Unidad 1: Fundamentos de señales digitales

Dr. Carlos Mauricio Lastre Domínguez

Tecnológico Nacional de México
Instituto Tecnológico de Oaxaca

Agosto-septiembre 2025

Contenido

Transformaciones de escalamiento y desplazamiento

Desplazamiento temporal

Dada una señal $x(t)$, la señal desplazada es:

$$y(t) = x(t - t_0)$$

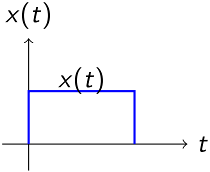
donde t_0 es el desplazamiento temporal.

Escalamiento temporal

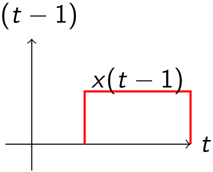
$$y(t) = x(at)$$

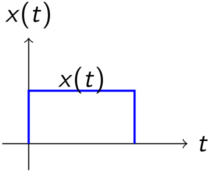
- Si $|a| > 1$: Compresión temporal
- Si $|a| < 1$: Expansión temporal
- Si $a < 0$: Inversión temporal

Ejemplos de transformaciones

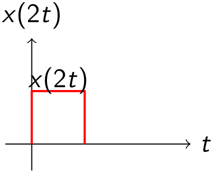


Desplazamiento





Escalamiento



Señal Par e Impar

Señal Par

Una señal $x(t)$ es par si:

$$x(-t) = x(t) \quad \forall t$$

Ejemplo: $x(t) = \cos(t)$

Señal Impar

Una señal $x(t)$ es impar si:

$$x(-t) = -x(t) \quad \forall t$$

Ejemplo: $x(t) = \sin(t)$

Descomposición par-impar

Toda señal puede descomponerse como:

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t)$$

donde $x_e(t)$ es par y $x_o(t)$ es impar.

Señales de energía y potencia

Energía de una señal

$$E = \lim_{T \to \infty} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt$$

Una señal es de energía si $0 < E < \infty$.

Potencia de una señal

$$P = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt$$

Una señal es de potencia si $0 < P < \infty$.

Nota

Las señales de energía tienen potencia cero y las señales de potencia tienen energía infinita.

Sistemas lineales invariantes en el tiempo (LTI)

Linealidad

Un sistema es lineal si satisface:

$$\begin{aligned} T[ax_1(t) + bx_2(t)] &= aT[x_1(t)] + bT[x_2(t)] \\ &= ay_1(t) + by_2(t) \end{aligned}$$

Invarianza en el tiempo

Un sistema es invariante en el tiempo si:

$$\text{Si } x(t) \to y(t) \text{ entonces } x(t - t_0) \to y(t - t_0)$$

para cualquier t_0.

Definición formal de linealidad

Sistema lineal

Un sistema T es lineal si satisface dos propiedades:

1. **Aditividad:**
$$T[x_1(t) + x_2(t)] = T[x_1(t)] + T[x_2(t)]$$
2. **Homogeneidad:**
$$T[a \cdot x(t)] = a \cdot T[x(t)]$$
para cualquier escalar $a \in \mathbb{C}$

Combinación equivalente

Las dos propiedades pueden combinarse en una sola condición:

$$T[ax_1(t) + bx_2(t)] = aT[x_1(t)] + bT[x_2(t)]$$

para cualesquiera escalares $a, b \in \mathbb{C}$

Ejemplo 1: Sistema diferenciador

Definición del sistema

$$y(t) = T[x(t)] = \frac{d}{dt}x(t)$$

Demostración de aditividad

$$\begin{aligned} T[x_1(t) + x_2(t)] &= \frac{d}{dt}[x_1(t) + x_2(t)] \\ &= \frac{d}{dt}x_1(t) + \frac{d}{dt}x_2(t) \\ &= T[x_1(t)] + T[x_2(t)] \end{aligned}$$

Demostración de homogeneidad

$$\begin{aligned} T[a \cdot x(t)] &= \frac{d}{dt}[a \cdot x(t)] \\ &= a \cdot \frac{d}{dt}x(t) \\ &= a \cdot T[x(t)] \end{aligned}$$

Ejemplo 2: Sistema integrador

Definición del sistema

$$y(t) = T[x(t)] = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$$

Demostración de aditividad

$$\begin{aligned} T[x_1(t) + x_2(t)] &= \int_{-\infty}^{t} [x_1(\tau) + x_2(\tau)]d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{t} x_1(\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{t} x_2(\tau)d\tau \\ &= T[x_1(t)] + T[x_2(t)] \end{aligned}$$

Demostración de homogeneidad

$$T[a \cdot x(t)] = \int_{-\infty}^{t} a \cdot x(\tau)d\tau$$

Ejemplo 3: Sistema con coeficientes constantes

Definición del sistema

$$y(t) = T[x(t)] = ax(t) + b\frac{dx(t)}{dt}$$

donde $a, b \in \mathbb{C}$ son constantes.

Demostración completa

$$\begin{aligned}
T[c_1x_1(t) + c_2x_2(t)] &= a[c_1x_1(t) + c_2x_2(t)] + b\frac{d}{dt}[c_1x_1(t) + c_2x_2(t)] \\
&= ac_1x_1(t) + ac_2x_2(t) + bc_1\frac{dx_1(t)}{dt} + bc_2\frac{dx_2(t)}{dt} \\
&= c_1\left[ax_1(t) + b\frac{dx_1(t)}{dt}\right] + c_2\left[ax_2(t) + b\frac{dx_2(t)}{dt}\right] \\
&= c_1T[x_1(t)] + c_2T[x_2(t)]
\end{aligned}$$

Contraejemplo 1: Sistema cuadrático

Definición del sistema

$$y(t) = T[x(t)] = x^2(t)$$

Demostración de no linealidad

$$\begin{aligned} T[x_1(t) + x_2(t)] &= [x_1(t) + x_2(t)]^2 \\ &= x_1^2(t) + 2x_1(t)x_2(t) + x_2^2(t) \\ &\neq x_1^2(t) + x_2^2(t) \\ &= T[x_1(t)] + T[x_2(t)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T[a \cdot x(t)] &= [a \cdot x(t)]^2 = a^2 x^2(t) \\ &\neq a \cdot x^2(t) = a \cdot T[x(t)] \end{aligned}$$

Contraejemplo 2: Sistema con término constante

Definición del sistema

$$y(t) = T[x(t)] = x(t) + 1$$

Demostración de no linealidad

$$\begin{aligned} T[x_1(t) + x_2(t)] &= [x_1(t) + x_2(t)] + 1 \\ &\neq [x_1(t) + 1] + [x_2(t) + 1] \\ &= T[x_1(t)] + T[x_2(t)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T[a \cdot x(t)] &= a \cdot x(t) + 1 \\ &\neq a \cdot [x(t) + 1] = a \cdot T[x(t)] \end{aligned}$$

Contraejemplo 3: Sistema sinusoidal

Definición del sistema

$$y(t) = T[x(t)] = \sin(x(t))$$

Demostración de no linealidad

$$\begin{aligned} T[x_1(t) + x_2(t)] &= \sin(x_1(t) + x_2(t)) \\ &\neq \sin(x_1(t)) + \sin(x_2(t)) \\ &= T[x_1(t)] + T[x_2(t)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T[a \cdot x(t)] &= \sin(a \cdot x(t)) \\ &\neq a \cdot \sin(x(t)) = a \cdot T[x(t)] \end{aligned}$$

Consecuencias de la linealidad

Principio de superposición

Para un sistema lineal, la respuesta a una combinación lineal de entradas es la combinación lineal de las respuestas individuales:

$$T\left[\sum_{k=1}^{n} c_k x_k(t)\right] = \sum_{k=1}^{n} c_k\, T[x_k(t)]$$

Respuesta al impulso

Para sistemas LTI, la respuesta completa puede caracterizarse por la respuesta al impulso $h(t)$:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Importancia práctica

La linealidad permite el análisis de sistemas complejos mediante la descomposición en componentes más simples.

Método para verificar linealidad

1. **Definir el sistema:** $y(t) = T[x(t)]$
2. **Aplicar aditividad:**

$$\begin{aligned} z_1(t) &= T[x_1(t) + x_2(t)] \\ z_2(t) &= T[x_1(t)] + T[x_2(t)] \\ \text{Verificar si } z_1(t) &= z_2(t) \end{aligned}$$

3. **Aplicar homogeneidad:**

$$\begin{aligned} w_1(t) &= T[a \cdot x(t)] \\ w_2(t) &= a \cdot T[x(t)] \\ \text{Verificar si } w_1(t) &= w_2(t) \end{aligned}$$

4. **Conclusión:**
   - Si ambas propiedades se cumplen: **Sistema lineal**
   - Si alguna falla: **Sistema no lineal**

Ejercicio de práctica

Determine si el siguiente sistema es lineal

$$y(t) = T[x(t)] = x(t - t_0)$$

donde t_0 es una constante.

Ejercicio de práctica

Determine si el siguiente sistema es lineal

$$y(t) = T[x(t)] = x(t - t_0)$$

donde t_0 es una constante.

Solución

$$\begin{aligned} T[ax_1(t) + bx_2(t)] &= ax_1(t - t_0) + bx_2(t - t_0) \\ &= aT[x_1(t)] + bT[x_2(t)] \end{aligned}$$

¡El sistema es lineal!

Nota

Los sistemas de desplazamiento temporal son lineales aunque tengan memoria.

Linealidad

Definición formal

Un sistema es lineal si satisface:

1. **Aditividad:** $T[x_1(t) + x_2(t)] = T[x_1(t)] + T[x_2(t)]$
2. **Homogeneidad:** $T[ax(t)] = aT[x(t)]$

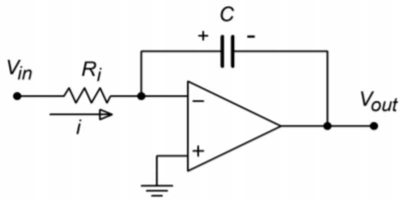
Sistema lineal

$y(t) = 2x(t) + 3\frac{dx(t)}{dt}$

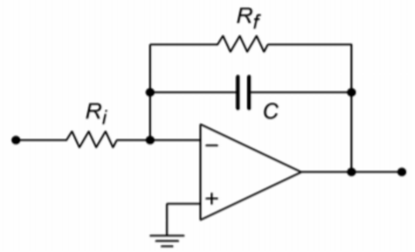
Sistema no lineal

$y(t) = x^2(t)$
$y(t) = \sin(x(t))$
$y(t) = x(t) + 1$

Integrador Ideal

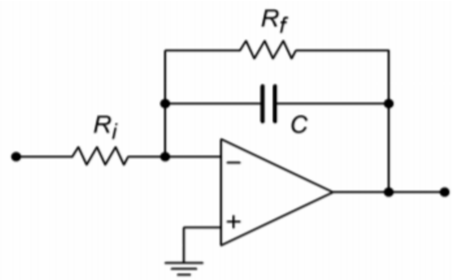


Integrador con R_f



Objetivo: Analizar la estabilidad mediante ecuaciones diferenciales

Integrador Ideal - Análisis



Ecuación diferencial:

$$\frac{V_{in}(t)}{R} = -C\frac{dV_{out}(t)}{dt}$$

Reorganizando:

$$\frac{dV_{out}(t)}{dt} = -\frac{1}{RC}V_{in}(t)$$

Integrador Ideal - Solución

Para entrada escalón $V_{in}(t) = V \cdot u(t)$:

$$\frac{dV_{out}(t)}{dt} = -\frac{V}{RC} \quad \text{para } t > 0$$

Integrando:

$$V_{out}(t) = -\frac{V}{RC}t + K$$

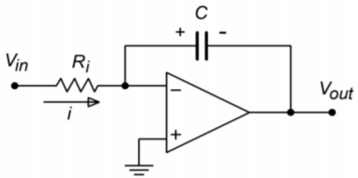
Condición inicial $V_{out}(0) = 0$:

$$V_{out}(t) = -\frac{V}{RC}t$$

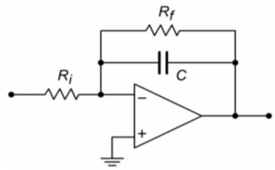
Integrador Ideal - Comportamiento

Límite cuando $t \to \infty$:

$$\lim_{t\to\infty} V_{out}(t) = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{V}{RC}t\right) = -\infty$$



Conclusión: Sistema inestable



Ecuación diferencial:

$$\frac{V_{in}(t)}{R} = -\frac{V_{out}(t)}{R_f} - C\frac{dV_{out}(t)}{dt}$$

Reorganizando:

$$C\frac{dV_{out}(t)}{dt} + \frac{V_{out}(t)}{R_f} = -\frac{V_{in}(t)}{R}$$

Integrador con R_f - Solución Homogénea

Ecuación homogénea:

$$C\frac{dV_{out}(t)}{dt} + \frac{V_{out}(t)}{R_f} = 0$$

Solución propuesta: $V_{out,h}(t) = Ke^{st}$

$$CsKe^{st} + \frac{K}{R_f}e^{st} = 0$$

Polinomio característico:

$$Cs + \frac{1}{R_f} = 0 \quad \Rightarrow \quad s = -\frac{1}{R_f C}$$

Solución homogénea:

$$V_{out,h}(t) = Ke^{-t/(R_f C)}$$

Integrador con R_f - Solución Particular

Para entrada escalón $V_{in}(t) = V \cdot u(t)$**:**
Solución particular constante:

$$\frac{V_{out,p}}{R_f} = -\frac{V}{R} \quad \Rightarrow \quad V_{out,p} = -\frac{R_f V}{R}$$

Solución completa:

$$V_{out}(t) = -\frac{R_f V}{R} + Ke^{-t/(R_f C)}$$

Condición inicial $V_{out}(0) = 0$**:**

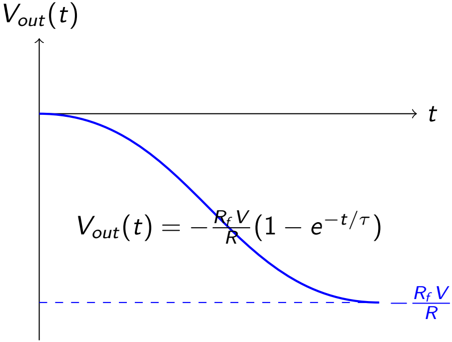
$$0 = -\frac{R_f V}{R} + K \quad \Rightarrow \quad K = \frac{R_f V}{R}$$

$$V_{out}(t) = -\frac{R_f V}{R}\left(1 - e^{-t/(R_f C)}\right)$$

Integrador con R_f - Comportamiento

Límite cuando $t \to \infty$:

$$\lim_{t\to\infty} V_{out}(t) = -\frac{R_f V}{R}(1-0) = -\frac{R_f V}{R}$$



Conclusión: Sistema estable

Resumen de propiedades

Sistema	Lineal	Invariante	Causal	Estable	Sin memoria
$y(t) = x(t-1)$	Sí	Sí	Sí	Sí	No
$y(t) = x^2(t)$	No	Sí	Sí	Sí	Sí
$y(t) = tx(t)$	Sí	No	Sí	No	Sí
$y(t) = x(t+1)$	Sí	Sí	No	Sí	No

Cuadro: Comparación de propiedades de diferentes sistemas

Memoria del sistema

Sistema sin memoria

La salida en el instante t depende sólo de la entrada en el mismo instante t.

$$y(t) = f(x(t))$$

Ejemplo: $y(t) = kx(t)$

Sistema con memoria

La salida en el instante t depende de valores pasados o futuros de la entrada.

$$y(t) = f(x(\tau)), \quad \tau \leq t \text{ (causal)} \quad \text{ó} \quad \tau \in \mathbb{R}$$

Ejemplo: $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau) d\tau$

Causalidad

Sistema causal

La salida en el instante t depende sólo de valores presentes y pasados de la entrada.

$$y(t) = f(x(\tau)), \quad \tau \leq t$$

Ejemplo: $y(t) = x(t) + x(t-1)$

Sistema no causal

La salida depende de valores futuros de la entrada.

$$y(t) = f(x(\tau)), \quad \tau > t$$

Ejemplo: $y(t) = x(t+1)$

Importancia

Los sistemas físicos reales son causales.

Estabilidad

Estabilidad BIBO (Bounded Input - Bounded Output)

Un sistema es estable si para toda entrada acotada produce una salida acotada.

$$|x(t)| \leq M_x < \infty \Rightarrow |y(t)| \leq M_y < \infty$$

Sistema estable

$y(t) = \frac{1}{2}x(t)$

Sistema inestable

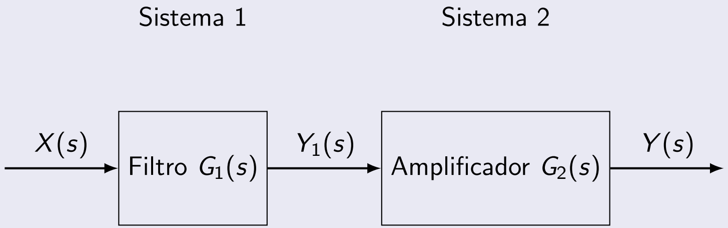
$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$ (puede crecer sin límite)

Criterio de estabilidad

Para sistemas LTI: $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt < \infty$

Ejemplo: Conexión en Serie

Sistema: Filtro y Amplificador



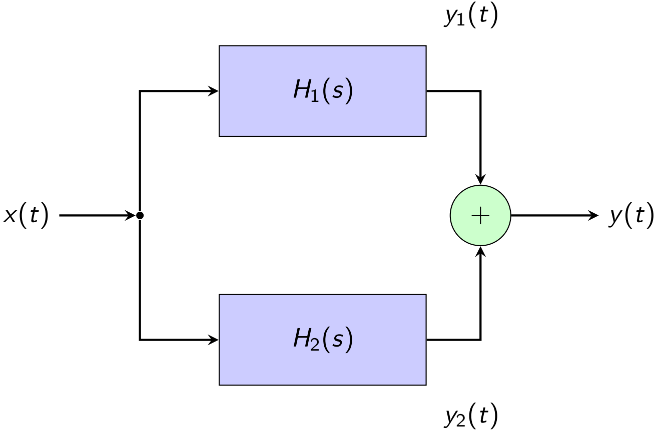
Función de transferencia total:

$$G(s) = G_1(s) \times G_2(s)$$

Aplicación típica

Procesamiento de señal: filtrado seguido de amplificación

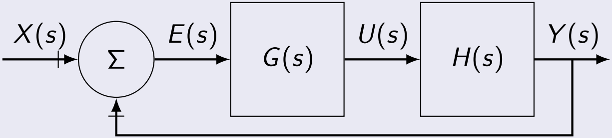
Diagrama de Bloques en Paralelo



$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = H_1(s)x(t) + H_2(s)x(t)$$

Ejemplo: Conexión por Retroalimentación

Sistema: Control con Feedback



Función de transferencia:

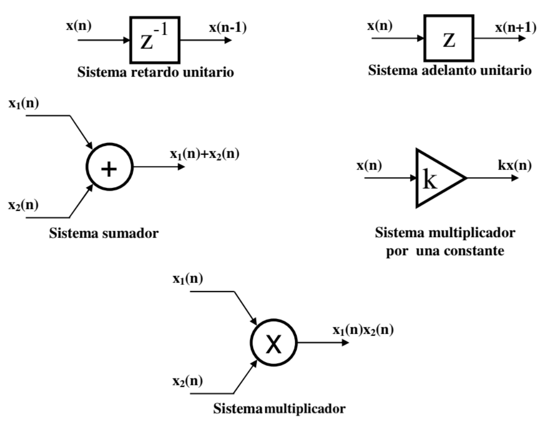
$$T(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Importancia

Estabiliza el sistema y mejora el rendimiento

Representación de modelos de sistemas:

Simbología de sistemas



Ejemplo de Sistema

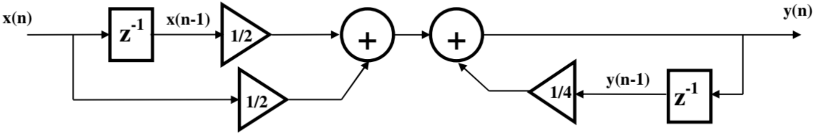
La relación entrada-salida del sistema es:

$$y(n) = \frac{1}{2}x(n) + \frac{1}{2}x(n-1) + \frac{1}{4}y(n-1)$$

Pasos para la solución:

1. Ubicar las señales de entrada $x(n)$ y salida $y(n)$
2. Insertar los retardos para generar $x(n-1)$, $y(n-1)$
3. Interconectar mediante sumadores y multiplicadores

Diagrama de Bloques del Sistema



Explicación del Diagrama

- Los bloques Z^{-1} representan **retardos unitarios** en el tiempo
- Los círculos con Σ son **sumadores** de señales
- Los bloques con fracciones son **multiplicadores por constantes**
- El diagrama muestra claramente la **realimentación** del sistema

¡Gracias por su atención!