

УДК 629.7

ДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В РАКЕТНО-КОСМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

© 2003 Г. П. Аншаков¹, В. С. Асланов², В. Л. Балакин², А. В. Дорошин²,
А. С. Квашин¹, Г. Е. Круглов¹, В. В. Юдинцев¹

¹ Государственный научно-производственный
ракетно-космический центр “ЦСКБ - Прогресс”, г. Самара
² Самарский государственный аэрокосмический университет

Рассматриваются динамические процессы в таких ракетно-космических системах, как ракеты-носители (РН) и боковые блоки, малые спускаемые аппараты (СА) с двойным вращением, а также в рабочих элементах ракетно-космических средств, например систем отделения, систем раскрытия солнечных батарей и антенн без учета и с учетом упругости подвесов. Строятся математические модели движения, проводится анализ динамических процессов и синтез параметров в системах отделения боковых блоков, головных обтекателей РН и панелей солнечных батарей. СА с двойным вращением рассматривается как механическая система соосных тел переменной массы с линейными законами изменения массы и моментов инерции при малых относительных смещениях центра масс.

1. Исследование динамических процессов в системах отделения боковых блоков РН типа “СОЮЗ”. Система отделения боковых блоков должна обеспечивать отделение и увод отработавших блоков на безопасное расстояние от центрального блока (ЦБ). Это обеспечивается комплексом средств, которые создают необходимые силы, и системой управления (рис. 1). Для отделения бокового блока (ББ) используются сила тяги двигательной установки ББ, а также реактивные сопла баков окислителя и горючего, которые создают силы, тормозящие ББ в процессе своего движения. В носовой части ББ установлен контакт разделения (КР), срабатывающий при заданном перемещении носовой части относительно ЦБ.

Процесс отделения ББ можно разделить на два этапа: подготовительный и основной (рис. 2). На подготовительном этапе при достижении РН необходимой скорости в соответствии с программой управления подается команда на снижение тяги основного двигателя ББ до 84% от своего номинального значения. Затем выполняется команда на выключение рулевых камер ББ и приведение рулей ББ в нейтральное положение. Через некоторое время происходит разрыв нижних силовых связей - момент времени t_{kpc} (команда на разрыв связей). С этого времени РН превращается в систему пяти взаимодействую-

ющих тел, и именно с этого момента начинается движение ББ относительно ЦБ, что определяет основной этап. Тяга двигателей ББ создает момент относительно верхнего узла связи, в результате чего ББ разворачиваются относительно ЦБ. После выключения основного двигателя ББ они начинают отставать от ЦБ и при перемещении верхнего узла свя-



Рис. 1. Средства обеспечения отделения боковых блоков РН типа “Союз”

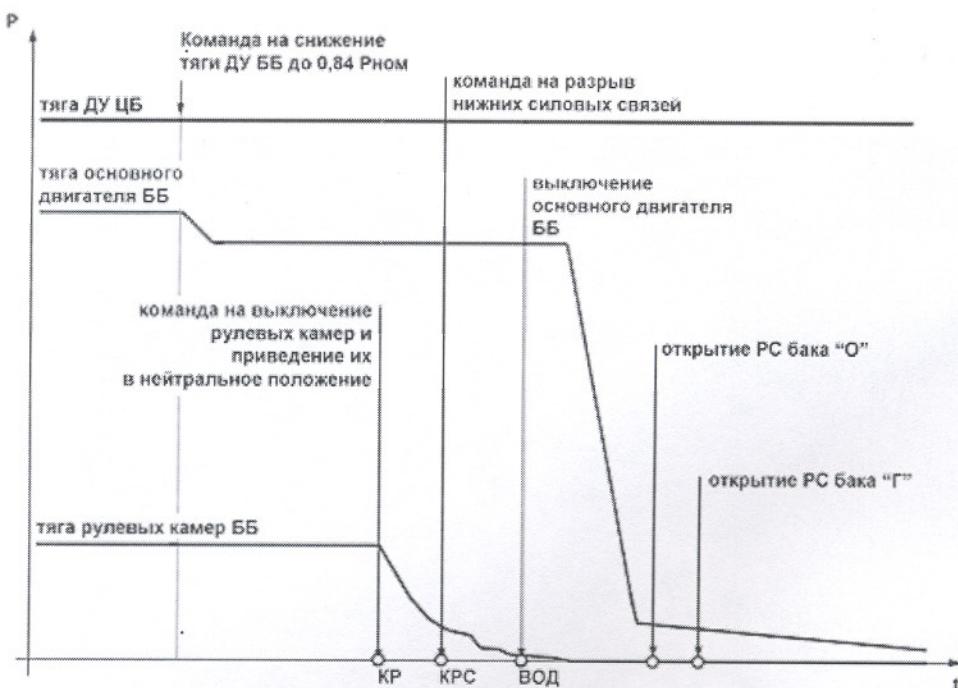


Рис. 2. Циклограмма работы системы отделения ББ

зи более чем на 5 мм срабатывает КР и выдается команда на открытие реактивного сопла бака окислителя (момент времени t_{ok}), которое создает силу, отводящую носовую часть от ББ.

Работа системы отделения определяет характер движения ББ. Весь процесс отделения с момента разрыва нижних силовых связей можно разделить на несколько участков, основываясь на характере взаимодействия ББ с ЦБ. На первом участке происходит поворот ББ относительно ЦБ вокруг верхнего узла связи. Первый участок продолжается до того момента, когда тяга основного двигателя ББ становится недостаточной для создания усилия, удерживающего ББ на ЦБ, и ББ отстает от ЦБ. Носовая часть ББ скользит по поверхности ЦБ – это движение характеризует второй участок, который заканчивается в момент отрыва носовой части ББ от ЦБ после открытия реактивного сопла бака окислителя. Команда на открытие реактивного сопла бака окислителя подается после перемещения шаровой опоры на определенное расстояние. Далее происходит свободное движение ББ.

Для построения уравнений движения ББ в процессе отделения предполагается, что тела, входящие в систему, являются абсолютно твердыми; инерционно-массовые и центровочные характеристики ББ и ЦБ постоян-

ны; гравитационное поле Земли считается плоскопараллельным. Уравнения движения системы записываются на основе основных уравнений динамики, т. к. необходим контроль величин реакций связей для определения моментов времени, соответствующих их разрывам. Уравнения движения в матричной форме имеют вид:

$$\begin{cases} \mathbf{m}_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{N}_{i0}; \\ \mathbf{m}_0 \mathbf{a}_0 = \mathbf{F}_0 + \mathbf{N}_{0i}; \\ \mathbf{J}_i \boldsymbol{\varepsilon}_i = \mathbf{M}_i + \mathbf{M}_{i0} + \mathbf{M}(\mathbf{N}_{i0}) - \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{J}_i \boldsymbol{\omega}_i; \\ \mathbf{J}_0 \boldsymbol{\varepsilon}_0 = \mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_{0i} + \mathbf{M}(\mathbf{N}_{0i}) - \tilde{\boldsymbol{\omega}}_0 \mathbf{J}_0 \boldsymbol{\omega}_0; \\ \mathbf{M}_{i0} = -\mathbf{M}_{0i}, \mathbf{N}_{i0} = -\mathbf{N}_{0i}; \\ \boldsymbol{\omega}_i = \dot{\boldsymbol{\gamma}}_i (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \alpha_{i3}); \\ \boldsymbol{\omega}_0 = \dot{\boldsymbol{\gamma}}_0 (\alpha_{01}, \alpha_{02}, \alpha_{03}); \end{cases} \quad (1.1)$$

где i – номер ББ, $i=1,2,3,4$;

\mathbf{m}_i – диагональная матрица масс тела i ;

$\mathbf{F}_i = \{F_{ix}, F_{iy}, F_{iz}\}$, $\mathbf{F}_0 = \{F_{0x}, F_{0y}, F_{0z}\}$ – координатные столбцы главных векторов активных сил, действующих на тела – ББ и ЦБ, соответственно; \mathbf{M}_i , \mathbf{M}_0 – координатные столбцы векторов суммарных моментов; \mathbf{N}_{ij} , \mathbf{M}_{ij} – реактивные силы и моменты в шарнире;

$\mathbf{a}_i = \{\ddot{x}_i, \ddot{y}_i, \ddot{z}_i\}$ - координатные столбцы вектора ускорения центра масс тела i ;
 $\mathbf{a}_i = \dot{\mathbf{V}}_i = \ddot{\mathbf{r}}_i$; $\mathbf{r}_i = \{x_i, y_i, z_i\}$ - координатный столбец радиуса-вектора центра масс тела i ;
 $\boldsymbol{\omega}_i = \{\omega_{xi}, \omega_{yi}, \omega_{zi}\}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_i = \{\varepsilon_{xi}, \varepsilon_{yi}, \varepsilon_{zi}\}$ - угловая скорость и ускорение тела; α_{lk} - параметры, задающие ориентацию тел (например, углы Эйлера, направляющие косинусы); индекс “0” указывает на принадлежность параметра ЦБ. Для замыкания системы уравнений (1.1) ее необходимо дополнить уравнениями связи. Для построения уравнений связи использовались следующие типы соединений: для описания разворота на верхнем узле связи - «плоский шарнир» (1 степень свободы), для описания скольжения по поверхности ЦБ - «плоский шарнир совместно с ползуном» (2 степени свободы), при описании свободного движения связи отсутствуют (6 степеней свободы). Запишем уравнения связей, для чего выберем систему координат (СК), связанную с ЦБ, начало которой находится в шаровой опоре. Орт \mathbf{n}_x совпадает с образующей конуса ЦБ и лежит в плоскости движения соответствующего ББ, орт \mathbf{n}_z перпендикулярен конической поверхности ЦБ и также лежит в плоскости движения ББ, \mathbf{n}_y перпендикулярен \mathbf{n}_z и \mathbf{n}_x (рис. 3).

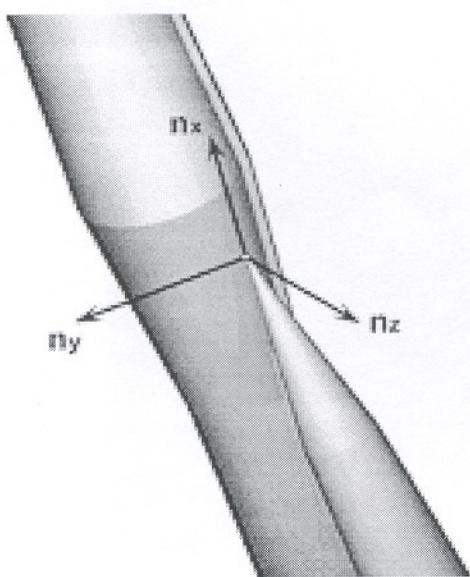


Рис. 3. Система координат, связанная с ЦБ и определяющая связь между ББ и ЦБ

Уравнения, ограничивающие относительное поступательное движение, имеют вид:

$$\begin{aligned} (\mathbf{r}_{0i} - \mathbf{r}_{0i}^0)^T \mathbf{n}_x &= 0; \\ (\mathbf{r}_{0i} - \mathbf{r}_{0i}^0)^T \mathbf{n}_y &= 0; \\ (\mathbf{r}_{0i} - \mathbf{r}_{0i}^0)^T \mathbf{n}_z &= 0, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где \mathbf{r}_{0i}^0 - координатный столбец радиуса-вектора начала СК, связанной с ЦБ; $\mathbf{r}_{0i} = \mathbf{A}_0(\mathbf{A}_i^{-1}\mathbf{r}_{i0} + \mathbf{R}_i - \mathbf{R}_0)$ - радиус-вектор точки контакта в системе координат, связанной с ЦБ; \mathbf{R}_i - радиус-вектор центра масс j -го ББ относительно инерциальной системы координат; \mathbf{A}_j - матрица перехода от инерциальной СК к СК j -го ББ.

Запишем уравнения, ограничивающие относительное угловое движение ББ и ЦБ:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}_0 \mathbf{A}_j^{-1} \boldsymbol{\omega}_j - \boldsymbol{\omega}_0)^T \mathbf{n}_x &= 0; \\ (\mathbf{A}_0 \mathbf{A}_j^{-1} \boldsymbol{\omega}_j - \boldsymbol{\omega}_0)^T \mathbf{n}_z &= 0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $\boldsymbol{\omega}_j$ - угловая скорость ББ; $\boldsymbol{\omega}_0$ - угловая скорость ЦБ.

Дифференцируя (1.2) и (1.3) по времени, получим пять алгебраических уравнений относительно ускорений тел:

$$\begin{aligned} &\left[\mathbf{A}_0 \mathbf{A}_i^{-1} (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_i \mathbf{r}_{i0}) - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 \mathbf{r}_{0i} + \mathbf{A}_0 (\ddot{\mathbf{R}}_i - \ddot{\mathbf{R}}_0) \right]^T \mathbf{n}_x = \\ &= [\tilde{\boldsymbol{\omega}}_0 \dot{\mathbf{r}}_{0i} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_0 (\mathbf{A}_0 (\mathbf{A}_i^{-1} (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{r}_{i0}) + \dot{\mathbf{R}}_i - \dot{\mathbf{R}}_0)) - \\ &\quad \mathbf{A}_0 \mathbf{A}_i^{-1} (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{r}_{i0})] \mathbf{n}_x; \\ &\left[\mathbf{A}_0 \mathbf{A}_i^{-1} (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_i \mathbf{r}_{i0}) - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 \mathbf{r}_{0i} + \mathbf{A}_0 (\ddot{\mathbf{R}}_i - \ddot{\mathbf{R}}_0) \right]^T \mathbf{n}_y = \\ &= [\tilde{\boldsymbol{\omega}}_0 \dot{\mathbf{r}}_{0i} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_0 (\mathbf{A}_0 (\mathbf{A}_i^{-1} (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{r}_{i0}) + \dot{\mathbf{R}}_i - \dot{\mathbf{R}}_0)) - \\ &\quad \mathbf{A}_0 \mathbf{A}_i^{-1} (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{r}_{i0})] \mathbf{n}_y; \\ &\left[\mathbf{A}_0 \mathbf{A}_i^{-1} (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_i \mathbf{r}_{i0}) - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 \mathbf{r}_{0i} + \mathbf{A}_0 (\ddot{\mathbf{R}}_i - \ddot{\mathbf{R}}_0) \right]^T \mathbf{n}_z = \\ &= [\tilde{\boldsymbol{\omega}}_0 \dot{\mathbf{r}}_{0i} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_0 (\mathbf{A}_0 (\mathbf{A}_i^{-1} (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{r}_{i0}) + \dot{\mathbf{R}}_i - \dot{\mathbf{R}}_0)) - \\ &\quad \mathbf{A}_0 \mathbf{A}_i^{-1} (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{r}_{i0})] \mathbf{n}_z; \\ &(\mathbf{A}_0 \mathbf{A}_i^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_i)^T \mathbf{n}_x - \boldsymbol{\varepsilon}_0^T \mathbf{n}_x = (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_0 \mathbf{A}_0 \mathbf{A}_i^{-1} \boldsymbol{\omega}_i)^T \mathbf{n}_x; \\ &(\mathbf{A}_0 \mathbf{A}_i^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_i)^T \mathbf{n}_z - \boldsymbol{\varepsilon}_0^T \mathbf{n}_z = (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_0 \mathbf{A}_0 \mathbf{A}_i^{-1} \boldsymbol{\omega}_i)^T \mathbf{n}_z. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Оператор “тильда” позволяет записать векторное произведение векторов в матричной форме: $\tilde{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{r} \rightarrow \tilde{\boldsymbol{\omega}} \cdot \vec{r}$.

Силы реакции между ББ и ЦБ в проекциях на оси, связанной с ЦБ системой координат, определяются следующим образом:

$$\mathbf{R}_{0i}^x = -\mathbf{n}_x R_{0i}^x;$$

$$\mathbf{R}_{0i}^y = -\mathbf{n}_y R_{0i}^y;$$

$$\mathbf{R}_{0i}^z = -\mathbf{n}_z R_{0i}^z.$$

Аналогично определяются проекции вектора реактивного момента:

$$\mathbf{M}_{0i}^x = -\mathbf{n}_x M_{0i}^x;$$

$$\mathbf{M}_{0i}^z = -\mathbf{n}_z M_{0i}^z.$$

На следующем этапе из уравнений движения необходимо исключить “лишнее” уравнение связи. Так для второго этапа исключается первое уравнение связи системы (1.4), и соответствующая реакция принимается равной нулю.

Уравнения движения системы можно записать в следующей матричной форме:

$$\mathbf{Ma} = \mathbf{J}^T \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{F}, \quad (1.5)$$

где \mathbf{M} – матрица масс системы,

$$\mathbf{M} = \text{diag}(\mathbf{M}_0, \mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3, \mathbf{M}_4),$$

$$\mathbf{M}_i = \text{diag}(\mathbf{m}_i, \mathbf{m}_i, \mathbf{m}_i, \mathbf{Jx}_i, \mathbf{Jy}_i, \mathbf{Jz}_i);$$

\mathbf{J} – матрица коэффициентов при ускорениях в уравнениях связи; \mathbf{a} – матрица ускорений

системы $\mathbf{a} = \{\ddot{x}_0, \ddot{y}_0, \ddot{z}_0, \ddot{x}_1, \ddot{y}_1, \ddot{z}_1, \dots, \ddot{x}_4, \ddot{y}_4, \ddot{z}_4\}^T$;

$\boldsymbol{\lambda}$ – матрица множителей Лагранжа.

Уравнения связи будут иметь вид

$$\mathbf{Ja} + \mathbf{c} = 0, \quad (1.6)$$

где \mathbf{J} и \mathbf{c} – матрицы параметров, зависящие от скоростей и координат тел.

Ускорения тел системы определяются из уравнения (1.5) следующим образом:

$$\mathbf{a} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{J}^T \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{M}^{-1} \mathbf{F}. \quad (1.7)$$

Подставив последнее выражение в уравнение (1.6), получим

$$\mathbf{J}(\mathbf{M}^{-1} \mathbf{J}^T \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{M}^{-1} \mathbf{F}) + \mathbf{c} = 0, \quad (1.8)$$

что с учетом обозначения

$$\mathbf{A} = \mathbf{JM}^{-1} \mathbf{J}^T, \quad \mathbf{b} = -(\mathbf{JM}^{-1} \mathbf{F} + \mathbf{c}) \quad (1.9)$$

можно записать в виде

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{b}. \quad (1.10)$$

Уравнение (1.10) – система линейных уравнений для определения неизвестных множителей $\boldsymbol{\lambda}$. Для использования численных методов интегрирования уравнений движения необходимо решить уравнение (1.5) и явно выразить ускорения тел системы. Время, необходимое для разрешения этой системы линейных уравнений стандартными методами (например, методом Гаусса), пропорционально третьей степени размерности матрицы \mathbf{A} . Эффективность методов разрешения системы будет зависеть от структуры матрицы \mathbf{A} , что, в свою очередь, определяется структурой связей механической системы. Так, например, для системы, в которой тела соединены цепочкой, матрица \mathbf{A} будет иметь ленточную структуру, что позволит разрешить систему (1.10) за время, пропорциональное размерности матрицы. Если же тела системы присоединены к одному телу, матрица \mathbf{A} становится матрицей общего вида и время ее разрешения увеличится.

Рассмотрим другой способ решения системы (1.5) [1]. Запишем уравнения движения (1.5) и (1.7) в следующей форме:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M} & -\mathbf{J}^T \\ -\mathbf{J} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{c} \end{pmatrix}, \quad (1.11)$$

где

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{M} & -\mathbf{J}^T \\ -\mathbf{J} & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (1.12)$$

Структура матрицы \mathbf{H} зависит от механической системы. Структуру самой механической системы можно представить в виде графа с вершинами – телами и связями – дугами, которые определяют соединение тел (рис. 4).

Поскольку тела рассматриваемой механической системы не образуют замкнутых цепей, то график, определяющий структуру соединений тел, является деревом. Ацикличность графа механической системы позволяет сформировать матрицу \mathbf{H} таким образом, что \mathbf{LDL}^T разложение матрицы (\mathbf{L} – нижняя треугольная матрица, \mathbf{D} – диагональная матрица) может быть выполнено за время, пропорциональное размеру матрицы \mathbf{H} , и, сле-

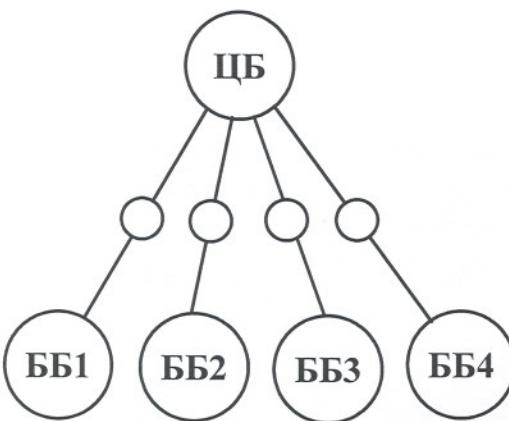


Рис. 4. Структура механической системы

довательно, уравнение также может быть решено за это время.

Учитывая эту особенность, матрицу масс \mathbf{H} можно сформировать таким образом, при котором структура полученной матрицы позволит использовать более эффективную схему нахождения неизвестных \mathbf{x} . Преобразование матрицы \mathbf{H} основано на изменении порядка следования ее блоков. Для правильного построения матрицы \mathbf{H} выберем в графе структуры механической системы вершину-корень, присвоив этой вершине индекс $n+1$ (n - количество тел, l - количество связей), пронумеруем оставшиеся вершины графа механической системы так, чтобы индекс "родителя", т. е. вершины, лежащей ближе к корню, был больше индекса "потомка". Далее, в соответствии с полученным порядком, построим матрицу \mathbf{H} .

Ускорения, получаемые в результате решения системы линейных уравнений, в дальнейшем используются для интегрирования системы дифференциальных уравнений численными методами.

Таким образом, получена математическая модель процесса отделения ББ РН типа "Союз". Использование алгоритма формирования матрицы линейных уравнений с учетом древовидной структуры системы позволило повысить эффективность решения уравнений движения – сократить время решения задачи. Полученная модель и построенное на ее основе программное обеспечение позволяют проводить моделирование не только процесса отделения ББ, но и других механических систем древовидной структуры.

2. Движение спускаемого аппарата с двойным вращением на активном участке спуска. Для схода СА с орбиты выдается тормозной импульс, который формируется тормозной двигательной установкой (ТДУ). Направление вектора тормозной тяги, как правило, гироскопически стабилизируется закруткой аппарата относительно собственной продольной оси. При этом для СА с двойным вращением применима частичная закрутка [2], когда во вращение приводится какой-либо стабилизирующий блок, например, тормозная двигательная установка, сам же СА (или спускаемая капсула) во вращение не приводится. Описание движения СА с двойным вращением можно проводить на основе механической системы соосных тел. При выгорании топлива происходит изменение инерционно-массовых параметров аппарата. Пространственное движение СА вокруг собственного центра масс является одной из наиболее важных причин отклонения вектора тормозной тяги от необходимого направления. Это связано прежде всего с нутационно-прецессионным движением оси СА, вдоль которой ориентирован вектор тяги. Отклонения вектора тормозной тяги в свою очередь приводят к увеличению области рассеивания точек посадки аппарата [3].

Уравнения движения системы соосных тел с переменной массой получены в работе [3] и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} (A(t) - m\rho_C^2(t))\dot{p} + B(t)qr + C_1(t)q\sigma &= 0, \\ (A(t) - m\rho_C^2(t))\dot{q} - B(t)pr - C_1(t)p\sigma &= 0, \quad (2.1) \\ C_2\dot{r} + C_1(t)(\dot{r} + \dot{\sigma}) &= 0, \end{aligned}$$

$$C_1(t)(\dot{r} + \dot{\sigma}) = M_\delta, \quad (2.2)$$

где $B(t) = C(t) - A(t)$, $C(t) = C_2 + C_1(t)$, $A(t) = A_2 + A_1(t)$, A_i и C_i - экваториальный и продольный моменты инерции тела i , вычисленные в связанной с телом системе координат (для тела 2 – $Oxyz$, для тела 1 – $Ox'y'z'$); M_δ - момент внутреннего взаимодействия тел. Параметры пространственной ориентации соосных тел как спускаемого аппарата с двойным вращением указаны на рис. 5.

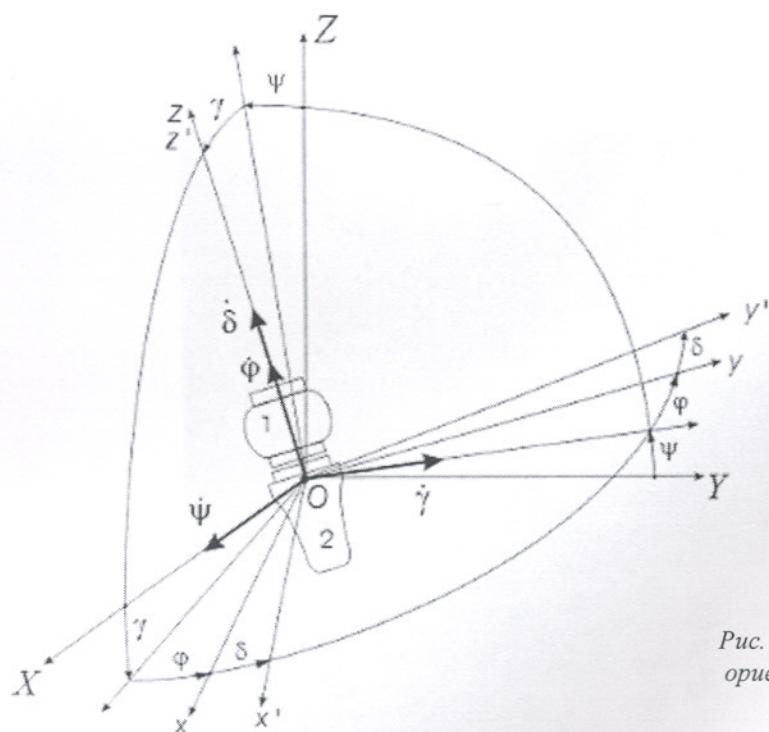


Рис. 5. Параметры пространственной ориентации СА с двойным вращением

Следует отметить, что за полюс O была взята точка, совпадающая с начальным положением центра масс системы тел. Тела системы могут вращаться относительно друг друга лишь в направлении общей продольной оси, совпадающей с Oz (а также с Oz'). При этом угол и скорость закручивания тела 1 относительно тела 2 в направлении продольной оси Oz обозначим, соответственно, как δ и σ , причем $\sigma = \dot{\delta}$.

Уравнения (2.1) и (2.2) представляют собой динамические уравнения свободного движения системы соосных тел переменного состава с учетом внутреннего взаимодействия. Добавим кинематические уравнения

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= p \sin \phi + q \cos \phi, \quad \dot{\psi} = \frac{1}{\cos \gamma} (p \cos \phi - q \sin \phi), \\ \dot{\phi} &= r - \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma} (p \cos \phi - q \sin \phi), \quad \dot{\delta} = \sigma. \end{aligned} \quad (2.3)$$

ТДУ малых СА могут представлять собой ракетные двигатели твердого топлива (РДТТ). При проведении приближенного анализа движения можно считать массу, продольные и поперечные моменты инерции ТДУ (соосного тела 1) убывающими по линейному закону, что с достаточно большой точностью выполняется для РДТТ с топливными зарядами звездообразного профильного сече-

ния и пакетно-шашечными зарядами в силу равномерности их выгорания. Примем следующие линейные законы изменения инерционно-массовых параметров:

$$m(t) = m_1 + m_2 - vt,$$

$$\begin{aligned} A_1(t) &= A_1 - \frac{A_1 - A_{1,k}}{T} t = A(m_1 - vt), \\ C_1(t) &= C_1 - \frac{C_1 - C_{1,k}}{T} t = C(m_1 - vt), \\ A &= const, \quad C = const, \\ A_2 &= const, \quad C_2 = const, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где m_i - начальная масса тела i ; v - секундный расход массы; A_i , C_i , $A_{1,k}$, $C_{1,k}$ - величины экваториальных и продольных моментов инерции тел, соответствующие началу и концу работы тормозной двигательной установки; T - время работы ТДУ; A , C - коэффициенты пропорциональности, связывающие величины моментов инерции тела 1 с его массой.

Пусть взаимодействие между соосными телами отсутствует. Тогда из последнего уравнения (2.1) и уравнения (2.2) следует, что продольные угловые скорости постоянны:

$$r = r_0, \quad \sigma = \sigma_0.$$

При однородном выгорании топлива координаты центров масс отдельных тел не изменяются. Однако с изменением массы первого тела координата центра масс системы является функцией времени, причем, как показано в [3], слагаемое $t\rho_C^2(t)$ можно исключить из уравнений (2.1) как величину высшего порядка малости.

Перейдем к переменным $\{G, F\}$ типа "амплитуда-фаза" с помощью следующей замены:

$$p(t) = G(t) \sin F(t), \quad q(t) = G(t) \cos F(t). \quad (2.5)$$

В новых переменных с учетом малых относительных смещений центра масс первые два уравнения (2.1) примут вид

$$\dot{G} = 0, \quad \dot{F} \approx \omega + 2\mu t, \quad (2.6)$$

где

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{k}{A_1 + A_2}, \quad k = r_0 (A_1 + A_2 - C_1 - C_2) - C_1 \sigma_0, \\ \mu &= \frac{1}{2} \left(\frac{(A_1 - A_{1,k})k}{T(A_1 + A_2)^2} - \frac{n}{A_1 + A_2} \right), \\ n &= \frac{A_1 - A_{1,k}}{T} r_0 - \frac{C_1 - C_{1,k}}{T} [r_0 + \sigma_0]. \end{aligned}$$

Решения уравнений (2.6) окончательно записутся в виде

$$G = L_0, \quad F(t) = s_0 + \omega t + \mu t^2, \quad (2.7)$$

поэтому для экваториальных угловых скоростей будут справедливы следующие аналитические зависимости:

$$\begin{aligned} p(t) &= L_0 \sin(s_0 + [\omega + \mu \cdot t] \cdot t), \\ q(t) &= L_0 \cos(s_0 + [\omega + \mu \cdot t] \cdot t). \end{aligned} \quad (2.8)$$

На основе (2.8) можно проводить анализ углового движения СА с двойным вращением. В работе [3] получено условие уменьшения амплитуды нутационных колебаний, которое сводится к требованию одинаковых знаков величин ω и μ . Рассмотрим

два случая движения соосных тел, характеризующихся совпадением и различием знаков ω и μ :

$$1) \operatorname{sgn} \omega = \operatorname{sgn} \mu; \quad 2) \operatorname{sgn} \omega = -\operatorname{sgn} \mu. \quad (2.9)$$

Решения для параметров пространственной ориентации соосных тел для случаев 1) и 2) из (2.9) записываются в интегралах Френеля и принимают следующий вид:

$$1) \begin{cases} \gamma(t) = c_1 [S(\lambda(t)) - S(\lambda(0))] + \\ + s_1 [C(\lambda(t)) - C(\lambda(0))] + \gamma_0, \\ \psi(t) = c_1 [C(\lambda(t)) - C(\lambda(0))] - \\ - s_1 [S(\lambda(t)) - S(\lambda(0))] + \psi_0, \end{cases} \quad (2.10)$$

$$2) \begin{cases} \gamma(t) = s_2 [C(\lambda(t)) - C(\lambda(0))] - \\ - c_2 [S(\lambda(t)) - S(\lambda(0))] + \gamma_0, \\ \psi(t) = c_2 [C(\lambda(t)) - C(\lambda(0))] + \\ + s_2 [S(\lambda(t)) - S(\lambda(0))] + \psi_0, \end{cases} \quad (2.11)$$

где

$$\begin{aligned} c_1 &= R \cos \left[s_0 - \frac{\omega^2}{4\mu} \right], \quad c_2 = R \cos \left[s_0 + \frac{\omega^2}{4|\mu|} \right], \\ s_1 &= R \sin \left[s_0 - \frac{\omega^2}{4\mu} \right], \quad s_2 = R \sin \left[s_0 + \frac{\omega^2}{4|\mu|} \right], \\ \lambda(t) &= \sqrt{\frac{2|\mu|}{\pi}} \left[t + \frac{\omega}{2\mu} \right], \quad R = L_0 \sqrt{\frac{\pi}{2|\mu|}}. \end{aligned}$$

В выражениях (2.10) и (2.11) функции

$$C(x) = \int_0^x \cos \left(\frac{\pi}{2} x^2 \right) dx, \quad S(x) = \int_0^x \sin \left(\frac{\pi}{2} x^2 \right) dx$$

представляют собой интегралы Френеля.

В случае малых углов нутации справедливо следующее соотношение:

$$\theta^2 \cong \gamma^2 + \psi^2. \quad (2.12)$$

Приведем для обоих случаев (2.9) два примера фазовых портретов в пространстве $\{\gamma, \psi\}$, построенных в условиях неограниченной длительности процессов изменения

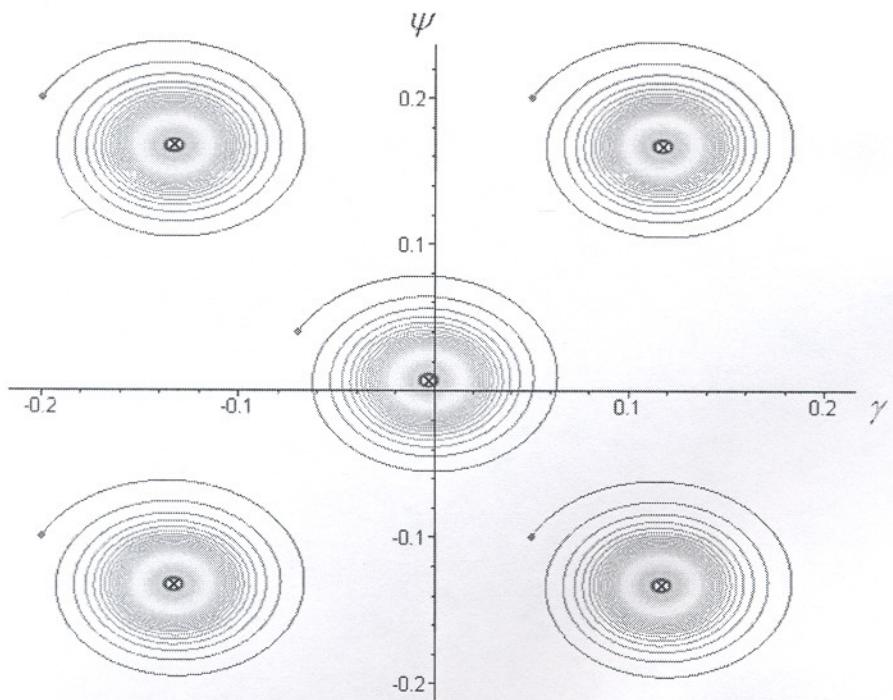


Рис. 6. Фазовый портрет системы в случае совпадения знаков величин ω и μ
($\omega=10 \text{ c}^l$, $\mu=2,5 \text{ c}^2$, $L_0=0,75 \text{ c}^l$, $s_0=0,5 \text{ rad}$)

инерционно-массовых параметров, что, безусловно, является чисто теоретическим отступлением от рассматриваемой задачи. На рис. 6 представлен соответствующий первому случаю фазовый портрет, из которого видно, что фазовые траектории (ФТ) скручиваются к некоторым предельным положениям. Начальные точки ФТ отмечены небольшими прямоугольниками, а предельные – крестиками.

На рис. 7 представлен фазовый портрет системы во втором случае, из которого видно, что ФТ сначала раскручиваются из своих начальных точек, а затем скручиваются к весьма удаленным предельным положениям.

Из выражения (2.12) следует дополнительный геометрический смысл построенных фазовых портретов, заключающийся в том, что радиус-вектор, соединяющий текущую точку ФТ с началом системы координат, соответствует величине угла нутации (рис. 8).

Последние рассуждения позволяют дать простую геометрическую интерпретацию условия уменьшения амплитуды колебаний угла нутации около своего предельного значения (“конечная” точка ФТ), приведенного в [3].

3. Моделирование процесса отделения головных обтекателей РН с учетом упругости конструкции. Рассмотрим процесс отделения створок головного обтекателя (ГО) ракеты-носителя с учетом упругих свойств его конструкции. Отделение обтекателя производится в следующей последовательности: раскрытие продольного стыка створок ГО; вращение на узле связи-шарнире между ЦБ и створкой под действием сил, создаваемых толкателями; потеря связи и дальнейшее свободное движение створки. На рис. 9 представлены створки ГО и схема установки толкателей. Пусть створка состоит из изотропного материала постоянной толщины, причем дополнительное подкрепление (стрингеры и шпангоуты) отсутствует.

На первом этапе для приближенной оценки аналитически определяются три первые собственные частоты колебания створки. Затем строится ее конечно-элементная модель с целью более точного определения частот и форм колебаний. Учет вклада “упругой” составляющей в абсолютное движение створки необходим для более точного определения зон безопасного положения полезного груза.

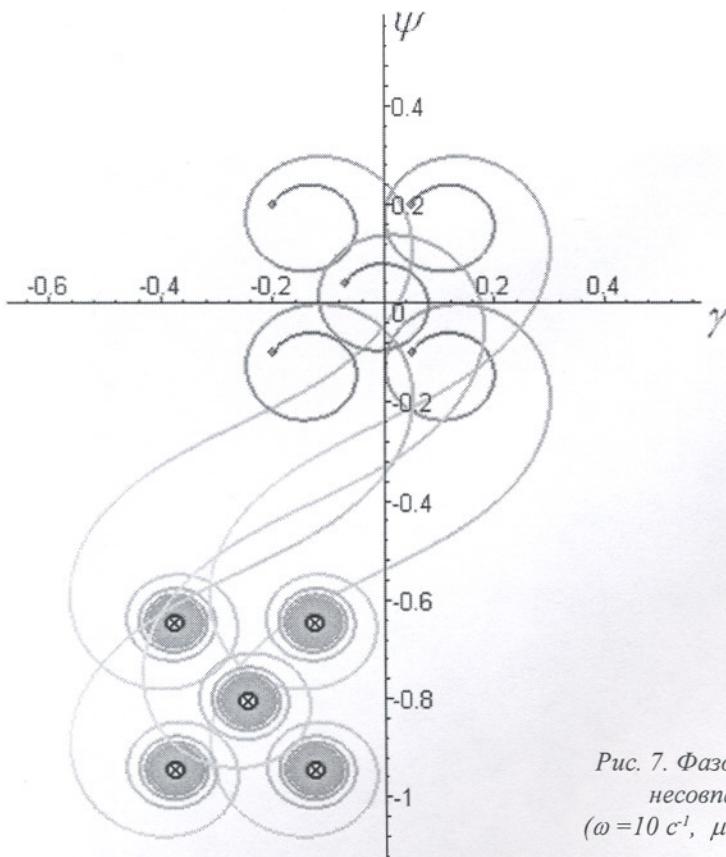


Рис. 7. Фазовый портрет системы в случае несовпадения знаков величин ω и μ
 $(\omega = 10 \text{ c}^l, \mu = -2,5 \text{ c}^2, L_0 = 0,75 \text{ c}^l, s_0 = 0,5 \text{ rad})$

Аналитическое определение собственных форм и частот оболочки, состоящей из цилиндрической и конической частей, при свободных граничных условиях представляет собой весьма сложную задачу. Предположим, что колебательное движение оболочки в основном определяется цилиндрической частью обтекателя, а влияние конической части незначительно, и поэтому исходную оболочку можно заменить на цилиндрическую. Предположим также, что все сечения по длине цилиндрической оболочки деформируются одинаково, и поэтому представим оболочку в виде криволинейной балки.

Определим частоты ее собственных колебаний. Уравнение свободных колебаний имеет вид [4]:

$$EJ \left(\frac{\partial^4 w}{\partial s^4} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right) + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (3.1)$$

где w – перемещения точек оси балки; s – координата, откладываемая вдоль оси балки.

Границные условия определяются из условия равенства нулю момента и перере-

зывающей силы на свободных концах:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{w}{R^2} \right)_{s=s_0} &= 0; \\ \left(\frac{\partial^3 w}{\partial s^3} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial s} \right)_{s=s_0} &= 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $S_0 = \pi R$.

Общее решение уравнения (3.1) можно представить в виде

$$w(s, t) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(s) \varphi_i(t). \quad (3.3)$$

Подставив (3.3) в (3.1), с учетом граничных условий получим трансцендентное уравнение для определения собственных частот колебаний криволинейной балки:

$$2\lambda_1\lambda_2(1 - ch\lambda_1 s_0 \cos \lambda_2 s_0) + sh\lambda_1 s_0 \sin \lambda_2 s_0 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) = 0, \quad (3.4)$$

где

$$\lambda_1 = \sqrt{\sqrt{\frac{0.25}{R^4} + \beta_i^4} - \frac{0.5}{R^2}}, \lambda_2 = \sqrt{\sqrt{\frac{0.25}{R^4} + \beta_i^4} + \frac{0.5}{R^2}},$$

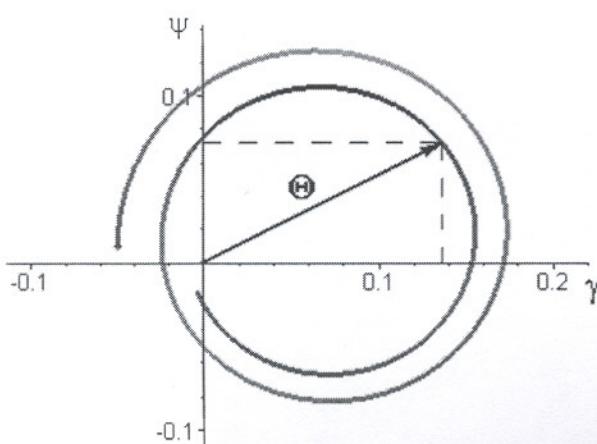


Рис. 8. Величина угла нутации как длина радиус-вектора точки ФТ

$$\beta_i^4 = \frac{m\omega_i^2}{EJ}; \quad \omega_i - \text{собственные частоты, являющиеся корнями уравнения (3.4).}$$

Определив их, получим: $\omega_1=5$ Гц, $\omega_2=14$ Гц, $\omega_3=30$ Гц.

Для более точного определения частот и форм собственных колебаний используется конечно-элементная модель створки головного обтекателя. Как видно из рис. 10, частоты первой и четвертой формы колебаний, полученные при помощи метода конечных элементов, весьма точно соответствуют частотам первой и второй формы колебаний упругой криволинейной балки, что подтверждает корректность и, следовательно, возможность использования предложенного приближенного подхода.

Движение створки в процессе отде-

ления можно рассматривать как совокупность двух движений – линейных деформаций конструкции относительно связанной системы координат и нелинейных больших перемещений связанной системы координат. Линейное перемещение любого узла конечно-элементной сетки может быть представлено суперпозицией собственных форм. В этом случае радиус-вектор точки, принадлежащей телу, определяется выражением

$$\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{s} + \vec{u}, \quad (3.5)$$

где \vec{r}_o - радиус-вектор точки базовой точки тела, задающей положение связанной системы координат (ССК), в инерциальной системе координат; \vec{s} - радиус-вектор точки в связанной системе координат в недеформированном теле; \vec{u} - вектор, определяющий перемещение точки при деформации тела. В матричной форме выражение (3.5) записется в виде [5]

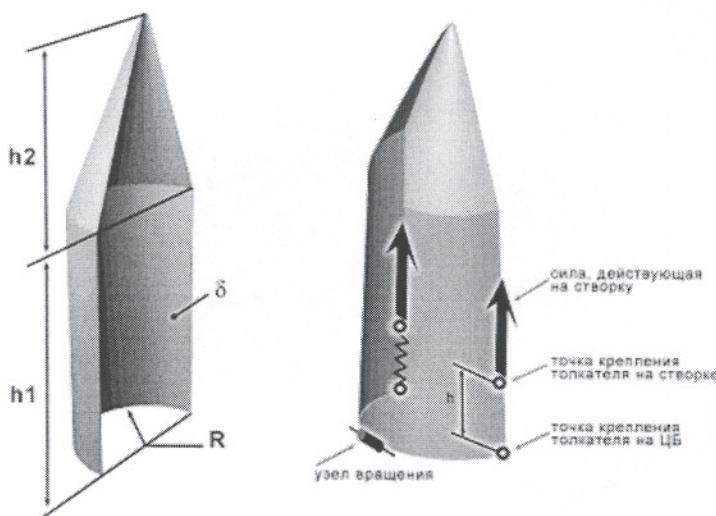
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_o + \mathbf{A}(\mathbf{s} + \mathbf{u}), \quad (3.6)$$

где \mathbf{A} – матрица перехода от связанной системы координат к глобальной.

Перемещение \mathbf{u} определяется как суперпозиция перемещений собственных форм колебаний тела:

$$\mathbf{u} = \Phi \mathbf{q}, \quad (3.7)$$

где Φ – фрагмент матрицы форм, соответствующий узлу, перемещение которого определяется.



Основные характеристики

$$R=2 \text{ м}$$

$$h1=8 \text{ м}$$

$$h2=6 \text{ м}$$

$$d=0,01 \text{ м}$$

Изотропный материал:

$$E=2 \times 10^{12} \text{ Н/м}^2$$

$$\rho=4000 \text{ кг/м}^3$$

$$\mu=0,3$$

Рис. 9. Створки ГО и схема установки толкателей

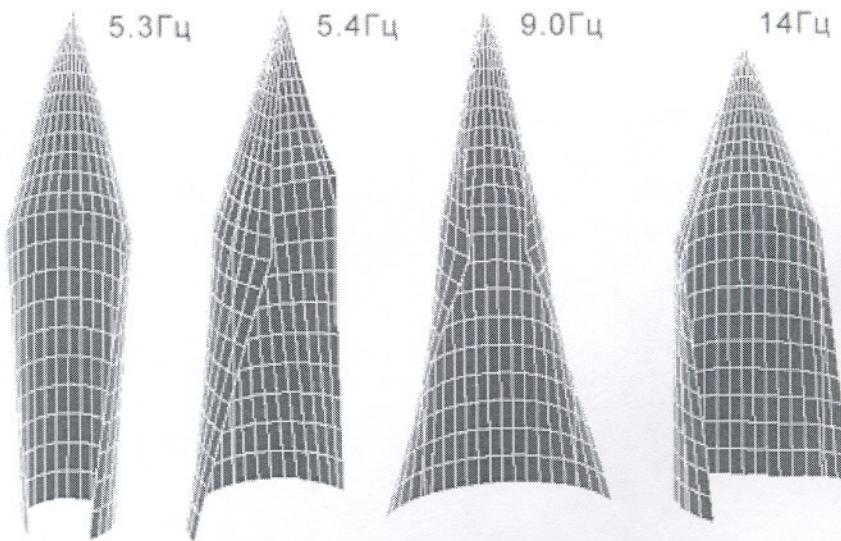


Рис. 10. Первые четыре собственные формы и частоты колебаний створки ГО

Уравнения движения створки как упругого тела имеют вид [5]:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{\zeta}} + \dot{\mathbf{M}}\dot{\boldsymbol{\zeta}} - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \boldsymbol{\zeta}} \dot{\boldsymbol{\zeta}} \right]^T \dot{\boldsymbol{\zeta}} + \\ + \mathbf{K}\boldsymbol{\zeta} + \mathbf{D}\dot{\boldsymbol{\zeta}} + \left[\frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\zeta}} \right]^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где $\boldsymbol{\zeta}, \dot{\boldsymbol{\zeta}}, \ddot{\boldsymbol{\zeta}}$ – матрицы-столбцы обобщенных координат упругого тела и их производные; \mathbf{M} – матрица масс; \mathbf{K} - матрица жесткости; \mathbf{D} - матрица демпфирования; Ψ - уравнения связи; $\boldsymbol{\lambda}$ - множители Лагранжа; \mathbf{Q} - обобщенные силы.

На рис.11 приведены некоторые результаты расчетов величин перемещения за счет упругих деформаций конструкции той точки ГО, траектория которой располагается наиболее близко к РН (так называемая «опасная точка»). Расчеты были выполнены в системе компьютерного моделирования ADAMS с учетом вышеприведенных математических моделей.

4. Моделирование движения ракетно-космических средств с присоединенными элементами с учетом упругости подвеса. Рассмотрим систему связанных твердых тел с переменной во времени структурой, между телами которой возможно наличие упругих связей. К таким системам относятся разно-

образные механические системы отделения, системы раскрытия солнечных батарей и антенн. В таких системах с течением времени происходит изменение либо структуры, либо числа степеней свободы.

Рассмотрим движение твердого тела, принадлежащего системе твердых тел. Уравнение движения тела в матричной форме можно записать следующим образом:

$$\mathbf{M}_i \ddot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i, \quad (4.1)$$

где \mathbf{M}_i – матрица коэффициентов инерции i -го тела, которая при использовании декартовых координат в качестве обобщенных имеет вид:

$$\mathbf{M}_i = \begin{pmatrix} m_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ 0 & 0 & 0 & -J_{xy} & J_{yy} & -J_{yz} \\ 0 & 0 & 0 & -J_{xz} & -J_{yz} & J_{zz} \end{pmatrix},$$

где $\dot{\mathbf{q}}_i$ – координатный столбец ускорений, \mathbf{F}_i - координатный столбец обобщенных сил, \mathbf{R}_i - координатный столбец реакций связи, m_i - масса тела, J_{xx}, \dots, J_{zz} - моменты инерции тела. При использовании декартовых

координат координатный столбец ускорений $\ddot{\mathbf{q}}_i$ запишется в виде

$$\ddot{\mathbf{q}}_i = \begin{bmatrix} a_{xi} & a_{yi} & a_{zi} & \varepsilon_{xi} & \varepsilon_{yi} & \varepsilon_{zi} \end{bmatrix}^T. \quad (4.2)$$

Целиком для всей механической системы уравнение движения записывается следующим образом:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{F} + \mathbf{R}, \quad (4.3)$$

где $\mathbf{q} = \{\mathbf{q}_1 \quad \mathbf{q}_2 \quad \dots \quad \mathbf{q}_n\}$ - вектор-столбец координат тел системы, $\mathbf{M} = \text{diag}(\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{M}_n)$ - блочно-диагональная матрица коэффициентов инерции тел системы, $\mathbf{F} = \{\mathbf{F}_1 \quad \dots \quad \mathbf{F}_n\}$ - матрица сил, $\mathbf{R} = \{\mathbf{R}_1 \quad \dots \quad \mathbf{R}_n\}$ - матрица реакций связей.

Уравнения голономной, стационарной и удерживающей связи можно записать в виде

$$\Phi_k(\mathbf{q}_i, \dot{\mathbf{q}}_j) = 0, \quad k = \overline{1, l}, \quad (4.4)$$

где l - число связей.

Для идеальной связи справедливо выражение, определяющее силу реакции:

$$\mathbf{R}_{ki} = \frac{\partial \Phi_k}{\partial \mathbf{q}_i} \lambda_k, \quad k = \overline{1, l}, \quad (4.5)$$

где λ_k - множитель Лагранжа k -ой связи,

$\frac{\partial \Phi_k}{\partial \mathbf{q}_i}$ - матрица производных уравнения связи по координатам тела i :

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial \mathbf{q}_i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i} \\ \frac{\partial \Phi_k}{\partial y_i} \\ .. \\ .. \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

С учетом действия всех тел системы сила реакции для i -го тела определяется выражением $\mathbf{R}_i = \sum_{k=1}^l \mathbf{R}_{ki}$.

Уравнения (4.1) и (4.4) с учетом (4.6) образуют систему дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ) III-го типа. Тип ДАУ определяется числом операций дифференцирования системы, которые приводят ее к системе обыкновенных дифференциальных уравнений [1]. Наиболее простой способ решения - это приведение исходной системы к системе ДАУ I-го типа, что достигается двойным дифференцированием уравнений связи:

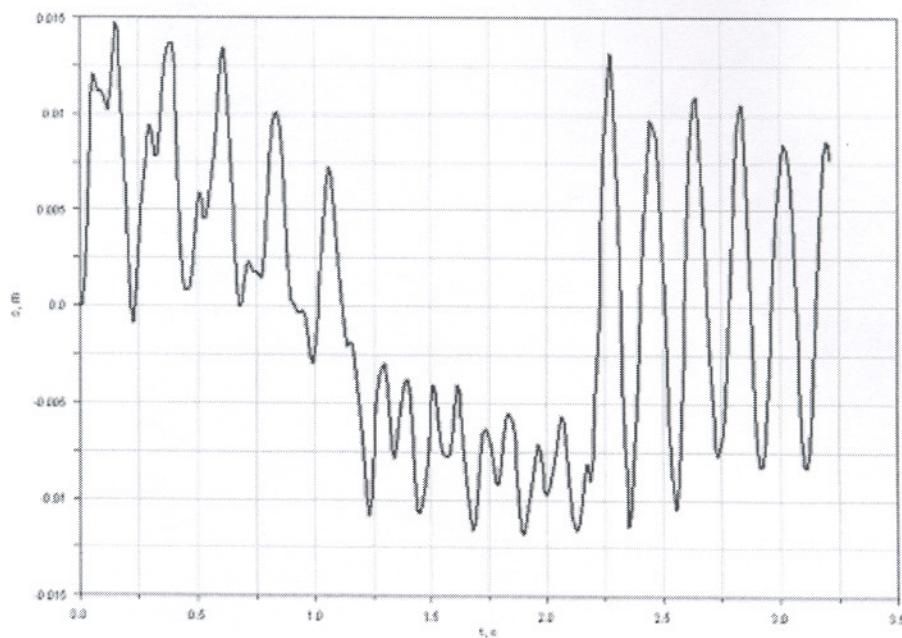


Рис. 11. Поперечное перемещение "опасной точки" створки ГО за счет деформации его конструкции

$$\begin{aligned}
\frac{d\Phi_k(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j)}{dt} &= \left(\frac{\partial\Phi_k(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j)}{\partial\mathbf{q}_i} \right)^T \dot{\mathbf{q}}_i + \\
&+ \left(\frac{\partial\Phi_k(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j)}{\partial\mathbf{q}_j} \right)^T \dot{\mathbf{q}}_j = 0, \quad k = \overline{1, l}; \\
\frac{d^2\Phi_k(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j)}{dt^2} &= \left(\frac{\partial\Phi_k(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j)}{\partial\mathbf{q}_i} \right)^T \ddot{\mathbf{q}}_i + \\
&+ \left(\frac{\partial\Phi_k(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j)}{\partial\mathbf{q}_j} \right)^T \ddot{\mathbf{q}}_j + c = 0; \\
c &= \dot{\mathbf{q}}_i^T \frac{\partial\Phi_k(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j)}{\partial\mathbf{q}_i} \dot{\mathbf{q}}_i + \dot{\mathbf{q}}_j^T \frac{\partial\Phi_k(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j)}{\partial\mathbf{q}_j} \dot{\mathbf{q}}_j + \\
&+ 2\dot{\mathbf{q}}_i^T \frac{\partial\Phi_k(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j)}{\partial\mathbf{q}_i} \dot{\mathbf{q}}_j.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Запишем вторую производную уравнения

$$\mathbf{H}_{ki} \ddot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{H}_{kj} \ddot{\mathbf{q}}_j + c = 0, \quad k = \overline{1, l}, \tag{4.8}$$

где $\mathbf{H}_{ki} = \left(\frac{\partial\Phi_k(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j)}{\partial\mathbf{q}_i} \right)^T$, $\mathbf{H}_{kj} = \left(\frac{\partial\Phi_k(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j)}{\partial\mathbf{q}_j} \right)^T$.

Используя матрицы \mathbf{H}_{ki} , \mathbf{H}_{kj} , можно сформировать матрицу связей \mathbf{H} и записать уравнения связи в матричной форме:

$$\mathbf{H}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{c}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0, \tag{4.9}$$

где \mathbf{H} - блочная матрица $l \times N$ блоков, состоящая из элементов $\mathbf{H}_{ki}, \mathbf{H}_{kj}$; $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, N}$; N - число тел; $k = \overline{1, l}$.

Системы (4.3) и (4.9) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений относительно ускорений и множителей Лагранжа, из которой необходимо определить $\ddot{\mathbf{q}}$. В блочном матричном виде система (4.3) и (4.9) с учетом (4.5) запишется:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{H}^T \\ \mathbf{H} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix}. \tag{4.10}$$

Рассмотрим два типа элементарных связей. Первый тип ограничивает относительное поступательное движение двух тел, второй – относительное вращение [6].

Уравнение связи первого типа “точка-плоскость” имеет вид

$$\left(\mathbf{H}_{ki}^a \quad \mathbf{H}_{ki}^\varepsilon \right) \begin{pmatrix} \mathbf{a}_i \\ \boldsymbol{\varepsilon}_i \end{pmatrix} + \left(\mathbf{H}_{kj}^a \quad \mathbf{H}_{kj}^\varepsilon \right) \begin{pmatrix} \mathbf{a}_j \\ \boldsymbol{\varepsilon}_j \end{pmatrix} + c_k = 0. \tag{4.11}$$

Здесь $\mathbf{a}_i, \boldsymbol{\varepsilon}_i, \mathbf{a}_j, \boldsymbol{\varepsilon}_j$ - координатные столбцы линейных и угловых ускорений тел i и j ; $\boldsymbol{\omega}_i^{(i)}, \boldsymbol{\omega}_j^{(j)}$ - координатные столбцы угловой скорости тел i и j в ССК соответствующих тел; $\mathbf{r}_{ji}^{(j)}$ - координатный столбец точки тела j , находящейся в соответствии с условиями связи на плоскости тела i , определяемой нормалью, заданной с помощью координатного столбца единичного вектора $\mathbf{n}_{ij}^{(i)}$; $\mathbf{A}_i, \mathbf{A}_j$ - матрицы перехода от инерциальной СК, относительно которой рассматривается движение тел, к связанной СК тел i и j , соответственно:

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_{ki}^a &= \left(-\mathbf{A}_i^{-1} \cdot \mathbf{n}_{ij}^{(i)} \right)^T, \quad \mathbf{H}_{ki}^\varepsilon = \left(-\tilde{\mathbf{r}}_{ij}^{(i)} \cdot \mathbf{n}_{ij}^{(i)} \right)^T, \\
\mathbf{H}_{kj}^a &= \left(\mathbf{A}_i^{-1} \cdot \mathbf{n}_{ij}^{(i)} \right)^T, \quad \mathbf{H}_{kj}^\varepsilon = \left(\tilde{\mathbf{r}}_{ji}^{(j)} \cdot \mathbf{A}_j \cdot \mathbf{A}_i^{-1} \cdot \mathbf{n}_{ij}^{(i)} \right)^T; \\
\dot{\mathbf{r}}_{ij}^{(i)} &= -\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i^{(i)} \mathbf{r}_{ij}^{(i)} + \mathbf{A}_i (\mathbf{A}_j^{-1} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_j^{(j)} \mathbf{r}_{ji}^{(j)} + \dot{\mathbf{R}}_j - \dot{\mathbf{R}}_i); \\
c &= \left[\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i^{(i)} \dot{\mathbf{r}}_{ij}^{(i)} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i^{(i)} \mathbf{A}_i [\mathbf{A}_j^{-1} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_j^{(j)} \mathbf{r}_{ji}^{(j)} + \right. \\
&\left. + \dot{\mathbf{R}}_j - \dot{\mathbf{R}}_i] - \mathbf{A}_i \mathbf{A}_j^{-1} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_j^{(j)} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_j^{(j)} \mathbf{r}_{ji}^{(j)} \right]^T \mathbf{n}_{ij}^{(i)}.
\end{aligned}$$

Оператор “тильда” \tilde{p} преобразует координатный столбец $p = [p_x, p_y, p_z]^T$ в кососимметрическую матрицу:

$$\tilde{p} = \begin{pmatrix} 0 & -p_z & p_y \\ p_z & 0 & -p_x \\ -p_y & p_x & 0 \end{pmatrix},$$

которая позволяет записывать векторное произведение в матричной форме: $\vec{p} \times \vec{r} \rightarrow \tilde{p} \cdot \mathbf{r}$.

Второй тип связи ограничивает относительное вращение двух тел. Уравнение связи имеет вид

$$\begin{aligned} & \left(\left(\mathbf{n}_{ij}^{(i)} \right)^T (-\mathbf{A}_j \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{n}_{ij}^{(i)})^T \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_i \\ \boldsymbol{\varepsilon}_j \end{pmatrix} \right) + \\ & + (\tilde{\omega}_i^{(i)} \mathbf{A}_i \mathbf{A}_j^{-1} \boldsymbol{\omega}_j^{(j)})^T \mathbf{n}_{ij}^{(i)} = 0, \end{aligned} \quad (4.12)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}_i = [\varepsilon_{xi}, \varepsilon_{yi}, \varepsilon_{zi}]^T$, $\boldsymbol{\varepsilon}_j = [\varepsilon_{xj}, \varepsilon_{yj}, \varepsilon_{zj}]^T$ - матрицы-столбцы угловых ускорений тел; $\mathbf{n}_{ij}^{(i)}$ - координатный столбец единичного вектора, определенного в ССК тела i , относительно которого запрещено вращение тела j .

Уравнения (4.11) и (4.12) позволяют записывать уравнения связи для широкого класса соединений, используемых при моделировании как систем ракетно-космической техники, так и их комбинаций.

Получим уравнение связи для цилиндрического шарнира, которое используется при моделировании соединения между панелями солнечных батарей (рис. 12). Цилиндрический шарнир допускает только вращение тела j относительно оси, связанной с телом i , которая задается вектором \vec{n}_x . Поэтому урав-

нения связи обеспечивают совпадение двух точек K_i и K_j , а также запрещают вращение тела j вокруг осей, определяемых векторами n_y и n_z :

$$\begin{aligned} & \left(\left(-\mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{n}_y^{(i)} \right)^T (-\tilde{\mathbf{r}}_{ij}^{(i)} \mathbf{n}_y^{(i)})^T \begin{pmatrix} \mathbf{a}_i \\ \boldsymbol{\varepsilon}_i \end{pmatrix} \right) + \\ & + \left(\left(\mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{n}_y^{(i)} \right)^T (\tilde{\mathbf{r}}_{ji}^{(j)} \mathbf{A}_j \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{n}_y^{(i)})^T \begin{pmatrix} \mathbf{a}_j \\ \boldsymbol{\varepsilon}_j \end{pmatrix} \right) - c_x = 0; \\ & \left(\left(-\mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{n}_y^{(i)} \right)^T (-\tilde{\mathbf{r}}_{ij}^{(i)} \mathbf{n}_y^{(i)})^T \begin{pmatrix} \mathbf{a}_i \\ \boldsymbol{\varepsilon}_i \end{pmatrix} \right) + \\ & + \left(\left(\mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{n}_y^{(i)} \right)^T (\tilde{\mathbf{r}}_{ji}^{(j)} \mathbf{A}_j \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{n}_y^{(i)})^T \begin{pmatrix} \mathbf{a}_j \\ \boldsymbol{\varepsilon}_j \end{pmatrix} \right) - c_y = 0; \\ & \left(\left(-\mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{n}_z^{(i)} \right)^T (-\tilde{\mathbf{r}}_{ij}^{(i)} \mathbf{n}_z^{(i)})^T \begin{pmatrix} \mathbf{a}_i \\ \boldsymbol{\varepsilon}_i \end{pmatrix} \right) + \\ & + \left(\left(\mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{n}_z^{(i)} \right)^T (\tilde{\mathbf{r}}_{ji}^{(j)} \mathbf{A}_j \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{n}_z^{(i)})^T \begin{pmatrix} \mathbf{a}_j \\ \boldsymbol{\varepsilon}_j \end{pmatrix} \right) - c_z = 0; \\ & \left(\mathbf{A}_j \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{n}_{ij}^{(i)} \right)^T \boldsymbol{\varepsilon}_j^{(j)} - (\mathbf{n}_y^{(i)})^T \boldsymbol{\varepsilon}_i^{(i)} - \\ & - (\tilde{\omega}_i^{(i)} \mathbf{A}_i \mathbf{A}_j^{-1} \boldsymbol{\omega}_j^{(j)})^T \mathbf{n}_y^{(i)} = 0; \\ & \left(\mathbf{A}_j \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{n}_{ij}^{(i)} \right)^T \boldsymbol{\varepsilon}_j^{(j)} - (\mathbf{n}_z^{(i)})^T \boldsymbol{\varepsilon}_i^{(i)} - \\ & - (\tilde{\omega}_i^{(i)} \mathbf{A}_i \mathbf{A}_j^{-1} \boldsymbol{\omega}_j^{(j)})^T \mathbf{n}_z^{(i)} = 0. \end{aligned} \quad (4.13)$$

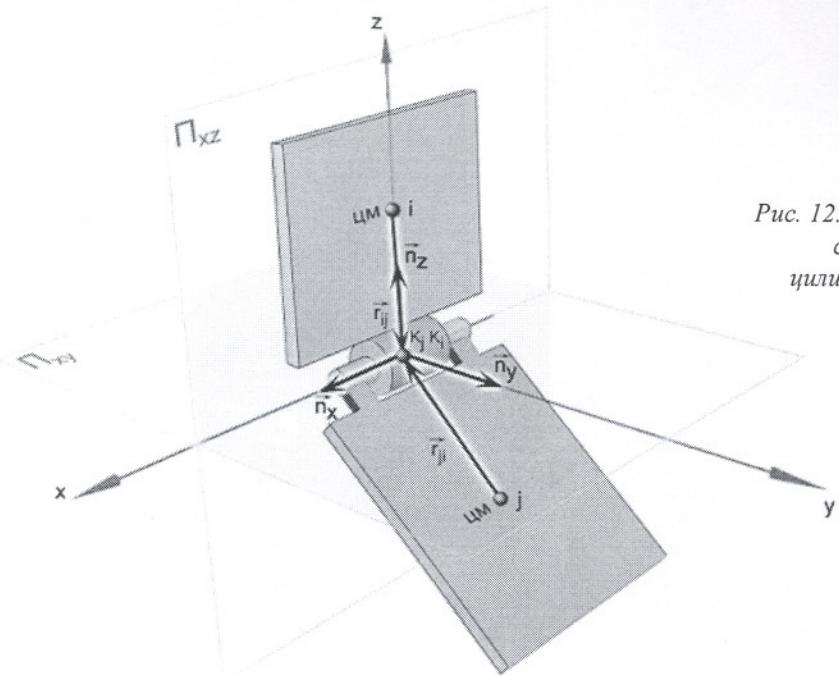


Рис. 12. Соединение двух панелей солнечных батарей цилиндрическим шарниром

В некоторых случаях исследования движения ракетно-космических систем для повышения точности вычислений имеет смысл учитывать упругие свойства конструкции, в частности, упругость соединений и связей рабочих элементов.

Рассмотрим систему раскрытия панелей солнечных батарей (СБ). При достижении панелями СБ (ПСБ) требуемой конфигурации в системе срабатывают механические фиксаторы относительного положения панелей. Указанные фиксаторы не могут обеспечить абсолютно жесткое соединение между панелями, и поэтому моделирование таких систем следует проводить с учетом упругости связей.

Упругий элемент может создавать либо силу, либо крутящий момент. Рассмотрим применительно к общей структуре механической системы двух тел эти случаи отдельно. Пусть в ССК тела 1 определена жестко связанная с ним плоскость (рис. 13), а в теле 2 выбрана точка. Расстояние между точкой и плоскостью будет определять величину силы упругости. Это расстояние определяется следующим выражением: $d = \vec{r}_{p_1} \vec{n}_p - \vec{r}_{p_2} \vec{n}_p$, и в координатной форме в ССК тела 1 можно записать:

$$d_{p_1 p_2} = \mathbf{r}_{p_1}^T \mathbf{n}_p - (\mathbf{r}_{p_2}^{(1)})^T \mathbf{n}_p, \quad (4.14)$$

где \mathbf{n}_p - координатный столбец нормали плоскости, \mathbf{r}_{p_2} - координатный столбец точки p_2 в СК тела 2.

Вектор \mathbf{r}_{p_1} определяется как проекция точки p_2 на плоскость:

$$\mathbf{r}_{p_1} = \mathbf{r}_{p_2}^{(1)} + \mathbf{n}_p \left((\mathbf{r}_{p_0} - \mathbf{r}_{p_2}^{(1)})^T \cdot \mathbf{n}_p \right),$$

$$\mathbf{r}_{p_2}^{(1)} = \mathbf{A}_1 (\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1 + \mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{r}_{p_2}),$$

где \mathbf{r}_{p_0} - координатный столбец произвольной точки, принадлежащей плоскости, относительно СК тела 1; $\mathbf{r}_{p_2}^{(1)}$ - координатный столбец точки p_2 в СК тела 1. Поскольку точки p_1

и p_2 соединены линейным упругим элементом с жесткостью $c_{p_1 p_2}$, выражение для упругой силы примет вид

$$F_{p_1 p_2} = c_{p_1 p_2} d_{p_1 p_2}.$$

При наличии в упругом элементе демпфирования, пропорционального скорости точки p_2 относительно p_1 , силу сопротивления $F_{p_1 p_2}^d$ можно определить следующим образом:

$$F_{p_1 p_2}^d = -|v_{p_2 p_1}| k_{p_2 p_1};$$

$$\begin{aligned} v_{p_2 p_1} &= \frac{d}{dt} \left[\mathbf{r}_{p_1}^T \mathbf{n}_p - \right. \\ &\quad \left. - \left(\mathbf{A}_1 \mathbf{R}_2 - \mathbf{A}_1 \mathbf{R}_1 + \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{r}_{p_2} \right)^T \mathbf{n}_p \right] = \\ &= \dot{\mathbf{r}}_{p_1}^T \mathbf{n}_p - \left(\dot{\mathbf{A}}_1 (\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1 + \mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{r}_{p_2}) + \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{A}_1 \dot{\mathbf{A}}_2^{-1} \mathbf{r}_{p_2} + \mathbf{A}_1 (\dot{\mathbf{R}}_2 - \dot{\mathbf{R}}_1) \right)^T \mathbf{n}_p = \\ &= \dot{\mathbf{r}}_{p_1}^T \mathbf{n}_p - \left(-\tilde{\omega}_1 \mathbf{A}_1 (\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1 + \mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{r}_{p_2}) + \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2^{-1} \tilde{\omega}_2 \mathbf{r}_{p_2} + \mathbf{A}_1 (\dot{\mathbf{R}}_2 - \dot{\mathbf{R}}_1) \right)^T \mathbf{n}_p, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_{p_1} &= \dot{\mathbf{r}}_{p_2}^{(1)} + \mathbf{n}_p \left((\dot{\mathbf{r}}_{p_0} - \dot{\mathbf{r}}_{p_2}^{(1)})^T \cdot \mathbf{n}_p \right) = \\ &= \dot{\mathbf{r}}_{p_2}^{(1)} - \mathbf{n}_p \left((\dot{\mathbf{r}}_{p_2}^{(1)})^T \cdot \mathbf{n}_p \right); \\ \dot{\mathbf{r}}_{p_2}^{(1)} &= \dot{\mathbf{A}}_1 (\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1 + \mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{r}_{p_2}) + \\ &\quad + \mathbf{A}_1 (\dot{\mathbf{R}}_2 - \dot{\mathbf{R}}_1 + \dot{\mathbf{A}}_2^{-1} \mathbf{r}_{p_2}) = \\ &= -\tilde{\omega}_1 \mathbf{A}_1 (\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1 + \mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{r}_{p_2}) + \\ &\quad + \mathbf{A}_1 (\dot{\mathbf{R}}_2 - \dot{\mathbf{R}}_1 + \mathbf{A}_2^{-1} \tilde{\omega}_2 \mathbf{r}_{p_2}) \end{aligned}$$

Таким образом, при наличии между двумя телами i и j системы линейного упругого элемента в правую часть уравнений движения этих тел добавляются следующие силы и моменты:

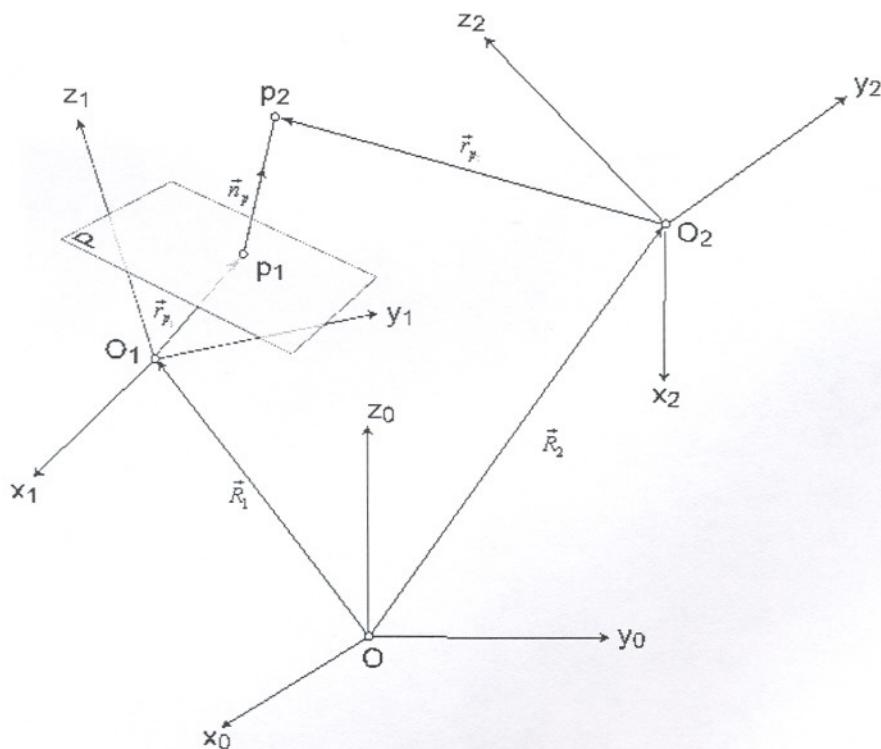


Рис. 13. Схема линейного упругого элемента

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{n}_p (d_{p_1 p_2} c_{p_1 p_2} - \nu_{p_1 p_2} k_{p_1 p_2}), \quad (4.15)$$

$$\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_1,$$

$$\mathbf{L}_1 = \tilde{r}_{p_1} \mathbf{F}_1,$$

$$\mathbf{L}_2 = -\tilde{r}_{p_2} \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{F}_1. \quad (4.16)$$

Определим момент, возникающий при наличии упругого элемента. Предположим, что момент пропорционален углу между плоскостью, заданной в теле i при помощи вектора нормали \vec{n}_i , и вектором \vec{n}_j , определенном в системе координат тела j :

$M_\varphi = k_\varphi \varphi$, где k_φ - жесткость упругого элемента. Угол между вектором \vec{n}_j и плоскостью вычисляется следующим образом:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \arcsin(|\vec{n}_i \times \vec{n}_j|), \quad (4.17)$$

что в координатной форме можно записать в виде

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \arcsin(|\tilde{n}_i^{(i)} \mathbf{A}_i \mathbf{A}_j^{-1} \tilde{n}_j|).$$

Направление вектора момента должно быть таким, чтобы исключать выход вектора \vec{n}_j из плоскости Π . С учетом последнего замечания вектор момента определится следу-

ющим образом:

$$\mathbf{M}_\varphi = \frac{\tilde{n}_i^{(i)} \mathbf{A}_i \mathbf{A}_j^{-1} \tilde{n}_j}{|\tilde{n}_i^{(i)} \mathbf{A}_i \mathbf{A}_j^{-1} \tilde{n}_j|} k_\varphi \varphi.$$

Полученные выше выражения для крутящих моментов можно использовать для моделирования и исследования движения механической системы раскрытия ПСБ. Эта система состоит из двух панелей, соединенных друг с другом цилиндрическим шарниром с упругими свойствами, причем основная панель также присоединяется к корпусу космического аппарата с помощью цилиндрического шарнира (рис. 14).

Отметим, что движение системы начинается с момента освобождения створок, которые под действием торсионов начинают разворачиваться друг относительно друга. Учет упругих свойств шарнира производится с момента первой относительной фиксации каких-либо панелей, поскольку до этого момента силы, действующие в системе, невелики. Очевидно, что движение системы раскрытия ПСБ может происходить в двух режимах. Первый режим соответствует движению с медленно меняющимися скоростями тел, которое происходит до момента первой фиксации (панель 1 с панелью 2 либо панель 1 с КА), либо после затухания упру-

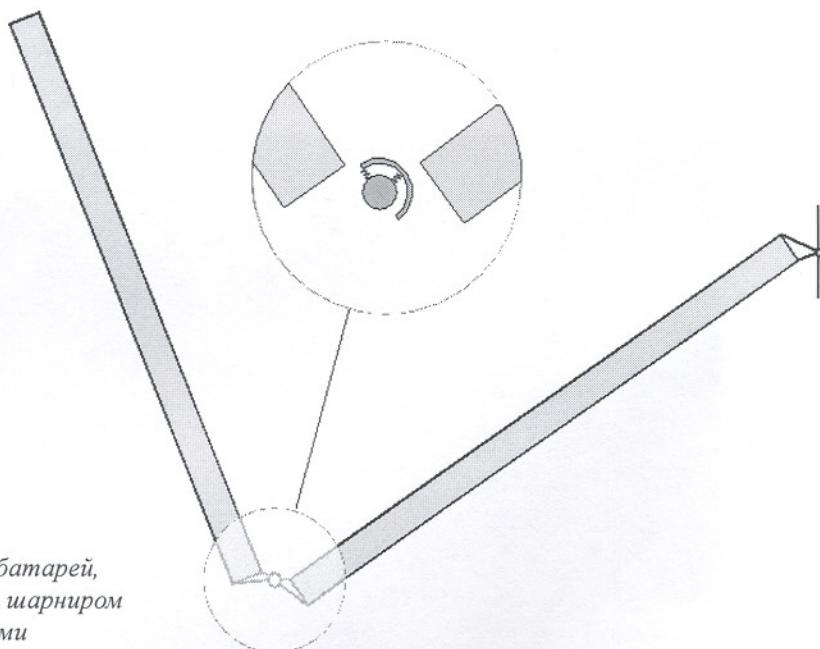


Рис. 14. Панели солнечных батарей, соединенные цилиндрическим шарниром с упругими свойствами

гих колебаний благодаря демпфированию, когда относительные скорости тел меняются медленно. Второй режим соответствует быстрым изменениям относительных скоростей тел, что характерно для движения ПСБ сразу после фиксаций.

Таким образом, разработанные методы моделирования и исследования движения систем твердых тел со связями, в том числе допускающими проявление упругих свойств конструкции, применимы для анализа динамических процессов в разнообразных ракетно-космических системах с движущимися, раскрывающимися и отделяющимися рабочими элементами.

Список литературы

1. Baraff D. Linear-time Dynamics Using Lagrange Multipliers. The Robotics Institute Carnegie Mellon University Pittsburgh, Pennsylvania, 1996.
2. Асланов В. С., Дорошин А. В. Стабилизация спускаемого аппарата частичной закруткой при осуществлении неуправляемого спуска в атмосфере // Космические исследования. 2002. Т. 40. № 2. С. 193-200.
3. Асланов В. С., Дорошин А. В., Круглов Г. Е. Уменьшение ошибок стабилизации соосных тел переменного состава при входе в атмосферу // Вестник СГАУ, № 1. 2002. С. 126-134.
4. Бабаков И. М. Теория колебаний. М.: Наука, 1968.
5. Using ADAMS/Flex. ADAMS Documentation – Mechanical Dynamics, Inc. 1999.
6. Власов В. З. Общая теория оболочек. М.: Гос. изд. технико-теоретической лит-ры, 1949.

DYNAMIC PROCESSES IN ROCKET - SPACE SYSTEMS

© 2003 G. P. Anshakov¹, V. S. Aslanov², V. L. Balakin², A. V. Doroshin², A. S. Kvashin¹, G. Ye. Kruglov¹, V. V. Yudintsev¹

¹State Research and Production Rocket - Space Center «TsSKB-Progress», Samara

²Samara State Aerospace University

Dynamic processes in rocket - space systems such as rocket carriers and side blocks, small re-entry capsules with double rotation, also in auxiliary elements such as separation systems, solar batteries and antennas aperture systems (both with and without taking into account suspension elasticity) are discussed. Mathematical motion models are developed, dynamic processes are analyzed and parameters are synthesized in side blocks separation systems, in head fairing of rocket carrier and in solar battery panels. Re-entry capsule with double rotation is treated as a mechanical system of co-axial bodies with variable mass, having linear regularities of change of mass and moments of inertia.