

ÁLGEBRA (Ciencias) – año 2020

PRÁCTICA 2

Conjuntos. Parte I

1. Definir los siguientes conjuntos por extensión:

a) $\{x : x \text{ es un día de la semana}\}$

b) $\{k : k \in \mathbb{Z} \wedge -5 < k < 10\}$

2. Definir los siguientes conjuntos por comprensión:

a) El de los enteros impares.

b) El que tiene como elementos las siguientes letras: u, i, o, e, a.

3. Definir de distintas maneras los siguientes conjuntos:

a) $A = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge x = 2x\}$

b) $B = \emptyset$

c) $C = \{0\}$

4. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos es el conjunto vacío?

a) $A = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge x^2 + 1 = 0\}$

b) $B = \{x : x = -x \wedge x \in \mathbb{R}\}$

c) $C = \{\emptyset\}$

d) $D = \emptyset$

e) $E = \{x : x^2 = 9 \wedge 2x = 4 \wedge x \in \mathbb{R}\}$

f) $F = \{y : y > 2 \wedge y < 2\}$

5. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son iguales?

a) $A = \{x : x \text{ es un dígito del número } 123123\}$

b) $B = \{x : x \in \mathbb{Z} \wedge 1 < x < 3\}$

c) $C = \{\emptyset\}$

d) $D = \emptyset$

e) $E = \{x : x \in \mathbb{Z} \wedge 1 \leq x \leq 3\}$

f) $F = \{x : x \in \mathbb{Q} \wedge 1 < x < 3\}$

g) $G = \{x : x - 2 = 0 \wedge x \in \mathbb{R}\}$

6. Sea $A = \{1, 2, \{3\}, \{1, 2\}, -1\}$, decir si son verdaderas o falsas las siguientes relaciones. Justifique.

- | | | |
|----------------------------|----------------------------|-------------------------|
| a) $3 \in A$ | b) $\{1, 2\} \subseteq A$ | c) $\{1, 2\} \in A$ |
| d) $\{3\} \subseteq A$ | e) $\{\{3\}\} \subseteq A$ | f) $\emptyset \in A$ |
| g) $\{-1, 2\} \subseteq A$ | h) $\emptyset \subseteq A$ | i) $\{1, 2, -1\} \in A$ |

7. Determinar si $A \subseteq B$ en cada uno de los siguientes casos

- a) $A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{1, 2, -3, \{3\}\}$
 b) $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ $B = \{x \in \mathbb{R} : |x + 3| \leq 1\}$
 c) $A = \{\emptyset\}$ $B = \emptyset$
 d) $A = \{x \in \mathbb{Z} : -1 \leq x \leq 1\}$ $B = \{x \in \mathbb{R} : x^3 - x = 0\}$

8. Sean: $A = \{1, 3, \{2, -2\}\}$; $B = \{3, 4, 1^3, b\}$; $C = \{0, b, 2, 3\}$. Hallar: $A \cup B$, $B \cup C$, $C \cup A$, $A \cup (C \cup B)$, $(A \cup B) \cup C$, $A \cap B$, $B \cap C$, $(A \cap B) \cap C$ y $A \cap (B \cap C)$.

9. Sean $A = \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ es múltiplo de } 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ es múltiplo de } 7\}$ y $C = \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ es múltiplo de } 21\}$. Probar que:

- a) $C \subset A$ y $A \neq C$
 b) $C \subset B$ y $B \neq C$
 c) $C \subset A \cap B$.

10. Hallar la unión de los conjuntos A y B en los siguientes casos:

- a) $A = \{x : x \in \mathbb{Z} \wedge -2 \leq x \leq 8\}$; $B = \{x : x \in \mathbb{Z} \wedge -5 \leq x \leq 3\}$
 b) $A = \{x : x \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq x < 8\}$; $B = \{x : x \in \mathbb{N} \wedge 8 < x \leq 12\}$

11. Hallar la intersección de los conjuntos A y B , en los siguientes casos:

- a) $A = \{x : x \in \mathbb{R} \wedge 0 \leq x \leq 6\}$, $B = \{y : y \in \mathbb{N} \wedge 0 < y \leq 10\}$
 b) $A = \{x : -1 < x \leq 1/4 \wedge x \in \mathbb{R}\}$, $B = \{z : -1 < z < 0 \vee 0 < z < 3, z \in \mathbb{R}\}$

12. Si A y B son conjuntos, probar:

- a) $\emptyset \cup A = A$.
 b) $A \subset A \cup B$.
 c) $A \cap \emptyset = \emptyset$.
 d) $A \cap B \subset A$
 e) $A \cap A = A$

13. Probar (usando el contrarrecíproco):

- a) Sea P el conjunto de los números enteros pares.

$$x^2 \in P \implies x \in P.$$

$$b) A \cup B = \emptyset \implies (A = \emptyset \wedge B = \emptyset).$$

14. Probar (usando el método de reducción al absurdo):

a) Sean $C = \{0\}$, a y b números reales.

$$a.b \in C \implies (a \in C \vee b \in C).$$

$$b) A \cup B = \emptyset \implies (A = \emptyset \wedge B = \emptyset).$$

15. Probar (usando el método directo):

a) Sean $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^8 - x^2 = 0\}$ y $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^4 - x = 0\}$

$$x \in C \implies x^2 \in D.$$

$$b) (A \neq \emptyset \vee B \neq \emptyset) \implies A \cup B \neq \emptyset.$$

16. Siendo A, B y C conjuntos, demostrar que:

a) Si $A \subset B$ y $B \subset C$ y $C \subset A$ entonces $A = B = C$.

b) Si $X \subset \emptyset$ entonces $X = \emptyset$.

$$c) (C \subset A \wedge C \subset B) \implies C \subset A \cap B.$$