Simplex

Ricardo Sabatine

PL

- A programação linear busca obter valores para n váriaveis de decisão, x1,x2,…,xn, de modo a otimizar (maximizar ou minimizar) uma expressão linear $Z = c1*x1 + c2*x2+…+cn*xn$, satisfazendo a um conjunto de restrições lineares na forma de igualdades ou desigualdades representadas matricialmente por Ax {<=, =, =>} b.

  - A é uma matriz de coeficientes tecnológicos
  - x é um vetor coluna com dimensão n reunindo as variáveis de decisão
  - b é o vetor dos recursos ou insumos disponíveis para a produção.

SIMPLEX

- Procedimento geral para resolução de problemas de PL

  - Método Simplex
    - Desenvolvido em 1947

  - Utilizado para achar, algebricamente, a solução ótima de um problema de PL

SIMPLEX

- Sabe-se que a solução ótima do modelo é uma solução básica do sistema, ou seja, um ponto extremo do polígono gerado pelas restrições

- Para ser iniciado é necessário conhecer uma solução compatível básica (solução inicial) do sistema, isto é um dos pontos do polígono gerado

SIMPLEX

- O método simplex verifica se a presente solução é ótima.
  - Se for o processo esta encerrado. Se não for ótima, é porque um dos pontos adjacentes fornece um valor maior que o inicial.

- Neste caso, o método simplex faz então a mudança do ponto por um outro que aumente o valor da função objetivo

SIMPLEX

- Agora tudo que foi feito para o primeiro ponto é feito para o novo ponto.

- O processo finaliza quando se obtém um ponto extremo onde todos os outros pontos extremos, forneçam valores menores para a função objetivo

Algoritmos Simplex

- O algoritmo pode ser definido como contendo, grosso modo, três partes:
  - Inicialização (o algoritmo prepara os dados de entrada)
  - Iteração (o algoritmo repete diversas vezes o procedimento e faz com que a otimização do modelo seja alcançada)
  - Regra de parada (o algoritmo avalia se a solução ótima foi obtida ou se é impossível obtê-la)

Passos do simplex

- 1 Achar uma solução compatível básica inicial
- 2 Verificar se a solução é ótima. Se for pare. Caso contrário, siga para o passo 3;
- 3 Determinar a variável não básica que deve entrar na base
- 4 Determinar a variável básica que deve sair da base;
- 5 Achar a nova solução compatível básica e voltar ao passo 2 .

Transformação

- Transformação de lados direitos negativos
  - Caso o lado direito da restrição seja negativo, ela pode ser multiplicada por -1, de modo que o parâmetro se torne positivo.
    - Ex: $4x1 + 4x2 <= - 4 \quad = \quad -4x1 -4x2 >= 4$
- Transformação de variáveis irrestritas
  - Embora na maioria dos casos reais as variáveis sejam "naturamente" não-negativas, algumas vezes a formulação exige que algumas variáveis sejam negativas.
    - Pode-se substituí-la por duas outras variáveis não negativas.

SIMPLEX

- Vejamos agora como o algoritmo funciona, descrevendo detalhadamente o processo para o exemplo de Mix de Produção.

- A solução manual que propomos é feita utilizando um quadro, ou tableau*, do Simplex.
  - Este quadro tem como única função auxiliar a realização dos cálculos e das iterações de forma mais amigável.

Exemplo 1

- Max $Z = 3.x1 + 5.x2$

- Sujeito a :
$$\begin{aligned} x1 \qquad\qquad &\le 4 \\ x2 &\le 6 \\ 3x1 + 2x2 &\le 18 \\ x1, x2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Restrições de não-negatividade

- As Restrições $x1 \geq 0$ e $x2 \geq 0$ (Restrições de não-negatividade) serão excluídas do problema pois são consideradas padrão pelo método.

Max Z = 3.x1 + 5.x2

Sujeito a : x1 <=4

x2 <=6

3x1 + 2x2<=18

VARIÁVEIS DE FOLGA E EXCESSO

- Além disso, vamos criar novas variáveis f1 e f2, denominadas **Variáveis de Folga ou Excesso**, para transformar as desigualdades das restrições em igualdades.

- Estas variáveis são somadas ou subtraídas conforme as desigualdades originais sejam elas do tipo "maior ou igual" ou do tipo "menor ou igual"

Desigualdades do tipo "≤" → **soma** → $+ f_n$

Desigualdades do tipo "≥" → **subtração** → $- f_n$

Variáveis de Folga e excesso

- Variável de folga
  - Colocada quando a restrição tem o sinal <=;
    - É positiva;
  - Representa o desperdício ou parte que não vai ser usada de uma quantidade disponível ou um limite superior;

Variáveis de Folga e excesso

- Variável de excesso
  - Colocada quando a restrição tem o sinal $\geq$;
    - É negativa;
  - Representa o excesso que pode ser produzido além do mínimo necessário;

Variáveis de Folga e excesso

$$\text{Max } Z = 3.x1 + 5.x2$$

$$\begin{aligned} \text{Sujeito a : } x1 \quad & \leq 4 \\ x2 & \leq 6 \\ 3x1 + 2x2 & \leq 18 \end{aligned}$$

Adicionando as Variáveis de Folga f1, f2, f3

$$\text{Max } Z = 3.x1 + 5.x2$$

$$\begin{aligned} \text{Sujeito a : } x1 \quad + f1 \quad & \leq 4 \\ x2 \quad + \quad f2 \quad & \leq 6 \\ 3x1 + 2x2 + \quad f3 & \leq 18 \end{aligned}$$

Exemplo 1

- 1ª interação

  - Introduzir as variáveis de folga

Max $Z = 3.x1 + 5.x2$

Sujeito a : $x1 + f1 <= 4$

$x2 + f2 <= 6$

$3x1 + 2x2 + f3 <= 18$

Criando o quadro do simplex

- Escrever a função objetivo $Z = 3.x1 + 5.x2$ como $Z = -3x1 - 5x2 = 0$;
  - Na ultima linha colocar os coeficientes da função objetivo transformada;

- Colocar as restrições em cada linha;

- Nas primeiras colunas (Base) escrever o nome dos elementos que estão na base;

- Na ultima coluna (b), escrever o valor dos elementos da base, inicialmente adicionando os valores da restrições;

Exemplo 1

- 1ª interação

  - Montagem do quadro
    - Max Z = 3.x1 + 5.x2 => Z = -3x1 – 5x2

  - Sujeito a : x1 + f1 <=4

    x2 + f2 <=6

    3x1 + 2x2 + f3 <=18

Linha	Base	x1	x2	f1	f2	f3	b
1ª	f1	1	0	1	0	0	4
2ª	f2	0	1	0	1	0	6
3ª	f3	3	2	0	0	1	18
4ª	Z	-3	-5	0	0	0	0

Exemplo 1

- 1ª interação
  - Variáveis não básicas: x1 = x2 = 0
  - Variáveis básicas:
    - 1ª Linha: f1 = 4
    - 2ª Linha: f2 = 6
    - 3ª Linha: f3 = 18

Base	x1	x2	f1	f2	f3	b
f1	1	0	1	0	0	4
f2	0	1	0	1	0	6
f3	3	2	0	0	1	18
Z	-3	-5	0	0	0	0

    - Função objetivo: z = 0

Exemplo 1

- 1ª interação
  - Solução Inicial - SBI
    - x1 = x2 = 0
    - Z = 0

Exemplo 1

- 1ª interação
  - Condição de Parada

Base	x1	x2	f1	f2	f3	b
f1	1	0	1	0	0	4
f2	0	1	0	1	0	6
f3	3	2	0	0	1	18
Z	-3	-5	0	0	0	0

- Quem entra??
  - qual é o menor coeficiente que pode ser encontrado na linha da função objetivo?

- Quem Sai???
  - Dividir os elementos da última coluna pelos correspondentes elementos positivos da coluna da variável que vai entrar na base.
    - O menor quociente indica a variável que sai
    - Se não tiver elemento positivo a solução deve parar.

Exemplo 1

- 1ª interação

- Quem entra na base
  - Maior coeficiente na última linha

  - Variável X2

Base	x1	x2	f1	f2	f3	b
f1	1	0	1	0	0	4
f2	0	1	0	1	0	6
f3	3	2	0	0	1	18
Z	-3	-5	0	0	0	0

Exemplo 1

- 1ª interação

- Quem sai da base

Linha	Base	x1	x2	f1	f2	f3	b
1ª	f1	1	0	1	0	0	4
2ª	f2	0	1	0	1	0	6
3ª	f3	3	2	0	0	1	18
4ª	Z	-3	-5	0	0	0	0

- Divisões
  - 1ª Linha: não se efetua a divisão
  - 2ª Linha: 6 / 1 = 6
  - 3ª Linha: 18 / 2 = 9

Exemplo 1

- 1ª interação

- Quem sai da base

Linha	Base	x1	x2	f1	f2	f3	b
1ª	f1	1	0	1	0	0	4
2ª	f2	0	1	0	1	0	6
3ª	f3	3	2	0	0	1	18
4ª	Z	-3	-5	0	0	0	0

- Divisões
  - 1ª Linha: não se efetua a divisão
  - 2ª Linha: 6 / 1 = 6
  - 3ª Linha: 18 / 2 = 9

Exemplo 1

Linha	Base	x1	x2	f1	f2	f3	b
1ª	f1	1	0	1	0	0	4
2ª	x2	0	1	0	1	0	6
3ª	f3	3	2	0	0	1	18
4ª	Z	-3	-5	0	0	0	0

Exemplo 1

- 1ª interação
  - Transformação de Matriz

  - Operações para tornar a coluna x2 em um vetor identidade com o elemento 1 na segunda coluna.

Linha	Base	x1	x2	f1	f2	f3	b
1ª	f1	1	0	1	0	0	4
2ª	x2	0	1	0	1	0	6
3ª	f3	3	2	0	0	1	18
4ª	Z	-3	-5	0	0	0	0

Exemplo 1

- 1ª Operação
  - Pivô: 1

Linha	Base	x1	x2	f1	f2	f3	b
1ª	f1	1	0	1	0	0	4
2ª	x2	0	1	0	1	0	6
3ª	f3	3	2	0	0	1	18
4ª	Z	-3	-5	0	0	0	0

Exemplo 1

- 1ª interação
  - 1ª Operação

  - Cada elemento da 2ªlinha / Pivô
    - 0/1 – 1/1 – 0/1 – 1/1 – 0/1 – 6/1

Linha	Base	x1	x2	f1	f2	f3	b
1ª	f1	1	0	1	0	0	4
2ª	x2	0/1	1/1	0/1	1/1	0/1	6/1
3ª	f3	3	2	0	0	1	18
4ª	Z	-3	-5	0	0	0	0

EXEMPLO 1

- 1ª interação
  - Deixar nulo os outros elementos da coluna

Linha	Base	x1	x2	f1	f2	f3	b
1ª	f1	1	0	1	0	0	4
2ª	x2	0	1	0	1	0	6
3ª	f3	3	2	0	0	1	18
4ª	Z	-3	-5	0	0	0	0

Exemplo 1

- 1ª interação

Linha	Base	x1	x2	f1	f2	f3	b
1ª	f1	1	0	1	0	0	4
2ª	x2	0	1	0	1	0	6
3ª	f3	3	2	0	0	1	18
4ª	Z	-3	-5	0	0	0	0

  - 2ª Operação
  - 2ª Linha * (-2) + 3ª Linha
  - 0 * (-2) + 3 = 3
  - 1 * (-2) + 2 = 0
  - 0 * (-2) + 0 = 0
  - 1 * (-2) + 0 = 2
  - 0 * (-2) + 1 = 1
  - 6 * (-2) + 18 = 6

Linha	Base	x1	x2	f1	f2	f3	b
1ª	f1	1	0	1	0	0	4
2ª	x2	0	1	0	1	0	6
3ª	f3	3	0	0	-2	1	6
4ª	Z	-3	-5	0	0	0	0

EXEMPLO 1

- 1^a interação
- 3^a Operação

Linha	Base	x1	x2	f1	f2	f3	b
1^a	f1	1	0	1	0	0	4
2^a	x2	0	1	0	1	0	6
3^a	f3	3	0	0	-2	1	6
4^a	Z	-3	-5	0	0	0	0

- 2^a Linha * (5) + 4^a Linha
- 0 * (5) + -3 = -3
- 1 * (5) + -5 = 0
- 0 * (5) + 0 = 0
- 1 * (5) + 0 = 5
- 0 * (5) + 0 = 0
- 6 * (5) + 0 = 30

Linha	Base	x1	x2	f1	f2	f3	b
1^a	f1	1	0	1	0	0	4
2^a	x2	0	1	0	1	0	6
3^a	f3	3	0	0	-2	1	6
4^a	Z	-3	0	0	5	0	30

Exemplo 1

- Nova Solução
  - Variáveis não básica $x1 = f2 = 0$
  - Variáveis Básicas:
    - $f1 = 4$
    - $x2 = 6$
    - $f3 = 6$
    - Valor da função objetivo $z = 30$

Exemplo 1

- Condição de Parada

Linha	Base	x1	x2	f1	f2	f3	b
1ª	f1	1	0	1	0	0	4
2ª	x2	0	1	0	1	0	6
3ª	f3	3	0	0	-2	1	6
4ª	Z	-3	0	0	5	0	30

Exemplo 1

- 2ª Interação

- Quem Entra
  - x1

Linha	Base	x1	x2	f1	f2	f3	b
1ª	f1	1	0	1	0	0	4
2ª	x2	0	1	0	1	0	6
3ª	f3	3	0	0	-2	1	6
4ª	Z	-3	0	0	5	0	30

Exemplo 1

- 2ª Interação

- Quem sai

Linha	Base	x1	x2	f1	f2	f3	b
1ª	f1	1	0	1	0	0	4
2ª	x2	0	1	0	1	0	6
3ª	f3	3	0	0	0	1	6
4ª	Z	-3	0	0	5	0	30

- Divisões
  - 1ª Linha: 4 / 1 = 4
  - 2ª Linha: não se efetua a divisão
  - 3ª Linha: 6 / 3 = 2

Exemplo 1

- 2ª Interação

Linha	Base	x1	x2	f1	f2	f3	b
1ª	f1	1	0	1	0	0	4
2ª	x2	0	1	0	1	0	6
3ª	x1	3	0	0	-2	1	6
4ª	Z	-3	0	0	5	0	30

Exemplo 1

- 2ª Interação

Linha	Base	x1	x2	f1	f2	f3	b
1ª	f1	1	0	1	0	0	4
2ª	x2	0	1	0	1	0	6
3ª	x1	3	0	0	-2	1	6
4ª	Z	-3	0	0	5	0	30

Exemplo 1

- 2ª Interação

  - Pivô = 3

Linha	Base	x1	x2	f1	f2	f3	b
1ª	f1	1	0	1	0	0	4
2ª	x2	0	1	0	1	0	6
3ª	x1	3	0	0	-2	1	6
4ª	Z	-3	0	0	5	0	30

Exemplo 1

- 2ª Interação

  - Cada elemento da 3ªlinha / Pivô

Linha	Base	x1	x2	f1	f2	f3	b
1ª	f1	1	0	1	0	0	4
2ª	x2	0	1	0	1	0	6
3ª	x1	1	0	0	-2/3	1/3	2
4ª	Z	-3	0	0	5	0	30

Exemplo 1

- 2ª Interação
  - 3ª Linha * (-1) + 1ª Linha

Linha	Base	x1	x2	f1	f2	f3	b
1ª	f1	0	0	1	2/3	-1/3	2
2ª	x2	0	1	0	1	0	6
3ª	x1	1	0	0	-2/3	1/3	2
4ª	Z	-3	0	0	5	0	30

Exemplo 1

- 2ª Interação
  - 3ª Linha * (3) + 4ª Linha

Linha	Base	x1	x2	f1	f2	f3	b
1ª	f1	0	0	1	2/3	-1/3	2
2ª	x2	0	1	0	1	0	6
3ª	x1	1	0	0	-2/3	1/3	2
4ª	Z	0	0	0	3	1	36

Exemplo 1

- Interpretação

  - Variáveis Básicas

    - F1 = 2
    - X1 = 6
    - X2 = 2
    - Z = 36

    - Variáveis Não Básicas

    - F2 = 0
    - F3 = 0

Exemplo 2

maximizar $Z = 11\,x_1 + 12\,x_2$

sujeito a:

$$x_1 + 4\,x_2 \leq 10000$$

$$5\,x_1 + 2\,x_2 \leq 30000$$

$$x_1,\, x_2 \geq 0$$

Exemplo 2

maximizar $Z = 11\,x_1 + 12\,x_2$

sujeito a:

$$x_1 + 4\,x_2 + f_1 \leq 10000$$

$$5\,x_1 + 2\,x_2 + f_2 \leq 30000$$

$$x_1, x_2, f_1, f_2 \geq 0$$

Exemplo 2 - Solução Inicial

Base	x_1	x_2	f_1	f_2	b
f_1	1	4	1	0	10000
f_2	5	2	0	1	30000
z	-11	-12	0	0	0

Exemplo 2 - Primeira Interação

Variável a entrar na base: x_2 (coluna com maior valor negativo na última linha)

Variável a sair da base: f_1 (o quociente 10000/4 é o menor quociente entre a última coluna e a coluna da variável x_2, que vai entrar na base)

$L_1 \leftarrow L_1 / 4$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2\ L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 + 12\ L_1$

Base	x_1	x_2	f_1	f_2	b
x_2	1/4	1	1/4	0	2500
f_2	4,5	0	-1/2	1	25000
z	-8	0	3	0	30000

Exemplo 2

Variável a entrar na base: x_1 (coluna com maior valor negativo na última linha)

Variável a sair da base: f_2 (o quociente 25000/ 4,5 é o menor quociente entre a última coluna e a coluna da variável x_1, que vai entrar na base)

$L_2 \leftarrow L_2 / 4{,}5$

$L_1 \leftarrow L_1 - L_2 / 4$

$L_3 \leftarrow L_3 + 8\ L_2$

Base	x_1	x_2	f_1	f_2	b
x_2	0	1	0,2778	-0,0556	1111,11
x_1	1	0	-0,1111	0,2222	5555,56
z	0	0	2,1111	1,7778	74444,44

Resumindo: Algoritmo simplex

- Método / Algoritmo simplex:
  - O Simplex é um algoritmo (sequência finita de instruções que termina em um número finito de operações) que faz uso de um ferramental baseado em álgebra linear para determinar, por um método iterativo, a solução ótima de um PPL.
- Princípio do algoritmo:
  - Já vimos que a solução ótima de um PPL é um ponto extremo (solução básica viável).
  - Em grandes problemas o número de pontos extremos pode ser muito grande.

$$
\begin{array}{ll}
\text{Max.} & \text{Z}= 30.x_1 + 50.x_2 \\
\text{Sujeito A} & 2x_1 + x_2 \leq 16 \\
 & x_1 + 2.x_2 \leq 11 \\
 & x_1 + 3.x_2 \leq 15 \\
 & x_1 \geq 0 \\
 & x_2 \geq 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\text{Max.} & Z = 30.x_1 + 50.x_2 \\
\text{Sujeito A} & 2x_1 + x_2 \leq 16 \\
 & x_1 + 2.x_2 \leq 11 \\
 & x_1 + 3.x_2 \leq 15 \\
 & x_1 \geq 0 \\
 & x_2 \geq 0
\end{array}
$$

1º Tableau

Atividades		**Folgas**					
x_1	x_2	y_1	y_2	y_3		b	
2	1	1	0	0		16	$\frac{16}{1}$
1	2	0	1	0		11	$\frac{11}{2}$
1	3	0	0	1		15	$\frac{15}{3}$
-30	-50	0	0	0		0	

mais negativo

menor relação

2º Tableau

Atividades		Folgas				
x_1	x_2	y_1	y_2	y_3		b
$5/3$	0	1	0	$-1/3$		11
$1/3$	0	0	1	$-2/3$		1
$1/3$	1	0	0	$1/3$		5
$-40/3$	0	0	0	$50/3$		250

3º Tableau

Atividades		Folgas				
x_1	x_2	y_1	y_2	y_3		b
0	0	1	-5	3		6
1	0	0	3	-2		3
0	1	0	-1	1		4
0	0	0	40	-10		290

4º Tableau

Atividades		Folgas				
x_1	x_2	y_1	y_2	y_3		b
0	0	1/3	-5/3	1		2
1	0	2/3	-1/3	0		7
0	1	-1/3	2/3	0		2
0	0	10/3	70/3	0		310

Resultados

$Z = 310$

$x_1 = 7$

$x_2 = 2$

$x_3 = 0$

$y_1 = 0$

$y_2 = 0$

$y_3 = 2$