**ÁLGEBRA (Ciencias) – año 2020**

**PRÁCTICA N° 4**

**Números Naturales**

——————————Parte 1: Sucesiones-Notación Sigma-Productoria——————————

1. Escribir los 5 primeros términos de las siguientes sucesiones:

   *a*) $a_n = n^4 - 5n \qquad n = 1, 2, \cdots$

   *b*) $b_j = x^j \cdot y^{-(j+1)} \qquad j = 1, 2, \cdots \qquad x,\ y$ fijos.

   *c*) $a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_m = (-2) \cdot a_{m-1} + a_{m-2} \qquad m = 3, 4, \cdots$

2. Para los siguientes casos determinar una fórmula general para $a_n$ e indicar a partir de qué valor de $n$ tiene validez.

   *a*) $1, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{27}, \cdots$

   *b*) $2, -2, 2, -2, 2, -2, 2, -2, \cdots$

   *c*) $-2, 4, -6, 8, -10, \cdots$

   *d*) $\dfrac{2}{4}, \dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{6}, \dfrac{5}{7}, \cdots$

   *e*) $3, 5, 9, 17, 33, 65, \cdots$

3. Dada la siguiente sucesión: $7, 10, 13, 16, 19, \cdots$ ¿Cómo es la diferencia de dos términos consecutivos?

   A estas sucesiones se las llama ARITMETICAS, porque la diferencia entre dos términos consecutivos es constante. En general si $\{\ a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ , $n \geq 1$, es aritmética, dado el primer término $a_1$ resulta que $a_n = a_{n-1} + d, \quad \forall\, n \geq 2$ , donde d es la diferencia.

   *a*) Encuentra una definición explícita para la sucesión aritmética dada.

   *b*) Encuentra una definición explícita para una sucesión aritmética cualquiera.

4. Dada la siguiente sucesión: $3, 6, 12, 24, 48, 96, \cdots$ ¿Cómo es el cociente entre dos términos consecutivos?

   A estas sucesiones se las llama GEOMETRICAS, porque el cociente entre dos términos consecutivos es constante. En general si $\{\ a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $n \geq 1$, es geométrica, dado el primer término $a_1$ resulta que $a_n = a_{n-1} \cdot r, \quad \forall\, n \geq 2$ , donde r es la razón.

   *a*) Encuentra una definición explícita para la sucesión geométrica dada.

   *b*) Encuentra una definición explícita para una sucesión geométrica cualquiera.

5. El séptimo término de una sucesión aritmética es 79 y el decimotercero es 150. Encontrar el primer término y la diferencia.

6. *a*) Indicar cuáles de las siguientes sucesiones son iguales:

   1) $a_s = \frac{2s+1}{3s+1} \qquad$ para $s \geq 0,\ s \in \mathbb{N}$.

2) $e_m = \frac{2(m+1)+1}{3(m+1)+1}$ para $m \geq 0,\ m \in \mathbb{N}$
3) $b_j = \frac{2(j-1)+1}{3(j-1)+1}$ para $j \geq 1,\ j \in \mathbb{N}$
4) $c_w = \frac{2(w+2)+1}{3(w+2)+1}$ para $w \geq -2,\ w \in \mathbb{Z}$
5) $d_h = \frac{2h+1}{3h+1}$ para $h \geq 1,\ h \in \mathbb{N}$

*b*) Indicar una nueva definición para la primer sucesión del inciso *a*) de manera que el subíndice comience en 2

7. Desarrollar las siguientes sumatorias:

*a*) $\displaystyle\sum_{j=4}^{7} \left( \frac{(j)^{j-1}}{(j-1)^{j+1}} \right)^{-1}$

*b*) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} a_k \cdot b_k$

*c*) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} (8+k)$

8. Expresar usando el símbolo de sumatoria.

*a*) $\sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{16}$

*b*) $1 - \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{27} - \dfrac{1}{64} + \dfrac{1}{125}$

*c*) $a^4\, b^0 + a^3\, b^1 + a^2\, b^2 + a^1\, b^3 + a^0\, b^4$

9. Desarrolar los siguientes productos.

*a*) $\displaystyle\prod_{j=1}^{5} (-1)^j\, (j+1)$

*b*) $\displaystyle\prod_{j=2}^{4} a^j\, (b+j)$

*c*) $\displaystyle\prod_{k=1}^{4} -2$

10. Expresar usando el símbolo de productoria.

*a*) $\dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{9} \cdot \dfrac{1}{15} \cdot \dfrac{1}{21}$

*b*) $b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot b_4 \cdots b_h$ $h$ factores.

*c*) $\dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{6}{10} \cdot \dfrac{8}{15} \cdot \dfrac{10}{20} \cdots$ $n$ factores.

11. Expresar cambiando la variación de los subíndices y consecuentemente el término general para que valgan las siguientes igualdades.

*a*) $\displaystyle\sum_{i=1}^{6} 2^i \cdot [3 \cdot (i+2) - 7i] = \sum_{j=2}^{\cdots} \cdots$

*b)* $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=6}^{\cdots} \cdots = \sum_{s=2}^{\cdots} \cdots = \sum_{h=R}^{\cdots} \cdots \quad R$ constante.

12. Expresar utilizando los factoriales convenientes $(m, k, r \in \mathbb{N} \wedge r > 1 \wedge k > 1)$

    (a) $10 \cdot 9 \cdot 8$

    (b) $(r+2)(r+1)r(r-1)$

    (c) $k^2(k^2-1)$

    (d) $2m(2m-2)(2m-4)(2m-6)\cdots 6 \cdot 4 \cdot 2$

13. Hallar $n$, si es que existe, que verifique:

    (a) $\dfrac{n!}{(n-1)!} = 21$

    (b) $\dfrac{n!}{(n-2)!} = 15$

    (c) $\dfrac{n! - (n-1)!}{(n-2)!} = 49$

——————————Parte 2: Principio de Inducción——————————

14. Demostrar aplicando el principio de inducción:

    *a)* $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{2^n} = 1 - \dfrac{1}{2^n} \quad \forall n \geq 1$

    *b)* $1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2 \quad \forall n \geq 1$

    *c)* $\sum_{i=1}^{n} i \cdot 2^{i-1} = 1 + (n-1) \cdot 2^n \quad \forall n \geq 1$

    *d)* $\sum_{i=0}^{n} \dfrac{-1}{4i^2-1} = \dfrac{n+1}{2n+1} \quad \forall n \geq 0$

    *e)* $1 + 2 + 3 + \cdot + n = \dfrac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \geq 1$

    *f)* Suma de los n primeros términos de una sucesión geométrica:

    $$\sum_{i=1}^{n} a \cdot R^{i-1} = a \cdot \frac{(R^n - 1)}{R-1} \qquad \forall n \geq 1 \qquad R \neq 1$$

    *g)* Suma de los n primeros términos de una sucesión aritmética:

    $$\sum_{i=1}^{n} (a + (i-1)d) = \frac{n \cdot [2a + (n-1)d]}{2} \qquad \forall n \geq 1$$

    *h)* $\prod_{i=2}^{n} \left(1 - \dfrac{1}{i}\right) = \dfrac{1}{n}$

    *i)* $\sum_{i=1}^{n} i \cdot i! = (n+1)! - 1 \quad \forall n \geq 1$

15. Calcular utilizando propiedades de la suma y los resultados del ejercicio anterior:

    *a)* $\sum_{i=8}^{48} \dfrac{1}{2^i}$

*b*) $\displaystyle\sum_{j=40}^{78} j \cdot 2^j$

*c*) $\displaystyle\sum_{k=10}^{40} (8+7k)$

*d*) $\displaystyle\sum_{t=0}^{h} 9 \cdot 4^{t+1}$

*e*) La suma de los 70 primeros impares

*f*) La suma de los 90 primeros pares

*g*) Un mendigo le propuso a un avaro :"Durante este mes le daré a usted 1 peso el primer día, 2 pesos el segundo, 3 pesos el tercero y así sucesivamente. A cambio usted me dará $\frac{1}{1000}$ el primer día, $\frac{2}{1000}$ el segundo, $\frac{4}{1000}$ el tercero, $\frac{8}{1000}$ el cuarto, y así sucesivamente". El avaro aceptó entusiasmado y convinieron en hacer el pago a fin de mes. Quién de los dos se quedó con más dinero?

16. *a*) Demostrar por inducción que $\sum_{i=1}^{n} 2 \cdot (\frac{3}{4})^{i-1} = 8.(1-(\frac{3}{4})^n)$ para todo $n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$

    *b*) Hallar el valor de la siguiente suma: $\sum_{i=5}^{100}(2 \cdot (\frac{3}{4})^{i+1} + 2)$

17. Probar por Inducción Completa

    *a*) Sea $a_n$ una sucesión de números naturales tales que $a_1 = 18, a_2 = 170$ y se verifica la siguiente relación : $a_n = 18a_{n-1} - 77a_{n-2} \quad \forall\, n \geq 3$
    Probar que $a_n = 7^n + 11^n \quad \forall\, n \geq 1$

    *b*) Dada la sucesión de Fibonacci, definida recursivamente por $a_1 = 1, a_2 = 1$ y $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ $\forall\, n \geq 3$
    Probar que $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n \quad \forall\, n \geq 1$

    *c*) Sea $a_n$ una sucesión de números naturales tales que $a_1 = 0, a_2 = 3$ y se verifica la siguiente relación : $a_n = 9a_{n-2} \quad \forall\, n \geq 3$
    Probar que $a_n = \frac{3^n + (-3)^n}{6} \quad \forall\, n \geq 1$

———————————Ejercicios OPTATIVOS———————————

18. Probar que si $a_n$ es una sucesión geométrica definida recursivamente por: $a_1$ y $a_n = a_{n-1}.r$, $\forall\, n \geq 2$ entonces el término explícito es $a_n = a_1.r^{n-1} \quad \forall\, n \geq 1$

19. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una suceción definida como sigue: $a_1 = 5$ y $a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 1$ para todo $n > 1$. Probar por inducción: $a_n + 1 = 2^{n-1} \cdot 6$.

20. Probar por inducción completa: $x^n - y^n = (x-y) \cdot \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} \cdot y^k \quad \forall\, n \geq 1$

21. *a*) Escribir usando el símbolo de productoria el siguente producto:
    $(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^{2^2})...(1+x^{2^n})$

*b*) Demostrar por inducción $(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^{2^2})...(1+x^{2^n}) = 1-x^{2^{n+1}}$ para todo natural $n \geq 1$.

22. Demostrar por el método de inducción completa: $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{n+i}{2i-3}\right) = 2^n(1-2n) \quad \forall\, n \geq 1$

23. Probar las siguientes desigualdades utilizando el principio de inducción.

*a*) $(m+1)! \geq 2 \cdot m! \qquad \forall m \geq 1$

*b*) $6^n \geq 1 + 4^n \quad \forall\, n \geq 1$

*c*) $3^n \geq 3n \quad \forall\, n \geq 1$

*d*) $3n^2 \geq 2n + 1 \quad \forall\, n \geq 1$

*e*) $2^n > 2n + 1 \quad \forall\, n \geq 3$

*f*) $2^n < n! \quad \forall\, n \geq 4$