобразование

$$\mathbf{R}' = \mathbf{A}^T \mathbf{R}$$

- Первое преобразование

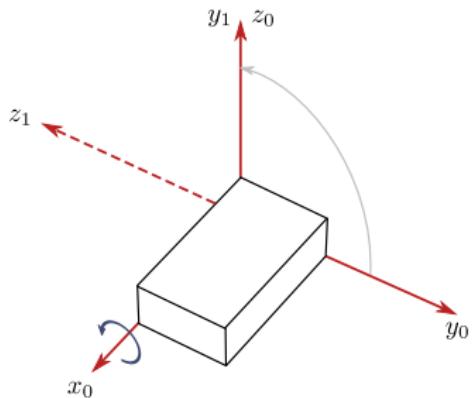
$$\mathbf{R}'' = \mathbf{B}^T \mathbf{R}'$$

- Результирующее преобразование

$$\mathbf{R}'' = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \mathbf{R} = \mathbf{C}^T \mathbf{R}, \quad \boxed{\mathbf{C} = \mathbf{AB}}$$

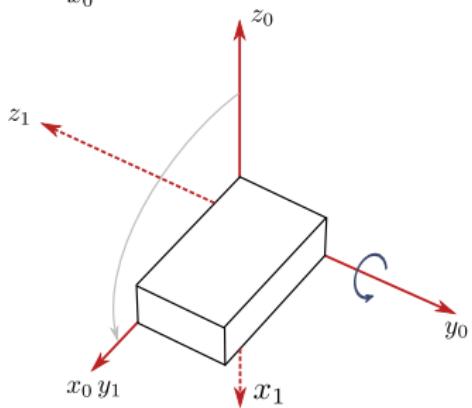
Матрицы последовательных поворотов записываются в поворачиваемых базисах и перемножаются в прямом порядке

# Пассивная точка зрения



- Поворот вокруг оси  $x_1 (x_0)$  на угол  $\varphi_1 = \pi/2$ :

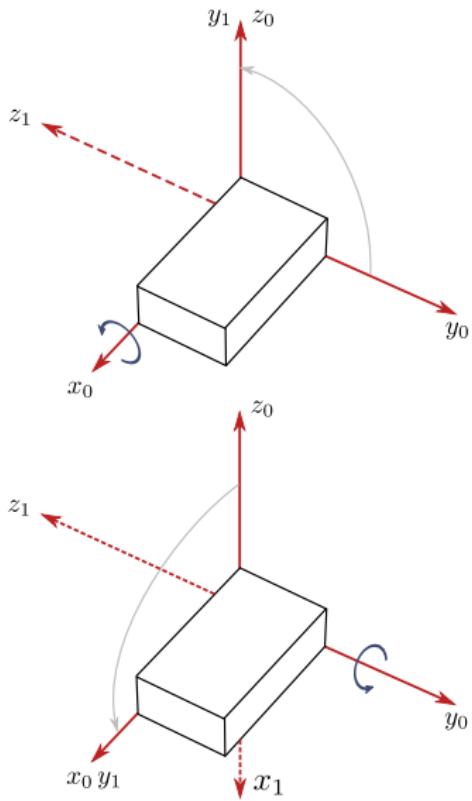
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



- Поворот вокруг оси  $z_1$  на угол  $\varphi_2 = -\pi/2$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Пассивная точка зрения



- Итоговое преобразование:

$$C = AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Координаты вектора  $R$ , связанного с телом, в новом базисе

$$R' = C^T R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} R$$

# Активная и пассивная точки зрения

## Активная точка зрения

Матрица поворота и координаты повёрнутого вектора:

$$A_{31} = A_3 A_2 A_1$$

$$\boldsymbol{R}^{(3)} = A_{31} \boldsymbol{R}^{(1)}$$

Матрицы элементарных поворотов записываются в 1-ом (исходном) базисе.

## Пассивная точка зрения

Матрица поворота и координаты вектора в новом базисе:

$$A_{31} = A_1 A_2 A_3$$

$$\boldsymbol{R}^{(3)} = A_{31}^T \boldsymbol{R}^{(1)}$$

Матрицы элементарных поворотов записываются в поворачиваемых базисах.

# Углы Эйлера

# Теорема о трёх плоских поворотах

## Теорема

*Любое положение твёрдого тела может быть получено тремя последовательными плоскими поворотами из любого начального положения.*

# Углы Эйлера

- $\psi$  - угол прецессии,
- $\theta$  - угол нутации,
- $\varphi$  - угол собственного вращения.

<https://www.youtube.com/watch?v=tmtGEHTBSdQ>

# Преобразование $\psi, \theta, \varphi \rightarrow A$

## Матрицы элементарных поворотов

$$A_\psi = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

$$A_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$A_\varphi = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

# Преобразование $\psi, \theta, \varphi \rightarrow \mathbf{A}$

Перемножая матрицы элементарных поворотов в прямом порядке и транспонируя результат (пассивная точка зрения), получим матрицу преобразования координат из **неподвижного базиса в подвижный**:

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A}_\psi \mathbf{A}_\theta \mathbf{A}_\varphi)^T = \begin{bmatrix} c_\varphi c_\psi - c_\theta s_\varphi s_\psi & c_\theta c_\psi s_\varphi + c_\varphi s_\psi & s_\theta s_\varphi \\ -c_\psi s_\varphi - c_\theta c_\varphi s_\psi & c_\theta c_\varphi c_\psi - s_\varphi s_\psi & c_\varphi s_\theta \\ s_\theta s_\psi & -c_\psi s_\theta & c_\theta \end{bmatrix}$$

Матрица преобразования из **подвижного базиса в неподвижный**:

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}_\psi \mathbf{A}_\theta \mathbf{A}_\varphi$$

# Другие последовательности поворотов

Углы конечного вращения I-го рода (углы Эйлера)

- 3-1-3;
- 1-2-1;
- 2-3-2;
- 3-2-3;
- 1-3-1;
- 2-1-2.

Углы конечного вращения II-го рода (углы Брайнта)

- 1-2-3;
- 2-3-1;
- 3-1-2;
- 1-3-2;
- 3-2-1;
- 2-1-3.

# Определение углов Брайнта (Крылова)

Угловое положение базиса  $Cx_1y_1z_1$  задается тремя последовательными плоскими поворотами:

- ① вращение вокруг оси  $x_1$ ;
- ② вращение вокруг новой оси  $y_1$ ;
- ③ вращение вокруг новой оси  $z_1$ .

<https://www.youtube.com/watch?v=-W4mkUPxxQs>

# Матрицы элементарных поворотов

Матрицы элементарных поворотов в “поворачиваемых” базисах  
(пассивная точка зрения)

$$A_\psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix}, \quad (14)$$

$$A_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad (15)$$

$$A_\varphi = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

# Углы Брайнта → Матрица поворота

Перемножая матрицы элементарных поворотов в прямом порядке и транспонируя результат (пассивная точка зрения), получим матрицу преобразования координат **из неподвижного базиса в подвижный**:

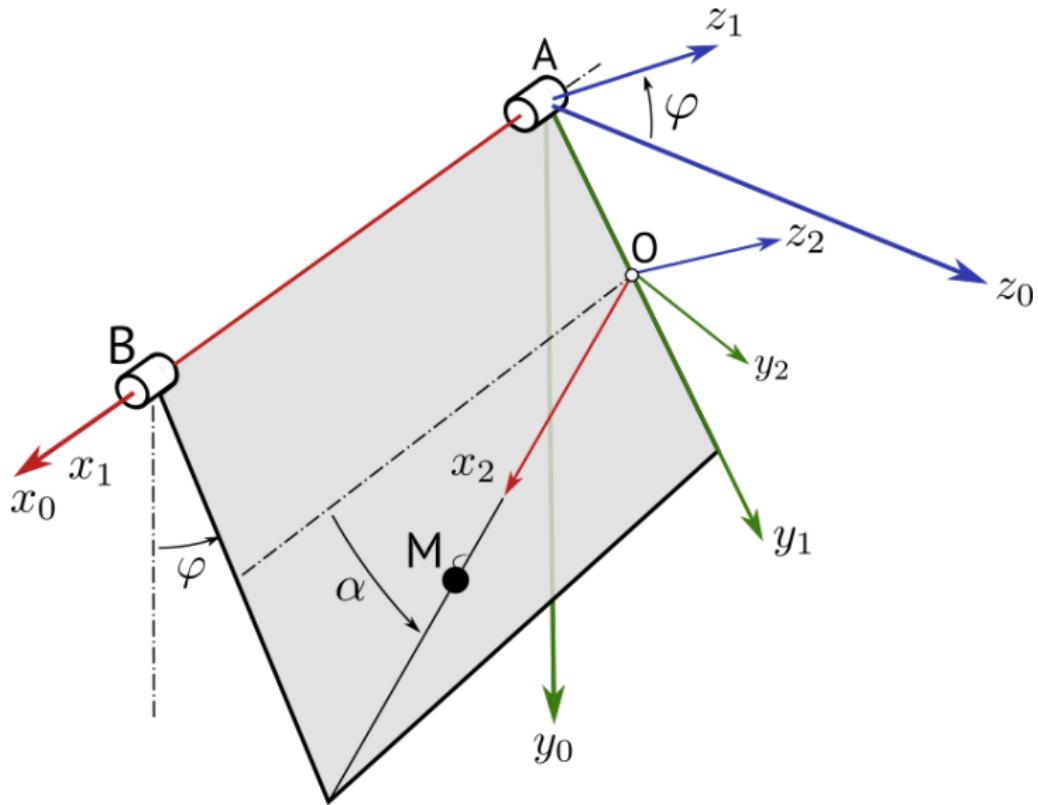
$$\mathbf{A} = (\mathbf{A}_\psi \mathbf{A}_\theta \mathbf{A}_\varphi)^T = \begin{bmatrix} c_\theta c_\varphi & c_\psi s_\varphi + c_\varphi s_\theta s_\psi & s_\varphi s_\psi - c_\varphi c_\psi s_\theta \\ -c_\theta s_\varphi & c_\varphi c_\psi - s_\theta s_\varphi s_\psi & c_\psi s_\theta s_\varphi + c_\varphi s_\psi \\ s_\theta & -c_\theta s_\psi & c_\theta c_\psi \end{bmatrix}.$$

Матрица преобразований координат из подвижного (поворнутого) базиса в неподвижный базис:

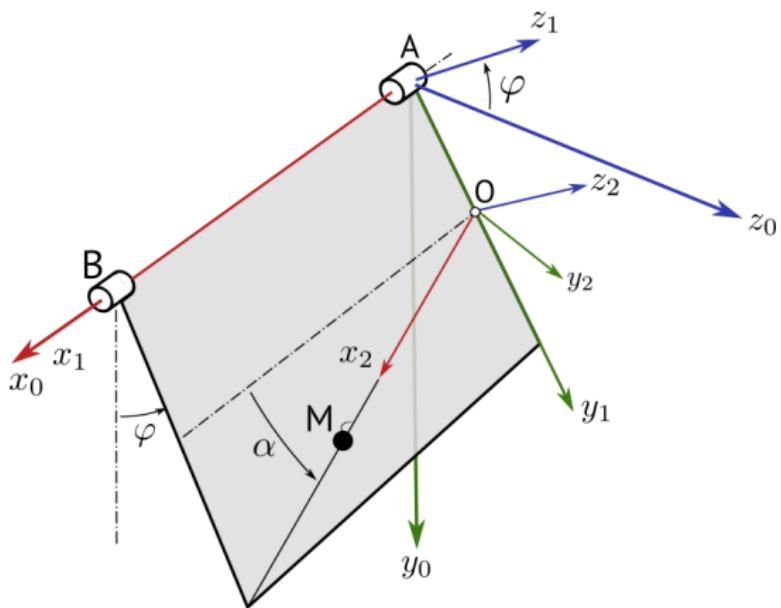
$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_\psi \mathbf{A}_\theta \mathbf{A}_\varphi$$

# Пример

# Системы координат



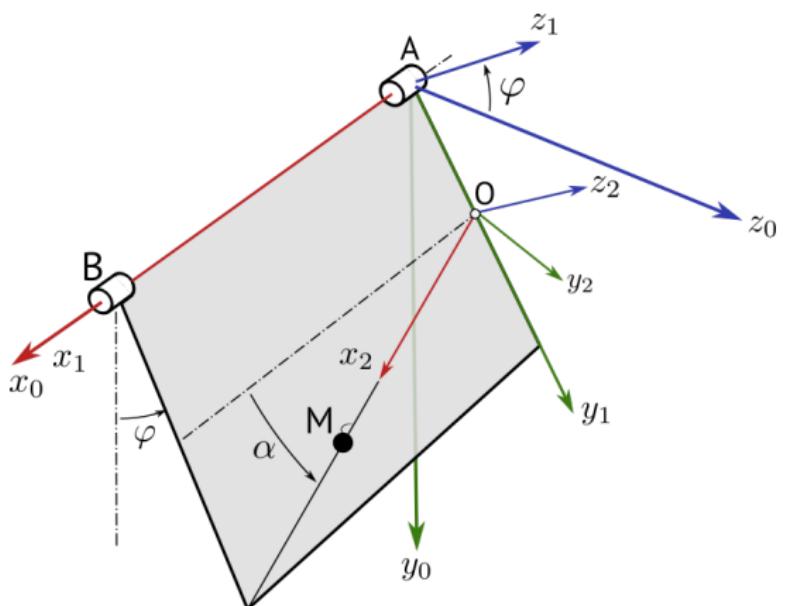
# Координатный столбец $\rho_M^{(2)}$



Координатный столбец  
вектора положения груза  
 $M$  в системе координат  
 $Ox_2y_2z_2$ :

$$\rho_M^{(2)} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

# Координатный столбец $\rho_M^{(1)}$



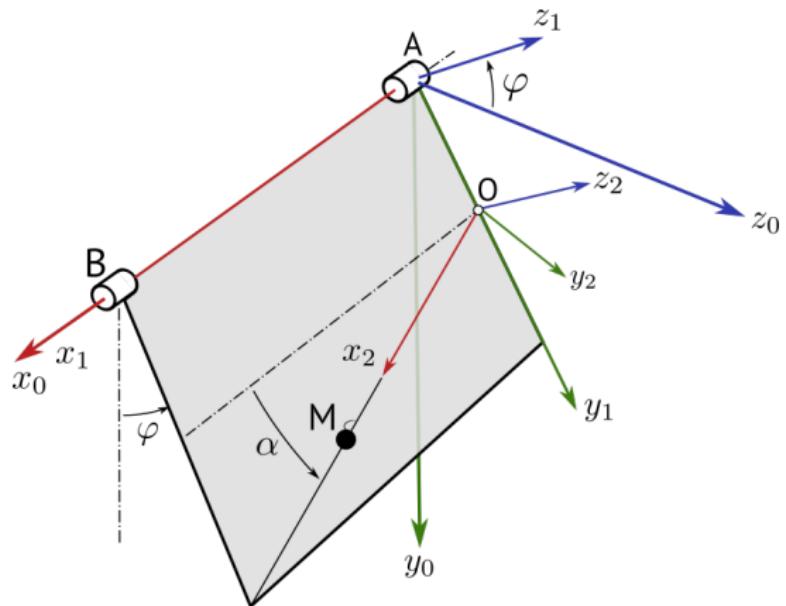
Матрица поворота базиса  $Ox_2y_2z_2$  относительно базиса  $Ax_1y_1z_1$ :

$$A^{12} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Координатный столбец вектора положения груза M в системе координат  $Ax_1y_1z_1$  относительно точки O:

$$\rho_M^{(1)} = A^{12} \rho_M^{(2)}$$

# Координатный столбец $r_M^{(1)}$



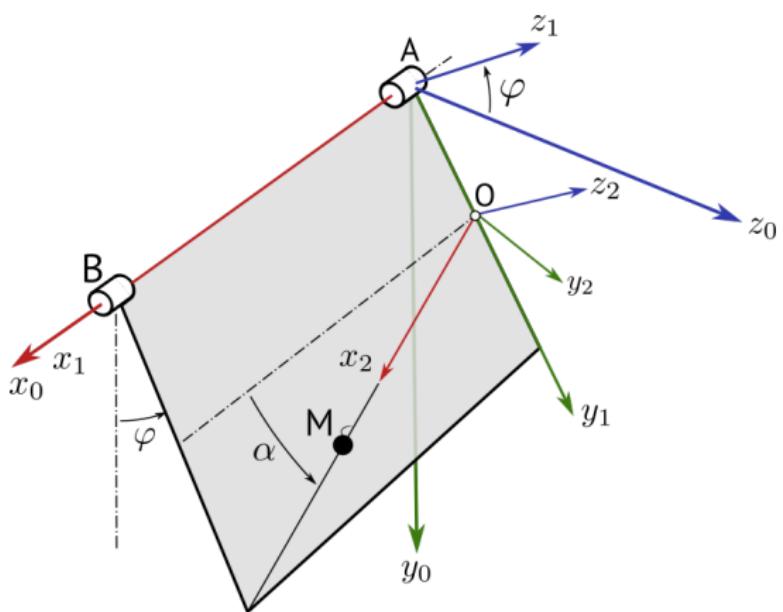
Координатный столбец  
вектора положения груза  
M в системе координат  
 $Ax_1y_1z_1$  относительно  
точки A:

$$\mathbf{r}_M^{(1)} = \rho_O^{(1)} + A^{12} \rho_M^{(2)}$$

Координатный столбец  
 $\rho_O^{(1)}$ :

$$\rho_O^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ AO \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ h/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

# Матрицы поворота



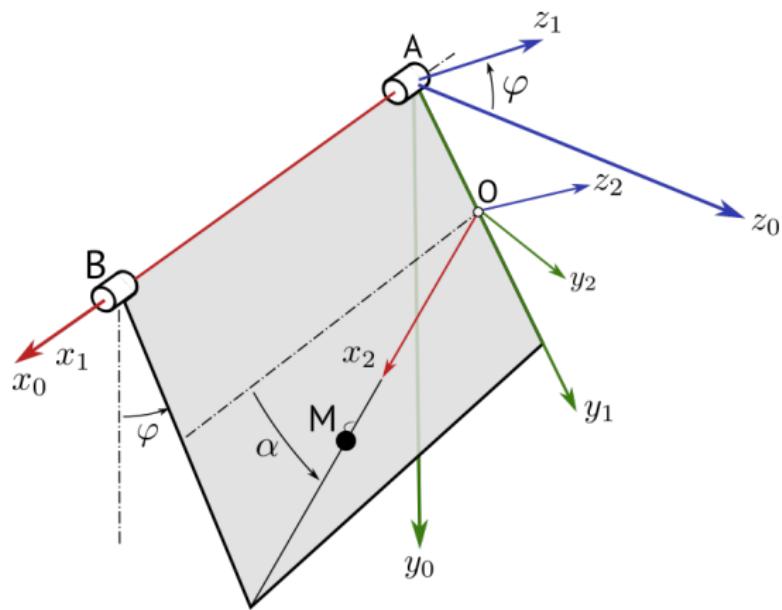
Матрица поворота базиса  
 $Ax_1y_1z_1$  относительно  
базиса  $Ax_0y_0z_0$ :

$$A^{01} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

Матрица поворота базиса  
 $Ox_2y_2z_2$  относительно  
базиса  $Ax_0y_0z_0$ :

$$A^{02} = A^{01} A^{12}$$

# Координатный столбец $r_M^{(0)}$



Координатный столбец вектора положения груза  $M$  в системе координат  $Ax_0y_0z_0$  относительно точки  $A$ :

$$\mathbf{r}_M^{(0)} = \mathbf{A}^{01}(\boldsymbol{\rho}_O^{(1)} + \mathbf{A}^{12}\boldsymbol{\rho}_M^{(2)})$$

или

$$\mathbf{r}_M^{(0)} = \mathbf{A}^{01}\boldsymbol{\rho}_O^{(1)} + \mathbf{A}^{01}\mathbf{A}^{12}\boldsymbol{\rho}_M^{(2)}$$

# Матрицы поворота

```
In[5]:=  $\rho_M = \{x[t], 0, 0\};$   
 $\rho_0 = \{0, h/2, 0\};$ 
```

Матрица поворота вокруг оси z

```
In[7]:= A12 = RotationMatrix[\alpha, {0, 0, 1}];  
% // MatrixForm
```

```
Out[8]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} \cos[\alpha] & -\sin[\alpha] & 0 \\ \sin[\alpha] & \cos[\alpha] & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица поворота вокруг оси x

```
In[9]:= A01[\varphi_] := RotationMatrix[\varphi, {1, 0, 0}];  
A01[\varphi] // MatrixForm
```

```
Out[10]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos[\varphi] & -\sin[\varphi] \\ 0 & \sin[\varphi] & \cos[\varphi] \end{pmatrix}$$

# Координатный столбец $r_M^{(0)}$

```
In[11]:= rM = A01[\varphi[t]] . (p0 + A12.pM) // FullSimplify;  
rM // MatrixForm
```

```
Out[12]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} \cos[\alpha] x[t] \\ \frac{1}{2} \cos[\varphi[t]] (h + 2 \sin[\alpha] x[t]) \\ \frac{1}{2} \sin[\varphi[t]] (h + 2 \sin[\alpha] x[t]) \end{pmatrix}$$

# Скорость и кинетическая энергия

```
In[13]:= VM = D[rM, t] // FullSimplify;  
VM // MatrixForm
```

```
Out[14]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} \cos[\alpha] x'[t] \\ \cos[\varphi[t]] \sin[\alpha] x'[t] - \frac{1}{2} \sin[\varphi[t]] (h + 2 \sin[\alpha] x[t]) \varphi'[t] \\ \sin[\alpha] \sin[\varphi[t]] x'[t] + \frac{1}{2} \cos[\varphi[t]] (h + 2 \sin[\alpha] x[t]) \varphi'[t] \end{pmatrix}$$

```
In[15]:= T =  $\frac{m_2 V_M \cdot V_M}{2}$  // FullSimplify
```

$$\text{Out}[15]= \frac{1}{8} m_2 (4 x'[t]^2 + (h + 2 \sin[\alpha] x[t])^2 \varphi'[t]^2)$$

# Уравнения Лагранжа

```
In[24]:= D[D[T, D[#, t]], t] - D[T, #] == Q# & /@ {φ[t], x[t]} // FullSimplify // TableForm
```

```
Out[24]//TableForm=
```

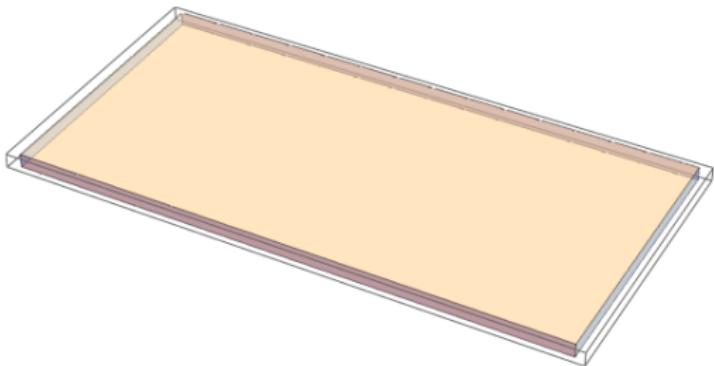
$$\begin{aligned}4 Q_{\varphi}[t] &= m_2 (h + 2 \sin[\alpha] x[t]) (4 \sin[\alpha] x'[t] \varphi'[t] + (h + 2 \sin[\alpha] x[t]) \varphi''[t]) \\m_2 x''[t] &= Q_x[t] + \frac{1}{2} \sin[\alpha] m_2 (h + 2 \sin[\alpha] x[t]) \varphi'[t]^2\end{aligned}$$

# Параллелепипед

```
body1 = {  
    Opacity[0.5],  
    Parallelepiped[{0, 0, 0}, {{2, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 0.05}}]  
};
```

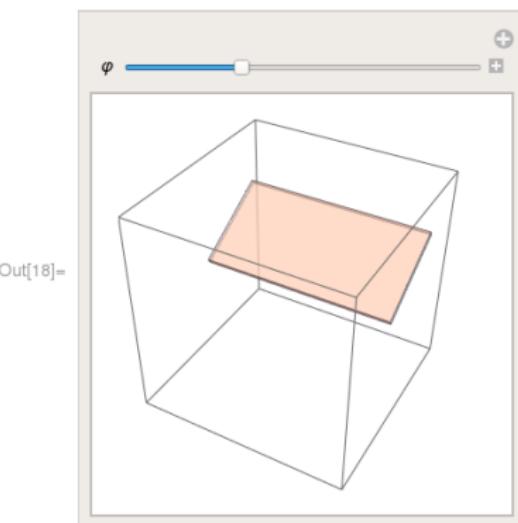
In[17]:= Graphics3D[body1]

Out[17]=



# Поворот тела 1

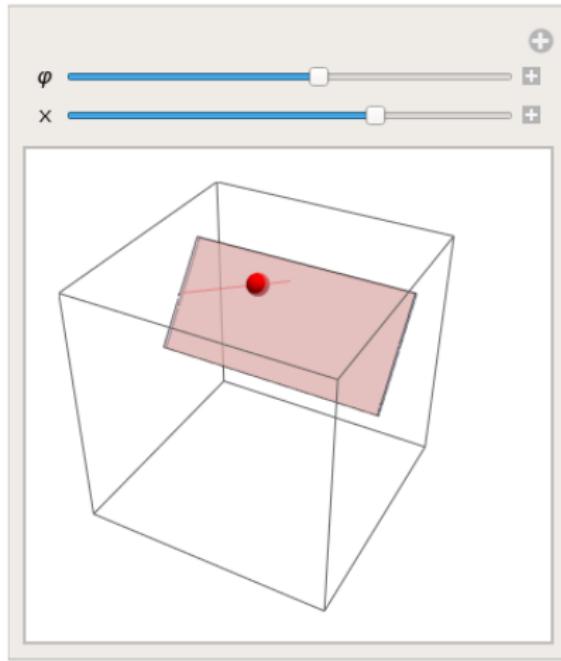
```
In[18]:= Manipulate[
 Graphics3D[
 GeometricTransformation[
 body1,
 AffineTransform[{A01[φ], {0, 0, 0}}]
 ],
 PlotRange → {{-0.1, 2.1}, {-1.1, 1.1}, {-1.1, 1.1}}
 ], {φ, 0, 90 °}]
```



# Последовательное преобразование

```
In[19]:= body2[x_] := {Red, Sphere[{x, 0, 0}, 0.1]};  
channel := {Red, Line[{{0, 0, 0}, {1, 0, 0}}]};  
  
Manipulate[  
 Graphics3D[  
 {  
 GeometricTransformation[body1, AffineTransform[{A01[\[phi]], {0, 0, 0}}]],  
 GeometricTransformation[  
 GeometricTransformation[  
 GeometricTransformation[  
 {channel, body2[x]},  
 AffineTransform[{A12, \[rho]}] /. {\[h]\[rightarrow] 1, \[alpha]\[rightarrow] 20 \[Degree]}  
 ],  
 AffineTransform[{A01[\[phi]], {0, 0, 0}}]  
 ]  
 },  
 PlotRange \[Rule] {{-0.1, 2.1}, {-1.1, 1.1}, {-1.1, 1.1}}, {\[phi], 0, 90 \[Degree]}, {x, 0, 1}]
```

# Последовательное преобразование



# GeometricTransformation для двух объектов

```
In[22]:= Manipulate[
  Graphics3D[
  {
    GeometricTransformation[
    {
      body1,
      GeometricTransformation[{channel, body2[x]},
        AffineTransform[{A12, ρ0}] /. {h → 1, α → 20 °}]
    ],
    AffineTransform[{A01[ψ], {0, 0, 0}}]
  },
  PlotRange → {{-0.1, 2.1}, {-1.1, 1.1}, {-1.1, 1.1}}
  ], {ψ, 0, 90 °}, {x, 0, 1}]
```

# Список использованных источников

- [1] В.Ф. Журавлев, Основы теоретической механики, Издательство физико-математической литературы, Москва, 2001.
- [2] Й. Виттенбург, Динамика систем твердых тел : Монография : пер. с англ. / Й. Виттенбург . - М. : Мир, 1980. - 290 с.