

SIMPLEX

RESUMINDO: ALGORITMO SIMPLEX

- Método / Algoritmo simplex:
 - O Simplex é um algoritmo (sequência finita de instruções que termina em um número finito de operações) que faz uso de um ferramental baseado em álgebra linear para determinar, por um método iterativo, a solução ótima de um PPL.
- Princípio do algoritmo:
 - Já vimos que a solução ótima de um PPL é um ponto extremo (solução básica viável).
 - Em grandes problemas o número de pontos extremos pode ser muito grande.



ALGORITMO

- 1. Introduzir as variáveis de folga, uma para cada desigualdade;
- 2. Montar um quadro para os cálculos, colocando os coeficientes de todas as variáveis com os respectivos sinais e, na última linha, incluir os coeficientes da função objetivo transformada;
- 3. Estabelecer uma solução básica inicial, usualmente atribuindo valor zero às variáveis originais e achando valores positivos para as variáveis de folga;



ALGORITMO

- 4. Como próxima variável a entrar na base, escolher a variável não básica que oferece, na última linha, a maior contribuição para o aumento da função objetivo (ou seja, tem o maior valor negativo).
- Se todas as variáveis que estão fora da base tiverem coeficientes nulos ou positivos nesta linha, a solução atual é ótima.
- Se alguma dessas variáveis tiver coeficiente nulo, isto significa que ela pode ser introduzida na base sem aumentar o valor da função objetivo.
 - Isso quer dizer que temos uma solução ótima, com o mesmo valor da função objetivo.



ALGORITMO

- 5. Para escolher a variável que deve deixar a base, deve-se realizar o seguinte procedimento:
 - Dividir os elementos da última coluna pelos correspondentes elementos positivos da coluna da variável que vai entrar na base.
 - Caso não haja elemento nenhum positivo nesta coluna, o processo deve parar, já que a solução seria ilimitada.
 - O menor quociente indica a equação cuja respectiva variável básica deverá ser anulada, tornando-se variável não básica.



ALGORITMO

- 6. Usando operações válidas com as linhas da matriz, transformar o quadro de cálculos de forma a encontrar a nova solução básica.
 - A coluna da nova variável básica deverá se tornar um vetor identidade, onde o elemento 1 aparece na linha correspondente à variável que está sendo anulada.
- 7. Retornar ao passo 4 para iniciar outra iteração.

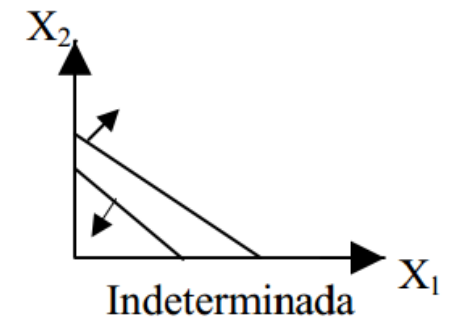
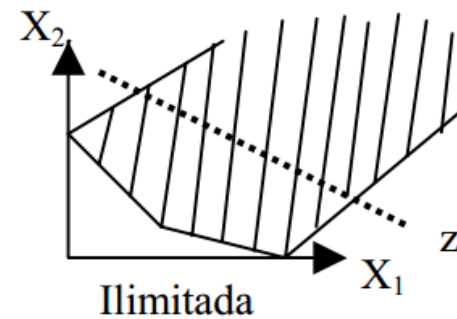
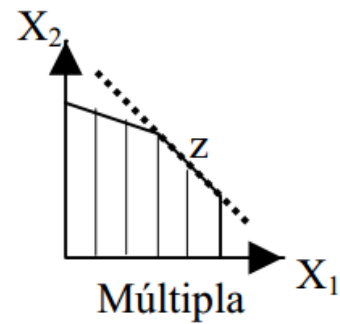
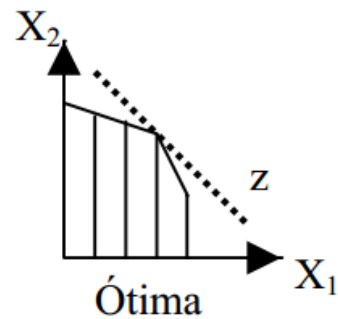


QUADRO DO SIMPLEX NOS CASOS ESPECIAIS DA PROGRAMAÇÃO LINEAR

- Algoritmo simplex que inicia a partir de uma solução básica inicial viável, passando, em cada iteração de um vértice para um outro com valor associado da função objetiva não pior que o anterior.
- Um problema de programação linear pode apresentar os seguintes tipos de soluções
 - uma única solução ótima;
 - soluções múltiplas;
 - solução ilimitada e indeterminada.



QUADRO DO SIMPLEX NOS CASOS ESPECIAIS DA PROGRAMAÇÃO LINEAR



QUADRO DO SIMPLEX NOS CASOS ESPECIAIS DA PROGRAMAÇÃO LINEAR

- Solução ótima
 - O critério de parada foi atendido e se efetuar novas interações o resultado será o mesmo.
- Múltiplas Solução
 - O critério de parada foi atendido, porém, se efetuar novas interações outras soluções viáveis serão geradas
 - A identificação da ocorrência de Soluções Ótimas múltiplas é feita, no Quadro Ótimo, quando há alguma variável não-básica com 0
- Ilimitada
 - Critério de parada nunca será atendido
- Indeterminada
 - É possível retirar as variáveis artificiais (folga) do modelo, logo o modelo não tem solução



ATÉ AGORA

- Até agora os modelos são do tipo
 - Max Z
 - Restrições do tipo \leq
 - Problemas de minimização??



MÉTODO SIMPLEX PARA PROBLEMAS DE MINIMIZAÇÃO

○ ALTERNATIVAS:

- 1. RESOLVER COMO UM PROBLEMA DE MAXIMIZAÇÃO DE $-Z$

- $\text{MIN } Z = 2x_1 - 3x_2$

$$\text{MAX } -Z = -2x_1 + 3x_2$$

- S.A. $x_1 + x_2 \leq 4$

$$x_1 - x_2 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

	X1	X2	X3	X4	
X3	1	1	1	0	4 →
X4	1	-1	0	1	6
Z	2	-3 ↓	0	0	0



MÉTODO SIMPLEX PARA PROBLEMAS DE MINIMIZAÇÃO

	X1	X2	X3	X4	
X3	1	1	1	0	4 →
X4	1	-1	0	1	6
Z	2	-3 ↓	0	0	0

	X1	X2	X3	X4	
X3	1	1	1	0	4
X4	2	0	1	1	10
Z	5	0	3	0	12

Solução – $Z=12$
 $Z = -12$



MÉTODO SIMPLEX PARA PROBLEMAS DE MINIMIZAÇÃO

○ ALTERNATIVAS:

• 2. MODIFICAR O MÉTODO SIMPLEX

- Todas as variáveis não básicas têm coeficientes ≤ 0 na linha 0?
- linha 0?
 - se sim, então a solução é ótima.
 - se não: escolher a variável que tem o coeficiente mais positivo para entrar na base.

• $\text{MIN } Z = 2 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2$

• S.A. $x_1 + x_2 \leq 4$

$x_1 - x_2 \leq 6$

$x_1, x_2 \geq 0$

	X1	X2	X3	X4	
X3	1	1	1	0	4 →
X4	1	-1	0	1	6
Z	-2	3 ↓	0	0	0

MÉTODO SIMPLEX PARA PROBLEMAS DE MINIMIZAÇÃO

	X1	X2	X3	X4	
X3	1	1	1	0	4 →
X4	1	-1	0	1	6
Z	-2	3 ↓	0	0	0

	X1	X2	X3	X4	
X2	1	1	1	0	4
X4	2	0	1	1	10
Z	-5	0	-3	0	-12

Solução $Z = -12$



EXEMPLO 1

$$\text{Min } Z = -3X_1 - 5X_2$$

$$\text{s. a: } \begin{cases} X_1 \leq 4 \\ X_2 \leq 6 \\ 3X_1 + 2X_2 \leq 18 \\ X_i \geq 0, \ i = 1, 2 \end{cases}$$



EXEMPLO 1

Modelo original

$$\text{Min } Z = -3X_1 - 5X_2$$

$$\text{s. a: } \begin{cases} X_1 \leq 4 \\ X_2 \leq 6 \\ 3X_1 + 2X_2 \leq 18 \\ X_i \geq 0, i=1, 2 \end{cases}$$

\Leftrightarrow

Modelo na forma padrão

\Leftrightarrow

$$\text{Min } Z = -3X_1 - 5X_2$$

\Rightarrow

$$\text{s. a: } \begin{cases} X_1 + X_3 = 4 \\ X_2 + X_4 = 6 \\ 3X_1 + 2X_2 + X_5 = 18 \\ X_i \geq 0, i=1, 5 \end{cases}$$



EXEMPLO 1

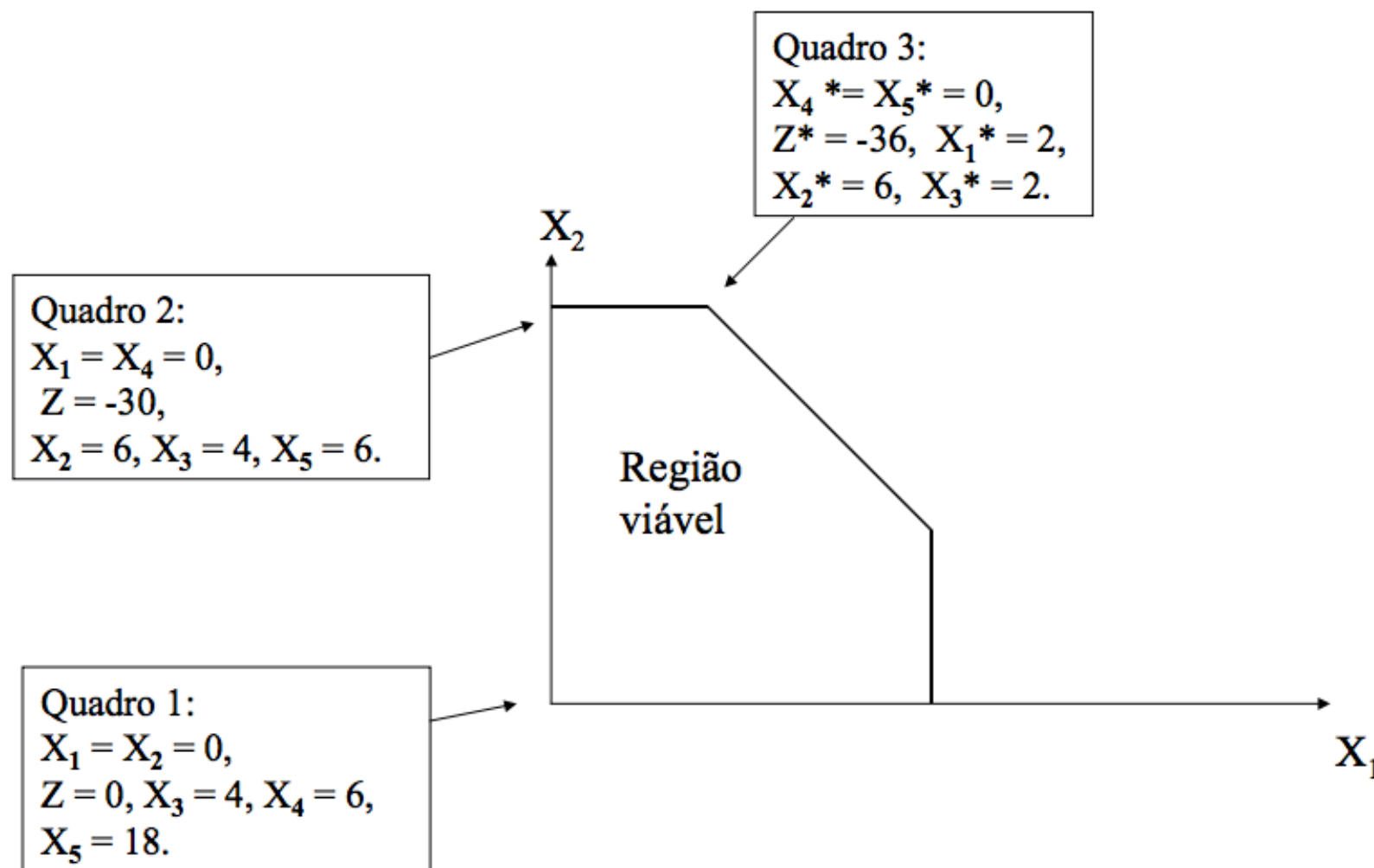
VB	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	b
X_3	1	0	1	0	0	4
X_4	0	1	0	1	0	6
X_5	3	2	0	0	1	18
-Z	-3	-5	0	0	0	0
X_3	1	0	1	0	0	4
X_2	0	1	0	1	0	6
X_5	3	0	0	-2	1	6
-Z	-3	0	0	5	0	30
X_3^*	0	0	1	2/3	-1/3	2
X_2^*	0	1	0	1	0	6
X_1^*	1	0	0	-2/3	1/3	2
-Z*	0	0	0	3	1	36

Quadro 1: Entra X_2 Sai X_4

Quadro 2: Entra X_1 Sai X_5

Quadro 3 (ótimo)

EXEMPLO 1



EXEMPLO 2

$$\text{Min } Z = -X_1 - 2X_2$$

$$\text{S. a: } \begin{cases} X_1 \leq 3 \\ X_2 \leq 4 \\ X_1 + 2X_2 \leq 9 \\ X_i \geq 0, i = 1, 2 \end{cases}$$



EXEMPLO 2

Modelo original	\Leftrightarrow	Modelo na forma padrão
$\text{Min } Z = -X_1 - 2X_2$	\Leftrightarrow	$\text{Min } Z = -X_1 - 2X_2$
S. a: $\begin{cases} X_1 \leq 3 \\ X_2 \leq 4 \\ X_1 + 2X_2 \leq 9 \\ X_i \geq 0, i = 1, 2 \end{cases}$	\Leftrightarrow	S. a: $\begin{cases} X_1 + X_3 = 3 \\ X_2 + X_4 = 4 \\ X_1 + 2X_2 + X_5 = 9 \\ X_i \geq 0, i = 1, 5 \end{cases}$



EXEMPLO 2

VB	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	b
X ₃	1	0	1	0	0	3
X ₄	0	1	0	1	0	4
X ₅	1	2	0	0	1	9
-Z	-1	-2	0	0	0	0

Quadro 1: Entra X₂ e Sai X₄

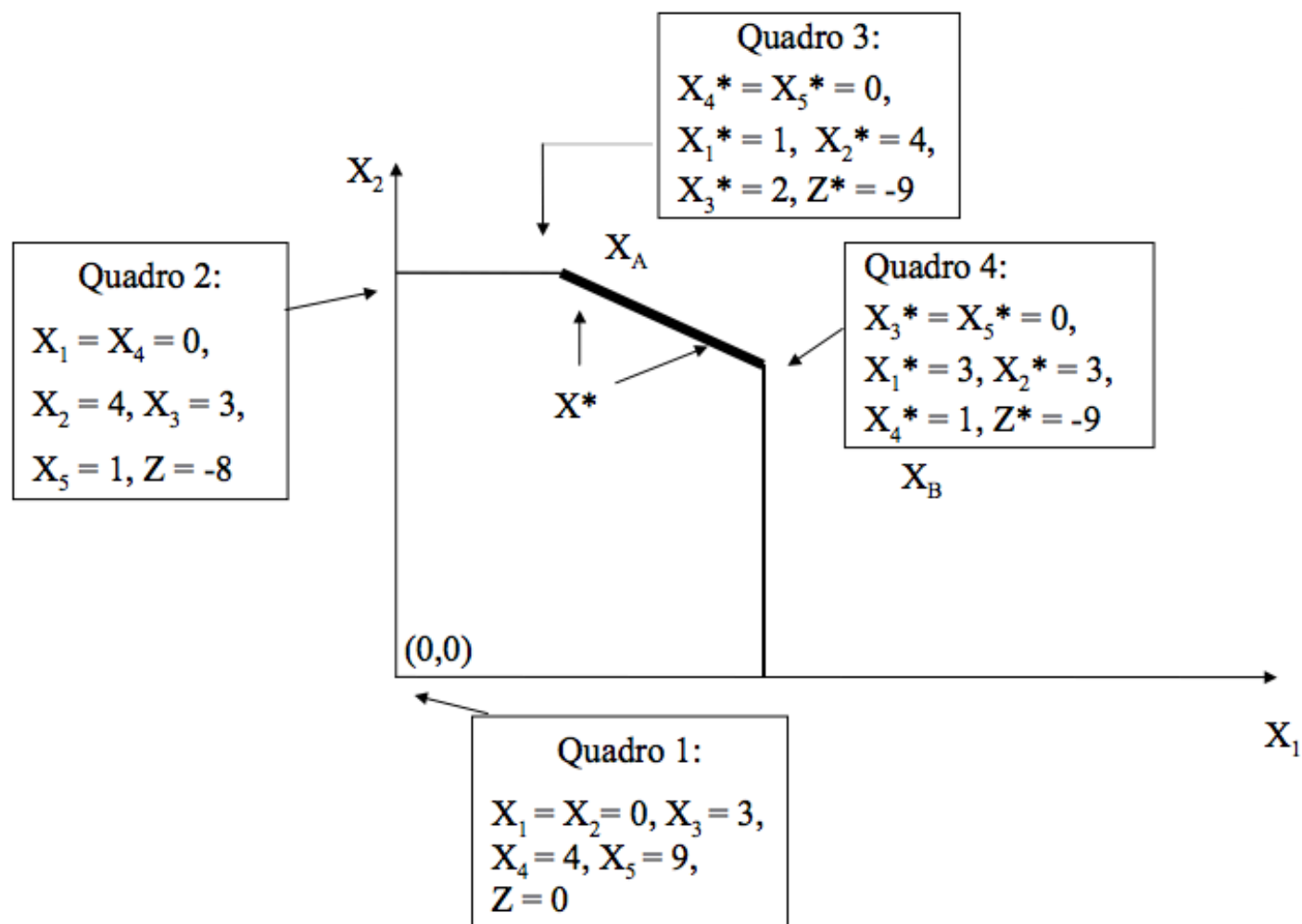
X ₃	1	0	1	0	0	3
X ₂	0	1	0	1	0	4
X ₅	1	0	0	-2	1	1
-Z	-1	0	0	2	0	8

Quadro 2: Entra X₁ e Sai X₅

X ₃ *	0	0	1	2	-1	2
X ₂ *	0	1	0	1	0	4
X ₁ *	1	2	0	-2	1	1
-Z*	0	0	0	0	0	9
X ₄ *	0	0	1/2	1	-1/2	1
X ₂ *	0	1	-1/2	0	1/2	3
X ₁ *	1	0	1	0	0	3
Z*	0	0	0	0	1	9



EXEMPLO 2



MÉTODO SIMPLEX – RESUMO

- Nos modelos resolvidos até agora pelos simplex, as restrições são do tipo \leq com os termos da direita positivos.
 - O acréscimo das variáveis de folga fornece neste caso uma solução básica inicial
- E para
- Restrição do tipo \geq
- Restrição do tipo $=$
- ??



MÉTODO SIMPLEX

- Restrição do tipo \geq
 - Introduzir uma variável de excesso (com sinal negativo) e uma variável artificial (com sinal positivo) no lado esquerdo da igualdade
- Restrição do tipo $=$
 - Cria variável artificial

sinal	variável de folga	variável artificial
\leq	+	
\geq	-	+
$=$		+



ATIVIDADE

- Implementação simplex
- Grupo: 3 pessoas
- Utilizar GitHub (sabatine2) ou BitBucket
- Linguagem de programação: Livre
- Plataforma: Web
 - Deve ficar disponível online.
- Interface Gráfica: Simples
- Padrão de projeto: Livre



ATIVIDADE

○ Regras

- Permitir resolver um modelo de programação linear com objetivo de maximizar ou minimizar.
- Sem número fixo de variáveis de decisão.
- Sem número fixo de restrição.
- Apresentar solução final como um relatório de resultado.
- Deve possibilitar a demonstração da solução passo-a-passo.
- Tratar modelos com solução impossíveis ou ilimitadas.



ATIVIDADE

- Entrega

- Programação

- Dia 28/09 entrega das atividades iniciais.
- Dia 05/10 entrega dos canvas/mvp do projeto com cronograma.

- Documentação

- Na wiki do controle de versão.

