PRÁCTICA 2

Conjuntos. Parte I

Sean $A = \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ es múltiplo de } 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ es múltiplo de } 7\}$ y $C = \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ es múltiplo de } 21\}$. Probar que:

1. $C \subset A$ y $A \neq C$
2. $C \subset B$ y $B \neq C$
3. $C \subset A \cap B$.

Demostración. Recordemos que un número $a \in \mathbb{Z}$ es múltiplo de $b \in \mathbb{Z}$ si existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $a = b.k$.

1. Sea $x \in C$ entonces $\exists k \in \mathbb{Z}$ tal que

   $$x = 21 \cdot k \Rightarrow x = 3 \cdot 7k = 3(7k) = 3 \cdot t, \text{ con } t \in \mathbb{Z}$$

   entonces $x \in A$.

   Si queremos probar que los conjuntos no son iguales ($C \not\subset A$) debemos encontrar un elemento de C que NO esté en A. Así, por ejemplo 3 es múltiplo de 3 ($3 \in C$) pero no de 21 ($3 \notin A$).

2. Sea $x \in C$ entonces $\exists q \in \mathbb{Z}$ tal que

   $$x = 21 \cdot q \Rightarrow x = 7 \cdot 3q = 7(3q) = 7d, \text{ con } d \in \mathbb{Z}$$

   entonces $x \in B$. Contraejemplo: 14 es múltiplo de 7 pero no de 21.

3. Sea $x \in C$ entonces $\exists k \in \mathbb{Z}$ tal que

   $$x = 21 \cdot k \Rightarrow x = 3 \cdot 7k = 3(7k) = 3t, \text{ con } t \in \mathbb{Z}$$

   y $\exists q \in \mathbb{Z}$ tal que

   $$x = 21 \cdot q \Rightarrow x = 7 \cdot 3q = 7(3q) = 7d, \text{ con } d \in \mathbb{Z}$$

   entonces $x \in A$ y $x \in B$. Luego $x \in A \cap B$.

$\square$