



Trabajo Práctico

[6109] Probabilidad y Estadística B (No Industriales)
Segundo cuatrimestre de 2023

Alumno	Nombre y apellido	Padrón	Mail
Alumno 1:	Kim, Daniel	107188	dakim@fi.uba.ar
Alumno 2:	Koo, Hangeol	108401	hkoo@fi.uba.ar

Fecha de entrega: 16/12/2023

Índice

1. Deducción teórica de intervalos de confianza	2
1.1. Deducción para T1	2
1.2. Deducción para T2	2
1.3. Deducción para T3	2
2. Experimento	2
2.1. Resultados obtenidos	2
3. Conclusiones	3

1. Deducción teórica de intervalos de confianza

Deducir de forma teórica los intervalos de confianza para un nivel $1 - \alpha$.

1.1. Deducción para T1

$$T_1 = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - E[X]}{\sqrt{\text{Var}(X)}}$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot 2e^{-2(x-\theta)} dx = \theta + \frac{1}{2}$$

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot 2e^{-2(x-\theta)} dx = \theta^2 + \frac{3}{4}$$

$$\text{Var}[X^2] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{1}{4}$$

$$P\left(z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \theta - \frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$$

$$P\left(z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \sqrt{n} \frac{\bar{X} - \theta - \frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$$

$$P\left(\bar{X} - \frac{1}{2} - 2 \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \leq \theta \leq \bar{X} - \frac{1}{2} - 2 \frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\right)$$

1.2. Deducción para T2

$$T_2 = \min\{X_1, \dots, X_n\} - \theta$$

$$P\left(q_{\frac{\alpha}{2}} \leq \min\{X_1, \dots, X_n\} - \theta \leq q_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$$

$$P\left(\min\{X_1, \dots, X_n\} - q_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \theta \leq \min\{X_1, \dots, X_n\} - q_{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

1.3. Deducción para T3

$$T_3 = \sum_{i=1}^n X_i - n\theta$$

$$P\left(q_{\frac{\alpha}{2}} \leq \sum_{i=1}^n X_i - n\theta \leq q_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$$

$$P\left((\sum_{i=1}^n X_i - q_{1-\frac{\alpha}{2}})/n \leq \theta \leq (\sum_{i=1}^n X_i - q_{\frac{\alpha}{2}})/n\right)$$

2. Experimento

En cada replicación $k = 5000$, generar una muestra con las características especificadas y obtener el intervalo de confianza de nivel 0.95 para θ , según los tres métodos. Almacenar, por cada iteración y cada método, la longitud del intervalo obtenido y un valor indicativo de su cobertura. Es decir, 1 si el parámetro cae en el intervalo y 0 si no. Efectuar este experimento con los siguientes parámetros:

$$n = 10, 30, 100, 1000$$

$$\theta = 2, 5$$

Estimar la longitud esperada y la cobertura del intervalo, según cada método y cada configuración de parámetros (n y θ). Expresar los resultados en una tabla.

2.1. Resultados obtenidos

Cuadro 1: Resultados del experimento

Método	n	θ	Longitud promedio	Cobertura
T1	10	2	2.4792	1.00
T1	30	2	1.4314	1.00
T1	100	2	0.7840	1.00
T1	1000	2	0.2479	1.00
T1	10	5	2.4792	1.00
T1	30	5	1.4314	1.00
T1	100	5	0.7840	1.00
T1	1000	5	0.2479	1.00
T1			1.2356	1.00
T2	10	2	0.1832	0.96
T2	30	2	0.0611	0.95
T2	100	2	0.0183	0.95
T2	1000	2	0.0018	0.95
T2	10	5	0.1832	0.95
T2	30	5	0.0611	0.95
T2	100	5	0.0183	0.95
T2	1000	5	0.0018	0.95
T2			0.0661	0.95
T3	10	2	0.6145	0.95
T3	30	2	0.3568	0.95
T3	100	2	0.1958	0.95
T3	1000	2	0.0620	0.94
T3	10	5	0.6145	0.95
T3	30	5	0.3568	0.95
T3	100	5	0.1958	0.95
T3	1000	5	0.0620	0.95
T3			0.3073	0.95

3. Conclusiones

A partir de los resultados obtenidos, pudimos llegar a las siguientes observaciones:

- En cuanto a la longitud del intervalo se pudo observar que en casos de T1 y T3 tenían una relación inversamente proporcional con n y en el de T2 una relación inversa, irrelevante a θ . También se observó que según el pivote utilizado cambiaban en gran medida su magnitud:
 - T1: el de mayor magnitud, con un promedio de 1.2356.
 - T2: el de menor magnitud, con un promedio de 0.0661.
 - T3: magnitud media, con un promedio de 0.3073.
- En cuanto a la cobertura del intervalo se pudo observar que no estaban relacionadas con los parámetros n y θ , y que su valor variaba solamente según el pivote utilizado:
 - T1: cobertura 1.
 - T2: cobertura alrededor de 0.95.
 - T3: cobertura alrededor de 0.95.

En conclusión, el pivote T1 es el mejor en términos de robustez ya que el intervalo tiene una cobertura perfecta, aunque queda bastante atrás en precisión comparado con T2 o T3. Al utilizar T2 o T3 se pierde un poco la cobertura, pero dado que su longitud promedio es mucho menor que en el método 1, se podría ampliar un poco el intervalo para cubrir los casos; llegando así a una cobertura más robusta aún teniendo un intervalo mucho menor que T1. Mientras que T2 presenta en definitiva mejores resultados que T3, al tener coberturas muy similares y longitud promedio algo distantes, la decisión de elegir entre T1 y T2 podría depender de la cualidad que uno requiera y del tamaño de la muestra.