Nichtlineare Optimierung - 1. Hausaufgabe

Claudia Wohlgemuth	*363089*
Thorsten Lucke	*366515*
Felix Thoma	

Tutor: Mathieu Rosière, Di 8-10 Uhr

14. April 2017

1.1	1.2	1.3	1.4	Σ

Anmerkungen:

Aufgabe 1.1

(i) Es sei $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung. Wir werden zeigen, dass A genau dann positiv definit ist, wenn A stark positiv ist.

Beweis. Sei A zunächst stark positiv. Dann existiert ein $\alpha > 0$, sodass die Abschätzung

$$\langle Ax, x\rangle \geq \alpha \|x\|^2 \tag{1}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ erfüllt ist. Der positiven Definitheit von Normen wegen, folgt für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ unmittelbar

$$\langle Ax, x\rangle \geq \alpha \|x\|^2 > 0.$$

Die Abbildung A ist also positiv definit.

Sei A nun positiv definit und $x \in \mathbb{R}^n$ beliebig gewählt. Ist $x = 0$, so gilt (1) für alle $\alpha > 0$. Sei daher x von Null verschieden. Dann gilt (1) genau dann, wenn

$$\frac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|^2} \geq \alpha$$

beziehungsweise

$$\langle Ay, y\rangle \geq \alpha$$

für alle $y \in \mathbb{R}^n$ mit $\|y\| = 1$ erfüllt ist. Da lineare Abbildungen – auf endlichen Vekorräumen operierend – beschränkt und stetig sind, ist auch die Abbildung

$$f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R},\ y \mapsto \langle Ay, y\rangle$$

stetig. Da die Einheitssphäre $\mathbb{S}^1$ kompakt ist, folgt aus dem Satz von Weierstraß die Existenz eines Minimums $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $f(y) \geq \alpha$ für alle $y \in \mathbb{S}^1$. Da A positiv definit ist, muss zudem $\alpha > 0$ gelten. Es folgt daher insgesamt

$$\langle Ax, x\rangle \geq \alpha \|x\|^2$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und damit die starke Positivität von A. □

(ii) Wir zeigen nun, dass (i) im Allgemeinen falsch ist. Dazu betrachten wir die Abbildung

$$A\colon \ell_2 \to \ell_2,\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \left(\frac{1}{n} x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Da für alle $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung $(x_n/n)^2 \leq (x_n)^2$ gilt, folgt wegen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} x_n\right)^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} (x_n)^2$$

die Wohldefiniertheit und Beschränktheit der Abbildung A aus dem Majorantenkriterium für Reihen.

Desweiteren folgt aus

$$0 \leq \langle A(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x_n^2$$

die positive Definitheit.

Seien nun $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2$ zwei Folgen und $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt. Dann ist A wegen

$$\begin{aligned}
A(\lambda(x_n)_{n\in\mathbb{N}} + (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) &= A((\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}} + (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) \\
&= A((\lambda x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}) \\
&= \left(\frac{1}{n}(\lambda x_n + y_n)\right)_{n\in\mathbb{N}} \\
&= \left(\lambda \frac{x_n}{n} + \frac{y_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \\
&= \lambda \left(\frac{x_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} + \left(\frac{y_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \\
&= \lambda A(x_n)_{n\in\mathbb{N}} + A(y_n)_{n\in\mathbb{N}}
\end{aligned}$$

linear.

Sei nun $\alpha > 0$ beliebig gewählt. Bin gerade zu blöd die Folge richig auszurechnen :< .

Aufgabe 1.2

Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion.

(i) Sei $\operatorname{epi}(f)$ konvex. Angenommen, f ist keine konvexe Funktion. Dann gibt es Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $x < y$, sowie ein $t \in [0, 1]$ mit der Eigenschaft

$$f(x + t(y - x)) > f(x) + t(f(y) - f(x)).$$

Dann gilt aber $(x + t(y - x), f(x) + t(f(y) - f(x))) \notin \operatorname{epi}(f)$ im Widerspruch zur Konvexität des Epigraphen.

Sei nun f eine konvexe Funktion. Betrachte für $(x, \alpha), (y, \beta) \in \operatorname{epi}(f)$ mit $x < y$ die Verbindungsstrecke $\gamma\colon [0, 1] \to \operatorname{epi}(f)$, $t \mapsto (x, \alpha) + t((y, \beta) - (x, \alpha))$