ÁLGEBRA (Ciencias) – año 2020

PRÁCTICA 5

Combinatoria

$\Longrightarrow$ **SUGERENCIA:** Para resolver los ejercicios es conveniente analizar cómo hay que contar la cantidad de casos posibles independientemente de si se corresponde con una permutación, variación o combinación. Es decir, no es necesario identificar, leyendo sólo el enunciado, si el problema corresponde a una permutación, variación o combinación.

1. Con un alfabeto de 27 letras y los dígitos del 0 al 9

   a) Cuántas claves de 1 letra y un número, en ese orden se pueden formar?

   b) Cuántas de 2 letras primero y 2 números después si se permiten repeticiones?

   c) Cuantas de 2 letras primero y 2 números después si no se permiten repeticiones?

   d) Cuántas de 2 letras primero y 2 números después si se permiten repeticiones, que comiencen con A y terminen con 0?

   e) Cuántas de 2 letras primero y 2 números después si se permiten repeticiones, que empiecen con A o terminen con 0?

2. Con los dígitos 1,2,3,6,7,8; ¿Cuántos números de 4 cifras disitintas pueden formarse?

   a) Sin restricciones;

   b) Que sean pares;

   c) Que comiencen y terminen con un dígito impar.

3. Se dispone de 10 libros de Matemática, 5 de Física y 8 de Astronomía.

   a) ¿De cuántas maneras pueden ordenarse en un estante si los de una misma materia deben estar juntos entre sí?

   b) ¿De cuántas si sólo los de Astronomía deben estar juntos entre sí?

4. ¿Cuántos anagramas de la palabra MONEDA se pueden formar? ¿Cuántos que tengan la letra M en el tercer lugar? ¿Cuántos en los que aparezca la secuencia MO? ¿Cuántas en la que no aparezca la secuencia MO?

5. ¿Cuántos anagramas de la palabra MATEMATICA se pueden formar? ¿Cuántos que no comiencen con M? ¿Cuántos que comiencen y terminen con la misma letra?

6. ¿De cuántas formas pueden alinearse 6 personas vestidas de rojo y 6 vestidas de verde

   a) sin restricciones;

b) en forma alternada;

c) las que están vestidas de rojo primero y las de verde después;

d) primero tres vestidas de rojo, luego las 6 de verde y finalmente las tres personas restantes.

7. En una clase con 30 estudiantes hay que seleccionar una comisión compuesta por 5 personas. ¿De cuántas forma puede hacerse

   a) sin restricciones;

   b) si Juan y Pedro no pueden estar juntos en la comisión;

   c) si es obligación incluir a Rosa o a Blanca.

8. De un grupo formado por 6 estudiantes de física y 8 de meteorología se quieren seleccionar 2 de física y 3 de meteorología para fomar una comisión. ¿De cuántas formas puede hacerse

   a) sin restricciones,

   b) si Juan y Pedro, ambos estudiantes de física, no pueden estar juntos;

   c) si Juan, que estudia física, y María, que estudia meteorología, no pueden estar en la misma comisión,

   d) si Pedro, que estudia meteorología, y Rosa, que estudia física, deben estar en la misma comisión.

9. Veintidós personas participan de una reunión y deben formar dos equipos de trabajo, ambos con igual número de integrantes; uno de ellos debe estar dirigido por Ema y el otro por Agustina:

   a) ¿Cuántos equipos distintos pueden formarse?

   b) ¿Cuántos equipos distintos si hay 3 personas (particulares) que deben estar con Ema y 2 (también particulares) en el equipo de Agustina?

10. Probar:

    $C(n-1, r) + C(n-1, r-1) = C(n, r)$.

    ==

    $\Longrightarrow$ **SUGERENCIA:** Resolver los siguientes ejercicios utilizando binomio de Newton.

11. Si C_r es el coeficiente del r-ésimo término del desarrollo de $(1+x)^n$. Determinar si existe n, para que $C_5 = 70$ y $C_7 = 28$. En caso de que exista hallarlo.

12. Hallar el término independiente de x en el desarrollo de $(x^2 - 2x^{-1})^{12}$.

13. Determinar si existe n, tal que en el desarrollo de $(2+3b)^n$ el coeficiente de b^{12} es cuatro veces el coeficiente de b^{11}. En caso de que exista, hallarlo.

14. Determinar si existe r tal que en el desarrollo de $(3x+7)^{39}$, $C_{r+1} = C_r$.

15. Evaluar las siguientes sumas (sin desarrollar los combinatorios):

    a) $C(6,0) + C(6,1) + ... + C(6,5)$.

    b) $C(6,0) - C(6,1) + C(6,2) - C(6,3) + ... + C(6,6)$.

16. Usando el desarrollo de $(1+x)^n$ y dando a x un valor adecuado, probar:

    a)) $1 - 2C(n,1) + 2^2C(n,2) - 2^3C(n,3) + ... + (-1)^n 2^n C(n,n) = (-1)^n$

    b) $1 + 2C(n,1) + 2^2C(n,2) + 2^3C(n,3) + ... + 2^nC(n,n) = 3^n$

==================== EJERCICIOS OPTATIVOS ================

17. ¿Cuántos números de 7 cifras distintas se pueden armar usando los dígitos del 1 al 7 de manera que la centena no sea el 2? ¿Y si además la unidad tampoco debe ser el 2?

18. ¿Cuántos subconjuntos de 4 elementos tiene el conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7\}$? ¿Cuántos subconjuntos de 4 elementos si se pide que 1 pertenezca al subconjunto? ¿Cuántos subconjuntos de 4 elementos si se pide que 1 no pertenezca al subconjunto? ¿Cuántos subconjuntos de 4 elementos si se pide que 1 o 2 pertenezcan al subconjunto, pero no simultáneamente los dos?

19. María, Rodolfo, Enrique, Fernando, Paula, Eulalia viven en Azul y son seleccionades por una empresa vitivinícola para catar sus vinos ¿Cuántos grupos de 4 integrantes pueden formarse para catar un Malbec ? ¿Cuántos grupos de 4 integrantes si se pide que en el grupo Rodolfo no participe? ¿Cuántos grupos de 4 integrantes si se pide que María participe? ¿Cuántos grupos de 4 integrantes, si se pide que Enrique o Paula participen , pero no simultáneamente los dos?

20. Probar:

    a) $C(n+2,r) = C(n,r) + 2C(n,r-1) + C(n,r-2)$.

    b) $C(n+3,r) = C(n,r) + 3C(n,r-1) + 3C(n,r-2) + C(n,r-3)$.

21. Demostrar que si n es par, entonces:
    $C(n,0) + C(n,2) + ... + C(n,n) = C(n,1) + C(n,3) + ... + C(n,n-1) = 2^{n-1}$

22. Sea a un número natural. Hallar, si existe, el coeficiente de grado 10 en el desarrollo del binomio $(a^2+5)^{108}$

23. Sean a y b números reales. Hallar, si existe, el término de b^4 en el desarrollo del binomio $(a^4 + 2b^2)^{225}$.

24. Sea $n \in \mathbb{N}$ un número par. Hallar una expresión simplificadora de:
    $-2\frac{C(n,1)}{5} + 2\frac{C(n,2)}{25} - 2\frac{C(n,3)}{125} + ... + 2\frac{C(n,n)}{5^n}$